

ISSN 0320-7102

225

Том
39

АВТОМЕТРИЯ

OPTOELECTRONICS, INSTRUMENTATION AND DATA PROCESSING

№ 1
2003

2003, том 39, № 1

УДК 621.391

А. П. Трифонов, К. А. Зимовец

(Воронеж)

**ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОБНАРУЖЕНИЯ
НЕОДНОРОДНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ФОНЕ ШУМА***

Получены точные формулы для характеристик обнаружения неоднородного изображения с неизвестной площадью по методу максимального правдоподобия.

В последние годы активно развиваются методы дистанционного наблюдения, при которых должна учитываться пространственная протяженность реальных объектов. Это объясняется существенно возросшей разрешающей способностью систем дистанционного наблюдения. Вопросы обнаружения пространственно протяженных объектов рассматривались в работах [1–4] и других. При этом, как правило, предполагалось, что изображения пространственно протяженных объектов однородны, так что их интенсивность постоянна [3, 4], хотя может быть неизвестна [3]. В реальных условиях, вследствие свойств пространственно протяженного объекта или в силу неоднородности среды распространения, интенсивность изображения обычно является функцией координат, так что изображение оказывается неоднородным. В связи с чем представляет интерес анализ эффективности обнаружения неоднородного изображения с неизвестной площадью.

Положим, что в области G обработке доступна реализация случайного поля:

$$\xi(x, y) = \gamma_0 s(x, y; \chi_0) + n(x, y), \quad x, y \in G. \quad (1)$$

Здесь

$$s(x, y; \chi_0) = F(x, y)I(x, y; \chi_0) \quad (2)$$

– полезное изображение с интенсивностью $F(x, y)$, которое занимает область $\Omega(\chi_0)$ с площадью χ_0 . Форма области $\Omega(\chi)$ с площадью χ , занимаемой

* Работа выполнена при поддержке CRDF, Министерства образования РФ и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № VZ-010-0, № T02-3.1-71, № 03-01-00145).

изображением, описывается индикатором

$$I(x, y; \chi) = \begin{cases} 1, & x, y \in \Omega; \\ 0, & x, y \notin \Omega. \end{cases}$$

В (1) $n(x, y)$ – гауссовский пространственный белый шум с односторонней спектральной плотностью N_0 ; неизвестная площадь изображения χ_0 принимает значения из априорного интервала $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$; $\gamma_0 = 1$ или $\gamma_0 = 0$ – дискретный параметр, отражающий наличие или отсутствие полезного изображения.

Найдем вероятности ошибок первого и второго рода при обнаружении изображения (2) приемником максимального правдоподобия. В соответствии с методом максимального правдоподобия [5] для обнаружения изображения (2) необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия

$$L(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G \xi(x, y) s(x, y; \chi) dx dy - \frac{1}{N_0} \iint_G s^2(x, y; \chi) dx dy \quad (3)$$

для всех значений $\chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]$. Решение о наличии изображения принимается, когда $\sup L(\chi) > h$, $\chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]$, где h – заданный порог. Следовательно, вероятности ложной тревоги и пропуска изображения можно записать в виде

$$\alpha = P \left[\sup_{\chi_{\min} \leq \chi \leq \chi_{\max}} L(\chi) > h \mid \gamma_0 = 0 \right],$$

$$\beta = P \left[\sup_{\chi_{\min} \leq \chi \leq \chi_{\max}} L(\chi) < h \mid \gamma_0 = 1 \right].$$

Для определения характеристик обнаружения исследуем статистические характеристики случайной функции (3). Подставляя (1) в (3), перепишем функцию $L(\chi)$ как

$$L(\chi) = \gamma_0 S(\chi_0, \chi) - Q(\chi)/2 + N(\chi). \quad (4)$$

Здесь

$$N(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G n(x, y) s(x, y; \chi) dx dy \quad (5)$$

– шумовая функция;

$$S(\chi_0, \chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G s(x, y; \chi_0) s(x, y; \chi) dx dy \quad (6)$$

– сигнальная функция;

$$Q(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G s^2(x, y; \chi) dx dy \quad (7)$$

