

264
P6434
T.51, 01/2008

264

ISSN 0021-3462

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОФИЗИКА

2008
ТОМ 51
1

ИЗДАНИЕ НИЖЕГОРОДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.391.1

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИЁМА ФИНИТНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРИХОДА

А. П. Трифонов, А. В. Сморгонский

Воронежский госуниверситет, г. Воронеж, Россия

Синтезированы максимально правдоподобные и байесовские алгоритмы обнаружения и оценки времени прихода сигнала произвольной формы, наблюдаемого на фоне белого гауссовского шума. Найдены асимптотически точные выражения для характеристик максимально правдоподобных алгоритмов. Выполнено моделирование на ЭВМ синтезированных алгоритмов.

ВВЕДЕНИЕ

В [1–3] и ряде других работ рассмотрена задача оптимального приёма наиболее распространённой модели финитного сигнала — прямоугольного импульса с неизвестным временем прихода на фоне гауссовского белого шума. Показано, что полезный сигнал является разрывным по неизвестному параметру. Также выполнен синтез алгоритма максимального правдоподобия и найдены характеристики обнаружения сигнала и оценки времени прихода.

Однако реальные условия генерации и распространения приводят к необходимости приёма финитных сигналов, форма которых может значительно отличаться от прямоугольной. В связи с этим представляет интерес синтез и анализ алгоритмов приёма разрывного сигнала конечной длительности и произвольной формы с неизвестным временем прихода.

В данной работе синтезированы максимально правдоподобные (МП) и байесовские алгоритмы обнаружения и оценки времени прихода финитного сигнала произвольной формы, принимаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. Найдены асимптотические выражения для характеристик МП обнаружителя и оценки времени прихода. Выполнено статистическое моделирование на ЭВМ максимально правдоподобных и байесовских алгоритмов обнаружения и оценки времени прихода сигнала.

1. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРИХОДА

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала

$$s(t - \lambda_0) = f(t - \lambda_0)I[(t - \lambda_0)/\tau], \quad I(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2; \\ 0, & |x| > 1/2, \end{cases} \quad (1)$$

наблюдаемого в течение интервала времени $[0, T]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью мощности N_0 . Здесь $\lambda_0 \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$ — неизвестное время прихода сигнала, $f(t)$ — дифференцируемая функция, описывающая форму сигнала, τ — длительность сигнала. Величина $\Lambda = \Lambda_2 - \Lambda_1$ определяет длительность априорного интервала возможных значений времени прихода. Реализация наблюдаемых данных на входе приёмника имеет вид

$$x(t) = \gamma_0 s(t - \lambda_0) + n(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Индекс нуль здесь и далее обозначает истинное значение соответствующего параметра. Параметр $\gamma_0 \in \{0, 1\}$, причём $\gamma_0 = 0$ соответствует случаю отсутствия сигнала в наблюдаемых данных, $\gamma_0 = 1$ — его наличию. По наблюдаемой реализации $x(t)$ необходимо оптимальным образом решить, какое значение принимает параметр γ .

Логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) в этом случае будет зависеть от параметров γ , λ и может быть записан в виде [1, 2]

$$L(\gamma, \lambda) = \frac{2\gamma}{N_0} \int_0^T x(t)s(t-\lambda) dt - \frac{\gamma}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt.$$

В соответствии с МП алгоритмом [3] оценка дискретного параметра γ может быть найдена как

$$\hat{\gamma} = \arg \sup_{\gamma} \left[\sup_{\lambda} L(\gamma, \lambda) \right].$$

Учитывая, что $L(\gamma = 0, \lambda) = 0$, получаем, что МП алгоритм обнаружения заключается в сравнении абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП с нулём. Если выполняется неравенство

$$\sup L(\gamma = 1, \lambda) > 0, \quad \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2], \quad (3)$$

то выносится решение о наличии сигнала в принятой реализации ($\hat{\gamma} = 1$), в противном случае — об отсутствии сигнала ($\hat{\gamma} = 0$). Обозначим

$$L(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t-\lambda) dt \quad (4)$$

член логарифма ФОП, зависящий от неизвестного параметра λ . Кроме алгоритма (3) можно использовать обобщённый МП алгоритм обнаружения [3], основанный на сравнении абсолютного максимума логарифма ФОП с некоторым порогом h . Если

$$L = \sup L(\lambda) > h, \quad \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2], \quad (5)$$

то выносится решение о наличии сигнала ($\hat{\gamma} = 1$), если $L < h$ — о его отсутствии ($\hat{\gamma} = 0$). Порог h может выбираться исходя из различных критериев оптимальности [3].

