



ISSN 0021-3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ЮБИЛЕЙНЫЙ ВЫПУСК

ТОМ 51

1-2

январь-февраль

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

2008

УДК 621.391

ТРИФОНОВ А.П., СМОРГОНСКИЙ А.В.

КВАЗИПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ПРИХОДА ФИНИТНОГО СИГНАЛА*

С целью оценки времени прихода сигнала, форма которого априори неизвестна, использован алгоритм, синтезированный для некоторой прогнозируемой формы сигнала. При помехе в виде белого гауссовского шума, найдены асимптотически точные (с ростом отношения сигнал-шум) выражения для характеристик оценки. Выполнено моделирование синтезированного алгоритма на ЭВМ.

В [1–3] и др. рассмотрена задача оптимального приема наиболее распространенной модели финитного сигнала — простейшего прямоугольного импульса с неизвестным временем прихода на фоне гауссовского белого шума. Показано, что полезный сигнал является разрывным по неизвестному параметру. Также выполнен синтез алгоритма максимального правдоподобия (МП) и найдены характеристики оценки неизвестного времени прихода. Однако реальные условия генерации и распространения приводят к отличию формы принимаемого сигнала от прямоугольной. При априори неизвестной форме принимаемого финитного сигнала, с целью оценки времени его прихода может быть использован квазиправдоподобный (КП) приемник, синтезированный для некоторого прогнозируемого (предполагаемого) сигнала той же длительности [2]. В связи с этим представляет интерес синтез и анализ алгоритма КП оценки времени прихода разрывного сигнала конечной длительности и произвольной формы.

Рассмотрим задачу оценки времени прихода финитного сигнала произвольной формы, наблюдаемого в течение интервала времени $[0, T]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Такой сигнал может быть записан в виде

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 06-07-96301 и 07-01-00042).

$$s(t - \lambda_0) = f(t - \lambda_0)I\left(\frac{t - \lambda_0}{\tau}\right), \quad I(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\lambda_0 \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$ — неизвестное время прихода сигнала, τ — длительность сигнала, $f(t)$ — неизвестная дифференцируемая функция, описывающая форму сигнала. Величина $\Lambda = \Lambda_2 - \Lambda_1$ определяет длительность априорного интервала возможных значений времени прихода. Реализация наблюдаемых данных имеет вид:

$$x(t) = s(t - \lambda_0) + n(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Индекс нуль здесь и далее означает истинное значение соответствующего параметра. Если форма $f(t)$ сигнала (1) известна, то можно найти логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) и реализовать МП алгоритм оценки. Полагаем, что функция $f(t)$ при синтезе алгоритма неизвестна. Поэтому будем использовать алгоритм, синтезированный для некоторой предполагаемой формы сигнала $g(t)$. Тогда на выходе приемника вырабатывается некоторая функция — выходной сигнал КП приемника, который подобен логарифму ФОР, но таковым не является. Выходной сигнал КП приемника будет зависеть от параметра λ и может быть записан в виде [1, 2]:

$$L(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s^*(t - \lambda)dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s(t)s^*(t)dt. \quad (3)$$

Здесь $s^*(t) = g(t)I(t/\tau)$ — опорный сигнал КП приемника, причем в общем случае $f(t) \neq g(t)$. Если функция $f(t)$ априори известна, то при $g(t) = f(t)$, выражение (3) совпадает с логарифмом ФОР при оптимальном приеме [4]. Таким образом, равенство

$$g(t) = f(t) \quad (4)$$

— условие оптимального приема импульса (1).

Выделим из выходного сигнала КП приемника (3) слагаемое, зависящее от неизвестного параметра λ

$$L(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s^*(t - \lambda)dt. \quad (5)$$

Для оценки времени прихода λ_0 сигнала (1) можно использовать КП алгоритм оценки [2], который состоит в отыскании положения абсолютного (наибольшего) максимума выходного сигнала КП приемника (5):

$$\hat{\lambda} = \operatorname{argsup} L(\lambda), \quad \lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2] \quad (6)$$

Подставляя (2) в (5), выходной сигнал КП приемника можно представить в виде суммы сигнальной и шумовой функций [4]:

$$L(\lambda) = S(\lambda, \lambda_0) + N(\lambda) \quad (7)$$

где $S(\lambda, \lambda_0) = 2 \int_0^T s(t - \lambda_0) s^*(t - \lambda) dt / N_0$, $N(\lambda) = 2 \int_0^T n(t) s^*(t - \lambda) dt / N_0$ — сигнальная и шумовая функции на выходе КП приемника.