— отношение сигнал/шум для изображения с площадью χ . Шумовая функция $N(\chi)$ (5) является центрированным гауссовским случайным процессом, обладающим корреляционной функцией

$$\langle N(\chi_1) N(\chi_2) \rangle = \frac{2}{N_0} \iint_G s(x, y; \chi_1) s(x, y; \chi_2) dx dy = S(\chi_1, \chi_2). \quad (8)$$

Обозначим через $\Omega_{\min}(\chi_1, \chi_2)$ одну из двух областей $\Omega(\chi_1)$ и $\Omega(\chi_2)$, которая обладает меньшей площадью. Подставляя далее (2) в (6) и (7), имеем

$$S(\chi_0, \chi) = \frac{2}{N_0} \iint_{\Omega_{\min}(\chi_0, \chi)} F^2(x, y) dx dy, \quad (9)$$

$$Q(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_{\Omega(\chi)} F^2(x, y) dx dy. \quad (10)$$

Согласно (10) отношение сигнал/шум всегда является неубывающей функцией площади χ .

Положим, что функция $F(x, y)$, описывающая распределение интенсивности полезного изображения, может обращаться в нуль только на части области $\Omega(\chi)$, имеющей нулевую меру. Тогда $Q(\chi)$ (10) является монотонно возрастающей функцией площади изображения χ и (9) можно переписать как

$$S(\chi_1, \chi_2) = \min[Q(\chi_1), Q(\chi_2)]. \quad (11)$$

Перейдем в (4) к новой переменной

$$\lambda = Q(\chi), \quad (12)$$

причем $\lambda \in [\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max}]$, где $\Lambda_{\min} = Q(\chi_{\min})$, $\Lambda_{\max} = Q(\chi_{\max})$. Учитывая (9)–(12), можем представить (4) в виде

$$L(\chi) = L[\chi(\lambda)] = \mu(\lambda) = \gamma_0 \min(\lambda, \lambda_0) - \lambda/2 + v(\lambda), \quad (13)$$

где $\lambda_0 = Q(\chi_0)$, $v(\lambda) = N[\chi(\lambda)]$, а $\chi(\lambda)$ определяется из решения уравнения $Q(\chi) = \lambda$. Из (8), (11) и (12) следует, что центрированный гауссовский случайный процесс $v(\lambda)$ обладает корреляционной функцией

$$\langle v(\lambda_1) v(\lambda_2) \rangle = \min(\lambda_1, \lambda_2). \quad (14)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию [6]

$$F(u|\gamma_0) = P\left(\sup_{\Lambda_{\min} \leq \lambda \leq \Lambda_{\max}} \mu(\lambda) < u \mid \gamma_0\right). \quad (15)$$

Тогда характеристики обнаружения (вероятность ложной тревоги и вероятность пропуска изображения) можно записать в виде

$$\alpha = P\left[\sup_{\Lambda_{\min} \leq \lambda \leq \Lambda_{\max}} \mu(\lambda) > h \mid \gamma_0 = 0\right] = 1 - F(h|0), \quad (16)$$

$$\beta = P\left[\sup_{\Lambda_{\min} \leq \lambda \leq \Lambda_{\max}} \mu(\lambda) < h \mid \gamma_0 = 1\right] = F(h|1). \quad (17)$$

Согласно (13), (14) гауссовский случайный процесс $\mu(\lambda)$ является марковским и обладает коэффициентами сноса и диффузии соответственно:

$$K_1 = \begin{cases} \gamma_0 - 1/2, & \lambda < \lambda_0, \\ -1/2, & \lambda > \lambda_0; \end{cases} \quad K_2 = 1. \quad (18)$$

Воспользовавшись марковскими свойствами функции $\mu(\lambda)$ (13), вспомогательную функцию (15) можно записать как

$$F(u|\gamma_0) = \int_{-\infty}^u W(x, \Lambda_{\max}) dx. \quad (19)$$

Здесь $W(x, \Lambda_{\max}) = W(x, \lambda = \Lambda_{\max})$, а $W(x, \lambda)$ – решение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова [7]:

$$\frac{\partial W(x, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial x} [K_1 W(x, \lambda)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2 W(x, \lambda)] = 0 \quad (20)$$

с коэффициентами (18) при начальном условии

$$W(x, \Lambda_{\min}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_{\min}}} \exp\left[-\frac{(x - (\gamma_0 - 1/2)\Lambda_{\min})^2}{2\Lambda_{\min}}\right]$$

и граничных условиях $W(x, \lambda)|_{x=u} = 0$, $W(x, \lambda)|_{x=-\infty} = 0$ при $\lambda \in [\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max}]$.

