

P 5014 / 7.50,  
2005 / n 4  
(245)

(245)

Том 50, Номер 4

ISSN 0033-8494  
Апрель 2005



# РАДИОТЕХНИКА и ЭЛЕКТРОНИКА

<http://www.melk.ru>



“НАУКА”

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

УДК 621.391

## ОПТИМАЛЬНОЕ СОВМЕСТНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ И ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА

© 2005 г. А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин

Поступила в редакцию 03.10.2002 г.

Рассмотрены байесовский и максимально правдоподобный алгоритмы совместного обнаружения и оценки длительности сигнала, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. Найдены точные характеристики эффективности алгоритма максимального правдоподобия. Методами статистического моделирования на ЭВМ исследована эффективность функционирования байесовского алгоритма. Полученные результаты конкретизированы для импульса со скошенной вершиной.

Задача совместного обнаружения сигнала и оценки его параметров рассмотрена в работах [1–3], где развит общий подход к синтезу соответствующих оптимальных алгоритмов, а также обоснована актуальность постановки задачи обнаружения-оценки и приведены полезные примеры применения полученных результатов. Однако в [1–3] имеется сравнительно мало результатов анализа эффективности функционирования оптимальных алгоритмов совместного обнаружения-оценки. Действительно, проблема вычисления статистических характеристик алгоритмов совместного обнаружения-оценки всегда является сложной и часто неразрешимой задачей. Некоторые подходы к решению этой задачи для алгоритма максимально правдоподобия (МП) совместного обнаружения прямоугольного импульса и оценки его длительности предложены в [2]. Однако реальные условия генерации и распространения сигналов приводят к необходимости оптимального приема сигналов, форма которых отличается от прямоугольной. Кроме того, для сигнала произвольной формы представляют интерес статистический синтез и анализ байесовского алгоритма совместного обнаружения сигнала и оценки его длительности.

Пусть на интервале времени  $[0, T]$  наблюдается реализация

$$x(t) = \gamma_0 s(t, \tau_0) + n(t) \quad (1)$$

аддитивной смеси полезного сигнала

$$s(t, \tau) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t < 0, \quad t > \tau, \end{cases} \quad (2)$$

и реализация  $n(t)$  гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ . Здесь  $f(t)$  – непрерывная функция, описывающая форму

сигнала,  $\tau$  – его длительность, принимающая значения из априорного интервала

$$\tau \in [T_1, T_2]. \quad (3)$$

Дискретный параметр  $\gamma_0$  может принимать значение  $\gamma_0 = 1$  с вероятностью  $p_1$  (сигнал присутствует) и значение  $\gamma_0 = 0$  с вероятностью  $p_0 = 1 - p_1$  (сигнал отсутствует). Длительность сигнала будем считать случайной величиной, заданной на интервале (3) и обладающей априорной плотностью вероятности  $W_{1pr}(\tau)$  при  $\gamma_0 = 1$  и  $W_{0pr}(\tau)$  при  $\gamma_0 = 0$ . Будем также считать, что интервал наблюдения удовлетворяет условию  $0 < T_1 \leq T_2 \leq T$ , поэтому сигнал (2) полностью размещается в указанном интервале. Располагая реализацией  $x(t)$ , необходимо вынести решение о наличии или отсутствии сигнала (2) в принятой реализации (1) и сформировать оценку длительности сигнала.

В данной работе выполнен синтез МП- и байесовского алгоритмов совместного обнаружения сигнала произвольной формы и оценки его длительности, а также на основе новой методики впервые найдены точные формулы для расчета характеристик МП-алгоритма. Характеристики байесовского алгоритма получены методами статистического моделирования на ЭВМ.

Совместное обнаружение и оценку длительности сигнала будем рассматривать как задачу совместного оценивания вектора неизвестных параметров [2]:

$$\vec{\theta} = \{\tau, \gamma\}. \quad (4)$$

Согласно методу МП [1, 3], оценка векторного параметра (4)

$$\{\hat{\tau}, \hat{\gamma}\} = \arg \sup L(\tau, \gamma) \quad (5)$$

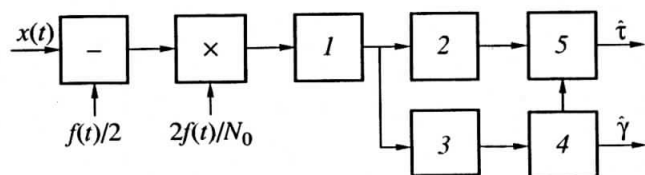


Рис. 1. Приемник максимального правдоподобия.

