

254
Р 6434 / 49,
2006 / 6

254

ISSN 0021-3462

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОФИЗИКА

2006
ТОМ 49
6

ИЗДАНИЕ НИЖЕГОРОДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.391

ОДНОПороГОВЫЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛьНЫЙ АЛГОРИТМ ПРИЁМА СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ

А. П. Трифонов, М. Б. Беспалова, Ю. Э. Корчагин

Воронежский госуниверситет, г. Воронеж, Россия

Синтезированы однопороговые последовательные алгоритмы обнаружения и оценки длительности сигнала произвольной формы, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. Найдены точные выражения для характеристик эффективности их функционирования. Показано, что при неизменных характеристиках эффективности обнаружения удаётся получить выигрыш во времени анализа по сравнению с известными алгоритмами. Исследовано влияние сокращения времени анализа на точность однопорогового оценивания длительности сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

Задача оптимального приёма сигнала с неизвестной длительностью на фоне гауссовского белого шума рассматривалась в ряде работ [1–7]. Показано, что сигнал является разрывным по неизвестному параметру, выполнен синтез максимально правдоподобных (МП) и байесовских алгоритмов. Найдены точные выражения для характеристик эффективности функционирования МП алгоритмов, выполнено статистическое моделирование байесовских алгоритмов.

Однако применение перечисленных алгоритмов приёма приводит к необходимости анализа наблюдаемой реализации на всём априорном интервале возможных значений длительности сигнала. В работах [7, 8] показано, что сократить среднее время анализа позволяет применение пороговых алгоритмов обнаружения сигнала и оценки его длительности.

В данной работе рассмотрены однопороговые последовательные алгоритмы обнаружения и оценки длительности сигнала произвольной формы. Найдены точные характеристики эффективности их функционирования. Поскольку пороговый алгоритм реализует нелинейную обработку наблюдаемых данных, характеристики его эффективности зависят от формы и динамического диапазона изменения длительности сигнала. Выполнено сравнение однопороговых алгоритмов с ранее исследованными МП алгоритмами.

1. ПОРОГОВОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала

$$s(t, \tau) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & t < 0, t > \tau, \end{cases} \quad (1)$$

наблюдаемого в течение интервала времени $[0, T_m]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь $f(t)$ — функция, описывающая форму сигнала, а неизвестная длительность сигнала τ принимает значения из априорного интервала $[T_1, T_2]$. Реализация наблюдаемых данных при этом запишется в виде $x(t) = \gamma_0 s(t, \tau_0) + n(t)$. Индекс 0 здесь и далее обозначает истинное значение соответствующего параметра. Параметр γ_0 — дискретный и принимает два значения: $\gamma_0 = 0$ (в наблюдаемой реализации сигнал отсутствует)

и $\gamma_0 = 1$ (в наблюдаемой реализации сигнал присутствует). По наблюдаемой реализации $x(t)$ необходимо решить, какое значение принимает параметр γ . Предположим, что интервал наблюдения $[0, T_m]$ удовлетворяет условию $0 < T_1 \leq T_2 \leq T_m$, так что сигнал (1) полностью размещается в этом интервале.

Логарифм функционала отношения правдоподобия в этом случае будет зависеть от двух параметров, γ и τ , и согласно [2, 4, 6] может быть записан в виде

$$L(\gamma, \tau) = \frac{2\gamma}{N_0} \int_0^{\tau} [x(t) - f(t)/2] f(t) dt.$$

В соответствии с [6] МП алгоритм обнаружения заключается в сравнении с порогом h величины абсолютного (наибольшего) максимума $L = \sup L(\tau)$ решающей статистики

$$L(\tau) = L(\gamma = 1, \tau). \quad (2)$$

Если выполняется неравенство $L > h$, выносится решение о наличии сигнала в принятой реализации, в противном случае — об отсутствии сигнала. Если порог h не равен нулю, такой алгоритм обнаружения называют обобщённым МП алгоритмом [1, 6].

В тех случаях, когда требуется уменьшить время анализа, целесообразно использовать пороговый алгоритм (ПА) [7, 8], согласно которому анализ решающей статистики (2) прекращается либо в момент времени $\tau' < T_2$ первого превышения ею порога h , либо в момент времени T_2 , если $\tau' \geq T_2$. При этом среднее время анализа не превосходит T_2 и может быть существенно уменьшено соответствующим выбором порога. Решение о наличии сигнала (1) в наблюдаемой реализации принимается в случае, если реализация $L(\tau)$ пересекает порог h при $\tau' \in [T_1, T_2]$. В противном случае принимается решение об отсутствии сигнала. Тогда время анализа T_a представляет собой случайную величину:

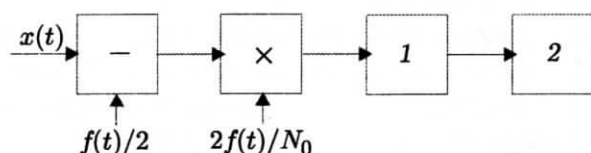


Рис. 1

$$T_a = \begin{cases} \tau', & T_1 \leq \tau' \leq T_2; \\ T_2, & \tau' > T_2. \end{cases} \quad (3)$$

На рис. 1 показана блок-схема порогового алгоритма обнаружения, где 1 — интегратор на интервале времени $[0, t]$, 2 — решающее устройство,

осуществляющее сравнение выходного сигнала интегратора с порогом h и выносящее решение о наличии или отсутствии сигнала.