Определим условия, при которых положение максимума сигнальной функции $S(\lambda, \lambda_0)$ совпадает с истинным значением времени прихода сигнала λ_0 . Для этого в окрестности λ_0 сигнальная функция должна удовлетворять условиям:

$$S(\lambda_0, \lambda_0) > 0, \quad dS(\lambda, \lambda_0) / d\lambda|_{\lambda=\lambda_0+0} < 0, \quad dS(\lambda, \lambda_0) / d\lambda|_{\lambda=\lambda_0-0} > 0 \quad (8)$$

Неравенства (8) являются условиями состоятельности оценки [4]. Положим, что сигнальная функция $S(\lambda, \lambda_0)$ удовлетворяет условиям (8). Обозначим

$$S_0 = \max_{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]} S(\lambda, \lambda_0) = S(\lambda_0, \lambda_0) = \frac{2}{N_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)g(t)dt \quad (9)$$

— величина сигнальной функции в точке истинного значения параметра λ_0 ,

$$\sigma_N^2 = \langle N^2(\lambda) \rangle = \frac{2}{N_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^2(t)dt$$

— дисперсия шумовой функции. Перепишем выражение (7) в виде

$$L(\lambda) = S_0 \hat{S}(\lambda, \lambda_0) + \sigma_N \hat{N}(\lambda) = \sigma_N [\tilde{z} \hat{S}(\lambda, \lambda_0) + \hat{N}(\lambda)]. \quad (10)$$

Здесь

$$\hat{S}(\lambda, \lambda_0) = \frac{S(\lambda, \lambda_0)}{S_0} = \frac{\int_0^T f(t - \lambda_0)g(t - \lambda)dt \left(\frac{t - \lambda_0}{\tau} \right) \left(\frac{t - \lambda}{\tau} \right)}{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)g(t)dt}, \quad (11)$$

$$\hat{N}(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{\sigma_N} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}} \frac{\int_0^T n(t)g(t - \lambda)dt \left(\frac{t - \lambda}{\tau} \right)}{\sqrt{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^2(t)dt}} \quad (12)$$

— нормированные сигнальная (11) и шумовая (12) функции,

$$\tilde{z}^2 = \frac{S_0^2}{\sigma_N^2} = z^2 \left(\frac{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)g(t)dt}{\sqrt{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t)dt} \sqrt{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^2(t)dt}} \right)^2 = z^2 K_{fg}^2 \quad (13)$$

— отношение сигнал-шум (ОСШ) при КП приеме. В выражении (13)

$$z^2 = \frac{2}{N_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t)dt \quad (14)$$

— ОСШ при оптимальном приеме, когда выполняется (4),

$$K_{fg} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)g(t)dt / \sqrt{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t)dt \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^2(t)dt}$$

— коэффициент корреляции между принимаемым и опорным сигналами.

Найдем корреляционную функцию шумовой функции (12). Выражение (12) представляет собой реализацию центрированного гауссовского процесса, первые два момента которого имеют вид:

$$\langle \hat{N}(\lambda) \rangle = 0; \quad \hat{B}_N(\lambda_1, \lambda_2) = \langle \hat{N}(\lambda_1) \hat{N}(\lambda_2) \rangle. \quad (15)$$

С учетом (12) и (15) корреляционная функция гауссовского процесса (12) равна

$$\hat{B}_N(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^T g(t-\lambda_1)g(t-\lambda_2)J\left(\frac{t-\lambda_1}{\tau}\right)J\left(\frac{t-\lambda_2}{\tau}\right)dt / \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^2(t)dt. \quad (16)$$

Если прием оптимальный (4), то функции (11) и (16) будут совпадать $\hat{S}(\lambda_1, \lambda_2)|_{g=f} = \hat{B}_N(\lambda_1, \lambda_2)|_{g=f}$.

