



ISSN 0021-3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ВОЕННЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ

ТОМ 46

9-10

сентябрь-октябрь

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

2003

ОЦЕНКА ПЛОЩАДИ НЕОДНОРОДНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ФОНЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ШУМА

Получены точные и асимптотические формулы для характеристик оценки площади неоднородного изображения по методу максимального правдоподобия.

В последние годы активно развиваются методы дистанционного наблюдения, при которых должна учитываться пространственная протяженность реальных объектов. Это объясняется существенно возросшей разрешающей способностью систем дистанционного наблюдения. Вопросы обработки изображений пространственно-протяженных объектов рассматривались в [1—4] и других работах. При этом, как правило, предполагалось, что изображения пространственно-протяженных объектов однородны, так что их интенсивность постоянна [3, 4], хотя может быть и неизвестной [4]. В реальных условиях, вследствие свойств пространственно-протяженного объекта или в силу неоднородностей среды распространения, интенсивность изображения обычно является функцией координат, так что изображение оказывается неоднородным. В связи с чем, представляет интерес анализ эффективности оценки площади неоднородного изображения.

Пусть в области G обработке доступна реализация случайного поля

$$\xi(x, y) = s(x, y; \chi_0) + n(x, y), \quad x, y \in G, \quad (1)$$

где

$$s(x, y; \chi_0) = F(x, y)I(x, y; \chi_0), \quad (2)$$

— полезное изображение с интенсивностью $F(x, y)$, которое занимает область $\Omega(\chi_0)$ с площадью χ_0 , форма области $\Omega(\chi)$ с площадью χ , занятой изображением, описывается индикатором

$$I(x, y; \chi) = \begin{cases} 1, & x, y \in \Omega \\ 0, & x, y \notin \Omega \end{cases}$$

В (1) $n(x, y)$ — гауссовский пространственный белый шум с односторонней спектральной плотностью N_0 , а неизвестная площадь изображения χ_0 принимает значения из априорного интервала $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$.

Для получения оценки площади в соответствии с методом максимального правдоподобия [5] необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия

$$L(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G \xi(x, y) s(x, y; \chi) dx dy - \frac{1}{N_0} \iint_G s^2(x, y; \chi) dx dy \quad (3)$$

для всех значений $\chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]$. Оценка $\hat{\chi}$ площади χ_0 полезного изображения определяется, как положение абсолютного (наибольшего) максимума функции (3)

$$\hat{\chi} = \operatorname{argsup} L(\chi), \chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]. \quad (4)$$

Точность оценки будем характеризовать условным рассеянием оценки площади

$$V(\hat{\chi} | \chi_0) = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} (\chi - \chi_0)^2 W(\chi | \chi_0) d\chi, \quad (5)$$

где $W(\chi | \chi_0)$ — условная плотность вероятности оценки $\hat{\chi}$.

Для определения характеристик оценки максимального правдоподобия (4) площади неоднородного изображения исследуем статистические характеристики случайной функции (3). Подставляя (1) в (3), аналогично [5] запишем функцию

$$L(\chi) = S(\chi_0, \chi) - Q(\chi) / 2 + N(\chi), \quad (6)$$

где

$$N(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G n(x, y) s(x, y; \chi) dx dy \quad (7)$$

— шумовая функция,

$$S(\chi_0, \chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G s(x, y, \chi_0) s(x, y, \chi) dx dy \quad (8)$$

— сигнальная функция, а

$$Q(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G s^2(x, y, \chi) dx dy \quad (9)$$

— отношение сигнал/шум для изображения с площадью χ .

Шумовая функция (7) является центрированным гауссовским случайным процессом, обладающим корреляционной функцией

$$\langle N(\chi_1)N(\chi_2) \rangle = \frac{2}{N_0} \iint_G s(x, y, \chi_1) s(x, y, \chi_2) dx dy = S(\chi_1, \chi_2). \quad (10)$$

Обозначим $\Omega_{\min}(\chi_1, \chi_2)$ одну из двух областей $\Omega(\chi_1)$ и $\Omega(\chi_2)$, обладающей меньшей площадью. Подставляя далее (2) в (8) и (9), имеем

$$S(\chi_0, \chi) = \frac{2}{N_0} \iint_{\Omega_{\min}(\chi_0, \chi)} F^2(x, y) dx dy, \quad (11)$$

$$Q(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_{\Omega(\chi)} F^2(x, y) dx dy. \quad (12)$$