Применяя метод отражения с переменной знака [7], находим решение уравнения (20). Если $\lambda \leq \lambda_0$, то

$$W(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(\lambda - \Lambda_{\min})\Lambda_{\min}}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^\infty \left\{ \exp \left[-\frac{(x_1 - x - (\gamma_0 - 1/2)(\lambda_0 - \Lambda_{\min}))^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_{\min})} \right] - \exp[2(\gamma_0 - 1/2)x_1] \times \right. \\
& \quad \times \exp \left[-\frac{(x_1 + x + (\gamma_0 - 1/2)(\lambda_0 - \Lambda_{\min}))^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_{\min})} \right] \Big\} \times \\
& \quad \times \exp \left[-\frac{(x_1 - u + (\gamma_0 - 1/2)\Lambda_{\min})^2}{2\Lambda_{\min}} \right] dx_1. \tag{21a}
\end{aligned}$$

Соответственно при $\lambda_0 < \lambda$

$$\begin{aligned}
W(x, \lambda) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - \Lambda_{\min})\Lambda_{\min}}} \times \\
& \times \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \exp \left[-\frac{(x_1 - x_2 - (\gamma_0 - 1/2)(\lambda_0 - \Lambda_{\min}))^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_{\min})} \right] - \exp[2(\gamma_0 - 1/2)x_1] \times \right. \\
& \quad \times \exp \left[-\frac{(x_1 + x_2 + (\gamma_0 - 1/2)(\lambda_0 - \Lambda_{\min}))^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_{\min})} \right] \Big\} \times \\
& \quad \times \left\{ \exp \left[-\frac{(x_2 + x - u + (\lambda - \lambda_0)/2)^2}{2(\lambda - \lambda_0)} \right] - \right. \\
& \quad \left. - \exp(-x_2) \exp \left[-\frac{(x_2 - x + u - (\lambda - \lambda_0)/2)^2}{2(\lambda - \lambda_0)} \right] \right\} \times \\
& \quad \times \exp \left[-\frac{(x_1 - u + (\gamma_0 - 1/2)\Lambda_{\min})^2}{2\Lambda_{\min}} \right] dx_1 dx_2. \tag{21б}
\end{aligned}$$

Подставляя (21) в (19), для вспомогательной функции (15) можем записать:

$$\begin{aligned}
F(u | \gamma_0) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(\lambda_0 - \Lambda_{\min})\Lambda_{\min}}} \times \\
& \times \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \exp \left[-\frac{(x_1 - x_2 - (\gamma_0 - 1/2)(\lambda_0 - \Lambda_{\min}))^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_{\min})} \right] - \exp[2(\gamma_0 - 1/2)x_1] \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left[-\frac{(x_1 + x_2 + (\gamma_0 - 1/2)(\lambda_0 - \Lambda_{\min}))^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_{\min})} \right] \Bigg\} \times \\
& \times \left\{ \Phi \left[\frac{(\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2 + x_3}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \lambda_0}} \right] - \exp(-x_3) \Phi \left[\frac{(\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2 - x_3}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \lambda_0}} \right] \right\} \times \\
& \times \exp \left[-\frac{(x_1 - u + (\gamma_0 - 1/2)\Lambda_{\min})^2}{2\Lambda_{\min}} \right] dx_1 dx_2. \quad (22)
\end{aligned}$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$ — интеграл вероятности.

Подставляя (22) в (16) и (17), после несложных, но громоздких преобразований находим точные выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска изображения соответственно:

$$\begin{aligned}
\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi Q(\chi_{\min})}} \int_0^\infty \left\{ \Phi \left[\frac{(Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_{\min}))/2 + x}{\sqrt{Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_{\min})}} \right] - \right. \\
\left. - \exp(-x) \Phi \left[\frac{(Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_{\min}))/2 - x}{\sqrt{Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_{\min})}} \right] \right\} \exp \left[-\frac{(x - h - Q(\chi_{\min})/2)^2}{2Q(\chi_{\min})} \right] dx, \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi Q(\chi_0)}} \int_0^\infty \left\{ \Phi \left[\frac{(Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_0))/2 + x}{\sqrt{Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_0)}} \right] - \right. \\
\left. - \exp(-x) \Phi \left[\frac{(Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_0))/2 - x}{\sqrt{Q(\chi_{\max}) - Q(\chi_0)}} \right] \right\} \exp \left[-\frac{(x + Q(\chi_0)/2)^2 + h^2 - hQ(\chi_0)}{2Q(\chi_0)} \right] \times \\
\times \left\{ \exp \left[\frac{xh}{Q(\chi_0)} \right] \Phi \left[h \sqrt{\frac{Q(\chi_0) - Q(\chi_{\min})}{Q(\chi_{\min})Q(\chi_0)}} + x \sqrt{\frac{Q(\chi_{\min})}{(Q(\chi_0) - Q(\chi_{\min}))\lambda_0}} \right] - \right. \\
\left. - \exp \left[-\frac{xh}{Q(\chi_0)} \right] \Phi \left[h \sqrt{\frac{Q(\chi_0) - Q(\chi_{\min})}{Q(\chi_{\min})Q(\chi_0)}} - x \sqrt{\frac{Q(\chi_{\min})}{(Q(\chi_0) - Q(\chi_{\min}))\lambda_0}} \right] \right\} dx. \quad (24)
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда площадь обнаруживаемого изображения априори точно известна. Тогда, полагая $\Lambda_{\min} \rightarrow \Lambda_{\max} \equiv \lambda_0$ в (23) и $\Lambda_{\min} \rightarrow \lambda_0$,

$\Lambda_{\max} \rightarrow \lambda_0$ в (24), получаем известные точные выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска изображения с априори известной площадью [5]:

$$\alpha_0 = 1 - \Phi \left[\frac{h + Q(\chi_0)/2}{\sqrt{Q(\chi_0)}} \right], \quad \beta_0 = \Phi \left[\frac{h - Q(\chi_0)/2}{\sqrt{Q(\chi_0)}} \right]. \quad (25)$$

Конкретизируем полученные результаты для изображения в форме эллипса, интенсивность которого изменяется линейно вдоль оси x . Уравнение контура, ограничивающего область $\Omega(\chi)$, которую занимает изображение с площадью χ , имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \chi, \quad (26)$$

где $ab = \chi/\pi$. Обозначая эксцентриситет эллипса (26) через $\epsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, интенсивность изображения запишем как

$$F(x, y) = \frac{F_H}{\sqrt{\frac{(1-q)^2}{16} + \frac{(1+q)^2}{4}}} \left[\frac{(1-q)\sqrt{\pi(1-\epsilon^2)^{1/4}}}{2\sqrt{\chi_{\max}}} x + \frac{(1+q)}{2} \right]. \quad (27)$$

Здесь параметр F_H характеризует амплитуду интенсивности, параметр $q = F(-a_{\max}, 0)/F(a_{\max}, 0)$ — наклон интенсивности изображения, а параметр $a_{\max}$ определяет большую полуось эллипса при максимальной площади эллипса $\chi_{\max}$. Функция (27), описывающая интенсивность изображения, нормирована так, чтобы энергия изображения с максимальной площадью

$$E_{\max} = \iint_{\Omega(\chi_{\max})} F^2(x, y) dx dy = F_H^2 \chi_{\max}$$

не зависела от наклона интенсивности изображения, и тем самым была возможность сравнивать эффективность обнаружения изображений с различными наклонами интенсивности. Подставляя выражение интенсивности (27) в (10), находим отношение сигнал/шум:

$$Q(\chi) \equiv \lambda = z_H^2 \left[\frac{(1-q)^2}{16} \eta^2 + \frac{(1+q)^2}{4} \eta \right] / \left[\frac{(1-q)^2}{16} + \frac{(1+q)^2}{4} \right], \quad (28)$$

где $\eta = \chi/\chi_{\max}$ — нормированная площадь, $\eta \in [1/\kappa; 1]$ ($\kappa = \chi_{\max}/\chi_{\min}$ — динамический диапазон изменения неизвестной площади); $z_H^2 = 2F_H^2 \chi_{\max}/N_0 = 2E_{\max}/N_0$ — отношение сигнал/шум для однородного изображения с интенсивностью F_H и площадью $\chi_{\max}$. Отметим, что отношение сигнал/шум (28) не зависит от эксцентриситета эллипса ϵ .

