

229

229



ISSN 0021-3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ТОМ 46

7-8

июль-август

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

2003

ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПРОПАДАЮЩЕГО СИГНАЛА*

Рассмотрены квазиоптимальные и оптимальные алгоритмы оценки длительности сигнала произвольной формы на фоне аддитивного гауссовского белого шума с учетом возможного отсутствия сигнала в принятой реализации. Найдены точные выражения для характеристик квази- и максимально правдоподобных алгоритмов оценки. Выполнено статистическое моделирование на ЭВМ байесовских и квазيبайесовских алгоритмов оценки на примере импульса со скошенной вершиной.

Задача оценки длительности сигнала на фоне аддитивного гауссовского белого шума при наличии сигнала в наблюдаемой реализации с вероятностью 1 рассматривалась в работах [1—3] и др. Были синтезированы максимально правдоподобный (МП) и байесовский алгоритмы оценивания длительности прямоугольного видеоимпульса, а также найдены теоретические и экспериментальные характеристики оценок. Однако большое практическое значение имеют также случаи, когда передача ведется по неустойчивому каналу связи, в котором возможно пропадание сигнала. Такими являются каналы, использующие отражение радиоволн от метеорных следов или от спорадического слоя E в нижних слоях ионосферы, а также каналы подвижной радиосвязи в условиях пересеченной местности и т. п. Если сам факт присутствия сигнала во входной реализации не является информативным, то приходим к задаче оценки длительности пропадающего сигнала. В [2] синтезированы МП и байесовский алгоритмы оценивания длительности пропадающего прямоугольного видеоимпульса. Реальные условия генерации и распространения приводят к необходимости приема сигналов, форма которых отличается от прямоугольной. Ниже рассмотрены МП и байесовский алгоритмы оценки длительности сигнала произвольной формы, присутствующего в принятой реализации с вероятностью, меньшей 1.

Пусть на интервале времени $[0, T]$ доступна наблюдению реализация

$$x(t) = \gamma_0 s(t, \tau_0) + n(t) \quad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке CRDF и Минобразования РФ (проект VZ-010-0 и E00-3,5-5).

$$s(t, \tau_0) = \begin{cases} f(t), 0 \leq t \leq \tau_0, \\ 0, t < 0, t > \tau_0, \end{cases} \quad (2)$$

и гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь $f(t)$ — непрерывная функция, описывающая форму сигнала, а τ_0 — его длительность, принимающая значения из априорного интервала $\tau \in [T_1, T_2]$.

Будем полагать, что полезный сигнал присутствует в реализации наблюдаемых данных (1) с вероятностью $p_1 < 1$, так что $\gamma_0 = 1$ с вероятностью p_1 и $\gamma_0 = 0$ с вероятностью $p_0 = 1 - p_1$. Таким образом, необходимо оценить длительность сигнала τ_0 , полагая дискретный параметр γ_0 неинформативным [4]. Логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) зависит от γ и τ [2]

$$L(\tau, \gamma) = \frac{2\gamma}{N_0} \int_0^\tau [x(t) - f(t)/2] f(t) dt. \quad (3)$$

Если полезный сигнал (2) присутствует в принятой реализации с вероятностью $p_1 = 1$, то для синтеза оценки длительности можно воспользоваться методом МП [2]. Максимально правдоподобная оценка длительности формируется как координата положения абсолютного максимума логарифма ФОП

$$\tau_q = \operatorname{argsup} L(\tau), \quad (4)$$

где обозначено $L(\tau) = L(\tau, \gamma = 1)$.

Алгоритм (4) не учитывает возможного пропадания сигнала, поэтому при $p_1 < 1$ оценка τ_q не является максимально правдоподобной. Для всех $p_1 < 1$ будем называть алгоритм (4) квазиправдоподобным (КП). Максимально правдоподобный подход при возможном отсутствии сигнала заключается в нахождении аргумента абсолютного максимума ФОП (3), в котором неинформативный параметр γ заменен на его оценку МП

$$\tau_m = \arg \sup_{\tau} \left\{ \sup_{\gamma} L(\tau, \gamma) \right\}. \quad (5)$$

Из (3) видно, что $L(\tau, \gamma = 0) = 0$, поэтому алгоритм (5) приводит к следующему решающему правилу:

$$\tau_m = \begin{cases} \tau_q, L(\tau_q) > 0, \\ 0, L(\tau_q) \leq 0, \end{cases} \quad (6)$$

которое аналогично [2] можно обобщить, введя некоторый порог h , как

$$\tau_m = \begin{cases} \tau_q, L(\tau_q) > h, \\ 0, L(\tau_q) \leq h. \end{cases} \quad (7)$$

В дальнейшем оценку (7) будем называть обобщенной оценкой МП, причем КП оценка (4) является частным случаем обобщенной оценки (7) при $h = -\infty$.

Применение байесовского подхода в задачах обработки сигналов на фоне шума может обеспечить [2] более высокую эффективность оценивания, чем МП алгоритмы. Поэтому представляет интерес синтез байесовского алгоритма оценивания длительности и сравнение эффективности его функционирования с эффективностью функционирования МП алгоритмов.