Поскольку ПА может обеспечить сокращение среднего времени анализа по сравнению с МП алгоритмом, одним из показателей эффективности функционирования ПА является среднее время анализа. Согласно (3) время анализа T_a с помощью ПА является случайной величиной, статистические свойства которой определяются распределением

$$F(h, T | \gamma_0, \tau_0) = P(\tau' < T | \gamma_0, \tau_0) \quad (4)$$

времени τ' первого достижения границы h реализацией логарифма функционала отношения правдоподобия (2). Известно [9, 10], что

$$F(h, T | \gamma_0, \tau_0) = 1 - \tilde{F}(h, T | \gamma_0, \tau_0), \quad (5)$$

где

$$\tilde{F}(h, T | \gamma_0, \tau_0) = P\left\{L(\tau) \leq h \mid \gamma_0, \tau_0\right\} \quad (6)$$

— вероятность недостижения процессом $L(\tau)$ границы h на интервале $[T_1, T]$. Для нахождения функции (6) воспользуемся методикой [5, 6]. Поскольку логарифм функционала отношения правдоподобия (2) представляет собой линейное преобразование гауссовского случайного процесса $x(t)$, он также является гауссовским процессом. Следовательно, для его полного статистического описания достаточно найти математическое ожидание $S(\tau | \gamma_0, \tau_0) = \langle L(\tau) | \gamma_0, \tau_0 \rangle$ и корреляционную функцию $B(\tau_1, \tau_2 | \gamma_0, \tau_0) = \langle [L(\tau_1) - S(\tau_1 | \gamma_0, \tau_0)] [L(\tau_2) - S(\tau_2 | \gamma_0, \tau_0)] | \gamma_0, \tau_0 \rangle$. Выполняя усреднение, находим

$$S(\tau | \gamma_0, \tau_0) = \frac{2\gamma_0}{N_0} \int_0^{\min(\tau, \tau_0)} f^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^\tau f^2(t) dt = \gamma_0 Q[\min(\tau, \tau_0)] - Q(\tau)/2, \quad (7)$$

$$B(\tau_1, \tau_2 | \gamma_0, \tau_0) = \frac{2}{N_0} \int_0^{\min(\tau_1, \tau_2)} f^2(t) dt = Q[\min(\tau_1, \tau_2)], \quad (8)$$

где

$$Q(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^\tau f^2(t) dt \quad (9)$$

— отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе МП приёмника для сигнала (1), наблюдаемого на фоне белого шума.

Положим аналогично [4–6], что функция $f(t)$, описывающая форму сигнала, обращается в нуль только на части интервала $[0, \tau]$, имеющей нулевую меру. Тогда $Q(\tau)$ (9) является монотонно возрастающей функцией и моменты (7), (8) логарифма функционала отношения правдоподобия можно переписать как

$$S(\tau | \gamma_0, \tau_0) = \gamma_0 \min[Q(\tau), Q(\tau_0)] - Q(\tau)/2, \quad B(\tau_1, \tau_2 | \gamma_0, \tau_0) = \min[Q(\tau_1), Q(\tau_2)]. \quad (10)$$

Перейдём в выражении (2) к новой переменной $\lambda = Q(\tau)$, причём $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$, где $\Lambda_1 = Q(T_1)$, $\Lambda_2 = Q(T_2)$. Учитывая (9), можно представить случайный процесс $L(\tau)$ в виде

$$L(\tau) = L[\tau(\lambda)] = \mu(\lambda) = \gamma_0 \min(\lambda, \lambda_0) - \lambda/2 + \nu(\lambda). \quad (11)$$

Здесь $\lambda_0 = Q(\tau_0)$, $\nu(\lambda) = L[\tau(\lambda)] - \langle L[\tau(\lambda)] \rangle$ — центрированный гауссовский случайный процесс, а $\tau(\lambda)$ определяется из решения уравнения $Q(\tau) = \lambda$. Из (10) следует, что $\nu(\lambda)$ является винеровским процессом [9], поскольку его корреляционная функция

$$\langle \nu(\lambda_1) \nu(\lambda_2) \rangle = \min(\lambda_1, \lambda_2). \quad (12)$$

Используя представление (11), запишем функцию распределения (6) в виде

$$\tilde{F}(h, T | \gamma_0, \tau_0) = \tilde{G}(h, Q(T) | \gamma_0, \lambda_0), \quad (13)$$

где

$$\tilde{G}(h, \Lambda | \gamma_0, \lambda_0) = P \left\{ \mu(\lambda)_{\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda} h \mid \gamma_0, \lambda_0 \right\}$$

— вероятность недостижения процессом $\mu(\lambda)$ границы h на интервале $[\Lambda_1, \Lambda]$, где $\Lambda = Q(T)$.

Согласно (11), (12) функция $y(\lambda) = h - \mu(\lambda)$ является реализацией марковского случайного процесса с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \begin{cases} 1/2 - \gamma_0, & \Lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0; \\ 1/2, & \lambda_0 < \lambda \leq \Lambda_2, \end{cases} \quad k_2 = 1. \quad (14)$$

Поэтому можно записать [9, 10]

$$\tilde{G}(h, \Lambda | \gamma_0, \lambda_0) = P\{y(\lambda) > 0, \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda]\} = \int_0^\infty W(y, \Lambda | \gamma_0, \lambda_0) dy. \quad (15)$$

Здесь $W(y, \lambda | \gamma_0, \lambda_0)$ — решение уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова [9, 10]

$$\frac{\partial W(y, \lambda | \gamma_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial y} [k_1 W(y, \lambda | \gamma_0, \lambda_0)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_2 W(y, \lambda | \gamma_0, \lambda_0)] = 0 \quad (16)$$

