

233

ISSN 0021-3470



ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ТОМ 46

11-12
ноябрь-декабрь

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

2003

5. Трифонов А. П., Нечаев Е. П., Парфёнов В. И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. — Воронеж : ВГУ, 1991. — 246 с.

6. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М. : Радио и связь, 1986. — 264 с.

7. Погребной В. А. Бортовые системы обработки сигналов. — Киев : Наукова думка, 1984. — 216 с.

Воронежский государственный ун-т.

Поступила в редакцию 06.05.03.

УДК 621.391

ТРИФОНОВ А. П., БЕСПАЛОВА М. Б.

КВАЗИПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА ПЕРИОДА СЛЕДОВАНИЯ ВИДЕОИМПУЛЬСОВ

Определены потери в точности оценки периода следования вследствие отклонения принятой при синтезе модели последовательности видеоимпульсов от истинной.

Последовательности видеоимпульсов широко применяются в различных радиоэлектронных системах. В [1—3] рассмотрены алгоритмы оценки максимального правдоподобия (ОМП) периода следования, которые позволяют, по крайней мере в принципе, преодолеть априорную параметрическую неопределенность, возникающую вследствие наличия неинформативных параметров у наблюдаемой последовательности импульсов. Однако, если число неинформативных параметров велико, то возникают существенные трудности при аппаратной или программной реализации ОМП периода следования. Эти трудности становятся еще более значительными, если априорная неопределенность является непараметрической. В результате модель последовательности видеоимпульсов и, в частности, их форма, которая используется при синтезе ОМП (т. е. ожидаемая или предполагаемая модель) может отличаться от реальной (истинной) наблюдаемой последовательности видеоимпульсов. В этой связи представляет интерес анализ потерь в точности оценки периода следования вследствие отклонения принятой при синтезе алгоритма оценки модели последовательности от истинной.

Положим, что на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 в течение интервала времени $[0, T]$ наблюдается последовательность из N видеоимпульсов

$$\tilde{s}_0(t, \theta_0) = \sum_{k=0}^{N-1} s_{0k}(t - k\theta_0), \quad (1)$$

где функция $s_{0k}(\cdot)$ описывает форму k -го импульса, а θ_0 — неизвестный период следования, подлежащий оценке.

В общем случае функции $s_{0k}(\cdot)$ известны неточно, возможно, вследствие наличия неинформативных параметров или вследствие неконтролируемых искажений видеоимпульсов в процессе передачи и наблюдения. Поэтому, для синтеза алгоритма оценки периода следования по методу максимального правдоподобия используем последовательность видеоимпульсов вида

$$\tilde{s}_1(t, \theta) = \sum_{k=0}^{N-1} s_{1k}(t - k\theta), \quad (2)$$

где функция $s_{1k}(\cdot)$ описывает ожидаемую (предполагаемую) форму k -го видеоимпульса, причем в общем случае $s_{1k}(t) \neq s_{0k}(t)$ в (1).

В соответствии с методом максимального правдоподобия [4] для получения оценки периода следования необходимо формировать логарифм функционала отнесения правдоподобия (ФОП). Положим, что отдельные импульсы последовательностей (1), (2) не перекрываются и интервал наблюдения больше длительности всей последовательности, так что $T > N \max(\theta, \theta_0)$. Тогда, с точностью до не существенного слагаемого, логарифм ФОП можно записать в виде [4]

$$L(\theta) = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T x(t) s_{1k}(t - k\theta) dt. \quad (3)$$

Здесь $x(t) = \tilde{s}_0(t, \theta_0) + n(t)$ — реализация наблюдаемых данных. Эта реализация содержит истинную последовательность видеоимпульсов (1), отличающуюся от ожидаемой последовательности (2), для которой записан логарифм ФОП (3). Поэтому оценка $\hat{\theta}$, определяемая как положение абсолютного (наибольшего) максимума функции (3), не является ОМП периода следования видеоимпульсов (1). Эту оценку можно назвать квазиправдоподобной оценкой (КПО) [5], поскольку она совпадает с ОМП при $s_{1k}(t) \equiv s_{0k}(t)$, т. е. когда форма видеоимпульса ожидаемой последовательности (2) полностью совпадает с формой видеоимпульса истинной последовательности (1).