Характеристики оценки определяются локальным поведением сигнальной функции (11) в окрестности истинного значения параметра λ_0 [2]. В связи с чем, рассмотрим поведение функции (11), когда $|\lambda - \lambda_0| \rightarrow 0$. Для этого разложим (11) в ряд Тейлора по параметру λ в окрестности точки λ_0 , и ограничимся только членом, содержащим первую производную. Согласно (11), сигнальная функция непрерывно дифференцируема в окрестности λ_0 справа и слева, исключая значение $\lambda = \lambda_0$, где производная терпит разрыв непрерывности первого рода. Поэтому, разложение функции (11) будет иметь вид

$$\hat{S}(\lambda, \lambda_0) = 1 + [d\hat{S}(\lambda, \lambda_0)/d\lambda|_{\lambda=\lambda_0+0}](\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0), \quad \lambda > \lambda_0, \quad (17)$$

$$\hat{S}(\lambda, \lambda_0) = 1 + [d\hat{S}(\lambda, \lambda_0)/d\lambda|_{\lambda=\lambda_0-0}](\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0), \quad \lambda < \lambda_0. \quad (18)$$

С учетом (17) и (18) разложение для сигнальной функции (11) в окрестности истинного значения параметра λ_0 можно представить в виде:

$$\hat{S}(\lambda, \lambda_0) = 1 + \begin{cases} \delta_1(\lambda - \lambda_0) + o(|\lambda - \lambda_0|), & \lambda < \lambda_0 \\ -\delta_2(\lambda - \lambda_0) + o(|\lambda - \lambda_0|), & \lambda > \lambda_0 \end{cases}. \quad (19)$$

Здесь $\delta_i, i=1,2$ — коэффициенты разложения

$$\delta_1 = d\hat{S}(\lambda, \lambda_0)/d\lambda|_{\lambda=\lambda_0-0}, \quad \delta_2 = -d\hat{S}(\lambda, \lambda_0)/d\lambda|_{\lambda=\lambda_0+0}. \quad (20)$$

Дифференцируя (11) по параметру λ с учетом конечной длительности сигнала τ , получаем явный вид для коэффициентов разложения (20). Параметр δ_1 можно представить следующими выражениями:

$$\delta_1^{fg} = \frac{d}{d\lambda} \hat{S}(\lambda, \lambda_0) \Big|_{\lambda=\lambda_0-0} = \left(f(\tau/2)g(\tau/2) - \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)g'(t)dt \right) / \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)g(t)dt, \quad (21)$$

$$\delta_1^{gf} = \frac{d}{d\lambda} \hat{S}(\lambda, \lambda_0) \Big|_{\lambda=\lambda_0-0} = \left(g(-\tau/2)f(-\tau/2) - \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g(t)f'(t)dt \right) / \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g(t)f(t)dt. \quad (22)$$

Аналогично для параметра δ_2 имеем:

$$\delta_2^{fg} = -\frac{d}{d\lambda} \hat{S}(\lambda, \lambda_0) \Big|_{\lambda=\lambda_0+0} = \left(f(-\tau/2)g(-\tau/2) + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)g'(t)dt \right) / \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)g(t)dt, \quad (23)$$

$$\delta_2^{gf} = -\frac{d}{d\lambda} \hat{S}(\lambda, \lambda_0) \Big|_{\lambda=\lambda_0+0} = \left(g(\tau/2)f(\tau/2) - \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g(t)f'(t)dt \right) / \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g(t)f(t)dt. \quad (24)$$

Из сравнения выражений (21), (22) и (23), (24) очевидно следует

$$\delta_1 \equiv \delta_1^{fg} = \delta_1^{gf}, \quad \delta_2 \equiv \delta_2^{fg} = \delta_2^{gf}. \quad (25)$$

Соотношения (25) можем переписать следующим образом:

$$\delta_1 = (\delta_1^{fg} + \delta_1^{gf}) / 2, \quad \delta_2 = (\delta_2^{fg} + \delta_2^{gf}) / 2. \quad (26)$$