при граничных условиях $W(y=0, \lambda | \gamma_0, \lambda_0) = W(y=\infty, \lambda | \gamma_0, \lambda_0) = 0$ и начальном условии

$$W(y, \lambda | \gamma_0, \lambda_0) \Big|_{\lambda=\Lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \exp \left[-\frac{(y-h+\Lambda_1(\gamma_0-1/2))^2}{2\Lambda_1} \right].$$

Применяя метод отражения с переменной знака [9, 10], находим решение уравнения (16) с коэффициентами (14) отдельно для случая $\lambda \in [\Lambda_1, \lambda_0]$:

$$\begin{aligned} W(y, \lambda | \gamma_0, \lambda_0) = & \frac{\exp[-(\gamma_0-1/2)y - (2\gamma_0-1)^2(\lambda-\Lambda_1)/8]}{2\pi\sqrt{\Lambda_1(\lambda-\Lambda_1)}} \times \\ & \times \int_0^\infty \exp \left[-\frac{[\xi-h+\Lambda_1(2\gamma_0-1)/2]^2}{2\Lambda_1} + (\gamma_0-1/2)\xi \right] \times \\ & \times \left\{ \exp \left[-\frac{(y-\xi)^2}{2(\lambda-\Lambda_1)} \right] - \exp \left[-\frac{(y+\xi)^2}{2(\lambda-\Lambda_1)} \right] \right\} d\xi, \quad (17) \end{aligned}$$

и для случая $\lambda \in [\lambda_0, \Lambda_2]$:

$$\begin{aligned} W(y, \lambda | \gamma_0, \lambda_0) = & \frac{\exp[y/2 - (2\gamma_0-1)^2(\lambda_0-\Lambda_1)/8 - (\lambda-\lambda_0)/8]}{2\pi\sqrt{2\pi\Lambda_1(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0-\Lambda_1)}} \times \\ & \times \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{[\xi-h+\Lambda_1(2\gamma_0-1)/2]^2}{2\Lambda_1} + (\gamma_0-1/2)\xi - \gamma_0\xi_1 \right] \times \\ & \times \left\{ \exp \left[-\frac{(\xi-\xi_1)^2}{2(\lambda_0-\Lambda_1)} \right] - \exp \left[-\frac{(\xi+\xi_1)^2}{2(\lambda_0-\Lambda_1)} \right] \right\} \left\{ \exp \left[-\frac{(y-\xi_1)^2}{2(\lambda-\lambda_0)} \right] - \exp \left[-\frac{(y+\xi_1)^2}{2(\lambda-\lambda_0)} \right] \right\} d\xi d\xi_1. \quad (18) \end{aligned}$$

Подставляя решение (17), (18) уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова в выражение (15), затем (15) в формулу (13), а (13) в (5), получаем выражение для функции распределения времени

первого достижения границы h реализацией логарифма функционала отношения правдоподобия в виде

$$F(h, T | \gamma_0, \tau_0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi q(\eta_1)}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{[\xi - h + q(\eta_1)(2\gamma_0 - 1)/2]^2}{2q(\eta_1)} \right] \times \\ \times \left\{ \Phi \left[(1 - 2\gamma_0) \frac{\sqrt{q(\eta) - q(\eta_1)}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{q(\eta) - q(\eta_1)}} \right] - \right. \\ \left. - \Phi \left[(1 - 2\gamma_0) \frac{\sqrt{q(\eta) - q(\eta_1)}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{q(\eta) - q(\eta_1)}} \right] \exp[(2\gamma_0 - 1)\xi] \right\} d\xi, \quad \eta \in [\eta_1, \eta_0], \quad (19)$$

$$F(h, T | \gamma_0, \tau_0) = 1 - \frac{\exp[-[q(\eta_0) - q(\eta_1)]/8]}{2\pi \sqrt{q(\eta_1)[q(\eta_0) - q(\eta_1)]}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{[\xi - h + q(\eta_1)(2\gamma_0 - 1)/2]^2}{2q(\eta_1)} + \right. \\ \left. + (2\gamma_0 - 1) \frac{\xi - \xi_1}{2} \right] \left\{ \Phi \left(\frac{\sqrt{q(\eta) - q(\eta_0)}}{2} + \frac{\xi_1}{\sqrt{q(\eta) - q(\eta_0)}} \right) - \Phi \left(\frac{\sqrt{q(\eta) - q(\eta_0)}}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\xi_1}{\sqrt{q(\eta) - q(\eta_0)}} \right) \exp(-\xi_1) \right\} \left\{ \exp \left[-\frac{(\xi - \xi_1)^2}{2[q(\eta_0) - q(\eta_1)]} \right] - \exp \left[-\frac{(\xi + \xi_1)^2}{2[q(\eta_0) - q(\eta_1)]} \right] \right\} d\xi d\xi_1, \\ \eta \in [\eta_0, 1]. \quad (20)$$

Здесь $\eta = T/T_2$, $\eta_1 = T_1/T_2$, $\eta_0 = \tau_0/T_2$, $q(\eta) = Q(T_2\eta)$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$$

— интеграл вероятности.