Согласно (12) отношение сигнал/шум всегда является монотонной убывающей функцией площади χ . Положим, что функция $F(x, y)$, описывающая распределение интенсивности полезного изображения, может обращаться в нуль только на части области $\Omega(\chi)$, имеющей нулевую меру. Тогда (12) является монотонно возрастающей функцией площади изображения χ и (10) можно переписать как

$$S(\chi_1, \chi_2) = \min[Q(\chi_1), Q(\chi_2)]. \quad (13)$$

Перейдем в (6) к новой переменной

$$\lambda = Q(\chi), \quad (14)$$

причем $\lambda \in [\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max}]$, где $\Lambda_{\min} = Q(\chi_{\min})$, $\Lambda_{\max} = Q(\chi_{\max})$.

Учитывая (11)...(14), можем представить (6) в виде

$$I(\chi) = I[\chi(\lambda)] = \mu(\lambda) = \min(\lambda, \lambda_0) - \lambda/2 + v(\lambda), \quad (15)$$

где $\lambda_0 = Q(\chi_0)$, $v(\lambda) = N[\chi(\lambda)]$, а $\chi(\lambda)$ определяется из решения уравнения $Q(\chi) = \lambda$.

Из (10), (13) и (14) следует, что центрированный гауссовский случайный процесс $v(\lambda)$ обладает корреляционной функцией

$$\langle v(\lambda_1) v(\lambda_2) \rangle = \min(\lambda_1, \lambda_2). \quad (16)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную оценку

$$\hat{\lambda} = \operatorname{argsup} \mu(\lambda), \quad \lambda \in [\Lambda_{\min}, \Lambda_{\max}]. \quad (17)$$

Поскольку исследуемая оценка $\hat{\chi}$ (4) однозначно выражается через вспомогательную оценку (17) как $\hat{\lambda} = Q(\hat{\chi})$, то, определив распределение вероятностей этой оценки, можно затем найти распределение вероятностей оценки (4). Что-

бы найти распределение оценки $\hat{\lambda}$, введем в рассмотрение вспомогательную функцию [6]

$$F(u, v, \Lambda) = P \left(\sup_{\Lambda_{\min} \leq \lambda < \Lambda} \mu(\lambda) < u, \sup_{\Lambda \leq \lambda \leq \Lambda_{\max}} \mu(\lambda) < v \right). \quad (18)$$

Согласно (15), (16) гауссовский случайный процесс $\mu(\lambda)$ является марковским и обладает коэффициентами сноса и диффузии соответственно

$$K_1 = \begin{cases} 1/2, \lambda < \lambda_0 \\ -1/2, \lambda > \lambda_0 \end{cases}, \quad K_2 = 1 \quad (19)$$

Воспользовавшись марковскими свойствами функции $\mu(\lambda)$ (15), вспомогательную функцию (18) можно записать как [7]

$$F(u, v, \Lambda) = \int_{-\infty}^v W(x, \Lambda_{\max}) dx. \quad (20)$$

Здесь $W(x, \Lambda_{\max}) = W(x, \lambda = \Lambda_{\max})$, а $W(x, \lambda)$ — решение уравнения Фоккера—Планда—Колмогорова [7]

$$\frac{\partial W(x, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial x} [K_1 W(x, \lambda)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2 W(x, \lambda)] = 0 \quad (21)$$

с коэффициентами (19) при начальном условии

$$W(x, \Lambda_{\min}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_{\min}}} \exp \left[-\frac{(x - \Lambda_{\min}/2)^2}{2\Lambda_{\min}} \right]$$

и граничных условиях $W(x, \lambda)|_{x=u} = 0$ при $\lambda \in (\Lambda_{\min}, \Lambda]$, $W(x, \lambda)|_{x=v} = 0$ при $\lambda \in [\Lambda, \Lambda_{\max}]$, $W(x, \lambda)|_{x=-\infty} = 0$.