В явном виде для (26) находим:

$$\delta_1 = \frac{[f(\tau/2)g(\tau/2) + f(-\tau/2)g(-\tau/2)] + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} [f'(t)g(t) - f(t)g'(t)]dt}{2 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)g(t)dt}, \quad (27)$$

$$\delta_2 = \frac{[f(\tau/2)g(\tau/2) + f(-\tau/2)g(-\tau/2)] - \int_{-\tau/2}^{\tau/2} [f'(t)g(t) - f(t)g'(t)]dt}{2 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)g(t)dt}. \quad (28)$$

Теперь рассмотрим корреляционную функцию (16). Полагая, что $T \gg \tau$, так что сигнал (1) полностью расположен внутри интервала наблюдения $[0, T]$ из (16) получаем, что $\hat{B}_N(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{B}_N(\lambda_1 - \lambda_2)$. Учитывая равенство сигналь-

ной функции (11) и корреляционной функции (16), когда выполняется (4), можем автоматически получить асимптотическое разложение корреляционной функции (16) при $|\lambda_1 - \lambda_2| \rightarrow 0$ как частный случай выражения (19). Делая замену $f(t) = g(t)$ в (27) и (28), имеем

$$\delta_0 \equiv \delta_1|_{f=g} = \delta_2|_{f=g} = [g^2(\tau/2) + g^2(-\tau/2)]/2 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^2(t) dt \quad (29)$$

— коэффициент разложения (19) при выполнении условия (4), причем $\delta_0 > 0$. Подставляя полученный коэффициент (29) в выражение (19), находим, что для корреляционной функции (16), когда $|\lambda_1 - \lambda_2| \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$\hat{B}_N(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{S}(\lambda_1, \lambda_2)|_{f=g} = 1 - \delta_0|\lambda_1 - \lambda_2| + o(|\lambda_1 - \lambda_2|) \quad (30)$$

Если опорный сигнал имеет прямоугольную форму, т. е.

$$g(t) = \text{const}, \quad (31)$$

то из выражения (29) получаем

$$\delta_0 = \delta_r = 1/\tau. \quad (32)$$

При выполнении (4) и (31), выражение (32) описывает коэффициент разложения сигнальной функции (11) и совпадает с результатом, полученным в [2]. С увеличением $|\lambda_1 - \lambda_2|$ корреляционная функция (16) убывает и при $|\lambda_1 - \lambda_2| > \tau$ обращается в нуль. Корреляционная функция (16) не имеет второй производной при $\lambda_1 = \lambda_2$, так что реализации выходного сигнала КП приемника (5) не дифференцируемы, но непрерывны с вероятностью единица [5].

Заметим, что с учетом выражений (9) и (19) условия (8) можно переписать в более удобном виде: $S_0 > 0$, $\delta_i > 0$, $i = 1, 2$. Следовательно, условия (8) выполняются и КП оценка (6) состоятельна, если

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)g(t)dt > 0; \quad (33)$$

$$[f(\tau/2)g(\tau/2) + f(-\tau/2)g(-\tau/2)] > \left| \int_{-\tau/2}^{\tau/2} [f'(t)g(t) - f(t)g'(t)]dt \right|.$$

Найдем теперь характеристики оценки (6) времени прихода сигнала (1) полагая, что оценка состоятельна. С учетом свойств сигнальной (19) и корреляционной (30) функций методом локально-марковской аппроксимации можно найти смещение и рассеяние надежной КП оценки времени прихода сигнала [2]. В условиях высокой апостериорной точности для смещения и рассеяния КП оценки времени прихода справедливы асимптотические выражения [6]:

$$d(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \langle (\hat{\lambda} - \lambda_0) \rangle = [(2R+1)/z_2^2 - R(R+2)/z_1^2] / 2(1+R)^2, \quad (34)$$

$$V(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle = [(5R^2 + 6R + 2)z_2^4 + R(2R^2 + 6R + 5)/z_1^4] / 2(1+R)^3. \quad (35)$$