представляет собой положение абсолютного (наибольшего) максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОРП)

$$L(\tau, \gamma) = \frac{2\gamma}{N_0} \int_0^\tau [x(t) - f(t)\gamma/2] f(t) dt. \quad (6)$$

Отсутствующий сигнал будем интерпретировать как сигнал с нулевой длительностью. При этом, согласно (5) и (6), МП-алгоритм приема сигнала (2) заключается в совместном применении двух решающих правил:

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} 1, & L(\tau_s) \geq h, \\ 0, & L(\tau_s) < h, \end{cases} \quad (7)$$

$$\hat{\tau} = \begin{cases} \tau_s, & L(\tau_s) \geq h, \\ 0, & L(\tau_s) < h, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\tau_s = \arg \sup L(\tau)$ ,  $L(\tau) = L(\tau, \gamma = 1)$ . Поскольку  $L(\tau, \gamma = 0) \equiv 0$ , то порог  $h = 0$ . Вместо нулевого порога в (7), (8) можно также использовать порог  $h$ , выбранный на основе какого-либо критерия оптимальности. Алгоритм (7), (8) с таким порогом назовем обобщенным оптимизированным алгоритмом МП. При  $h = -\infty$  алгоритм (7), (8) совпадает с МП-алгоритмом оценки длительности сигнала, присутствующего в принятой реализации с вероятностью единица, т.е.  $\hat{\gamma} = 1$ ,  $\hat{\tau} = \tau_s$ . Блок-схема приемника, реализующего МП-алгоритм (7), (8), изображена на рис. 1, где 1 – интегратор на интервале времени  $[0, t]$ ,  $t \in [0, T]$ , 2 – экстрематор, определяющий положение абсолютного максимума входного сигнала на интервале времени  $t \in [T_1, T_2]$ , 3 – пиковый детектор, определяющий величину абсолютного максимума входного сигнала, 4 – пороговое устройство, сравнивающее входной сигнал с порогом  $h$  и открывающее ключ 5 при превышении порога.

Эффективность МП-алгоритма обнаружения (7) будем характеризовать вероятностями ошибок 1-го и 2-го родов [1, 3]:

$$\alpha = P\{\hat{\gamma} = 1 | \gamma_0 = 0\} = P\{\sup L(\tau | \gamma_0 = 0) \geq h\}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \beta(\tau_0) &= P\{\hat{\gamma} = 0 | \gamma_0 = 1\} = \\ &= P\{\sup L(\tau | \gamma_0 = 1) < h\}, \end{aligned} \quad (10)$$

а точность оценки длительности – условной плотностью вероятности  $W(\hat{\tau} | \tau_0)$  [2], которые определены в Приложении (см. (П.14), (П.20)–(П.236)).

Точность МП-оценок (8) можно также характеризовать условными смещением и рассеянием, которые при истинном значении длительности  $\tau_0$  определяются соответственно как [2]

$$b(\hat{\tau} | \tau_0) = p_0 b(\tau_s | 0) + p_1 [b(\tau_s | \tau_0) - \tau_0 \beta(\tau_0)], \quad (11)$$

$$V(\hat{\tau} | \tau_0) = p_0 V(\tau_s | 0) + p_1 [V(\tau_s | \tau_0) + \tau_0^2 \beta(\tau_0)],$$

где

$$b(\tau_s | j\tau_0) = \int_{T_1}^{T_2} (\tau - j\tau_0) W_j(\tau) d\tau,$$

$$V(\tau_s | j\tau_0) = \int_{T_1}^{T_2} (\tau - j\tau_0)^2 W_j(\tau) d\tau,$$

$\beta(\tau_0)$  – условная вероятность пропуска (см. (П.21)).  $W_j(\tau) = Q'(\tau) W_{j\lambda}(Q(\tau))$ ,  $j = 0, 1$ . Здесь  $W_{j\lambda}(\lambda)$  – плотности вероятности (см. (П.22), (П.23а), (П.23б)). функция  $Q(\tau)$  определена в Приложении (см. (П.8)). Безусловные характеристики МП-оценки (8) могут быть получены путем усреднения выражений (11) с весом  $W_{1pr}(\tau)$ :

$$b(\hat{\tau}) = p_0 b(\tau_s | 0) + p_1 \int_{T_1}^{T_2} [b(\tau_s | \tau) - \tau \beta(\tau)] W_{1pr}(\tau) d\tau, \quad (12)$$

$$V(\hat{\tau}) = p_0 V(\tau_s | 0) + p_1 \int_{T_1}^{T_2} [V(\tau_s | \tau) + \tau^2 \beta(\tau)] W_{1pr}(\tau) d\tau.$$

Исследуем влияние выбора порога на эффективность функционирования обобщенного алгоритма МП (7), (8) совместного обнаружения и оценки длительности. Для определения порога  $h$  в алгоритме (7), (8) можно использовать критерий минимума безусловной вероятности ошибки  $h_p = \arg \inf P_e(h)$ , где

$$P_e(h) = p_0 \alpha + p_1 \beta, \quad (13)$$

$\beta = \int_{T_1}^{T_2} \beta(\tau) W_{1pr}(\tau) d\tau$  – безусловная вероятность пропуска сигнала или критерий минимума безусловного рассеяния оценки  $h_v = \arg \inf V(\hat{\tau})$ .