Согласно (3) время анализа представляет собой кусочно-линейное преобразование случайной величины τ' . Следовательно, используя выражения (19), (20) для функции распределения случайной величины τ' , можно найти среднее время анализа для ПА. Обозначим

$$T_{0a} = \langle T_a | \gamma_0 = 0 \rangle = T_1 P\{\tau' < T_1 | \gamma_0 = 0\} + \langle \tau' | \gamma_0 = 0 \rangle + T_2 P\{\tau' > T_2 | \gamma_0 = 0\} = \\ = T_1 + \int_{T_1}^{T_2} [1 - F(h, T | 0, 0)] dT$$

— среднее время анализа при отсутствии сигнала,

$$T_{1a}(\tau_0) = \langle T_a | \gamma_0 = 1, \tau_0 \rangle = T_1 P\{\tau' < T_1 | \gamma_0 = 1, \tau_0\} + \langle \tau' | \gamma_0 = 1, \tau_0 \rangle + \\ + T_2 P\{\tau' > T_2 | \gamma_0 = 1, \tau_0\} = T_1 + \int_{T_1}^{T_2} [1 - F(h, T | 1, \tau_0)] dT$$

— условное среднее время анализа при наличии сигнала. Если известны априорные вероятности p_0 и p_1 отсутствия и наличия сигнала соответственно, а также априорная плотность вероятности $W(\tau)$ неизвестной длительности сигнала, можно ввести безусловное среднее время анализа

$$T_{au} = p_0 T_{0a} + p_1 T_{1a}, \quad (21)$$

где

$$T_{\text{lau}} = \int_{T_1}^{T_2} T_{\text{la}}(\tau) W(\tau) d\tau \quad (22)$$

— безусловное среднее время анализа при наличии сигнала.

Для МП алгоритма обнаружения [6] время анализа равно максимальной возможной длительности сигнала T_2 . Поэтому выигрыш во времени анализа с использованием ПА по сравнению с МП алгоритмом можно характеризовать отношением

$$\chi = T_{\text{au}}/T_2. \quad (23)$$

Эффективность обнаружения будем характеризовать вероятностями ошибок ложной тревоги

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left\{ \sup_{T_1 \leq \tau \leq T_2} L(\tau) > h \mid \gamma_0 = 0 \right\} = P\{\tau' < T_2 \mid \gamma_0 = 0\} = F(h, T_2 \mid 0, 0) = \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi q(\eta_1)}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi - h - q(\eta_1)/2)^2}{2q(\eta_1)}\right] \left\{ \Phi\left[\frac{\sqrt{q(1) - q(\eta_1)}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{q(1) - q(\eta_1)}}\right] - \right. \\ &\quad \left. - \exp(-\xi) \Phi\left[\frac{\sqrt{q(1) - q(\eta_1)}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{q(1) - q(\eta_1)}}\right] \right\} d\xi \quad (24) \end{aligned}$$

и пропуска сигнала

$$\begin{aligned} \beta(\tau_0) &= P\left\{ \sup_{T_1 \leq \tau \leq T_2} L(\tau) < h \mid \gamma_0 = 1, \tau_0 \right\} = P\{\tau' > T_2 \mid \gamma_0 = 1, \tau_0\} = 1 - F(h, T_2 \mid 1, \tau_0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi q(\eta_0)}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi + q(\eta_0)/2)^2 + h^2 - hq(\eta_0)}{2q(\eta_0)}\right] \times \\ &\quad \times \left[\exp\left(\frac{h\xi}{q(\eta_0)}\right) \Phi\left(h\sqrt{\frac{q(\eta_0) - q(\eta_1)}{q(\eta_0)q(\eta_1)}} + \xi\sqrt{\frac{q(\eta_1)}{q(\eta_0)[q(\eta_0) - q(\eta_1)]}}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \exp\left(-\frac{h\xi}{q(\eta_0)}\right) \Phi\left(h\sqrt{\frac{q(\eta_0) - q(\eta_1)}{q(\eta_0)q(\eta_1)}} - \xi\sqrt{\frac{q(\eta_1)}{q(\eta_0)[q(\eta_0) - q(\eta_1)]}}\right) \right] \left\{ \Phi\left(\frac{\sqrt{q(1) - q(\eta_0)}}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\xi}{\sqrt{q(1) - q(\eta_0)}}\right) - \exp(-\xi) \Phi\left(\frac{\sqrt{q(1) - q(\eta_0)}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{q(1) - q(\eta_0)}}\right) \right\} d\xi. \quad (25) \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что выражения (24), (25) для вероятностей ошибок обнаружения совпадают с аналогичными выражениями, полученными в [6]. Следовательно, если $\chi < 1$, то ПА, обеспечивая выигрыш в величине среднего времени анализа, обладает такой же эффективностью обнаружения, как и МП алгоритм. Если заданы априорные вероятности p_0 и p_1 отсутствия и наличия сигнала, а также априорная плотность вероятности $W(\tau)$ неизвестной длительности сигнала, то качество обнаружения можно характеризовать средней (полной) вероятностью ошибки

$$P_e = p_0\alpha + p_1\beta, \quad (26)$$

где

$$\beta = \int_{T_1}^{T_2} \beta(\tau) W(\tau) d\tau$$

— безусловная вероятность пропуска сигнала.