Здесь

$$R = \delta_2 / \delta_1, \quad z_1^2 = \tilde{z}^2 \delta_1^2 / 2\delta_0, \quad z_2^2 = \tilde{z}^2 \delta_2^2 / 2\delta_0. \quad (36)$$

С учетом обозначений (36), выражения (34) и (35) примут вид:

$$d(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \frac{1}{\tilde{z}^2} \frac{\delta_0}{\delta_1^2 \delta_2^2} \frac{(\delta_1^2 - \delta_2^2)}{(\delta_1 + \delta_2)}, \quad (37)$$

$$V(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \frac{2}{\tilde{z}^4} \frac{\delta_0^2}{(\delta_1 \delta_2)^4} \frac{(2(\delta_1^6 + \delta_2^6) + 4(\delta_1 \delta_2^5 + \delta_2 \delta_1^5) + (\delta_1^2 \delta_2^4 + \delta_2^2 \delta_1^4) - \delta_1^3 \delta_2^3)}{(\delta_1 + \delta_2)^2}. \quad (38)$$

Если форма опорного сигнала $g(t)$ совпадает с формой принимаемого сигнала $f(t)$, то прием оптимальный (4). Тогда положив $g(t) = f(t)$ в выражениях для параметров $\delta_i, i = 0, 1, 2$ (27)–(29), из соотношений (37) и (38) получаем соответственно смещение и рассеяние надежной МП оценки времени прихода сигнала

$$d_0(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 0, \quad V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 13/2 z^4 \delta_0^2. \quad (39)$$

Здесь z^2 — ОСШ при оптимальном приеме (14), δ_0 — параметр аппроксимации (29). Подставляя выражения (14) и (29) в (39) находим, что

$$V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 13N_0^2 / 2 [f^2(\tau/2) + f^2(-\tau/2)]^2. \quad (40)$$

Выражение для рассеяния МП оценки времени прихода, аналогичное (40), было получено в [7].

Запишем параметры (36), входящие в выражения для характеристик оценки в явном виде через функции $f(t)$ и $g(t)$. С учетом (27), (28) и (29) имеем

$$R = (A - B) / (A + B), \quad z_1^2 = (A + B)^2 / (2N_0 C), \quad z_2^2 = (A - B)^2 / (2N_0 C), \quad (41)$$

где

$$A = [f(\tau/2)g(\tau/2) + f(-\tau/2)g(-\tau/2)], \quad B = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} [f'(t)g(t) - f(t)g'(t)] dt, \\ C = [g^2(\tau/2) + g^2(-\tau/2)]. \quad (42)$$

Для выражений (37) и (38) с учетом (42) можем записать

$$d(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 4N_0 \frac{ABC}{(A^2 - B^2)^2}, \quad (43)$$

$$V(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \frac{N_0^2}{2} \frac{C^2}{A^2} \frac{(13A^6 + 101A^4B^2 + 15A^2B^4 - B^6)}{(A^2 - B^2)^4}. \quad (44)$$

Рассмотрим случай, когда приемник реализует МП алгоритм оценки времени прихода прямоугольного импульса с амплитудой a и длительностью τ , но используется для оценки времени прихода сигнала (1). При этом функция $g(t) = a$, а параметры (42) принимают вид

$$A = a[f(\tau/2) + f(-\tau/2)], \quad B = a[f(\tau/2) - f(-\tau/2)], \quad C = 2a^2. \quad (45)$$

С учетом (45), выражения для характеристик оценки (43) и (44) можно переписать как

$$d(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \frac{N_0}{2} \left[\frac{f^2(\tau/2) - f^2(-\tau/2)}{f^2(\tau/2)f^2(-\tau/2)} \right], \quad (46)$$

$$V(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \frac{N_0^2}{2} \frac{\left\{ 2[f^6(\tau/2) + f^6(-\tau/2)] + 4[f^5(\tau/2)f(-\tau/2) + f^5(-\tau/2)f(\tau/2)] + \right.}{[f(\tau/2) + f(-\tau/2)]^2 [f(\tau/2)f(-\tau/2)]^4} \left. + [f^4(\tau/2)f^2(-\tau/2) + f^4(-\tau/2)f^2(\tau/2)] - [f^3(\tau/2)f^3(-\tau/2)] \right\}. \quad (47)$$