Конкретизируем полученные результаты для прямоугольного импульса со скошенной вершиной [4].

$$f(t) = A[1 + (d-1)t/T_2] \sqrt{3/(d^2 + d + 1)}, \quad (14)$$

где параметр  $A$  характеризует амплитуду сигнала.  $d = f(T_2)/f(0)$  – наклон скошенной вершины им-

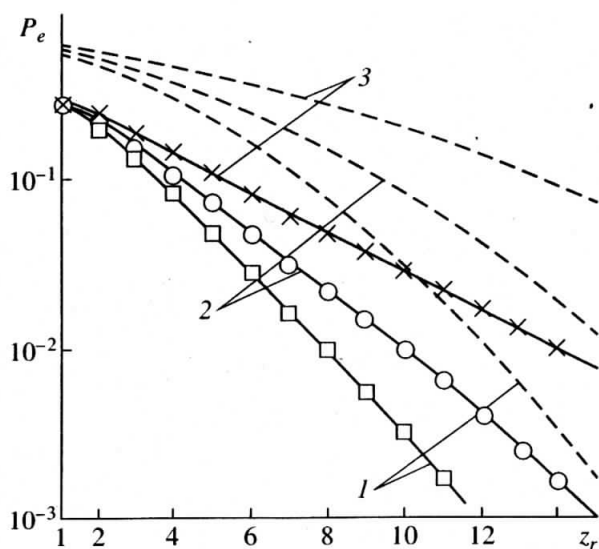


Рис. 2. Вероятность ошибки.

пульса. Множитель  $\sqrt{3/(d^2 + d + 1)}$  в выражении (14) необходим для того, чтобы энергия сигнала максимальной длительности  $E_{\max} = \int_0^{T_2} f^2(t) dt = A^2 T_2$  не зависела от наклона его вершины, что дает возможность сравнивать эффективность алгоритмов обнаружения-оценки длительности сигналов с одинаковыми энергиями и разным наклоном вершин.

Результаты расчетов характеристик эффективности функционирования совместного обобщенного МП-алгоритма (7), (8) обнаружения и оценки длительности для сигнала (14) представлены на рис. 2 и 3.

На рис. 2 показана зависимость средней безусловной вероятности ошибки (13) МП-алгоритма (7) от отношения сигнал/шум (ОСШ)  $z_r^2 = 2A^2 T_2 / N_0$  при  $k = T_2 / T_1 = 10$ ,  $p_0 = 0.7$ , равномерной априорной плотности вероятности

$$W_{1pr}(\tau) = \begin{cases} 1/(T_2 - T_1), & T_1 \leq \tau \leq T_2, \\ 0 & \tau < T_1, \quad \tau > T_2, \end{cases} \quad (15)$$

и различных наклонах скошенной вершины импульса  $d$ . Сплошные линии соответствуют оптимизированному порогу  $h_p$ , штриховые линии – порогу  $h = 0$ . Кривые 1–3 построены для  $d = 2$ ; 1 и 0.5.

На рис. 3 изображена зависимость нормированного безусловного рассеяния  $\tilde{V} = V(\hat{\tau})/T_2^2$  МП-оценки (8) от ОСШ  $z_r$  при  $k = 4$ ,  $p_0 = 0.7$  и равномерной априорной плотности вероятности (15). Сплошные линии соответствуют оптимизированному порогу  $h_v$ , штриховые линии – порогу  $h = 0$ .

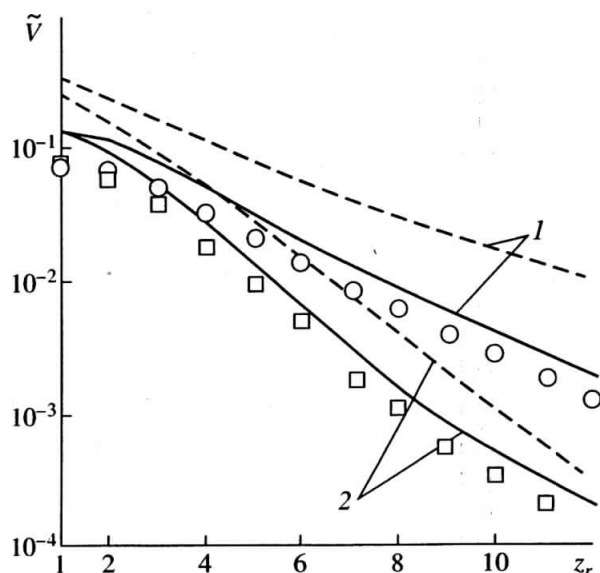


Рис. 3. Рассеяние оценки.

Кривые 1 и 2 построены для  $d = 5$  и 1. Результаты расчетов показали, что с точностью до погрешности вычислений порог  $h_p$ , оптимизирующий алгоритм обнаружения (7), совпадает с порогом  $h_v$ , оптимизирующим алгоритм оценивания (8).

Сопоставляя сплошные и штриховые кривые на рис. 2 и 3, видим, что использование МП-алгоритма совместного обнаружения-оценки с оптимизированным порогом приводит к заметному повышению эффективности алгоритма.

Кривые 2 на рис. 2 и 3 соответствуют прямоугольному импульсу. Сравнивая кривые 2 с кривыми 1 и 3, видим, что отклонение формы импульса от прямоугольной существенно влияет на эффективность МП-алгоритма совместного обнаружения-оценки.