Применяя метод отражения с переменной знака [7], находим решение уравнения (21). Если $\Lambda \leq \lambda_0 \leq \lambda$, то

$$W(x, \lambda) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - \Lambda)(\Lambda - \Lambda_{\min})\Lambda_{\min}}} \times \\ \times \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \exp \left[-\frac{(x_2 - x_3 - (\lambda_0 - \Lambda)/2)^2}{2(\lambda_0 - \Lambda)} \right] - \right. \\ \left. - \exp(x_2) \exp \left[-\frac{(x_2 + x_3 + (\lambda_0 - \Lambda)/2)^2}{2(\lambda_0 - \Lambda)} \right] \right\} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \exp \left[-\frac{(x_3 - v + x + (\lambda - \lambda_0)/2)^2}{2(\lambda - \lambda_0)} \right] - \right. \\
& \left. - \exp(-x_3) \exp \left[-\frac{(x_3 + v - x - (\lambda - \lambda_0)/2)^2}{2(\lambda - \lambda_0)} \right] \right\} \times \\
& \times \left\{ \exp \left[-\frac{(x_1 - u + v - x_2 - (\Lambda - \lambda_{\min})/2)^2}{2(\Lambda - \lambda_{\min})} \right] - \right. \\
& \left. - \exp(x_1) \exp \left[-\frac{(x_1 + u - v + x_2 + (\Lambda - \lambda_{\min})/2)^2}{2(\Lambda - \lambda_{\min})} \right] \right\} \times \\
& \times \exp \left[-\frac{(u - x_1 - \Lambda_{\min}/2)^2}{2\Lambda_{\min}} \right] dx_1 dx_2 dx_3, \quad (22a)
\end{aligned}$$

соответственно, при $\lambda_0 < \Lambda \leq \lambda$

$$\begin{aligned}
W(x, \lambda) = & \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{(\lambda - \Lambda)(\Lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - \Lambda_{\min})\Lambda_{\min}}} \times \\
& \times \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \exp \left[-\frac{(x_3 - v + x + (\lambda - \Lambda)/2)^2}{2(\lambda - \Lambda)} \right] - \right. \\
& \left. - \exp(-x_3) \exp \left[-\frac{(x_3 + v - x - (\lambda - \Lambda)/2)^2}{2(\lambda - \Lambda)} \right] \right\} \times \\
& \times \left\{ \exp \left[-\frac{(x_2 - u + v - x_3 + (\Lambda - \lambda_0)/2)^2}{2(\Lambda - \lambda_0)} \right] - \right. \\
& \left. - \exp(-x_2) \exp \left[-\frac{(x_2 + u - v + x_3 - (\Lambda - \lambda_0)/2)^2}{2(\Lambda - \lambda_0)} \right] \right\} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \exp \left[- \frac{(x_1 - x_2 - (\lambda_0 - \Lambda_{\min})/2)^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_{\min})} \right] - \right. \\
& \left. - \exp(x_1) \exp \left[- \frac{(x_1 + x_2 + (\lambda_0 - \Lambda_{\min})/2)^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_{\min})} \right] \right\} \times \\
& \times \exp \left[- \frac{(u - x_1 - \Lambda_{\min}/2)^2}{2\Lambda_{\min}} \right] dx_1 dx_2 dx_3.
\end{aligned} \quad (22b)$$

Подставляя (22) в (20), для вспомогательной функции (18) можем записать при $\Lambda \leq \lambda_0$

$$\begin{aligned}
F(u, v, \Lambda) = & \frac{1}{2\pi \sqrt{(\lambda_0 - \Lambda)\Lambda}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \exp \left[- \frac{(x_3 - x_1 + (\lambda_0 - \Lambda)/2)^2}{2(\lambda_0 - \Lambda)} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{(v - x_1 - \Lambda/2)^2}{2\Lambda} \right\} \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{2x_1 x_2}{\lambda_0 - \Lambda} \right] \right\} \left\{ \Phi \left[\frac{(\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2 + x_2}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \lambda_0}} \right] - \right. \\
& \left. - \exp(-x_2) \Phi \left[\frac{(\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2 - x_2}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \lambda_0}} \right] \right\} \left\{ \Phi \left[\frac{u\Lambda + (x_1 - v)\Lambda_{\min}}{\sqrt{(\Lambda - \Lambda_{\min})\Lambda\Lambda_{\min}}} \right] - \right. \\
& \left. - \exp \left[- \frac{2u(x_1 + u - v)}{2\Lambda} \right] \Phi \left[\frac{u\Lambda - (x_1 + 2u - v)\Lambda_{\min}}{\sqrt{(\Lambda - \Lambda_{\min})\Lambda\Lambda_{\min}}} \right] \right\} dx_1 dx_2
\end{aligned} \quad (23a)$$