Если в выражения (46) и (47) ввести параметр

$$q = f(\tau/2) / f(-\tau/2), \quad (48)$$

то их можно переписать в более компактной форме:

$$d(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \frac{N_0}{2f^2(-\tau/2)} [(q^2 - 1)/q^2], \quad (49)$$

$$V(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \frac{N_0^2}{2f^4(-\tau/2)} [(2q^6 + 4q^5 + q^4 - q^3 + q^2 + 4q + 2)/q^4(q+1)^2]. \quad (50)$$

Пусть полезный сигнал (1) представляет собой прямоугольный импульс со скошенной вершиной [8]. Тогда

$$f(t) = a[(q-1)(t/\tau + 1/2) + 1]\sqrt{3/(q^2 + q + 1)}, \quad (51)$$

где τ — длительность сигнала, а q — определяется из (48) и характеризует степень наклона вершины импульса. Множитель $\sqrt{3/(q^2 + q + 1)}$ в (51) обеспечи-

вает постоянство энергии сигнала при различном наклоне вершины. Это свойство функции $f(t)$ (51) позволяет сравнивать эффективность оценки времени прихода сигналов с различными наклонами и одинаковой энергией, так как выполняется условие: $E = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t) dt = a^2 \tau = \text{const}$. Согласно (8), (33) КП оценка времени прихода сигнала (1), (51) будет состоятельна, если $q > 0$.

С учетом (51), получаем из (49), (50) смещение и рассеяние КП оценки времени прихода прямоугольного импульса со скошенной вершиной

$$d(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \frac{\tau}{z^2} \left[\frac{1}{3} \frac{(q^2 - 1)(q^2 + q + 1)}{q^2} \right], \quad (52)$$

$$V(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \frac{\tau^2}{z^4} \left[\frac{2}{9} \frac{(2q^6 + 4q^5 + q^4 - q^3 + q^2 + 4q + 2)(q^2 + q + 1)^2}{q^4(q + 1)^2} \right] \quad (53)$$

при использовании приемника, оптимального для прямоугольного импульса (31). В (52), (53) $z^2 = 2E/N_0 = 2a^2 \tau / N_0$ — ОСШ при оптимальном приеме (14).

Если в выражениях (52) и (53) положить $q = 1$, то получим смещение и рассеяние МП оценки времени прихода прямоугольного импульса

$$d_0(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 0, \quad V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 13\tau^2 / 2z^4 = 13 / 2z^4 \delta_r^2, \quad (54)$$

где $\delta_r = 1/\tau$ — параметр аппроксимации при оптимальном приеме прямоугольного импульса с амплитудой a [2].

Сопоставляя (52), (53) и (54) можем определить, как влияет на характеристики КП оценки времени прихода сигнала (1), (51) отклонение его формы от прямоугольной. В то время как МП оценка времени прихода несмещенная (54), КП оценка оказывается смещенной (52). В частности, при $q > 1$ (возрастающая вершина импульса) смещение положительное, а при $q < 1$ (убывающая вершина) смещение отрицательное. В общем случае, по мере отклонения параметра q от единицы, модуль смещения КП оценки возрастает. Обычно смещение существенно снижает эффективность оценки, если оно составляет заметную долю среднеквадратической ошибки.

Введем в рассмотрение рассеяние $\hat{d}$, нормированное на среднеквадратическую ошибку $\sqrt{V(\hat{\lambda}|\lambda_0)}$ (53)

$$\hat{d}(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \frac{d(\hat{\lambda}|\lambda_0)}{\sqrt{V(\hat{\lambda}|\lambda_0)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(q^2 - 1)(q + 1)}{\sqrt{2q^6 + 4q^5 + q^4 - q^3 + q^2 + 4q + 2}}. \quad (55)$$

Зависимость нормированного смещения (55) КП оценки времени прихода от параметра q нанесена сплошной линией на рис. 1. Согласно рис. 1, смещение может достигать существенной величины, до 0,5...0,6 от среднеквадратической ошибки.