Подставляя (2) в (4), логарифм ФОП можно представить в виде суммы сигнальной и шумовой составляющих [4]:

$$L(\lambda) = z^2 \gamma_0 S(\lambda, \lambda_0) + zN(\lambda), \quad (6)$$

где

$$z^2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T s^2(t - \lambda_0) dt \quad (7)$$

— отношение сигнал/шум (ОСШ),

$$S(\lambda, \lambda_0) = \frac{2}{z^2 N_0} \int_0^T s(t - \lambda_0)s(t - \lambda) dt, \quad (8)$$

$$N(\lambda) = \frac{2}{zN_0} \int_0^T n(t)s(t-\lambda) dt \quad (9)$$

— нормированные сигнальная и шумовая функции на выходе линейной части приёмника. Шумовая функция (9) представляет собой реализацию централизованного гауссовского процесса с корреляционной функцией

$$\langle N(\lambda_1)N(\lambda_2) \rangle = S(\lambda_1, \lambda_2).$$

Для расчёта характеристик обнаружения надо установить свойства сигнальной функции (8) [2, 3]. Полагая $\Lambda_1 > \tau$ и $T > \Lambda_2 + \tau$, так что сигнал (1) полностью расположен внутри интервала наблюдения $[0, T]$, из (8) получаем, что $S(\lambda, \lambda_0) = S(\lambda - \lambda_0)$. Поэтому без потери общности при исследовании свойств сигнальной функции можно положить $\lambda_0 = 0$. Подставляя затем (1) в (8), перепишем сигнальную функцию в виде

$$S(\lambda) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)f(t-\lambda)I\left(\frac{t-\lambda}{\tau}\right) dt \Big/ \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t) dt. \quad (10)$$

Рассмотрим вначале поведение сигнальной функции (10) при $|\lambda| \rightarrow 0$. Для этого разложим сигнальную функцию в ряд Макларена по параметру λ и ограничимся только членом, содержащим первую производную.

Согласно (10) сигнальная функция непрерывно дифференцируема в окрестности нуля справа и слева, исключая значение $\lambda = 0$, где производная терпит разрыв первого рода. Поэтому разложение для (10) будет иметь вид

$$S(\lambda) = 1 + \left[\frac{d}{d\lambda} S(\lambda) \Big|_{\lambda=0+} \right] \lambda + o(\lambda) \quad (11)$$

при $\lambda \geq 0$ и

$$S(\lambda) = 1 + \left[\frac{d}{d\lambda} S(\lambda) \Big|_{\lambda=0-} \right] \lambda + o(\lambda) \quad (12)$$

при $\lambda \leq 0$. Дифференцируя (10) по λ и переходя к соответствующим пределам, имеем

$$\frac{d}{d\lambda} S(\lambda) \Big|_{\lambda=0+} = - \left[f^2(-\tau/2) + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)f'(t) dt \right] \Big/ \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t) dt, \quad (13)$$

$$\frac{d}{d\lambda} S(\lambda) \Big|_{\lambda=0-} = \left[f^2(\tau/2) - \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)f'(t) dt \right] \Big/ \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t) dt. \quad (14)$$

Выполняя в (13), (14) интегрирование по частям, для коэффициентов разложения (11), (12) получаем

$$\frac{d}{d\lambda} S(\lambda) \Big|_{\lambda=0+} = -\delta; \quad \frac{d}{d\lambda} S(\lambda) \Big|_{\lambda=0-} = \delta, \quad (15)$$