и при $\lambda_0 < \Lambda$

$$\begin{aligned}
F(u, v, \Lambda) = & \frac{1}{2\pi \sqrt{(\Lambda - \lambda_0)\lambda_0}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \Phi \left[\frac{(\Lambda_{\max} - \Lambda)/2 + x_2}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \Lambda}} \right] - \right. \\
& \left. - \exp(-x_2) \Phi \left[\frac{(\Lambda_{\max} - \Lambda)/2 - x_2}{\sqrt{\Lambda_{\max} - \Lambda}} \right] \right\} \times \\
& \times \exp \left[- \frac{(x_2 - x_1 + u - v - (\Lambda - \lambda_0)/2)^2}{2(\Lambda - \lambda_0)} - \frac{(u - x_1 - \lambda_0/2)^2}{2\lambda_0} \right] \times
\end{aligned}$$

$$\times \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{2x_1(x_2 + u - v)}{(\Lambda - \lambda_0)} \right] \right\} \left\{ \Phi \left[\frac{u(\lambda_0 - \Lambda_{\min}) + x_1 \Lambda_{\min}}{\sqrt{(\lambda_0 - \Lambda_{\min}) \Lambda_{\min} \lambda_0}} \right] - \right. \\ \left. - \exp \left(- \frac{2ux_1}{\lambda_0} \right) \Phi \left[\frac{u(\lambda_0 - \Lambda_{\min}) - x_1 \Lambda_{\min}}{\sqrt{(\lambda_0 - \Lambda_{\min}) \Lambda_{\min} \lambda_0}} \right] \right\} dx_1 dx_2. \quad (23b)$$

Плотность вероятности $W_q(\Lambda | \lambda_0)$ оценки (17) выражается через вспомогательную функцию (18) формулой [6]

$$W_q(\Lambda | \lambda_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 F(u, v, \Lambda)}{\partial u \partial \Lambda} \right]_{v=u} du.$$

Подставляя сюда (23), после несложных, но громоздких преобразований найдем плотность вероятности вспомогательной оценки (17), записав ее в компактной форме

$$W_q(\Lambda | \lambda_0) = \\ = \frac{1}{2} \left\{ \Psi((\lambda_0 - \Lambda)/2, (\lambda_0 - \Lambda_{\min})/2, (\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2), \Lambda_{\min} \leq \Lambda < \lambda_0, \right. \\ \left. \Psi((\Lambda - \lambda_0)/2, (\Lambda_{\max} - \lambda_0)/2, (\lambda_0 - \Lambda_{\min})/2), \lambda_0 \leq \Lambda \leq \Lambda_{\max} \right\}, \quad (24)$$

где

$$\Psi(y, y_1, y_2) = (2\sqrt{\pi} y^{3/2})^{-1} \times \\ \times \left\{ \Phi \left[\sqrt{(y_1 - y)/2} \right] + \exp \left[- \frac{(y_1 - y)}{4} \right] / \sqrt{\pi(y_1 - y)} \right\} \times \\ \times \int_0^{\infty} x \exp \left[- \frac{(x + y)^2}{4y} \right] \left\{ \Phi \left[(y_2 + x) / \sqrt{2y_2} \right] - \exp(-x) \Phi \left[(y_2 - x) / \sqrt{2y_2} \right] \right\} dx.$$

Выражение (24) позволяет найти плотность вероятности $W(\hat{\chi} | \chi_0)$ оценки (4) площади неоднородного изображения. Действительно, учитывая (14), имеем $W(\hat{\chi} | \chi_0) = W_q[\mathcal{Q}(\chi) | \mathcal{Q}(\chi_0)] \mathcal{Q}'(\chi)$. На основе этого выражения, а также используя (24), запишем условное рассеяние (5) оценки площади (4)

$$V(\hat{\chi} | \chi_0) = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} (\chi - \chi_0)^2 W_q[\mathcal{Q}(\chi) | \mathcal{Q}(\chi_0)] \mathcal{Q}'(\chi) d\chi, \quad (25)$$

где $Q'(\chi) = dQ(\chi)/d\chi$, а отношение сигнал/шум $Q(\chi)$ определяется из (12).

Точные выражения для характеристик оценки максимального правдоподобия (4) площади неоднородного изображения довольно громоздки, и расчет по ним возможен только численными методами. Поэтому рассмотрим асимптотическое поведение этих характеристик при увеличении отношения сигнал/шум $z^2 = Q(\chi_0)$ для наблюдаемого изображения. Обозначим

$$q_{\min} = Q(\chi_{\min})/Q(\chi_0) < 1, q_{\max} = Q(\chi_{\max})/Q(\chi_0) > 1$$

при $\chi_0 \in (\chi_{\min}, \chi_{\max})$.