Для синтеза байесовской оценки воспользуемся квадратичной функцией потерь [2] $C(\tau, \tau_b) = (\tau - \tau_b)^2$. Тогда при $p_1 = 1$ в результате минимизации апостериорного риска

$$R_{ps}(\tau_{bq}) = \int_{T_1}^{T_2} C(\tau, \tau_{bq}) W_{1pr}(\tau) \exp[L(\tau)] d\tau / \int_{T_1}^{T_2} W_{1pr}(\tau) \exp[L(\tau)] d\tau$$

получаем известное выражение для байесовской оценки [2]

$$\tau_{bq} = \int_{T_1}^{T_2} \tau W_{1pr}(\tau) \exp[L_1(\tau)] d\tau / \int_{T_1}^{T_2} W_{1pr}(\tau) \exp[L_1(\tau)] d\tau, \quad (8)$$

где $W_{1pr}(\tau)$ — априорная плотность вероятности неизвестной длительности при наличии сигнала в принятой реализации.

Алгоритм (8) оптимален лишь при $p_1 = 1$. Поэтому при $p_1 < 1$ оценку τ_{bq} будем называть квазيبайесовской. Синтез байесовской оценки длительности при возможном пропадании сигнала заключается в минимизации апостериорного риска [2]

$$R_{ps}(\tau_b) = \int \int_{\Gamma T_1}^{T_2} C(\tau, \tau_b) W_{ps}(\gamma, \tau) d\tau d\gamma, \quad (9)$$

где $W_{ps}(\gamma, \tau) = W_{pr}(\gamma, \tau) \exp[L(\gamma, \tau)] / \int \int_{\Gamma T_1}^{T_2} W_{pr}(\gamma, \tau) \exp[L(\gamma, \tau)] d\gamma d\tau$ — апостериорная плотность вероятности, $\Gamma = \{0, 1\}$ — множество возможных значений дискретного параметра γ .

Совместную априорную плотность вероятности неизвестных параметров сигнала запишем в виде $W_{pr}(\gamma, \tau) = p_1 \delta(\gamma - 1) W_{1pr}(\tau) + p_0 \delta(\gamma) W_{0pr}(\tau)$, где $W_{0pr}(\tau)$ — априорная плотность вероятности длительности при отсутствии полезного сигнала. Отсутствующий импульс будем считать импульсом с нуле-

вой длительностью, поэтому априорное распределение неизвестной длительности при отсутствии сигнала имеет вид дельта-функции $W_{0pr}(\tau) = \delta(\tau)$. Минимизируя (9) при квадратичной функции потерь, находим, что

$$\tau_b = P \int_{T_1}^{T_2} \tau W_{1pr}(\tau) \exp[L(\tau)] d\tau / \left[1 + P \int_{T_1}^{T_2} W_{1pr}(\tau) \exp[L(\tau)] d\tau \right], \quad (10)$$

где $P = p_1 / p_0$.

Перейдем к анализу эффективности функционирования синтезированных алгоритмов. Поскольку составной частью МП и байесовских решающих правил (4), (7), (8) и (10) является формирование логарифма ФОР (3) при $\gamma = 1$, рассмотрим его статистические характеристики. Согласно (3) случайный процесс $L(\tau)$ является гауссовским и его статистические характеристики полностью определяются математическим ожиданием и корреляционной функцией. Обозначим $L_0(\tau) = L(\tau | \gamma_0 = 0)$, $L_1(\tau) = L(\tau | \gamma_0 = 1)$. Выполняя усреднение, находим математические ожидания

$$S_0(\tau) = \langle L_0(\tau) \rangle = -\frac{1}{N_0} \int_0^{\tau} f^2(t) dt = -Q(\tau) / 2, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} S_1(\tau) = \langle L_1(\tau) \rangle &= \frac{2}{N_0} \int_0^{\min(\tau, \tau_0)} f^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^{\tau} f^2(t) dt = \\ &= \min[Q(\tau), Q(\tau_0)] - Q(\tau) / 2 \end{aligned} \quad (12)$$

и корреляционную функцию

$$\begin{aligned} B(\tau_1, \tau_2) &= \langle [L_0(\tau_1) - S_0(\tau_1)][L_0(\tau_2) - S_0(\tau_2)] \rangle = \\ &= \langle [L_1(\tau_1) - S_1(\tau_1)][L_1(\tau_2) - S_1(\tau_2)] \rangle = \\ &= \frac{2}{N_0} \int_0^{\min(\tau_1, \tau_2)} f^2(t) dt = \min[Q(\tau_1), Q(\tau_2)], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$Q(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^{\tau} f^2(t) dt \quad (14)$$

— отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе приемника МП для сигнала длительностью τ [2].