где

$$\delta = \frac{1}{2} \left[f^2\left(\frac{\tau}{2}\right) + f^2\left(-\frac{\tau}{2}\right) \right] \Big/ \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t) dt. \quad (16)$$

Подставляя (15) в (11) и (12) и объединяя эти два выражения, находим, что при $|\lambda| \rightarrow 0$ для сигнальной функции (10) справедливо асимптотическое разложение

$$S(\lambda) = 1 - \delta|\lambda| + o(|\lambda|). \quad (17)$$

Если сигнал имеет прямоугольную форму, то в (1) $f(t) = \text{const}$, и из (16) имеем

$$\delta_\tau = 1/\tau. \quad (18)$$

Выражение (18) совпадает с результатом, полученным в [3]. С увеличением $|\lambda|$ сигнальная функция (10) убывает, и при $|\lambda| > \tau$, как следует из (10), $S(\lambda) = 0$. Сигнальная функция не имеет второй производной при $\lambda = 0$, так что реализации ФОП (4) не дифференцируемы, но непрерывны с вероятностью 1 [2].

Согласно [3] вероятность ошибки 1-го рода (ложной тревоги) α и вероятность ошибки 2-го рода (пропуска сигнала) β в приёмнике максимального правдоподобия, осуществляющем сравнение абсолютного максимума $L(\lambda)$ (6) с порогом h , определяются как

$$\alpha = P[\sup L(\lambda) > h \mid \gamma_0 = 0], \quad \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]; \quad (19)$$

$$\beta = P[\sup L(\lambda) < h \mid \gamma_0 = 1], \quad \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]. \quad (20)$$

Установленные свойства сигнальной функции позволяют записать приближённые выражения для (19), (20) в виде [3]

$$\alpha \approx \begin{cases} 1 - \exp[-mu \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}], & u \geq 1; \\ 1, & u < 1, \end{cases} \quad (21)$$

$$\beta \approx (1 - \alpha) \left[\Phi(u - z) - 2 \exp\left(\frac{3}{2}z^2 - uz\right) \Phi(u - 2z) + \exp(4z^2 - 2uz) \Phi(u - 3z) \right], \quad (22)$$

где $u = h/z$ — нормированный порог, $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$ — интеграл вероятности,

$$m = \Lambda\delta \quad (23)$$

— приведённая длина априорного интервала $[\Lambda_1, \Lambda_2]$.

Пусть энергия сигнала фиксирована, т. е. $E = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t) dt = \text{const}$. Тогда величины (16), (23) и характеристики обнаружения (21), (22) будут зависеть только от значений $f(t)$ в точках $t = -\tau/2$, $t = \tau/2$ начала и окончания сигнала соответственно и не будут зависеть от поведения функции $f(t)$ внутри интервала его существования. Точность выражений (21), (22) растёт с увеличением параметров m , u и z [2].

Если вероятность ложной тревоги мала, например $\alpha \leq 0,1$, то из (21) и (22) следует

$$\alpha \approx mu \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}, \quad (24)$$

$$\beta \approx \Phi(u - z) - 2 \exp\left(\frac{3}{2}z^2 - uz\right) \Phi(u - 2z) + \exp(4z^2 - 2uz) \Phi(u - 3z). \quad (25)$$

Следовательно, при малых α вероятность пропуска сигнала β (22) не зависит от формы сигнала. Форма сигнала сказывается только на вероятности ложной тревоги α (21).

Рассмотрим влияние формы сигнала на характеристики обнаружения при приёме прямоугольного импульса со скошенной вершиной [5]:

$$f(t) = A \sqrt{3/(q^2 + q + 1)} [(q - 1)(t/\tau + 1/2) + 1]. \quad (26)$$

Здесь A характеризует амплитуду импульса, $q = f(\tau/2)/f(-\tau/2)$ — наклон его скошенной вершины. Множитель $\sqrt{3/(q^2 + q + 1)}$ в выражении (26) обеспечивает постоянство энергии сигнала при различном наклоне вершины, что позволяет сравнивать эффективность обнаружения сигналов с различными наклонами и одинаковой энергией.