Перейдем в (24) к новой переменной

$$\kappa = [Q(\chi) - Q(\chi_0)]/2 \quad (26)$$

причем $-(1 - q_{\min})z^2/2 < \kappa < (q_{\max} - 1)z^2/2$

Плотность вероятности для переменной (26) запишется в виде:

$$W_q(\kappa) = \begin{cases} \Psi[-\kappa, (1 - q_{\min})z^2/2, (q_{\max} - 1)z^2/2], & -(1 - q_{\min})z^2/2 \leq \kappa < 0, \\ \Psi[\kappa, (q_{\max} - 1)z^2/2, (1 - q_{\min})z^2/2], & 0 \leq \kappa \leq (q_{\max} - 1)z^2/2. \end{cases}$$

Полагая $z \rightarrow \infty$, находим предельную плотность вероятности для переменной (26)

$$W_0(\kappa) = 3 \exp(2|\kappa|) \left[1 - \Phi(3\sqrt{|\kappa|/2}) \right] + \Phi(\sqrt{|\kappa|/2}) - 1, \quad (27)$$

где $\kappa \in (-\infty, +\infty)$.

По мере роста отношения сигнал/шум z^2 для наблюдаемого изображения оценка максимального правдоподобия площади неоднородного изображения $\hat{\chi}$ (4) сходится к истинному значению площади χ_0 в среднеквадратическом [5, 6]. Поэтому при достаточно больших z допустима аппроксимация переменной (26) выражением $\kappa \approx (\chi - \chi_0)Q'(\chi_0)/2$. Следовательно, при $z \rightarrow \infty$ плотность вероятности нормированной ошибки максимально правдоподобной оценки площади изображения

$$\hat{\kappa} = (\hat{\chi} - \chi_0)Q'(\chi_0)/2 \quad (28)$$

сходится к $W_0(\kappa)$ (27).

Впервые плотность вероятности (27) была получена, по-видимому, в [8], а ее свойства изучены и описаны в [9]. Плотность вероятности (27) существенно отличается от гауссовской, имеет нулевые математическое ожидание и коэффициент асимметрии, обладает дисперсией 13/2 и коэффициентом эксцесса

$1779/169 = 10,53$. Используя (27) и (28), для асимптотического значения условного рассеяния (5) максимально правдоподобной оценки площади можно записать

$$V_0(\hat{\chi}|\chi_0) = 2Q(\chi_0)^{-2}. \quad (29)$$

Если интеграл (12) удастся вычислить явно, то производную $Q(\chi)$ можно найти прямым дифференцированием. Если же интегрирование в (12) выполнить не удастся — вследствие сложности функции $F(x, y)$ или сложности формы области $\Omega(\chi)$, то производную $Q(\chi)$ можно выразить через контурный интеграл.

Пусть заданы уравнения $x = f(\varphi)$, $y = \psi(\varphi)$, ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) контура C_E , ограничивающего область Ω_E . Площадь области Ω_E равна единице, а ее форма повторяет форму области Ω , занимаемой изображением (2). Тогда уравнения контура $C(\chi)$, ограничивающего область $\Omega(\chi)$, имеют вид $x = f(\varphi)\sqrt{\chi}$, $y = \psi(\varphi)\sqrt{\chi}$.

Перепишем (12) в полярной системе координат как

$$Q(\chi) = \frac{2}{N_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\chi(f^2(\varphi) + \psi^2(\varphi))}} F^2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Найдем производную функции $Q(\chi)$ по χ

$$Q'(\chi) = \frac{1}{N_0} \int_0^{2\pi} F^2 \left(\sqrt{\chi(f^2(\varphi) + \psi^2(\varphi))} \times \right. \\ \left. \times \cos \varphi, \sqrt{\chi(f^2(\varphi) + \psi^2(\varphi))} \sin \varphi \right) (f^2(\varphi) + \psi^2(\varphi)) d\varphi.$$

Учитывая, что $\operatorname{tg} \varphi = y/x = \psi(\varphi)/f(\varphi)$ и

$$\frac{\psi'(\varphi)f(\varphi) - f'(\varphi)\psi(\varphi)}{f^2(\varphi)} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\psi^2(\varphi) + f^2(\varphi)}{f^2(\varphi)},$$