Для определения характеристик КПО периода следования, подставим в (3) реализацию наблюдаемых данных и перепишем (3) в виде суммы сигнальной и шумовой функции [4]

$$L(\theta) = S(\theta) + N(\theta), \quad (4)$$

где

$$S(\theta) = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T s_{0k}(t - k\theta_0) s_{1k}(t - k\theta) dt, \quad (5)$$

$$N(\theta) = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T n(t) s_{1k}(t - k\theta) dt. \quad (6)$$

Шумовая функция (6) является реализацией случайного гауссовского процесса, причем его первые два момента имеют вид

$$\langle N(\theta) \rangle = 0, B(\theta_1, \theta_2) = \langle N(\theta_1) N(\theta_2) \rangle = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T s_{1k}(t - k\theta_1) s_{1k}(t - k\theta_2) dt. \quad (7)$$

При выводе сигнальной (5), корреляционной (7) и шумовой (6) функций, предполагалось, что их аргументы удовлетворяют условию $\max(|\theta - \theta_0|, |\theta_1 - \theta_2|) < \min(\theta_0, \theta_1, \theta_2) / N$. Поэтому формулы (5), (7) описывают центральные пики соответствующих функций.

Так как по определению КПО функция (4) при $\theta = \hat{\theta}$ обращается в абсолютный максимум, КПО $\hat{\theta}$ является решением уравнения:

$$\frac{d}{d\theta} [S(\theta) + N(\theta)]_{\hat{\theta}} = 0. \quad (8)$$

Если шумовая функция в (8) отсутствует, т. е. $N(\theta) \equiv 0$, то функция (5) достигает максимума в некоторой точке $\tilde{\theta}$, причем в общем случае $\tilde{\theta} \neq \theta_0$. Уравнение для определения $\tilde{\theta}$ можно записать как

$$\left[\frac{dS(\theta)}{d\theta} \right]_{\tilde{\theta}} = -\frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_{1k}(t)}{dt} s_{1k} [t + k(\theta_0 - \tilde{\theta})] dt = 0.$$

Поскольку $\max S(\theta) = S(\tilde{\theta})$, то выходное отношение сигнал/шум [4] получаем в виде

$$z^2 = S^2(\tilde{\theta}) / B(\tilde{\theta}, \tilde{\theta}) = \frac{2}{N_0} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} s_{1k}(t) s_{0k} [t + k(\theta_0 - \tilde{\theta})] dt \right\}^2 \left[\sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} s_{1k}^2(t) dt \right]^{-1}.$$

Положим, что это отношение сигнал/шум достаточно велико, так что КПО периода следования обладает высокой апостериорной точностью. Тогда решение уравнения (8) можно найти методом малого параметра [4], в качестве которого используем величину $1/z$. Ограничиваясь первым приближением, получаем смещение (систематическую ошибку) и дисперсию КПО периода следования

$$b(\hat{\theta}|\theta_0) = \langle \hat{\theta} - \theta_0 \rangle = \tilde{\theta} - \theta_0, \quad (9)$$

$$D(\hat{\theta}|\theta_0) = \langle (\hat{\theta} - \tilde{\theta})^2 \rangle = \left\{ \frac{\partial^2 B(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \left[\frac{d^2 S(\theta)}{d\theta^2} \right]^{-2} \right\}_{\tilde{\theta}}. \quad (10)$$

Здесь, согласно (5) и (7),

$$\left[\frac{\partial^2 B(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right]_{\tilde{\theta}} = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{ds_{1k}(t)}{dt} \right]^2 dt,$$

$$\left[\frac{d^2 S(\theta)}{d\theta^2} \right]_{\tilde{\theta}} = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 s_{1k}(t)}{dt^2} s_{0k} [t + k(\theta_0 - \tilde{\theta})] dt.$$

Подставляя эти производные в (10) для дисперсии КПО, находим

$$D(\hat{\theta}|\theta_0) = \frac{N_0}{2} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{ds_{1k}(t)}{dt} \right]^2 dt \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 s_{1k}(t)}{dt^2} s_{0k} [t + k(\theta_0 - \tilde{\theta})] dt \right\}^{-2}. \quad (11)$$

Отметим, что согласно (9) КПО периода следования в общем случае смещенная.