Рассмотрим далее байесовский алгоритм. Согласно [1–3], выражение для риска имеет вид

$$R = \sum_{i,j=0}^1 p_i \int \int_{\tilde{T}} W_{ipr}(\tau) \Pi_{ij}(\tilde{\tau}, \tau) W_j(\tilde{\tau} | \tau, i) d\tau d\tilde{\tau}, \quad (16)$$

где  $W_j(\tilde{\tau} | \tau, i)$  – плотность вероятности оценки  $\tilde{\tau}$  в случае принятия решения  $\tilde{\gamma} = j$  при условии  $\gamma_0 = i$  и длительности сигнала  $\tau$ ,  $\Pi_{ij}(\tilde{\tau}, \tau)$  – функция потерь [2, 3],  $\tilde{T} = \{0; [T_1; T_2]\}$ .

Байесовский алгоритм должен минимизировать риск (16) при заданной функции потерь. Поскольку параметр  $\gamma$  является дискретным, то

функция потерь может быть записана в виде матрицы [2, 3]

$$\begin{bmatrix} \Pi_{00}(\tilde{\tau}, \tau) & \Pi_{01}(\tilde{\tau}, \tau) \\ \Pi_{10}(\tilde{\tau}, \tau) & \Pi_{11}(\tilde{\tau}, \tau) \end{bmatrix},$$

$$R_{ps}(\tilde{\gamma}, \tilde{\tau}) = \frac{p_0 \int \Pi_{\tilde{\gamma}0}(\tilde{\tau}, \tau) W_{0pr}(\tau) d\tau + p_1 \int \Pi_{\tilde{\gamma}1}(\tilde{\tau}, \tau) W_{1pr}(\tau) \exp[L(\tau)] d\tau}{\tilde{\tau}}, \quad (17)$$

$$p_0 + p_1 \int W_{1pr}(\tau) \exp[L(\tau)] d\tau$$

$\tilde{T} = \{0, [T_1; T_2]\}$ . Интерпретируя отсутствующий сигнал как сигнал с нулевой длительностью, полагаем  $W_{0pr}(\tau) = \delta(\tau)$ . Выберем аддитивную функцию потерь, квадратичную по оцениванию [3]:

$$\begin{bmatrix} 1 - C_0[1 - g_0\tilde{\tau}^2] & 1 \\ 1 & 1 - C_1[1 - g_1(\tilde{\tau} - \tau)^2] \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Подставляя функцию потерь (18) в (16), получаем выражения для апостериорного риска:

$$R_{ps}(0, \tilde{\tau}) = [p_0(1 - C_0(1 - g_0\tilde{\tau}^2)) + p_1 d_0] / [p_0 + p_1 d_0] \quad (19)$$

при решении об отсутствии сигнала и

$$R_{ps}(1, \tilde{\tau}) = \left[ p_0 + p_1(1 - C_1)d_0 + C_1 p_1 g_1 \int_{T_1}^{T_2} (\tilde{\tau} - \tau)^2 W_{1pr}(\tau) \exp[L(\tau)] d\tau \right] / [p_0 + p_1 d_0] \quad (20)$$

при решении о наличии сигнала, где  $d_k = \int_{T_1}^{T_2} \tau^k W_{1pr}(\tau) \exp[L(\tau)] d\tau$ .

В результате минимизации риска (19), (20) по переменной  $\tilde{\tau}$  байесовский алгоритм совместного обнаружения-оценивания можем записать как

$$\gamma_6 = \begin{cases} 1, & d_0 > c, \\ 0, & d_0 < c, \end{cases} \quad \tau_6 = \begin{cases} d_1/d_0, & d_0 > c, \\ 0, & d_0 < c, \end{cases} \quad (21)$$

$$c = \frac{p_0 C_0}{p_1 C_1} \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{g_1}{d_0} \int_{T_1}^{T_2} (d_1/d_0 - \tau)^2 W_{1pr}(\tau) \exp[L(\tau)] d\tau \right]^{-1} \quad (22)$$

где  $\Pi_{ij}(\tilde{\tau}, \tau)$  – потери, соответствующие решению  $\tilde{\gamma} = i$ ,  $\tilde{\tau}$  при действительных значениях параметров  $\gamma = j$ ,  $\tau$ . Согласно [2], байесовской является оценка, обеспечивающая минимум апостериорного риска, который в случае совместного обнаружения-оценки может быть записан как

– порог, зависящий от наблюдаемых данных (1).