Перейдем аналогично [5] в выражении (3) к новой переменной $\lambda = Q(\tau)$, причем $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$, где $\Lambda_1 = Q(T_1)$, $\Lambda_2 = Q(T_2)$. Учитывая (11)—(13), можем при отсутствии сигнала представить логарифм ФОП $L(\tau)$ в виде

$$L_0(\tau) = L_0[\tau(\lambda)] = \mu_0(\lambda) = \mu(\lambda|\gamma_0 = 0) = -\lambda/2 + v(\lambda).$$

Здесь $\tau(\lambda)$ определяется из решения уравнения $Q(\tau) = \lambda$, а $v(\lambda)$ — гауссовский случайный процесс. Из (11)—(13) следует, что $v(\lambda)$ обладает моментами $\langle v(\lambda) \rangle = 0$, $\langle v(\lambda_1)v(\lambda_2) \rangle = \min(\lambda_1, \lambda_2)$. Соответственно при наличии сигнала логарифм ФОП допускает представление

$$L_1(\tau) = L_1[\tau(\lambda)] = \mu_1(\lambda) = \mu(\lambda|\gamma_0 = 1) = \min(\lambda, \lambda_0) - \lambda/2 + v(\lambda),$$

где $\lambda_0 = Q(\tau_0)$ — истинное значение ОСШ (14) для принятого сигнала.

В соответствии с [2] условная плотность вероятности обобщенной МП оценки (7) равна

$$W(\tau|\tau_0) = p_0[W_0(\tau) + (1-\alpha)\delta(\tau)] + p_1[W_1(\tau) + \beta(\tau)\delta(\tau)], \quad (15)$$

где $W_0(\tau) = \int_h^\infty W(u, \tau|\gamma_0 = 0) du$, $W_1(\tau) = \int_h^\infty W(u, \tau|\gamma_0 = 1) du$, $W(u, \tau|\gamma_0 = j)$,

$j = 0, 1$ — совместная плотность вероятности величины и положения абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП $L(\tau)$ при наличии и отсутствии сигнала в принятой реализации,

$$\alpha = P\{L(\tau_q) > h|\gamma_0 = 0\}, \beta = P\{L_1(\tau_q) < h|\gamma_0 = 1\} \quad (16)$$

— вероятности ошибок 1-го и 2-го рода соответственно [2]. Таким образом, для нахождения плотности вероятности оценки длительности необходимо исследовать распределение величины и положения абсолютного максимума логарифма ФОП.

Согласно (14), случайная величина $\lambda_q = \arg\sup \mu_1(\lambda)$ связана с КП оценкой длительности (4) взаимно однозначным преобразованием. Следовательно, плотности вероятностей $W(u, \tau|\gamma_0 = j)$, $j = 0, 1$ можно выразить через соответствующие плотности вероятностей $W_\lambda(u, \lambda|\gamma_0 = j)$, $j = 0, 1$ величины и положения абсолютного максимума случайного процесса $\mu(\lambda)$. Тогда (15) можно переписать в виде

$$W(\tau|\tau_0) = p_0\left[Q'(\tau)W_{0\lambda}(Q(\tau)) + (1-\alpha)\delta(\tau)\right] + p_1\left[Q'(\tau)W_{1\lambda}(Q(\tau)) + \beta\delta(\tau)\right], \quad (17)$$

где

$$W_{0\lambda}(\lambda) = \int_h^\infty W_\lambda(u, \lambda | \gamma_0 = 0) du, \quad W_{1\lambda}(\lambda) = \int_h^\infty W_\lambda(u, \lambda | \gamma_0 = 1) du. \quad (18)$$

Для совместной плотности вероятности величины и положения абсолютного максимума случайного процесса $\mu(\lambda)$, а также для вероятностей ошибок (16) запишем согласно [2],

$$W(u, \lambda | \gamma_0 = j) = \left[\partial^2 F_{2j}(u, v, \lambda) / \partial u \partial \lambda \right]_{u=v},$$

$$\alpha = 1 - F_{20}(h, h, \Lambda_2), \beta = F_{21}(h, h, \Lambda_2), \quad (19)$$

где

$$F_{2j}(u, v, \Lambda) = P \left\{ \sup_{\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda} \mu_j(\lambda) < u, \sup_{\Lambda \leq \lambda \leq \Lambda_2} \mu_j(\lambda) < v \right\}, j = 0, 1 \quad (20)$$

— двумерная функция распределение абсолютных максимумов процесса $\mu_j(\lambda)$. Таким образом, для нахождения плотности вероятности (15) МП оценки (7) необходимо найти функции (20).

Поскольку $y(\lambda) = \begin{cases} u - \mu_0(\lambda), \Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda, \\ v - \mu_0(\lambda), \Lambda < \lambda \leq \Lambda_2, \end{cases}$ — реализация марковского

случайного процесса с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = 1/2, k_2 = 1, \quad (21)$$

то можем записать

$$F_{20}(u, v, \Lambda) = P\{y(\lambda) > 0, \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]\} = \int_0^\infty W(y, \Lambda_2) dy. \quad (22)$$

Здесь $W(y, \lambda)$ — решение уравнения Фоккера—Планда—Колмогорова [2]

$$\frac{\partial W(y, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial y} [k_1 W(y, \lambda)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_2 W(y, \lambda)] = 0 \quad (23)$$