получаем

$$\begin{aligned} \psi'(\varphi)f(\varphi) - f'(\varphi)\psi(\varphi) &= f^2(\varphi) + \psi^2(\varphi); xdy = \chi \psi'(\varphi)f(\varphi)d\varphi; \\ ydx &= \chi f'(\varphi)\psi(\varphi)d\varphi; \chi[f^2(\varphi) + \psi^2(\varphi)]d\varphi = \\ &= \chi[\psi'(\varphi)f(\varphi) - f'(\varphi)\psi(\varphi)]d\varphi = xdy - ydx. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, находим выражение для производной в виде интеграла по контуру

$$\mathcal{Q}'(\chi) = \frac{1}{N_0 \chi} \int_{C(\chi)} F^2(x, y)(x dy - y dx), \quad (30)$$

где $C(\chi)$ — контур, ограничивающий область $\Omega(\chi)$, занятую изображением с площадью χ .

Формулы (29), (30) свидетельствуют, что асимптотическое рассеяние оценки максимального правдоподобия площади зависит только от интеграла по контуру $C(\chi_0)$, который ограничивает область $\Omega(\chi_0)$, занимаемую наблюдаемым изображением (2). Этот интеграл «суммирует» значения квадрата скачка интенсивности изображения на контуре $C(\chi_0)$ по всем точкам этого контура. Соответственно, асимптотическое значение рассеяния (29) оценки максимального правдоподобия площади не зависит, от того, какие значения внутри контура $C(\chi_0)$, т. е. во внутренних точках области $\Omega(\chi_0)$, принимает интенсивность изображения $F(x, y)$.

На основании предельной плотности вероятности (27) можно получить более точное, чем (29), выражение для условного рассеяния максимально правдоподобной оценки площади. Для этого аппроксимируем плотность вероятности оценки на ограниченном интервале $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$ выражением

$$W_a(\chi|\chi_0) = \frac{\mathcal{Q}'(\chi) W_0[(\mathcal{Q}(\chi) - \mathcal{Q}(\chi_0))/2]}{\int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \mathcal{Q}'(\chi) W_0[(\mathcal{Q}(\chi) - \mathcal{Q}(\chi_0))/2] d\chi}$$

Соответственно можем записать более простое, чем (25), но более точное, чем (29), выражение для условного рассеяния максимально правдоподобной оценки площади

$$V_a(\hat{\chi}|\chi_0) = \frac{\int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} (\chi - \chi_0)^2 \mathcal{Q}'(\chi) W_0[(\mathcal{Q}(\chi) - \mathcal{Q}(\chi_0))/2] d\chi}{\int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \mathcal{Q}'(\chi) W_0[(\mathcal{Q}(\chi) - \mathcal{Q}(\chi_0))/2] d\chi}. \quad (31)$$

Конкретизируем полученные общие результаты для изображения в форме эллипса, интенсивность которого изменяется линейно вдоль оси x . Уравнение контура, ограничивающего область $\Omega(\chi)$, которую занимает изображение с площадью χ имеет вид $x^2/a^2 + y^2/b^2 = \chi$, где $ab = \chi/\pi$. Обозначая эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ запишем интенсивность изображения как

$$F(x, y) = \frac{4F_H}{\sqrt{(1-q)^2 + 4(1+q)^2}} \left[\frac{(1-q)\sqrt{\pi(1-\epsilon^2)^{1/4}}}{2\sqrt{\chi_{\max}}} x + \frac{(1+q)}{2} \right]. \quad (32)$$

Здесь параметр F_H характеризует амплитуду интенсивности, параметр $q = F(-a_{\max}, 0) / F(a_{\max}, 0)$ — наклон интенсивности изображения, а параметр $a_{\max}$ определяет большую полуось эллипса при максимальной площади эллипса $\chi_{\max}$. Функция (32), описывающая интенсивность изображения, нормирована так, чтобы энергия изображения с максимальной площадью $E_{\max} = \iint_{\Omega(\chi_{\max})} F^2(x, y) dx dy = F_H^2 \chi_{\max}$ не зависела от наклона интенсивности