Положим далее, что импульсы $s_{0k}(t)$ последовательности (1) и импульсы $s_{1k}(t)$ последовательности (2) в разных периодах повторения отличаются только амплитудами, так что

$$s_{0k}(t) = a_{0k} s_0(t), s_{1k}(t) = a_{1k} s_1(t) \quad (12)$$

и, в общем случае, $a_{0k} \neq a_{1k}$. Подставляя (12) в (11), находим

$$D(\hat{\theta}|\theta_0) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{ds_1(t)}{dt} \right]^2 dt \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{N-1} k^2 a_{0k}^2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} k^2 a_{0k} a_{1k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 s_1(t)}{dt^2} s_0 [t + k(\theta_0 - \tilde{\theta})] dt \right\}^{-2}. \quad (13)$$

Найденные выражения для смещения (9) и дисперсии (13) КПО периода следования существенно упрощаются, если формы элементарных импульсов последовательностей (1) и (2) описываются четными или нечетными функциями, так что

$$s_i(t) = s_i(-t) \quad (14)$$

или

$$s_i(t) = -s_i(-t), \quad i = 0, 1 \quad (15)$$

В этом случае решение уравнения (5) совпадает с истинным значением периода следования и $\tilde{\theta} = \theta_0$. Поэтому при выполнении (14) или (15) КПО периода

следования несмещенная и обладает дисперсией, которую получаем, полагая в (13) $\tilde{\theta} = \theta_0$

$$D(\hat{\theta}|\theta_0) = \frac{N_0}{2} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} k^2 a_{1k}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{ds_1(t)}{dt} \right]^2 dt}{\left(\sum_{k=0}^{N-1} k^2 a_{0k} a_{1k} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_0(t)}{dt} \frac{ds_1(t)}{dt} dt \right]^2}. \quad (16)$$

Для сравнения приведем дисперсию ОМП периода следования $D_N(\theta)$ [3], переписав ее в виде

$$D_N(\theta) = N_0 / 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{ds_0(t)}{dt} \right]^2 dt \sum_{k=0}^{N-1} k^2 a_{0k}^2. \quad (17)$$

Сопоставление (11), (13), (16) и (17) позволяет определить потери в точности оценки периода следования за счет отличия принятой при синтезе модели (2) от истинной последовательности (1). В частности, если выполняется (14) или (15), то проигрыш в точности КПО по сравнению с точностью ОМП можно охарактеризовать отношением дисперсий (16) и (17)

$$\chi = \frac{D(\hat{\theta}|\theta_0)}{D_N(\theta)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{ds_1(t)}{dt} \right]^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{ds_0(t)}{dt} \right]^2 dt \sum_{k=0}^{N-1} k^2 a_{1k}^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 a_{0k}^2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_0(t)}{dt} \frac{ds_1(t)}{dt} dt \right]^2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} k^2 a_{0k} a_{1k} \right)^2} = \frac{1}{\rho_a^2 \rho_s^2}. \quad (18)$$

Здесь обозначено

$$\rho_a = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} k^2 a_{0k} a_{1k}}{\left(\sum_{k=0}^{N-1} k^2 a_{1k}^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 a_{0k}^2 \right)^{1/2}}, \quad (19)$$

$$\rho_s = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_0(t)}{dt} \frac{ds_1(t)}{dt} dt}{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{ds_1(t)}{dt} \right]^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{ds_0(t)}{dt} \right]^2 dt \right\}^{1/2}}. \quad (20)$$

Величину ρ_s можно интерпретировать как коэффициент взаимной корреляции производных элементарных импульсов наблюдаемой (1) и ожидаемой

(предполагаемой) (2) последовательностей. Используя неравенство Буняковского—Шварца, нетрудно показать, что всегда $|\rho_s| \leq 1$ и $\rho_a \leq 1$. Поэтому, $\chi \geq 1$ и точность КПО в общем случае уступает точности ОМП.

Рассмотрим, как влияет отличие амплитуд импульсов наблюдаемой и ожидаемой последовательностей на величину проигрыша в точности КПО. Для этого в (18) и (20) положим $s_1(t) \equiv s_0(t)$, так что $\rho_s = 1$. Тогда (18) принимает вид

$$\chi = 1/\rho_a^2, \quad (21)$$

где ρ_a определяется из (19).

Если в (19) положить $a_{0k} = a_0, a_{1k} = a_1$, то даже при $a_0 \neq a_1$ величина $\rho_a = 1$ и проигрыш в точности КПО отсутствует. Однако, возможна ситуация, когда при постоянных амплитудах отличается число импульсов наблюдаемой и ожидаемой последовательностей. Рассмотрим, как влияет отклонение числа импульсов ожидаемой последовательностей (2) от истинного числа импульсов наблюдаемой последовательности (1) на точность КПО периода следования. Для этого интерпретируем (1) как последовательность с бесконечным числом импульсов, у которой одинаковы и отличны от нуля только первые N амплитуд импульсов, т. е.

$$a_{0k} = a_0, k = \overline{0, N-1}, a_{0k} = 0, k > N-1 \quad (22)$$

Аналогично, ожидаемую (предполагаемую) последовательность (2) так же будем интерпретировать как бесконечную последовательность, у которой одинаковы и отличны от нуля только первые N_1 амплитуд импульсов, т. е.