при граничных условиях

$$W(y = 0, \lambda) = W(y = \infty, \lambda) = 0 \quad (24)$$

и начальном условии

$$W(y, \lambda) \Big|_{\lambda=\Lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \exp \left[-\frac{(y - u - \Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1} \right].$$

Применяя метод отражения с переменной знака [2, 6], находим решение уравнения (23) с коэффициентами (21). Подставляя это решение в (22), получаем выражение для функции распределения $F_{20}(u, v, \Lambda)$ в виде

$$F_{20}(u, v, \Lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda}} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[-\frac{(v - \xi + \Lambda/2)^2}{2\Lambda} \right] \Phi \left[\frac{u\Lambda + (\xi - v)\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda\Lambda_1(\Lambda - \Lambda_1)}} \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[-u - \frac{(\xi + 2u - v - \Lambda/2)^2}{2\Lambda} \right] \Phi \left[\frac{u\Lambda - (\xi + 2u - v)\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda\Lambda_1(\Lambda - \Lambda_1)}} \right] \right\} \times \\ \times \left[\Phi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_2 - \Lambda} + \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda}} \right) - \exp(-\xi) \Phi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_2 - \Lambda} - \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda}} \right) \right] d\xi. \quad (25)$$

Введем далее вспомогательный случайный процесс

$$y(\lambda) = \begin{cases} u - \mu_1(\lambda), & \Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda, \\ v - \mu_1(\lambda), & \Lambda < \lambda \leq \Lambda_2, \end{cases}$$

который является гауссовским марковским процессом с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \frac{1}{2} \begin{cases} -1, & \Lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0, \\ 1, & \lambda_0 < \lambda \leq \Lambda_2, \end{cases} \quad k_2 = 1 \quad (26)$$

Тогда, аналогично (22), можем записать

$$F_{21}(u, v, \Lambda) = P\{y(\lambda) > 0, \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]\} = \int_0^\infty W(y, \Lambda_2) dy. \quad (27)$$

Здесь $W_1(y, \lambda)$ — решение уравнения (23) с коэффициентами (26) при граничных условиях (24) и начальном условии

$$W_1(y, \Lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \exp \left[-\frac{(y - u + \Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1} \right].$$

Решая (23) отдельно для случая $\Lambda < \lambda_0$ и для $\Lambda > \lambda_0$ методом отражения с переменной знака [2, 6] и подставляя результат в (27), находим

$$F_{21}(u, v, \Lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Lambda(\lambda_0 - \Lambda)}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(\xi_2 - \xi_1 - (\lambda_0 - \Lambda)/2)^2}{2(\lambda_0 - \Lambda)} \right] \times$$

$$\times \left[\Phi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_2 - \Lambda} + \frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda}} \right) - \exp(-\xi_2) \Phi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_2 - \Lambda} - \frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda}} \right) \right] \times$$

$$\times \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{2\xi_1 \xi_2}{\lambda_0 - \Lambda} \right] \right\} \left\{ \exp \left[-\frac{(\nu - \xi_1 - \Lambda/2)}{2\Lambda} \right] \Phi \left(\frac{u\Lambda + (\xi_1 - \nu)\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda\Lambda_1(\Lambda - \Lambda_1)}} \right) - \right.$$

$$\left. - \exp \left[-u - \frac{(2u - \nu + \xi_1 + \Lambda/2)}{2\Lambda} \right] \Phi \left(\frac{u\Lambda - (\xi_1 + 2u - \nu)\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda\Lambda_1(\Lambda - \Lambda_1)}} \right) \right\} d\xi_1 d\xi_2, \Lambda < \lambda_0 \quad (28a)$$

$$F_{21}(u, \nu, T) = \frac{\exp[(u - \nu)/2 - (\Lambda - \Lambda_1)/8]}{2\pi\sqrt{2\pi\Lambda_1(\Lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - \Lambda_1)}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(u - \xi_1 - \Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1} \right] \times$$

$$\times \left[\Phi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_2 - \Lambda} + \frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda}} \right) - \exp(-\xi_2) \Phi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_2 - \Lambda} - \frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda}} \right) \right] \times$$

$$\times \left\{ \exp \left[-\frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_1)} \right] - \exp \left[-\frac{(\xi_2 + \xi_1)^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_1)} \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \exp \left[-\frac{(\xi_1 - \xi + u - \nu)^2}{2(\Lambda - \Lambda_1)} \right] - \exp \left[-\frac{(\xi_1 + \xi + u - \nu)^2}{2(\Lambda - \Lambda_1)} \right] \right\} d\xi d\xi_1 d\xi_2, \Lambda > \lambda_0 \quad (28b)$$