изображения и тем самым была возможность сравнивать точность оценок площади неоднородных изображений с различными наклонами интенсивности. Подставляя интенсивность (32) в (12), находим отношение сигнал/шум

$$Q(\chi) \equiv \lambda = z_H^2 \left[\frac{(1-q)^2}{16} \eta^2 + \frac{(1+q)^2}{4} \eta \right] / \left[\frac{(1-q)^2}{16} + \frac{(1+q)^2}{4} \right], \quad (33)$$

где $\eta = \chi / \chi_{\max}$ — нормированная площадь, $\eta \in [1/g; 1]$, $g = \chi_{\max} / \chi_{\min}$ — динамический диапазон изменения неизвестной площади, $z_H^2 = 2F_H^2 \chi_{\max} / N_0 = 2E_{\max} / N_0$ — отношение сигнал/шум для однородного

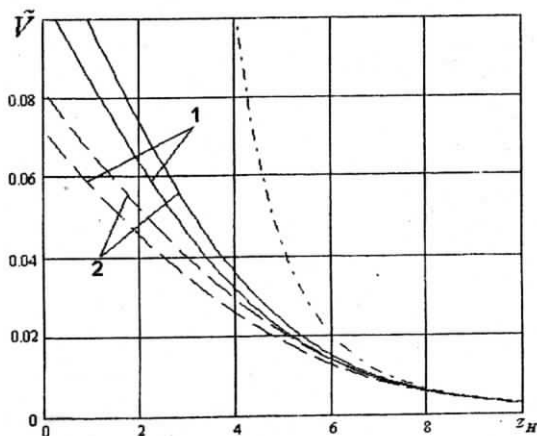


Рис. 1

изображения с интенсивностью F_H и площадью $\chi_{\max}$. Отметим, что отношение сигнал/шум (33) не зависит от эксцентриситета эллипса ϵ .

На рис. 1 приведены зависимости нормированного условного рассеяния $\tilde{V} = V(\hat{\chi} | \chi_0) / \chi_{\max}^2$ максимально правдоподобной оценки площади эллипса с интенсивностью (32) от отношения сигнал/шум z_H при $\chi_0 / \chi_{\max} = 1/2$ и $q = 10$. Сплошными линиями показаны точные зависимости рассеяния, рассчитанные с использованием выражений (24), (25). Штрих-пунктирная линия изображает асимптотическую зависимость рассеяния, рассчитанную с использованием (29). Штриховыми линиями показаны асимптотические зависимости нормированного условного рассеяния, рассчитанные с помощью (27), (32). Кривые 1 на рисунке соответствуют динамическому диапазону изменения неизвестной площади $g = 10$, а кривые 2 — $g = 100$. Как следует из рисунка, выражение (32) обеспечивает более высокую точность аппроксимации точных формул (24), (25), чем простая асимптотическая формула (29). Заметим также, что при не слишком больших отношениях сигнал/шум, увеличение динамического диапазона изменения неизвестной площади приводит к росту рассеяния оценки. Однако, асимптотическое значение рассеяния (29) оценки (4) не зависит от динамического диапазона изменения неизвестной площади.

Работа выполнена при поддержке CRDF, Минобразования РФ и РФФИ (проекты VZ-010-0, T02-3.1-71 и 03-01-00145).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Островитянов Р. В., Басалов В. Ф. Статистическая теория радиолокации протяженных объектов. — М.: Радио и связь, 1982. — 232 с.
2. Красильников Н. Н. Теория передачи и восприятия изображений. — М.: Радио и связь, 1986. — 348 с.
3. Галун С. А., Зюльков А. В., Трифонов А. П. Оценка площади оптического изображения на фоне шумов // Автометрия. — 1983. — №1. — С. 81—83.
4. Нечаев Е. П., Трифонов А. П. Оценка площади оптических изображений при неизвестных интенсивностях сигнала и шума // Автометрия. — 1990. — №2. — С. 31—36.
5. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио. — 1978. — 296 с.
6. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь. — 1986. — 264 с.
7. Тихонов В. И., Мионов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио. — 1977. — 432 с.
8. Терентьев А. С. Распределение вероятности временного положения абсолютного максимума на выходе согласованного фильтра // Радиотехника и электроника. — 1968. — Т. 13. — № 4. — С. 652—657.
9. Трифонов А. П. Разрывные модели сигналов и оценка их параметров // Прикладная теория случайных процессов и полей. — Ульяновск: УлГТУ. — 1995. — С. 164—214.

Воронежский госуниверситет.

Поступила в редакцию 21.01.03.