Потери в точности КП оценки, вследствие отклонения формы сигнала (1), (51) от прямоугольной, можно охарактеризовать отношением

$$\chi = \frac{V(\hat{\lambda}|\lambda_0)}{V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0)} = \frac{4}{117} \frac{(2q^6 + 4q^5 + q^4 - q^3 + q^2 + 4q + 2)(q^2 + q + 1)^2}{q^4(q+1)^2} \quad (56)$$

рассеяний КП (53) и МП (54) оценок. Зависимость $\chi(q)$ (56) нанесена на рис. 2 сплошной линией. Согласно рис. 2, проигрыш в точности оценки времени прихода, вследствие отличия его формы от прямоугольной быстро возрастает по мере отклонения параметра q от единицы и достигает существенной величины.

С целью проверки работоспособности КП алгоритма оценки времени прихода сигнала, форма которого априори неизвестна, а также для установления границ применимости полученных асимптотических характеристик было проведено статистическое моделирование на ЭВМ. Моделирование было выполнено для КП алгоритма оценки прямоугольного импульса со скошенной вершиной (51) при опорном сигнале прямоугольной формы (31).

Случайный процесс $L(\lambda)$ (10) формировался как функция нормированного аргумента $\hat{L}(\vartheta) = L(\vartheta) / \sigma_N = S(\vartheta, \vartheta_0) + N(\vartheta)$, где $\vartheta = \lambda / \tau$, $\vartheta_0 = \lambda_0 / \tau$ — нормированное время прихода. Здесь сигнальная составляющая имеет вид

$$S(\vartheta, \vartheta_0) = \tilde{z}\hat{S}(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{z\sqrt{3}/2}{\sqrt{1+q+q^2}} \begin{cases} [(\vartheta - \vartheta_0)^2(q-1) + 2(\vartheta - \vartheta_0)q] + (q+1), & -1 \leq \vartheta - \vartheta_0 < 0 \\ -[(\vartheta - \vartheta_0)^2(q-1) + 2(\vartheta - \vartheta_0)] + (q+1), & 0 \leq \vartheta - \vartheta_0 \leq 1 \\ 0, & |\vartheta - \vartheta_0| > 1 \end{cases}$$

$$N(\vartheta) = \sqrt{2\tau/N_0} \int_{-1/2+\vartheta}^{1/2+\vartheta} n(\tau x) dx$$

— гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $\langle N(\vartheta_1)N(\vartheta_2) \rangle = \hat{B}_N(\vartheta_1, \vartheta_2) = \max(1 - |\vartheta_1 - \vartheta_2|; 0)$ вида (30).

При моделировании вырабатывались дискретные отсчеты функции $N(\vartheta)$ с шагом $\Delta\vartheta$, на основе которых реализация выходного сигнала КП приемника (5) аппроксимировалась ступенчатой функцией с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью $\varepsilon = 0,025$. Согласно [9], выходной сигнал КП приемника представлялся в виде

$$\hat{L}(j\Delta\vartheta) = S(j\Delta\vartheta, j_0\Delta\vartheta) + \sqrt{\Delta\vartheta} \sum_{k=-N}^N \xi[k+j]$$

где $\xi[k]$ — гауссовские независимые случайные величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией, $\Delta\theta = \varepsilon^2$ — шаг дискретизации, $N = \text{ent}[(1/\varepsilon^2 - 1)/2]$ — число элементов суммирования, $j \in [J_1; J_2]$, $J_i = \text{ent}[\Lambda_i / \varepsilon^2 \tau]$, $i = 1, 2$, $j_0 = \text{ent}[\theta_0 / \varepsilon^2]$, $\text{ent}(x)$ — целая часть числа x .