Подставляя функции распределения (25) и (28) в формулы (18) и (19), получаем выражения для плотностей вероятностей

$$W_{0\lambda}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\lambda - \Lambda_1)^{3/2}} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi(\Lambda_2 - \lambda)}} \exp \left[-\frac{\Lambda_2 - \lambda}{8} \right] + \Phi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_2 - \lambda} \right) \right\} \times$$

$$\times \int_0^\infty \xi \Phi \left(\frac{\xi - h - \Lambda_1/2}{\sqrt{\Lambda_1}} \right) \exp \left\{ -\frac{[\xi + (\lambda - \Lambda_1)/2]^2}{2(\lambda - \Lambda_1)} \right\} d\xi, \quad (29)$$

$$W_{1\lambda}(\lambda) = \frac{1}{\pi(\lambda - \Lambda_1)^{3/2}(\lambda_0 - \lambda)^{3/2}} \int_0^\infty x \exp \left\{ -\frac{[x + (\lambda_0 - \lambda)/2]^2}{2(\lambda_0 - \lambda)} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \Phi \left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}{2} + \frac{x}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) - \exp(-x) \Phi \left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}{2} - \frac{x}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) \right\} dx \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \xi \Phi \left(\frac{\xi - h + \Lambda_1 / 2}{\sqrt{\Lambda_1}} \right) \exp \left\{ - \frac{[\xi - (\lambda - \Lambda_1) / 2]^2}{2(\lambda - \Lambda_1)} \right\} d\xi, \lambda \leq \lambda_0, \quad (30)$$

$$W_{1\lambda}(\lambda) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi(\Lambda_2 - \lambda)}} \exp \left[- \frac{\Lambda_2 - \lambda}{8} \right] + \Phi \left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda}}{2} \right)}{2\pi(\lambda - \lambda_0)^{3/2} \sqrt{\lambda_0 - \Lambda_1}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x \Phi \left(\frac{\xi - h + \Lambda_1 / 2}{\sqrt{\Lambda_1}} \right) \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{2\xi x}{\lambda_0 - \Lambda_1} \right] \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{[x - \xi + (\lambda_0 - \Lambda_1) / 2]^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_1)} - \frac{[x + (\lambda - \lambda_0) / 2]^2}{2(\lambda - \lambda_0)} \right\} dx d\xi, \lambda > \lambda_0, \quad (31)$$

и для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \int_0^{\infty} \exp \left[- \frac{(x - h - \Lambda_1 / 2)^2}{2\Lambda_1} \right] \left[\Phi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_1 - \Lambda_2} + \frac{x}{\sqrt{\Lambda_1 - \Lambda_2}} \right) - \right.$$

$$\left. - \exp(-x) \Phi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_1 - \Lambda_2} - \frac{x}{\sqrt{\Lambda_1 - \Lambda_2}} \right) \right] dx, \quad (32)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_0}} \int_0^{\infty} \exp \left[- \frac{(x + \lambda_0 / 2)^2 + h^2 - h\lambda_0}{2\lambda_0} \right] \times$$

$$\times \left[\exp \left(\frac{xh}{\lambda_0} \right) \Phi \left(h \sqrt{\frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{\lambda_0 \Lambda_1}} + x \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0 - \Lambda_1)}} \right) - \right.$$

$$\left. - \exp \left(- \frac{xh}{\lambda_0} \right) \Phi \left(h \sqrt{\frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{\lambda_0 \Lambda_1}} - x \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0 - \Lambda_1)}} \right) \right] \times$$

$$\times \left[\Phi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0} + \frac{x}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) - \exp(-x) \Phi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0} - \frac{x}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) \right] dx.$$

Учитывая, что отсутствующий сигнал обладает нулевой длительностью, для условных смещения и рассеяния МП оценки (7) можем записать [2]

$$b_m(\tau_m | \tau_0) = p_0 b_{0m} + p_1 [b_{1m} - \tau_0 \beta],$$

$$V_m(\tau_m|\tau_0) = p_0 V_{0m} + p_1 [V_{1m} + \tau_0^2 \beta], \quad (34)$$

где

$$b_{jm} = \int_{T_1}^{T_2} (\tau - j\tau_0) W_{j\lambda}(\mathcal{Q}(\tau)) \mathcal{Q}(\tau) d\tau, \quad j = 0, 1, \quad (35)$$

$$V_{jm} = \int_{T_1}^{T_2} (\tau - j\tau_0)^2 W_{j\lambda}(\mathcal{Q}(\tau)) \mathcal{Q}(\tau) d\tau, \quad j = 0, 1, \quad (36)$$

Безусловные смещение и рассеяние оценки определяются соответственно выражениями

$$b_m(\tau_m) = \int_{T_1}^{T_2} b_m(\tau_m|\tau) W_{1pr}(\tau) d\tau, \quad V_m(\tau_m) = \int_{T_1}^{T_2} V_m(\tau_m|\tau) W_{1pr}(\tau) d\tau. \quad (37)$$