Итак, эффективность обнаружения с помощью ПА характеризуется точными выражениями для среднего времени анализа (21), вероятности ложной тревоги (24), условной вероятности пропуска сигнала (25) и средней безусловной вероятности ошибки (26), которые являются функциями порога h . Следовательно, величину порога можно выбирать исходя из заданных характеристик эффективности обнаружения, например, одним из следующих способов: порог h_α находится из решения уравнения $\alpha(h_\alpha) = \varepsilon$ по заранее заданной вероятности ложной тревоги ε (критерий Неймана—Пирсона) [2, 3]; порог h_p находится из решения уравнения $P_e(h_p) = p$ по заранее заданной средней безусловной вероятности ошибки p ; порог h_χ находится по заранее заданной величине выигрыша χ в среднем времени анализа, т. е. из решения уравнения $\chi(h_\chi) = \chi$; порог $h_{\min}$ находится из условия минимума средней безусловной вероятности ошибки [1, 6]:

$$h_{\min} = \arg \inf P_e(h). \quad (27)$$

В качестве примера рассмотрим обнаружение прямоугольного импульса со скошенной вершиной [6, 11]:

$$f(t) = A [1 + (d-1)t/T_2] \sqrt{3/(d^2 + d + 1)}, \quad (28)$$

где параметр A характеризует амплитуду сигнала, $d = f(T_2)/f(0)$ — наклон скошенной вершины импульса. Множитель $\sqrt{3/(d^2 + d + 1)}$ в выражении (28) обеспечивает неизменность энергии сигнала максимальной длительности с различными наклонами вершин, что позволяет сравнивать эффективность обнаружения сигналов с разным наклоном вершины и неизменной энергией. Подставляя функцию (28) в формулу (9), находим выражение для ОСШ на выходе МП приёмника:

$$Q(\tau) = \frac{3z_r^2 \eta}{d^2 + d + 1} [1 + (d-1)\eta + (d-1)^2 \eta^2 / 3],$$

где $z_r^2 = 2A^2 T_2 / N_0$ — ОСШ на выходе МП приёмника для прямоугольного импульса амплитуды A и длительности T_2 .

На рис. 2 представлены зависимости средней вероятности ошибки P_e от ОСШ z_r для $d = 0,2$, равномерной априорной плотности вероятности неизвестной длительности сигнала:

$$W(\tau) = \frac{1}{T_2 - T_1} \begin{cases} 1, & T_1 \leq \tau \leq T_2; \\ 0, & \tau < T_1, \tau > T_2, \end{cases} \quad (29)$$

и различной величине параметра $\kappa = T_2/T_1 = 1/\eta_1$, который характеризует динамический диапазон изменения неизвестной длительности. При построении кривых на рис. 2 использовался порог (27), выбранный из условия минимума средней вероятности ошибки [1, 6]. Сплошные кривые соответствуют динамическому диапазону

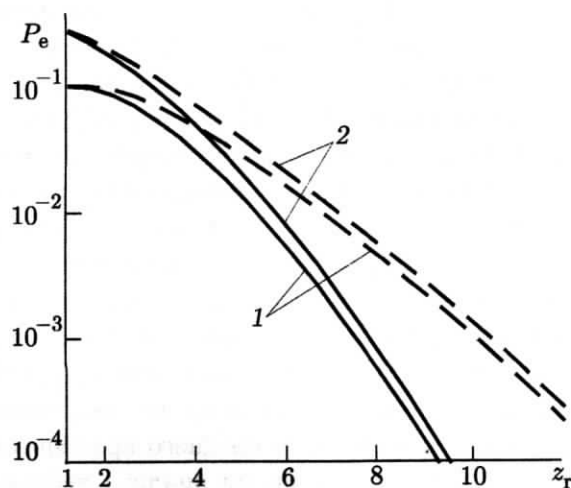


Рис. 2

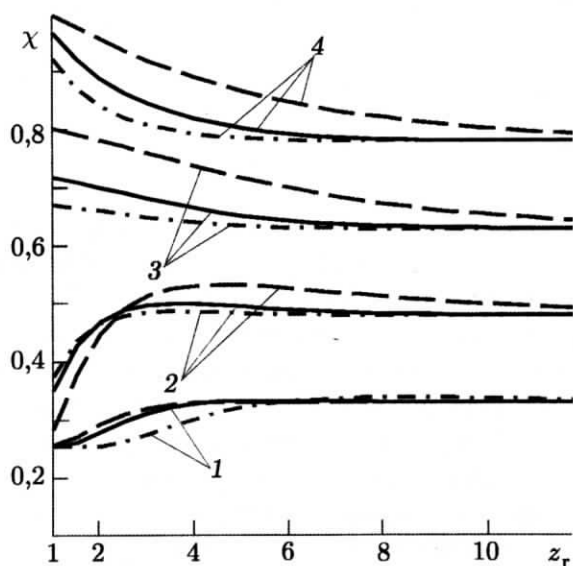


Рис. 3

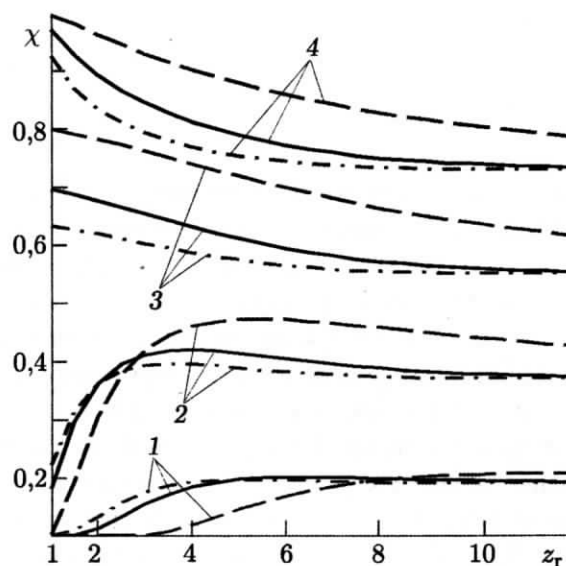


Рис. 4

$\kappa = 4$, штриховые — $\kappa = 10$. Кривые 1 построены для $p_0 = 0,1$, кривые 2 — для $p_0 = 0,7$. Как следует из рис. 2, рост вероятности отсутствия сигнала p_0 и динамического диапазона κ изменения неизвестной длительности приводят к увеличению средней безусловной вероятности ошибки обнаружения.