$$a_{1k} = a_1, k = \overline{0, N_1-1}, a_{1k} = 0, k > N_1-1 \quad (23)$$

Обозначая $v = \min(N, N_1)$ и подставляя (22), (23) в (19), получаем

$$\rho_a = \frac{v(3v+1)(v-1)}{\sqrt{NN_1(3N+1)(3N_1+1)(N-1)(N_1-1)}} \quad (24)$$

Это выражение несколько упрощается, если число импульсов наблюдаемой и ожидаемой последовательностей достаточно велико, так что $v \gg 1$. Тогда (24) можно переписать как

$$\rho_a \approx v^3 (NN_1)^{-3/2} \quad (25)$$

Подставляя (25) в (21) для проигрыша в точности КПО периода следования по сравнению с точностью ОМП, за счет отклонения числа импульсов N_1 ожидаемой (предполагаемой) последовательности от истинного числа импульсов N наблюдаемой последовательности получаем выражение

$$\chi \equiv \begin{cases} (N / N_1)^3, N > N_1; \\ (N_1 / N)^3, N < N_1. \end{cases}$$

Рассмотрим далее влияние отличия формы элементарных импульсов ожидаемой последовательности и принимаемой последовательности на точность КПО периода следования. Положим, что при этом в (22) и (23) $N_1 = N$, так что в (18) величина $\rho_a = 1$ (24). Тогда (18) принимает вид

$$\chi = 1 / \rho_s^2, \quad (26)$$

где ρ_s определяется из (20).

Конкретизируем аналитическое описание формы ожидаемого и принимаемого видеоимпульсов, положив

$$s_i(t) = a_i f_i(t / \tau_i), \quad i = 0, 1 \quad (27)$$

Здесь $a_i = \max s_i(t)$ — амплитуда видеоимпульса, $\tau_i = \int_{-\infty}^{\infty} s_i^2(t) dt / a_i^2$ — его эквивалентная длительность, а функция $f_i(x)$ описывает форму видеоимпульса и удовлетворяет условиям

$$f_i(x) = f_i(-x), \max f_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i^2(x) dx = 1 \quad (28)$$

Подставляя (27) в (20), а (20) в (26) и учитывая (28) для проигрыша в точности КПО периода следования по сравнению с точностью ОМП, получаем

$$\chi = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [f_0'(x)]^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} [f_1'(x)]^2 dx}{\kappa \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_0'(x) f_1'(x) dx \right]^2}, \quad (29)$$

где $f_i'(x) = df_i(x) / dx$, $\kappa = \tau_1 / \tau_0$, $i = 0, 1$

Пусть принимаемая последовательность (1) состоит из видеоимпульсов колокольной формы так, что

$$f_0(x) = f_G(x) = \exp(-\pi x^2 / 2), \quad (30)$$

а ожидаемая последовательность (2), на основе которой синтезируется алгоритм оценки, состоит из видеоимпульсов квазипрямоугольной формы [6].

$$f_1(x) = f_Q(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{\pi}{2\delta^2}\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right], & x > \alpha/2, \\ 1, & |x| < \alpha/2, \\ \exp\left[-\frac{\pi}{2\delta^2}\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2\right], & x < -\alpha/2, \end{cases} \quad \alpha = 1 - \delta. \quad (31)$$

Здесь параметр $\delta \leq 1$ определяет относительную долю полной энергии импульса (31), сосредоточенную в его фронтах. В частности, при $\delta = 1$ квазипрямоугольный импульс (31) принимает колокольную форму и совпадает с (30), а при $\delta \rightarrow 0$ он переходит в прямоугольный импульс. Подставляя (30) и (31) в (29), для проигрыша в точности КПО имеем

$$\chi_1(\kappa) = \frac{(1 + \kappa^2 \delta^2)^4}{16\delta\kappa^3} \left\{ \alpha \exp\left(-\frac{\pi\kappa^2\alpha^2}{2}\right) + \delta \left[1 + \kappa^2(\delta^2 - \pi\alpha^2) \right] \times \right. \\ \left. \times \exp\left[-\frac{\pi\kappa^2\alpha^2}{2(1 + \kappa^2\delta^2)}\right] \left[1 - \Phi\left(\alpha\delta\kappa^2 \sqrt{\frac{\pi}{1 + \kappa^2\delta^2}}\right) \right] \sqrt{\frac{2}{1 + \kappa^2\delta^2}} \right\}^{-1}$$

Здесь $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности [4].