Поскольку КП алгоритм оценивания (4) является частным случаем обобщенного МП алгоритма (7) при $h = -\infty$, то характеристики эффективности его функционирования можно получить, подставив $h = -\infty$ в (17), (29)—(33). Тогда для условной плотности вероятности КП оценки длительности

$$\begin{aligned} W(\tau|\tau_0) &= p_0 \mathcal{Q}(\tau) W_{0\lambda}(\mathcal{Q}(\tau)) + p_1 \mathcal{Q}(\tau) W_{1\lambda}(\mathcal{Q}(\tau)), \\ W_{0\lambda}(\lambda) &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi(\lambda - \Lambda_1)}} \exp\left[-\frac{\lambda - \Lambda_1}{8}\right] - \Phi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda - \Lambda_1}\right) \right\} \times \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi(\Lambda_2 - \lambda)}} \exp\left[-\frac{\Lambda_2 - \lambda}{8}\right] + \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda_2 - \lambda}\right) \right\}, \\ W_{1\lambda}(\lambda) &= \frac{1}{2} \begin{cases} \Psi\left[\frac{1}{2}(\lambda_0 - \lambda), \frac{1}{2}(\lambda_0 - \Lambda_1), \frac{1}{2}(\Lambda_2 - \lambda_0)\right], & \Lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0, \\ \Psi\left[\frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0), \frac{1}{2}(\Lambda_2 - \lambda_0), \frac{1}{2}(\lambda_0 - \Lambda_1)\right], & \lambda_0 \leq \lambda \leq \Lambda_2, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(y, y_1, y_2) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi} y^{3/2}} \left\{ \frac{\exp[-(y_1 - y)/4]}{\sqrt{\pi(y_1 - y)}} + \Phi\left(\sqrt{\frac{y_1 - y}{2}}\right) \right\} \times \\ &\times \int_0^\infty x \exp\left[-\frac{(x + y)^2}{4y}\right] \left\{ \Phi\left(\frac{y_2 + x}{\sqrt{2y_2}}\right) - \exp(-x) \Phi\left(\frac{y_2 - x}{\sqrt{2y_2}}\right) \right\} dx. \end{aligned}$$

В [3] на примере прямоугольного импульса показано, что эффективность обнаружения сигнала с неизвестной длительностью может быть существенно улучшена выбором порога h . При этом безусловная средняя вероятность ошибки МП обнаружителя с оптимизированным порогом при равномерной априорной плотности вероятности неизвестной длительности примерно равна безусловной средней вероятности ошибки байесовского обнаружителя. Поэтому целесообразно исследовать влияние выбора порога на эффективность функционирования обобщенного МП алгоритма оценивания (7) с целью минимизации безусловного среднего рассеяния (37):

$$h_0 = \arg \inf_h V_m(\tau_m). \quad (38)$$

Алгоритм (7), в котором порог определен в соответствии с (38), в дальнейшем будем называть оптимизированным обобщенным алгоритмом МП. Однако, выполнить оптимизацию (38) аналитически не удастся. Поэтому для конкретной формы сигнала необходимо выполнять оптимизацию численно.

Конкретизируем полученные выражения для прямоугольного импульса со скошенной вершиной [7], форма которого описывается функцией

$$f(t) = A[1 + (d-1)t/T_2] \sqrt{3/(d^2 + d + 1)}, \quad (39)$$

где параметр A характеризует амплитуду сигнала, $d = f(T_2)/f(0)$ — наклон скошенной вершины импульса; множитель $\sqrt{3/(d^2 + d + 1)}$ необходим для того, чтобы энергия сигнала максимальной длительности $E_{\max} = \int_0^{T_2} f^2(t) dt = A^2 T_2$ не зависела от наклона его вершины и тем самым

была возможность сравнивать эффективность оценивания длительности сигналов с одинаковыми энергиями и разным наклоном вершин. Подставляя функцию (39) в (14) находим выражение для ОСШ на выходе приемника МП

$$\lambda = 3z_r^2 \eta \frac{1 + (d-1)\eta + (d-1)^2 \eta^2 / 3}{d^2 + d + 1}, \quad (40)$$

где $\eta = \tau/T_2$ — нормированная длительность, $\eta \in [1/k; 1]$, $k = T_2/T_1$, $z_r^2 = 2A^2 T_2 / N_0$ — ОСШ на выходе приемника МП для прямоугольного импульса амплитуды A и длительности T_2 . Используя (40), находим

$$\Lambda_1 = 3z_r^2 \frac{1}{k} \frac{1 + (d-1)/k + (d-1)^2 / 3k^2}{d^2 + d + 1},$$

$$\lambda_0 = 3z_r^2 \eta_0 \frac{1 + (d-1)\eta_0 + (d-1)^2 \eta_0^2 / 3}{d^2 + d + 1}, \quad \Lambda_2 = z_r^2,$$

$\eta_0 = \tau_0 / T_2$ — нормированная длительность принятого сигнала.

Результаты расчетов характеристик КП оценки (4), МП оценки (6) и обобщенной МП оценки (7) при пороге (38) для сигнала (39) представлены на рис. 1, 2, где показаны зависимости безусловного рассеяния оценки от ОСШ z_r при $k = 4$. Кривые 1 на рис. 1, 2 построены для $p_1 = 0,1$ и $d = 1$, кривые 2 — для $p_1 = 0,1$ и $d = 5$, кривые 3 — для $p_1 = 0,7$ и $d = 1$, кривые 4 — для $p_1 = 0,7$ и $d = 5$. На рис. 1 сплошными линиями изображены зависимости рассеяния МП оценки (6), штриховыми линиями — рассеяния КП оценки (4). Из рис. 1 следует, что при больших ОСШ применение КП оценки может привести к существенному проигрышу в точности оценивания по сравнению с точностью МП оценки. На рис. 2 сплошные линии соответствуют рассеянию МП оценки (6), а штрих-пунктирные линии — рассеянию оптимизированной обобщенной МП оценки. Сопоставление штрих-пунктирных и сплошных кривых на рис. 2 показывает, что выбор порога согласно выражению (38) позволяет существенно повысить точность оптимизированной обобщенной МП оценки. Как видно из рис. 1 и 2, отклонение формы сигнала от прямоугольной приводит к снижению точности оценки длительности.