Блок-схема приемного устройства, реализующего байесовский алгоритм, изображена на рис. 4, где 1 – интегратор на интервале времени  $[0; t]$ ,  $t \in [0; T]$ , 2 – нелинейный элемент с экспоненциальной характеристикой, 3 – источник линейно возрастающего напряжения, 4 – интеграторы на интервале времени  $[T_1; T_2]$ , 5 – устройство, формирующее порог (22). Пороговое устройство 6 сравнивает усредненный ФОП  $d_0$  со сформированным порогом, выдает оценку  $\gamma_6$  и замыкает ключ 7 при превышении порога. Сопоставляя рис. 1 и 4, видим, что в байесовском и МП-приемниках реализуются различные решающие статистики. В приемнике МП решение о наличии сигнала выносится в результате сравнения с детерминированным порогом абсолютного максимума логарифма ФОП, тогда как в байесовском приемнике со случайным порогом сравнивается усредненный ФОП. Байесовский приемник, осуществляющий совместное обнаружение-оценку, требует включения в блок-схему устройства, формирующего порог (22), который зависит от принятой реализации. Это приводит к значительному усложнению байесовского приемника по сравнению с МП-приемником.

Выбор параметров  $g_i$  и  $C_i$ ,  $i = 0, 1$ , в (22) существенно влияет на характеристики алгоритма приема. Как правило, на функцию потерь налагаются два ограничения: потери должны быть неотрицательными и неправильным решениям должны соответствовать большие потери, чем правильным [2]. Для того чтобы выполнить эти условия, выберем

$$g_i = 1/V_{\max},$$

где  $V_{\max}$  – максимально возможное значение рассеяния оценки. Полагая распределение истинного значения длительности равномерным на интервале  $[T_1; T_2]$ , а распределение оценки –  $\delta$ -функцией Дирака на одном из концов этого интервала, приходим к выражению  $V_{\max} = (T_2 - T_1)^2/3$ . Поскольку параметр  $g_0$  не влияет на структуру байесовского

алгоритма, его можно выбрать произвольно. Выбор же параметров  $C_i$  зависит от конкретных условий решаемой задачи. В данной работе предполагали  $C_0 = C_1 = 1$ .

Исследование эффективности совместного байесовского алгоритма обнаружения-оценки на примере прямоугольного импульса со скошенной вершиной (14) проведено методами статистического моделирования на ЭВМ [5]. Реализованы  $10^5$  циклов испытаний для каждого  $z_r$ . Следовательно, с вероятностью 0.9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений средней безусловной вероятности ошибки и безусловных рассеяний не более чем на 15% при  $P_e > 10^{-3}$ ,  $V(\tau_0)/T_2^2 > 10^{-3}$ .

Результаты моделирования приведены на рис. 2 и 3. На рис. 2 кружочками ( $d = 1$ ), квадратиками ( $d = 0.5$ ) и крестиками ( $d = 2$ ) показаны экспериментальные значения средней вероятности ошибки обнаружения байесовского алгоритма совместного обнаружения-оценки при  $k = 10$  и априорной плотности вероятности (15). Сравнивая экспериментальные значения с расчетными, показанными сплошными кривыми на рис. 2, видим, что практически полностью совпадают характеристики обнаружения байесовского алгоритма (21) и МП-алгоритма с оптимизированным порогом. Это позволяет рекомендовать выражения (П.20) и (П.21) для расчета средней вероятности ошибки при использовании байесовского алгоритма (21)  $P_{e0} \approx \inf P_e(h)$ .

На рис. 3 кружочками ( $d = 5$ ) и квадратиками ( $d = 1$ ) показаны экспериментальные значения нормированного безусловного рассеяния байесовской оценки длительности. Как видно из рис. 3, байесовский алгоритм обеспечивает меньшее рассеяние, чем оптимизированный МП-алгоритм. Отношение рассеяния байесовской оценки к рассеянию оценки МП с ростом ОСШ стремится к постоянной величине  $\sim 0.75$ . Ранее аналогичный результат также посредством статистического моделирования был получен в [6] для оценки параметра разрывного сигнала, присутствующего на входе приемного устройства с вероятностью единица.

Результаты исследования показали, что выбор оптимального порога в МП-приемнике позволяет существенно улучшить эффективность обработки при совместном обнаружении-оценке. В этом случае при одинаковом объеме используемой априорной информации и равномерном априорном распределении неизвестной длительности средние вероятности ошибок обнаружения байесовского и МП-алгоритмов практически совпадают. В то же время байесовский алгоритм обеспечивает оценку с меньшим безусловным рассеянием по сравнению с оценкой МП. Однако использование

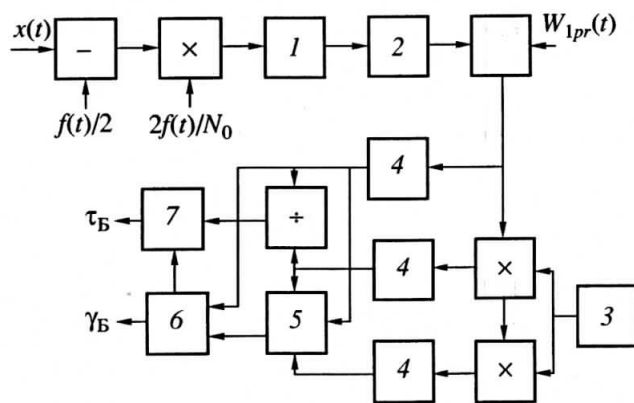


Рис. 4. Байесовский приемник.