На рис. 3, 4 изображены зависимости от ОСШ z_T выигрыша во времени анализа (23) при пороговом обнаружении сигнала для равномерной априорной плотности вероятности (29) и различных наклонов вершины импульса d . Порог при построении кривых на рис. 3, 4 выбирался из условия минимума средней вероятности ошибки (27). Кривые 1 соответствуют $p_0 = 0,1$, кривые 2 — $p_0 = 0,3$, кривые 3 — $p_0 = 0,5$, кривые 4 — $p_0 = 0,7$. Сплошными линиями на рис. 3, 4 показаны зависимости, рассчитанные для прямоугольного импульса ($d = 1$), штриховыми и штрих-пунктирными — для импульса с наклонами $d = 5$ и $d = 0,2$ соответственно. Зависимости на рис. 3 рассчитаны для динамического диапазона изменения неизвестной длительности $\kappa = 4$, а на рис. 4 — для $\kappa = 10$. Как видно из рис. 3 и 4, использование ПА обнаружения позволяет существенно сократить время анализа по сравнению с МП алгоритмом при одинаковой средней вероятности ошибки обнаружения. При этом выигрыш во времени анализа возрастает с уменьшением априорной вероятности отсутствия сигнала и стабилизируется с увеличением ОСШ. К уменьшению среднего времени анализа приводит также увеличение динамического диапазона изменения неизвестной длительности сигнала. Из сопоставления кривых 1 ($p_0 = 0,1$) на рис. 3 и 4 следует, что увеличение динамического диапазона изменения длительности от $\kappa = 4$ до $\kappa = 10$ приводит к уменьшению среднего времени анализа почти вдвое. Сопоставление штриховых, штрих-пунктирных и сплошных кривых позволяет определить влияние отклонения формы импульса от прямоугольной на среднее время анализа. Так, если параметр наклона $d > 1$ (вершина импульса линейно возрастает), то отклонение формы импульса от прямоугольной, как правило, приводит к увеличению среднего времени анализа. Если же $d < 1$ (вершина импульса линейно убывает), то среднее время анализа несколько уменьшается. Отметим также, что влияние отклонения формы импульса от прямоугольной на среднее время анализа усиливается с ростом априорной вероятности отсутствия сигнала p_0 и величины динамического диапазона изменения неизвестной длительности κ .

2. ОДНОПороГОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА

Рассмотрим теперь характеристики однопорогового последовательного алгоритма оценки длительности импульса (1), полагая, что сигнал присутствует в наблюдаемой реализации с вероятностью $p_1 = 1$.

При однопороговом оценивании логарифм функционала отношения правдоподобия (2) формируется как функция времени и его значения сравниваются с порогом h . Если первое достижение порога произойдет в момент времени $\tau' < T_1$ или $\tau' > T_2$, то в качестве пороговой оценки выбираются величины T_1 и T_2 соответственно. При $T_1 \leq \tau' \leq T_2$ пороговая оценка равна времени первого достижения границы h логарифмом функционала отношения правдоподобия, т.е. для пороговой оценки длительности можно записать

$$\tau^* = \begin{cases} T_1, & \tau' < T_1; \\ \tau', & T_1 \leq \tau' \leq T_2; \\ T_2, & \tau' > T_2. \end{cases} \quad (30)$$

Блок-схема порогового алгоритма оценивания длительности сигнала совпадает с блок-схемой, изображенной на рис. 1, если в качестве блока 2 использовать решающее устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала интегратора с порогом h , фиксирующее время первого пересечения порога τ' и вырабатывающее величину τ^* (30), равную пороговой оценке длительности.

Согласно (30) пороговая оценка τ^* связана кусочно-линейным преобразованием с временем τ' первого достижения границы логарифмом функционала отношения правдоподобия и представляет собой случайную величину. Для функции распределения пороговой оценки можно записать

$$F(h, T | \tau_0) = P(\tau^* < T) = \begin{cases} 0, & T < T_1; \\ F(h, T | 1, \tau_0), & T_1 \leq T \leq T_2; \\ 1, & T > T_2. \end{cases} \quad (31)$$

Здесь $F(h, T | \tau_0)$ — функция распределения (20) времени первого достижения границы h логарифмом функционала отношения правдоподобия. При $\tau = T_1$ и $\tau = T_2$ функция (31) претерпевает скачки с величиной $F(h, T_1 | 1, \tau_0) = P\{\tau^* = T_1\} = P\{\tau' < T_1\}$ и $1 - F(h, T_2 | 1, \tau_0) = P\{\tau^* = T_2\} = P\{\tau' > T_2\}$ соответственно.