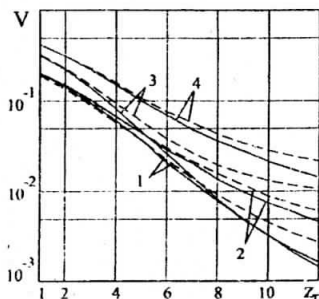


Рис. 1

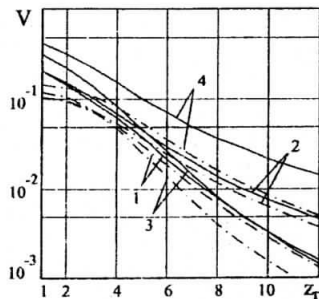


Рис. 2

К сожалению, характеристики эффективности функционирования квазибайесовского (8) и байесовского (10) алгоритмов аналитически получить не удастся. Поэтому исследование работоспособности алгоритмов (8) и (10) на примере прямоугольного импульса со скошенной вершиной (39) было выполнено методами статистического моделирования на ЭВМ.

Логарифм ФОП $L(\tau)$ представлялся в виде $L(\eta) = S(\eta, \eta_0) + N(\eta)$, где

$$S(\eta, \eta_0) = z_r^2 \gamma_0 \min(\eta, \eta_0) \times \\ \times \left\{ 1 + b \min(\eta, \eta_0) + b^2 \min^2(\eta, \eta_0) / 3 \right\} / \left\{ 1 + b + b^2 / 3 \right\} - \\ - z_r^2 \eta \left\{ 1 + b \eta + b^2 \eta^2 / 3 \right\} / 2 \left\{ 1 + b + b^2 / 3 \right\}, \quad b = d - 1,$$

$$N(\eta) = z_r \sqrt{2/N_0 T_2} \int_0^\eta n(T_2 x) [1 + bx] T_2 dx / \{1 + b + b^2 / 3\}$$

— гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$\langle N(\eta_1) N(\eta_2) \rangle = z_r^2 \min(\eta_1, \eta_2) \times \\ \times \{1 + b \min(\eta_1, \eta_2) + b^2 \min^2(\eta_1, \eta_2) / 3\} / \{1 + b + b^2 / 3\}.$$

При моделировании с шагом $\Delta\eta$ вырабатывались отсчеты функции $N(\eta)$, на основе которых реализация логарифма ФОП $L(\eta)$ аппроксимировалась ступенчатой функцией с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью $\epsilon = 0,1$. Согласно [8] дискретные отсчеты логарифма ФОП можно представить в виде

$$L(n\Delta\eta) = S(n\Delta\eta, n_0\Delta\eta) + z_r \epsilon \sqrt{1/k} \sum_{j=1}^n [1 + bj\Delta\eta] X[j] / \{1 + b + b^2 / 3\},$$

где $X[j]$ — гауссовские независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями, $n = n_1, n_2$, $n_1 = \text{ent}(1/\epsilon^2)$, $n_2 = \text{ent}(k/\epsilon^2)$, $n_0 = \text{ent}(\eta_0 k / \epsilon^2)$, $\text{ent}(\cdot)$ — целая часть числа, $\Delta\eta = \eta_1 \epsilon^2$.

Для моделирования квазيبайесовского алгоритма оценивания (8) формировалась величина $\eta_{qb} = \frac{\tau_{qb}}{T_2} = \frac{\epsilon^2}{k} \frac{\sum_{j=n_1}^{n_2} j \exp[L(j\Delta\eta)]}{\sum_{j=n_1}^{n_2} \exp[L(j\Delta\eta)]}$, которая является нормированной квазибайесовской оценкой длительности импульса (39), а для моделирования байесовского алгоритма оценивания (10) формировалась величина

$$\eta_b = \frac{\tau_b}{T_2} = \frac{P\epsilon^4}{k^2} \frac{\sum_{j=n_1}^{n_2} j \exp[L(j\Delta\eta)]}{\left\{ \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{P\epsilon^2}{k} \sum_{j=n_1}^{n_2} \exp[L(j\Delta\eta)] \right\}},$$

которая является нормированной байесовской оценкой.

В процессе моделирования при определении безусловных смещений и рассеяний оценок априорная плотность вероятности неизвестной длительности полагалась равномерной. Поэтому при наличии сигнала ($\gamma_0 = 1$) истинное значение нормированной длительности η_0 выбиралось случайным, распределенным равномерно на интервале $[1/k, 1]$. Параметр γ_0 также выбирался случайным, принимающим значений 0 и 1 с вероятностями p_0 и p_1 соответствен-

но. Было реализовано 10^5 циклов испытаний для каждого z_r . Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений безусловных рассеяний не более чем на 15% при $V(\tau_b)/T_2^2 > 10^{-3}$.