байесовского алгоритма приводит к относительно более сложной аппаратной реализации приемного устройства. Таким образом, байесовский алгоритм целесообразно применять при высоких требованиях к качеству оценки, а МП-алгоритм с оптимизированным порогом – при необходимости достаточно простой аппаратной реализации.

Работа выполнена при поддержке CRDF и Минобразования РФ (проект VZ-010-0).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдем точные выражения для характеристик совместного алгоритма обнаружения сигнала (2) и оценки его длительности. Вероятности ошибок обнаружения (9) и (10) запишем в виде [1, 3]

$$\alpha = P\{\sup L_0(\tau) \geq h\} = 1 - F_{20}(h, h, T_2), \quad (\text{П.1})$$

$$\beta(\tau_0) = P\{\sup L_1(\tau) < h\} = F_{21}(h, h, T_2), \quad (\text{П.2})$$

где

$$L_j(\tau) = L(\tau, \gamma = 1 | \gamma_0 = j) = L(\tau | \gamma_0 = j), \quad j = 0, 1, \quad (\text{П.3})$$

$$F_{2j}(u, v, T) = P\left\{\sup_{T_1 \leq \tau \leq T} L_j(\tau) < u, \sup_{T < \tau \leq T_2} L_j(\tau) < v\right\}, \quad j = 0, 1, \quad (\text{П.4})$$

– двумерная функция распределения абсолютно-го максимума процесса  $L_j(\tau)$ .

Условная плотность вероятности МП-оценки длительности (8) может быть представлена согласно [2] в виде

$$W(\tau | \tau_0) = p_0[W_0(\tau) + (1 - \alpha)\delta(\tau)] + p_1[W_1(\tau) + \beta(\tau_0)\delta(\tau)], \quad (\text{П.5})$$

где

$$W_j(\tau) = \int_h^\infty W(u, \tau | \gamma_0 = j) du,$$

$W(u, \tau | \gamma_0 = j), j = 0, 1$ , – совместная плотность вероятности величины и положения абсолютного максимума случайного процесса  $L_j(\tau)$ , которая может быть выражена через функции (П.4) как [2]

$$W(u, \tau | \gamma_0 = j) = \left. \frac{\partial^2 F_{2j}(u, v, \tau)}{\partial u \partial \tau} \right|_{v=u}.$$

Таким образом, для расчета характеристик совместного алгоритма (7), (8) обнаружения и оценки длительности сигнала необходимо найти функции (П.4). Рассмотрим статистические характеристики случайного процесса  $L_j(\tau)$ . Согласно (6), он является гауссовским с математическим ожиданием

$$\begin{aligned} S_j(\tau) &= \langle L_j(\tau) \rangle = \\ &= \frac{2j}{N_0} \int_0^{\min(\tau, \tau_0)} f^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^\tau f^2(t) dt \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

и корреляционной функцией

$$\begin{aligned} B(\tau_1, \tau_2) &= \langle [L_j(\tau_1) - S_j(\tau_1)][L_j(\tau_2) - S_j(\tau_2)] \rangle = \\ &= \frac{2}{N_0} \int_0^{\min(\tau_1, \tau_2)} f^2(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Введем в рассмотрение функцию

$$Q(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^\tau f^2(t) dt, \quad (\text{П.8})$$

которая представляет собой ОСШ на выходе приемника МП для сигнала (2) длительностью  $\tau$ . Полагаем, что функция  $f(t)$ , описывающая форму сигнала, обращается в нуль только на части интервала  $[0, \tau]$ , имеющей нулевую меру. Тогда  $Q(\tau)$  (П.8) является монотонно возрастающей функцией и моменты (П.6), (П.7) случайного процесса  $L_j(\tau)$  можно переписать как

$$\begin{aligned} S_j(\tau) &= j \min[Q(\tau), Q(\tau_0)] - Q(\tau)/2, \\ B(\tau_1, \tau_2) &= \min[Q(\tau_1), Q(\tau_2)]. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Перейдем в выражении (П.3) к новой переменной  $\lambda = Q(\tau)$ , причем  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ , где  $\Lambda_1 = Q(\tau_1)$ ,  $\Lambda_2 = Q(\tau_2)$ . Учитывая (П.9), можем представить случайный процесс  $L_j(\tau)$  в виде

$$\begin{aligned} L_j(\tau) &= L_j[\tau(\lambda)] = \mu_j(\lambda) = \\ &= \mu(\lambda | \gamma_0 = j) = j \min(\lambda, \lambda_0) - \lambda/2 + v(\lambda). \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Здесь  $\lambda_0 = Q(\tau_0)$  – истинное значение ОСШ (П.8) для принятого сигнала, переменная  $\tau(\lambda)$  определяется из решения уравнения  $Q(\tau) = \lambda$ , а  $v(\lambda)$  – гауссовский случайный процесс.