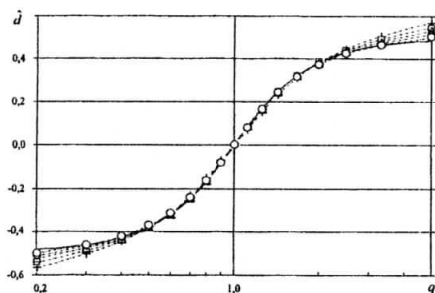


Рис. 1

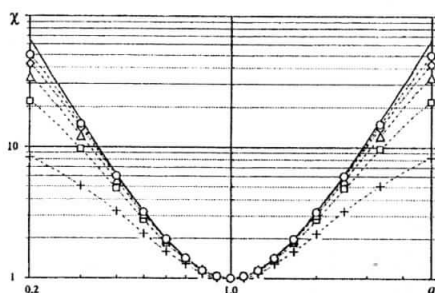


Рис. 2

В процессе моделирования для каждого значения ОСШ z было реализовано не менее 10^7 циклов испытаний. Следовательно, для реализованного объема экспериментальной выборки относительная погрешность экспериментальных данных с доверительной вероятностью 0,9 не превышает 16,5% [10].

Результаты статистического моделирования представлены на рис. 1 и рис. 2. На обоих рисунках полученные экспериментальные значения обозначены маркерами: при ОСШ $z = 10$ в виде крестиков; при $z = 20$ в виде квадратов; треугольникам соответствует $z = 30$; ромбам — $z = 40$; кружкам — $z = 50$. Из рис. 1 и рис. 2 следует, что с ростом z область значений q в которой наблюдается удовлетворительное согласование результатов моделирования с теоретическими значениями характеристик КП оценки времени прихода сигнала расширяется. При ОСШ $z = 10$ наблюдается удовлетворительное согласование для $q \approx 0,7 \div 1,43$; при $z = 20$ для $q \approx 0,5 \div 2,0$, при $z = 50$ для $q \approx 0,2 \div 5,0$.

Таким образом, полученные результаты позволяют определить потери в точности оценки времени прихода финитного сигнала, вследствие априорного незнания его формы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с.
2. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
3. Терентьев А. С. Распределение вероятности временного положения абсолютного максимума на выходе согласованного фильтра. // Радиотехника и электроника. — 1968, т. 13, № 4. — с. 652–657.

4. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М., Сов. радио, 1978. — 296 с.
5. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. — М.: Мир, 1969.
6. Трифонов А. П., Захаров А. В. Характеристики совместной оценки параметров области частотно-временной локализации разрывного случайного импульса // Радиотехника и электроника. — 1996, Т. 41, № 11. — с. 1316–1322.
7. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. — М.: Наука, 1979. — 528 с.
8. Грязнов М. И., Гуревич М. А., Рябинин М. А. Измерение параметров импульсов. — М.: Радио и связь, 1991. — 216 с.
9. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1971. — 326 с.
10. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. — М.: Наука, 1988. — 480 с.

Воронежский государственный университет.

Поступила в редакцию 18.07.07

УДК 621.372.061:391.266

МЕЛЬНИК А. Д., РЫБИН А. И.

НОРМАЛИЗАЦИЯ ЭТАЛОННОГО СИГНАЛА С ПОСТОЯННЫМ ШАГОМ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

В статье предложен новый метод нормализации — по мгновенным значениям, «по уровню» тестового сигнала, — для которого шаг дискретизации является эквидистантным, что в значительной степени преодолевает неудобства нормализации «по шагу». Для лучшего понимания основных положений метода рассмотрены на преобразованиях Уолша–Карчмаржа и косинусном.

Определение меры подобия и различия между исследуемым и эталонным сигналами является важной задачей технической диагностики. Решение этой задачи в области трансформант ортогональных преобразований весьма просто, если какая-либо из трансформант совпадает с эталонным сигналом, что, например, имеет место в электротехнике при оценке степени искажения гармонического тока по коэффициентам гармоник.

Для сигналов более сложной формы, как правило, отсутствуют тождественные им трансформанты ортогональных преобразований. Однако и в данном случае задача приведения (в известном смысле) трансформант к форме эталонного может быть решена при помощи процедуры нормализации [1]. При этом возникает возможность численно оценивать степень подобия по коэффициентам трансформант [2]. Неудобство нормализации, предложенной в [1], связано с неэквидистантностью шагов отсчетов. Такую нормализацию в дальнейшем будем называть «по шагу».