Результаты моделирования представлены на рис. 3 и 4, где показаны зависимости безусловных рассеяний оценок длительности прямоугольного импульса со скошенной вершиной (39) от ОСШ z_r при $k = 4$. На рис. 3 нанесены экспериментальные значения рассеяний квазибайесовской (8), а на рис. 4 — байесовской (10) оценок крестиками для $p_1 = 0,1$ и $d = 1$, плюсами — для $p_1 = 0,1$ и $d = 5$, квадратами $p_1 = 0,7$ и $d = 1$, кружками — для $p_1 = 0,7$ и $d = 5$. Для сравнения на обоих рисунках показано рассеяние обобщенной МП оценки (7) с оптимизированным порогом при $p_0 = 0,1$ (кривые 1) и $p_0 = 0,7$ (кривые 2), рассчитанное по формулам (34)—(37). Сплошные кривые на рис. 3 и 4 соответствуют прямоугольному импульсу $d = 1$, штриховые — импульсу с наклоном вершины $d = 5$.

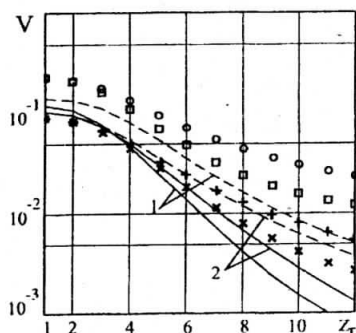


Рис. 3

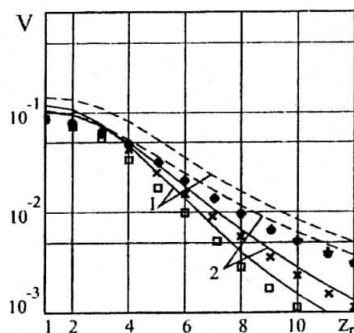


Рис. 4

Как следует из рис. 3, квазибайесовский алгоритм существенно уступает в точности МП алгоритму с оптимизированным порогом. Проигрыш растет с ростом ОСШ. Анализ рис 4 показывает, что при всех значениях ОСШ и вероятностей отсутствия сигнала в принятой реализации байесовский алгоритм обеспечивает несколько более высокую точность оценки, чем оптимизированный обобщенный МП алгоритм.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трифонов А. П. Прием сигнала с неизвестной длительностью на фоне гауссовского белого шума // Радиотехника и электроника. — 1977. — Т. 22. — №1. — С. 90—98.

2. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех.— М. : Радио и связь.— 1986.— 264 с.
3. Трифонов А. П., Парфенов В. И., Мишин Д. В. Оптимальный прием сигнала с неизвестной длительностью на фоне белого шума // Радиофизика.— 1997.— Т. 40.— №12.— С. 1531—1541.(Изв. вузов).
4. Шинаков Ю. С. О построении оценок параметров сигнала при наличии неинформативных параметров // Радиотехника и электроника.— 1974.— Т. 19.— №3 — С. 542—549.
5. Трифонов А. П. Эффективность обнаружения сигнала с неизвестной длительностью // Сборник «Памяти А. Н. Малахова».— Нижний Новгород : ТАЛАН.— 2000.— С. 65—69.
6. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы.— М. : Радио и связь.— 1977.— 432 с.
7. Грязнов М. И., Гуревич М. А., Рябишин М. А. Измерение параметров импульсов.— М. : Радио и связь.— 1991.— 216 с.
8. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.— М. : Сов. радио.— 1971.— 326 с.

Воронежский госуниверситет.

Поступила в редакцию 14.05.02.

УДК 621.396.967

ЗУБКОВ О. В.

РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОФИЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ АТМОСФЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СИСТЕМАМИ РАДИОАКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Усовершенствован способ автоматической подстройки частоты радиопередатчика для достижения выполнения условия Брэгга во всем диапазоне высот систем радиоакустического зондирования атмосферного пограничного слоя. Доказана необходимость учета в алгоритме автоматического управления частотой радиопередатчика информации о высотном распределении скорости ветра. Выполнена экспериментальная проверка усовершенствованного алгоритма с использованием моделей системы и принимаемых ею сигналов.

Метод радиоакустического зондирования атмосферного пограничного слоя позволяет с высокой точностью измерять высотные профили температуры. Сущность метода заключается в использовании явления дифракции Брэгговского типа на искусственной атмосферной неоднородности (атмосферной решетке), созданной акустическим импульсом и движущейся в пространстве со скоростью, величина которой связана с высотным изменением температуры зависимостью [1]

$$c_{зв}(h) = 20,04\sqrt{T(h)}, \quad (1)$$

где $c_{зв}(h)$ — изменение скорости звука в воздухе с высотой, м/с; $T(h)$ — изменение абсолютной температуры воздуха с высотой, °К.