Из выражений (П.9) следует, что процесс  $v(\lambda)$  обладает моментами

$$\langle v(\lambda) \rangle = 0, \quad \langle v(\lambda_1) v(\lambda_2) \rangle = \min(\lambda_1, \lambda_2).$$

Используя представление (П.10), функцию распределения (П.4) перепишем как

$$F_{2j}(u, v, T) = G_{2j}(u, v, Q(T)),$$

где

$$\begin{aligned} G_{2j}(u, v, \Lambda) &= \\ &= P\{ \sup_{\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda} \mu_j(\lambda) < u, \sup_{\Lambda < \lambda \leq \Lambda_2} \mu_j(\lambda) < v \}, \quad j = 0, 1. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Тогда характеристики эффективности (П.1), (П.2), (П.5) совместного алгоритма (7), (8) обнаружения и оценки длительности можно выразить через функцию (П.11):

$$\alpha = 1 - G_{20}(h, h, \Lambda_2), \quad (\text{П.12})$$

$$\beta = G_{21}(h, h, \Lambda_2), \quad (\text{П.13})$$

$$\begin{aligned} W(\tau | \tau_0) &= p_0 [Q'(\tau) W_{0\lambda}(Q(\tau)) + (1 - \alpha) \delta(\tau)] + \\ &+ p_1 [Q'(\tau) W_{1\lambda}(Q(\tau)) + \beta(\tau_0) \delta(\tau)], \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

$$W_{j\lambda}(\lambda) = \int_h^\infty W_\lambda(u, \lambda | \gamma_0 = j) du, \quad (\text{П.15})$$

$$W_\lambda(u, \lambda | \gamma_0 = j) = \left. \frac{\partial^2 G_{2j}(u, v, \lambda)}{\partial u \partial \lambda} \right|_{v=u}, \quad j = 0, 1.$$

Поскольку

$$y_j(\lambda) = \begin{cases} u - \mu_j(\lambda), & \Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda, \\ v - \mu_j(\lambda), & \Lambda < \lambda \leq \Lambda_2, \end{cases}$$

– реализация марковского случайного процесса с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_{1j} = \begin{cases} 1/2 - j, & \Lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0, \\ 1/2, & \lambda_0 < \lambda \leq \Lambda_2, \end{cases} \quad (\text{П.16})$$

$$k_{2j} = 1, \quad j = 0, 1,$$

можем записать

$$\begin{aligned} G_{2j}(u, v, \Lambda) &= P\{y_j(\lambda) > 0, \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]\} = \\ &= \int_0^\infty W_j(y, \Lambda_2) dy. \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

Здесь  $W_j(y, \lambda)$  – решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова [7] и при  $\Lambda > \lambda_0$

$$\frac{\partial W_j(y, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial y} [k_{1j} W_j(y, \lambda)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_{2j} W_j(y, \lambda)] = 0 \quad (\text{П.18})$$

при граничных условиях

$$W_j(y = 0, \lambda) = W_j(y = \infty, \lambda) = 0$$

и начальном условии

$$W_j(y, \lambda)|_{\lambda = \Lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \exp\left[-\frac{(y - u + \Lambda_1(j - 1/2))^2}{2\Lambda_1}\right].$$

Применяя метод отражения с переменной знака [2, 7], находим решение уравнения (П.18) с коэффициентами (П.16) отдельно для  $\Lambda < \lambda_0$  и  $\Lambda > \lambda_0$ . Подставляя это решение в (П.17), получаем выражения для функции распределения (П.11) при  $\Lambda < \lambda_0$

$$\begin{aligned} G_{2j}(u, v, \Lambda) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\Lambda(\lambda_0 - \Lambda)}} \times \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi_2 - \xi_1 + (2j - 1)(\lambda_0 - \Lambda)/2)^2}{2(\lambda_0 - \Lambda)}\right] \times \\ &\times \left[ \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0} + \frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}\right) - \right. \\ &- \exp(-\xi_2) \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0} - \frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}\right) \Big] \times \\ &\times \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{2\xi_1\xi_2}{\lambda_0 - \Lambda}\right] \right\} \times \quad (\text{П.19a}) \\ &\times \left\{ \exp\left[-\frac{(v - \xi_1 - (2j - 1)\Lambda/2)^2}{2\Lambda}\right] \times \right. \\ &\times \Phi\left(\frac{u\Lambda + (\xi_1 - v)\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda\Lambda_1(\Lambda - \Lambda_1)}}\right) - \\ &- \exp\left[(2j - 1)u - \frac{(2u - v + \xi_1 + (2j - 1)\Lambda/2)^2}{2\Lambda}\right] \Big] \times \\ &\times \Phi\left(\frac{u\Lambda - (\xi_1 + 2u - v)\Lambda_1}{\sqrt{\Lambda\Lambda_1(\Lambda - \Lambda_1)}}\right) \Big\} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{2j}(u, v, \Lambda) &= \frac{\exp[(u - v)/2]}{2\pi\sqrt{2\pi\Lambda_1(\Lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - \Lambda_1)}} \times \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(u - \xi_1 + (2j - 1)\Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1}\right] \times \\ &\times \left[ \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda} + \frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda}}\right) - \right. \\ &- \exp(-\xi_2) \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda} - \frac{\xi_2}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda}}\right) \Big] \times \\ &\times \exp[(j - 1/2)\xi + \xi_2/2 - j\xi_1 - (\Lambda - \lambda_0)/8 - (2j - 1)(\lambda_0 - \Lambda_1)/8] \times \quad (\text{П.19б}) \\ &\times \left\{ \exp\left[-\frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_1)}\right] - \exp\left[-\frac{(\xi_2 + \xi_1)^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_1)}\right] \right\} \times \\ &\times \left\{ \exp\left[-\frac{(\xi_1 - \xi + u - v)^2}{2(\Lambda - \Lambda_0)}\right] - \right. \\ &- \exp\left[-\frac{(\xi_1 + \xi + u - v)^2}{2(\Lambda - \Lambda_0)}\right] \Big\} d\xi d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Здесь  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$  – интеграл вероятности.