Точность ПА оценки длительности будем характеризовать условным рассеянием пороговой оценки длительности [4]

$$V(h | \tau_0) = \langle (\tau^* - \tau_0)^2 \rangle = (T_1 - \tau_0)^2 P\{\tau^* = T_1\} + (T_2 - \tau_0)^2 P\{\tau^* = T_2\} + \int_{T_1}^{T_2} (T - \tau_0)^2 W_1(T) dT, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} W_1(T) = \frac{\partial F(h, T | 1, \tau_0)}{\partial T} = \frac{1}{2\pi T_2 q(\eta)} \frac{dq(\eta)}{d\eta} \sqrt{\frac{q(\eta_1)}{q(\eta) - q(\eta_1)}} \times \\ \times \left\{ 1 + h \sqrt{2\pi \frac{q(\eta) - q(\eta_1)}{q(\eta)q(\eta_1)}} \exp\left\{ \frac{h^2 [q(\eta) - q(\eta_1)]}{2q(\eta)q(\eta_1)} \right\} \Phi\left(h \sqrt{\frac{q(\eta) - q(\eta_1)}{q(\eta)q(\eta_1)}} \right) \right\} \times \\ \times \exp\left[-\frac{h^2}{2q(\eta_1)} + \frac{h}{2} - \frac{q(\eta)}{8} \right], \quad T \in [T_1, \tau_0]; \end{aligned}$$

$$W_1(T) = \frac{\partial F(h, T | 1, \tau_0)}{\partial T} = \frac{\exp[-q(\eta)/8 + h/2]}{2\pi T_2 \sqrt{q(\eta_0)} [q(\eta) - q(\eta_0)]^{3/2}} \frac{dq(\eta)}{d\eta} \int_0^\infty \xi \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2[q(\eta) - q(\eta_0)]}\right\} \times$$

$$\times \left\{ \exp\left[-\frac{(\xi - h)^2}{2q(\eta_0)}\right] \Phi\left(h \sqrt{\frac{q(\eta_0) - q(\eta_1)}{q(\eta_0)q(\eta_1)}} + \xi \sqrt{\frac{q(\eta_1)}{q(\eta_0)[q(\eta_0) - q(\eta_1)]}}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left[-\frac{(\xi + h)^2}{2q(\eta_0)}\right] \Phi\left(h \sqrt{\frac{q(\eta_0) - q(\eta_1)}{q(\eta_0)q(\eta_1)}} - \xi \sqrt{\frac{q(\eta_1)}{q(\eta_0)[q(\eta_0) - q(\eta_1)]}}\right) \right\} d\xi, \quad T \in (\tau_0, T_2].$$

Если известна априорная плотность вероятности длительности $W(\tau)$, точность ПА оценки можно характеризовать безусловным рассеянием

$$V(h) = \int_{T_1}^{T_2} V(h | \tau) W(\tau) d\tau. \quad (33)$$

Введём в рассмотрение проигрыш в точности оценивания при использовании ПА по сравнению с МП алгоритмом:

$$w = V(h)/V_{\text{мп}}, \quad (34)$$

где $V_{\text{мп}}$ — безусловное рассеяние МП оценки длительности сигнала, найденное в [6]. Для характеристики выигрыша во времени анализа ПА оценки длительности по сравнению с МП алгоритмом будем использовать величину

$$\chi_1 = T_{1\text{ау}}/T_2, \quad (35)$$

где $T_{1\text{ау}}$ определено выражением (22).

Итак, эффективность оценивания длительности пороговым алгоритмом характеризуется точными выражениями для среднего времени анализа (22), для условного (32) и безусловного рассеяния (33), которые являются функциями порога h . Следовательно, величину порога можно выбирать исходя из заданной точности оценивания или времени анализа, например, одним из следующих способов: порог h_χ находится по заранее заданной величине выигрыша χ в среднем времени анализа, т. е. из решения уравнения $\chi_1(h_\chi) = \chi$; порог h_V находится из условия минимума безусловного рассеяния оценки [1, 6]:

$$h_V = \arg \inf V(h). \quad (36)$$

В качестве примера на рис. 5 показаны зависимости нормированного безусловного рассеяния $\tilde{V} = V(h_V)/T_2^2$ пороговой оценки длительности прямоугольного импульса со скошенной вершиной (28) от z_τ при равномерной априорной плотности вероятностей (29). На рис. 6 и 7 изображены зависимости от z_τ проигрыша в точности оценивания (34) и выигрыша (35) в среднем времени анализа соответственно. Порог h_V при построении кривых на рис. 5–7 выбирался согласно (36). Расчёт сплошных кривых проводился для динамического диапазона изменения неизвестной длительности $\kappa = 4$, а штриховых кривых — для $\kappa = 10$. Кривые 1 на рис. 5–7 соответствуют прямоугольному импульсу ($d = 1$), кривые 2 и 3 — импульсу с наклоном вершины $d = 5$ и 0,2 соответственно.

Как видно из рис. 5, точность пороговой оценки существенно зависит от наклона вершины импульса и динамического диапазона изменения неизвестной длительности. Рассеяние пороговой оценки уменьшается с увеличением d , что соответствует более высокому заднему фронту импульса, но возрастает с увеличением κ . Кривые, показанные на рис. 6, позволяют сравнить