На рис. 1, 2 приведены зависимости вероятности пропуска изображения, имеющего форму эллипса (26), с линейно изменяющейся интенсивностью

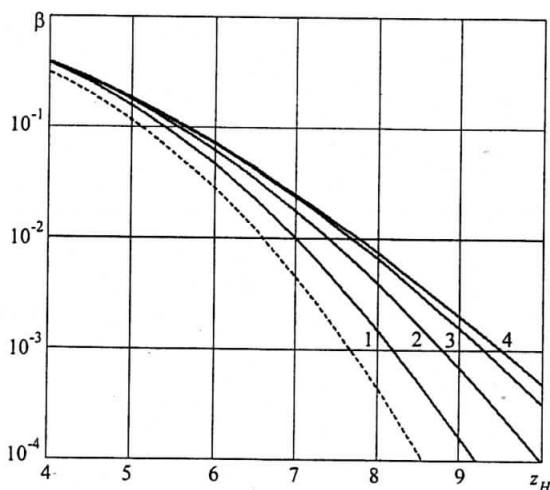


Рис. 1.

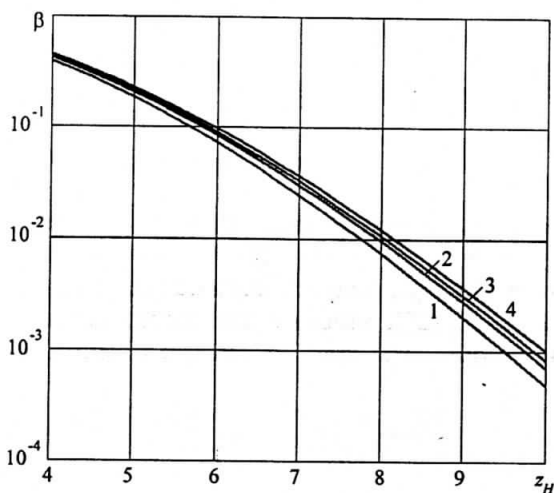


Рис. 2

(27) от отношения сигнал/шум z_H при фиксированном значении вероятности ложной тревоги 10^{-2} . Сплошными линиями показана вероятность пропуска изображения с неизвестной площадью, рассчитанная по формулам (23), (24). Для сравнения на рис. 1 штриховой линией показана вероятность пропуска изображения с априори известной площадью $\chi_0 = \chi_{\max}/2$, рассчитанная по формулам (25). Кривые на рис. 1 рассчитаны для значения $q=1$ при $\kappa=3$ (кривая 1), $\kappa=5$ (2), $\kappa=10$ (3) и $\kappa=100$ (4). Из сопоставления сплошных и штриховой кривых на рис. 1 следует, что эффективность обнаружения изображения с неизвестной площадью снижается по мере увеличения динамического диапазона изменения неизвестной площади.

Кривые на рис. 2 рассчитаны для значения $\kappa=10$ при $q=1$ (кривая 1), $q=5$ (2), $q=10$ (3), $q=100$ (4). Как следует из рисунка, эффективность обнаружения изображения с неизвестной площадью несколько снижается по мере увеличения степени неоднородности изображения. Отметим, что согласно (25) при известной площади изображения эффективность его обнаружения не за-

висит от степени неоднородности изображения, а определяется лишь его энергией.

Найденные точные формулы для вероятностей ошибок позволяют исследовать влияние априорного незнания площади и степени неоднородности изображения на эффективность его обнаружения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Островитянов Р. В., Басалов В. Ф. Статистическая теория радиолокации протяженных объектов. М: Радио и связь, 1982.
2. Красильников Н. Н. Теория передачи и восприятия изображений. М.: Радио и связь, 1986.
3. Осецкая Г. А. Обнаружение оптического изображения с неизвестными интенсивностью и площадью при наличии фона с неизвестной интенсивностью // Автометрия. 1992. № 4. С. 40.
4. Осецкая Г. А. Обнаружение оптического изображения с неизвестной площадью // Радиотехника. 1994. № 1. С. 64.
5. Трифонов А. П. Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами // Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984.
6. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
7. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.

Воронежский государственный университет,
E-mail: trif@rf.phys.vsu.ru

Поступила в редакцию
5 сентября 2002 г.