Подставляя функции (П.19а) и (П.19б) в выражения (П.12) и (П.13), находим точные формулы для вероятностей ошибок 1-го и 2-го родов:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x - h - \Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1}\right] \times \\ &\times \left[ \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1} + \frac{x}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}\right) - \right. \\ &- \exp(-x) \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1} + \frac{x}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}\right) \Big] dx, \quad (\text{П.20}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta(\tau_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_0}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x + \lambda_0/2)^2 + h^2 - h\lambda_0}{2\lambda_0}\right] \times \\ &\times \left[ \exp\left(\frac{xh}{\lambda_0}\right) \Phi\left(h\sqrt{\frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{\lambda_0\Lambda_1}} + x\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0 - \Lambda_1)}}\right) - \right. \\ &- \exp\left(-\frac{xh}{\lambda_0}\right) \Phi\left(h\sqrt{\frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{\lambda_0\Lambda_1}} - x\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0 - \Lambda_1)}}\right) \Big] \times \quad (\text{П.21}) \end{aligned}$$

$$\times \left[ \Phi \left( \frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0} + \frac{x}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) - \exp(-x) \Phi \left( \frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0} - \frac{x}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) \right] dx.$$

Подставляя функции (П.19а) и (П.19б) в формулу (П.15), получаем точные выражения для плотностей вероятности  $W_{j\lambda}(\lambda)$ . При отсутствии сигнала

$$W_{0\lambda}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\lambda - \Lambda_1)^{3/2}} \times \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi(\Lambda_2 - \lambda)}} \exp \left[ -\frac{\Lambda_2 - \lambda}{8} \right] + \Phi \left( \frac{1}{2} \sqrt{\Lambda_2 - \lambda} \right) \right\} \times \times \int_0^\infty \xi \Phi \left( \frac{\xi - h - \Lambda_1/2}{\sqrt{\Lambda_1}} \right) \exp \left\{ -\frac{[\xi + (\lambda - \Lambda_1)/2]^2}{2(\lambda - \Lambda_1)} \right\} d\xi. \quad (\text{П.22})$$

Соответственно, при наличии сигнала и  $\lambda \leq \lambda_0$

$$W_{1\lambda}(\lambda) = \frac{1}{\pi(\lambda - \Lambda_1)^{3/2}(\lambda_0 - \lambda)^{3/2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty x \exp \left\{ -\frac{[x + (\lambda_0 - \lambda)/2]^2}{2(\lambda_0 - \lambda)} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \Phi \left( \frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}{2} + \frac{x}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) - \right. \quad (\text{П.23а})$$

$$\left. - \exp(-x) \Phi \left( \frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}{2} - \frac{x}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) \right\} dx \times$$

$$\times \int_0^\infty \xi \Phi \left( \frac{\xi - h + \Lambda_1/2}{\sqrt{\Lambda_1}} \right) \exp \left\{ -\frac{[\xi - (\lambda - \Lambda_1)/2]^2}{2(\lambda - \Lambda_1)} \right\} d\xi,$$

а при  $\lambda > \lambda_0$

$$W_{1\lambda}(\lambda) = \frac{1}{2\pi(\lambda - \lambda_0)^{3/2} \sqrt{\lambda_0 - \Lambda_1}} \times$$

$$\times \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi(\Lambda_2 - \lambda)}} \exp \left[ -\frac{\Lambda_2 - \lambda}{8} \right] + \Phi \left( \frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda}}{2} \right) \right\} \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty x \Phi \left( \frac{\xi - h + \Lambda_1/2}{\sqrt{\Lambda_1}} \right) \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{2\xi x}{\lambda_0 - \Lambda_1} \right] \right\} \times (\text{П.23б})$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{[x - \xi + (\lambda_0 - \Lambda_1)/2]^2}{2(\lambda_0 - \Lambda_1)} - \frac{[x + (\lambda - \lambda_0)/2]^2}{2(\lambda - \lambda_0)} \right\} dx d\xi.$$

Подставляя (П.22), (П.23а) и (П.23б) в формулу (П.14), находим точное выражение для условной плотности вероятности (П.5) оценки длительности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992.
2. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
3. Ршин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977.
4. Грязнов М.И., Гуревич М.Л., Рябинин Ю.А. Измерение параметров импульсов. М.: Радио и связь, 1991.
5. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971.
6. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
7. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977.