Зависимости $\chi_1(\kappa)$ при различных значениях параметра δ нанесены на рис. 1 сплошными линиями. Кривая 1 рассчитана при $\delta = 1$, 2 — $\delta = 0,5$, 3 — $\delta = 0,25$. При $\delta = 1$ квазипрямоугольный импульс (31) совпадает с колокольным. Поэтому сплошная кривая 1 на рис. 1 показывает проигрыш в точности КПО периода следования за счет отличия эквивалентной длительности τ_0 принимаемого видеоимпульса и эквивалентной длительности τ_1 ожидаемого видеоимпульса. Сопоставление сплошных кривых 1 и 2, 3 показывает, что по мере уменьшения δ , т. е. по мере увеличения различия формы принимаемого (30) и ожидаемого (31) видеоимпульсов проигрыш в точности КПО быстро возрастает и достигает значительных величин.

Положим теперь, что принимаемая последовательность (1) состоит из импульсов квазипрямоугольной формы, так что $f_0(x) = f_Q(x)$, а ожидаемая последовательность (2) состоит из импульсов колокольной формы, так что $f_1(x) = f_G(x)$. Тогда выражение (29) для проигрыша в точности КПО времени прихода и периода следования переписывается как

$$\chi_2(\kappa) = \frac{(\kappa^2 + \delta^2)^4}{16\delta\kappa^5} \left\{ \alpha \exp\left(-\frac{\pi\alpha^2}{2\kappa^2}\right) + \frac{\delta}{\kappa} \left[\kappa^2 + \delta^2 - \pi\alpha^2 \right] \times \right.$$

$$\times \exp \left[-\frac{\pi \alpha^2}{2(\kappa^2 + \delta^2)} \right] \left[1 - \Phi \left(\frac{\alpha \delta}{\kappa} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa^2 + \delta^2}} \right) \right] \sqrt{\frac{2}{\kappa^2 + \delta^2}} \right]^{-1}$$

Зависимости $\chi_2(\kappa)$ при различных значениях параметра δ нанесены на рис. 1 штриховыми линиями. Кривая 2 рассчитана при $\delta = 0,5$, 3 — $\delta = 0,25$. Из сопоставления сплошных и штриховых кривых 2, 3 следует, что при $\kappa < 1$ ($\tau_1 < \tau_0$) проигрыш в точности КПО уменьшается, если оценка синтезирована для ожидаемого видеоимпульса, у которого фронты несколько более крутые, чем у принимаемого. При $\kappa > 1$ ($\tau_1 > \tau_0$) проигрыш снижается, если оценка синтезирована для ожидаемого видеоимпульса, фронты которого несколько более пологие, чем у принимаемого. Естественно, минимальные потери в точности КПО имеют место, когда форма ожидаемого и принимаемого видеоимпульсов одинакова (кривая 1).

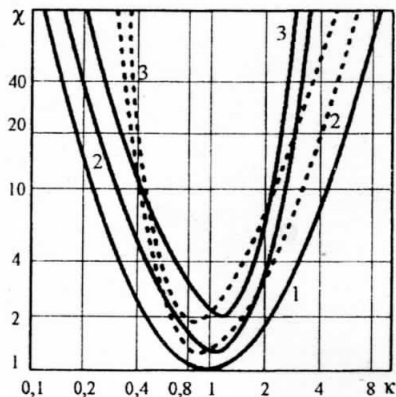


Рис. 1

Таким образом, сформулированы рекомендации по выбору параметров и формы ожидаемого видеоимпульса, которые обеспечивают уменьшение потерь в точности квазиправдоподобной оценки.

Приведенные результаты получены при поддержке CRDF и Минобразования РФ (проект VZ -010-0)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трифонов А. П., Беспалова М. Б. Потенциальная точность оценки периода следования видеоимпульсов с неизвестным временем прихода // Радиотехника. — 1991. — №1. — С. 65—67.
2. Кобзев А. В., Певцов Г. В., Шолохов С. Н. Нижние границы для дисперсий совместного оценивания временных параметров последовательности видеоимпульсов // Радиоэлектроника. — 1995. — №6. — С. 72—74. (Изв. вузов).
3. Беспалова М. Б. Потенциальная точность оценки периода следования видеоимпульсов при наличии неинформативных параметров // Радиоэлектроника. — 1999. — №9. — С. 19—27. (Изв. вузов).
4. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. радио, 1978. — 296 с.
5. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. — М.: Радио и связь, 1983. — 304 с.
6. Ярлыков М. С. Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. — М.: Радио и связь, 1980. — 360 с.