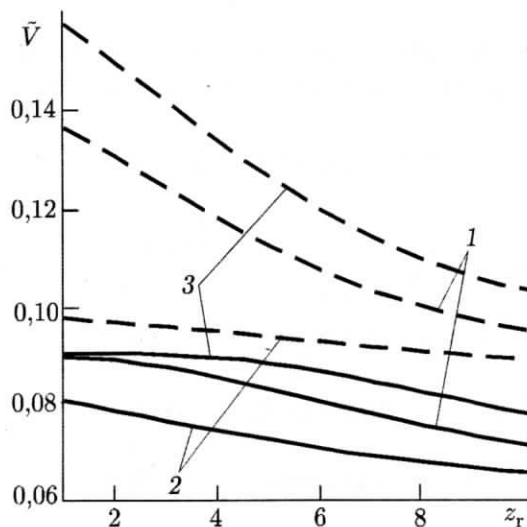


Рис. 5

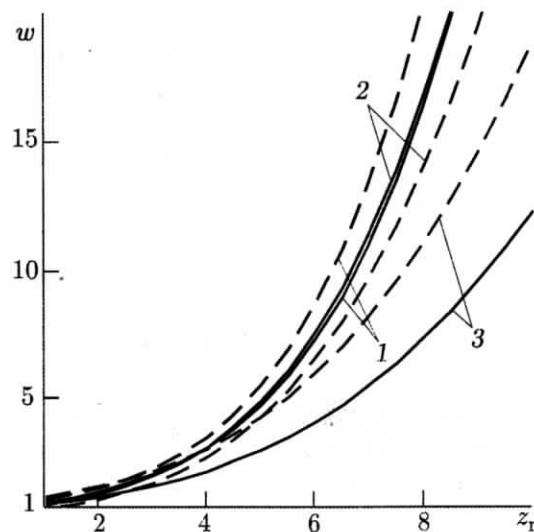


Рис. 6

точность пороговой и МП оценок длительности. Точность пороговой оценки оказывается заметно хуже точности МП оценки. Следовательно, сокращение времени анализа в результате применения ПА достигается за счёт ухудшения точности оценивания. Проигрыш в точности оценивания при $d \leq 1$ возрастает с увеличением динамического диапазона изменения неизвестной длительности κ . Отклонение формы импульса от прямоугольной в основном приводит к уменьшению проигрыша в точности оценки. Согласно рис. 7 наибольший выигрыш в среднем времени анализа можно получить при не очень больших ОСШ. При этом, как и в случае обнаружения, выигрыш оказывается меньше для импульса с линейно возрастающей вершиной, чем для

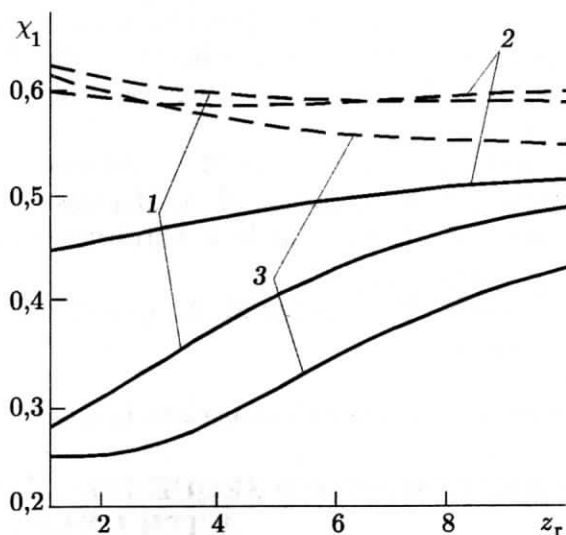


Рис. 7

прямоугольного импульса. Соответственно, для импульса с линейно убывающей вершиной выигрыш оказывается больше, чем для прямоугольного импульса. Из сопоставления сплошных и штриховых кривых на рис. 7 следует, что рост динамического диапазона κ изменения неизвестной длительности приводит, в отличие от случая обнаружения, к увеличению среднего времени анализа при оценке длительности импульса.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение однопорогового последовательного алгоритма приёма сигнала с неизвестной длительностью позволяет заметно сократить среднее время анализа по сравнению с алгоритмом максимального правдоподобия. При этом пороговый и максимально правдоподобный алгоритмы обеспечивают одинаковую эффективность обнаружения сигнала с неизвестной длительностью. Если же оценивается длительность сигнала, то применение порогового алгоритма может привести к существенным потерям в точности оценки по сравнению с алгоритмом максимального

правдоподобия. Эффективность порогового алгоритма зависит от формы сигнала и динамического диапазона изменения неизвестной длительности вследствие нелинейности алгоритма.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и администрации Воронежской области (проект № 06-07-96301).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трифонов А. П., Парфёнов В. И., Мишин Д. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40, № 12. С. 1531.
2. Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П. А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984.
3. Сосулин Ю. Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992.
4. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
5. Трифонов А. П. // Сб. "Памяти А. Н. Малахова". Нижний Новгород: ТАЛАН, 2000. С. 65.
6. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 7. С. 625.
7. Корчагин Ю. Э. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2003. Т. 6, № 2. С. 55.
8. Галун С. А., Трифонов А. П. // Автоматика и телемеханика. 1982. № 6. С. 95.
9. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977.
10. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Оптимальная фильтрация и квазикогерентный приём сигналов. М.: Сов. радио, 1975.
11. Грязнов М. И., Гуревич М. А., Рябинин М. А. Измерение параметров импульсов. М.: Радио и связь, 1991.

Поступила в редакцию 22 февраля 2005 г.; принята в печать 27 октября 2005 г.

SINGLE-THRESHOLD SEQUENTIAL ALGORITHM FOR RECEIVING A SIGNAL WITH UNKNOWN DURATION

A. P. Trifonov, M. B. Besspalova, and Yu. E. Korchagin

Single-threshold sequential algorithms for detecting and estimating the duration of an arbitrary-shaped signal observed against a background of additive Gaussian white noise are synthesized. Exact expressions for their functioning-efficiency characteristics are obtained. It is shown that the analysis-time gain can be obtained for the invariable characteristics of the detection efficiency compared with the known algorithms. The influence of reducing the analysis time on the accuracy of single-threshold estimation of the signal duration is studied.