Выражение для параметра δ (16) в этом случае будет иметь вид

$$\delta = 3(q^2 + 1)/[2\tau(q^2 + q + 1)] = \delta_r \psi(q),$$

где δ_r определяется выражением (18), а

$$\psi(q) = 3(q^2 + 1)/[2(q^2 + q + 1)]. \quad (27)$$

Представим приведённую длину априорного интервала (23) как

$$m = \Lambda \delta = \Lambda \delta_r \psi(q) = m_r \psi(q), \quad (28)$$

где $m_r = \Lambda \delta_r = \Lambda/\tau$ — приведённая длина априорного интервала для прямоугольного импульса.

Положим $q = 1$, тогда $\psi(q) = 1$, и из выражений (24) и (28) получаем

$$\alpha_r \approx m_r u \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi} \quad (29)$$

— вероятность ложной тревоги для идеального прямоугольного импульса [3]. Выражение для вероятности пропуска β (25) для сигнала вида (26) не зависит от параметра m (28), так что можем записать

$$\beta_r = \beta,$$

где β_r — вероятность пропуска для идеального прямоугольного импульса.

Из (24) и (29) следует, что отношение $\alpha/\alpha_r = \psi(q)$ характеризует влияние отклонения формы импульса от прямоугольной на вероятность ложной тревоги α (24) для импульса со скошенной вершиной по сравнению с вероятностью ложной тревоги α_r (29) для идеального прямоугольного импульса. График функции (27) представлен на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что функция (27) имеет предел $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} \psi(q) = 3/2$, а также два экстремума: $\max_q \psi(q) = 3$ при $q = -1$ и $\min_q \psi(q) = 1$ при $q = 1$. Также видно, что при $q = 0$ значение функции (27) совпадает с её пределом при $q \rightarrow \pm\infty$ и равно $3/2$. Из поведения функции $\psi(q)$ следует, что при $q = -1$ вероятность ложной тревоги α (24) достигает своего максимального значения, которое в три раза превышает вероятность ложной тревоги для прямоугольного импульса α_r (29), т. е. отношение $\alpha/\alpha_r = 3$.

Если известны вероятности отсутствия p_0 и наличия p_1 сигнала, то эффективность обнаружения можно характеризовать вероятностью общей ошибки [1]

$$P_e = p_0 \alpha + p_1 \beta. \quad (30)$$

В обобщённом МП алгоритме обнаружения (5) для определения порога h целесообразно использовать критерий минимума вероятности общей ошибки (30) [3]. Получаемый таким образом порог $h^* = \arg \inf P_e(h)$ будет зависеть от p_0 , z и m (23). Алгоритм обнаружения (5) при оптимизированном пороге h^* будем называть максимально правдоподобным обнаружителем с оптимизированным порогом.

На рис. 2 нанесены зависимости вероятности общей ошибки (30) от отношения сигнал/шум z (7). Значения параметров при расчёте выбирались следующими: вероятность отсутствия сигнала $p_0 = 0,1$, приведённая длина априорного интервала при обнаружении прямоугольного импульса

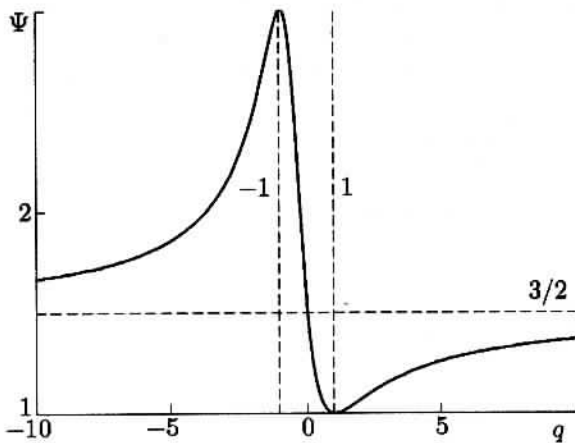


Рис. 1

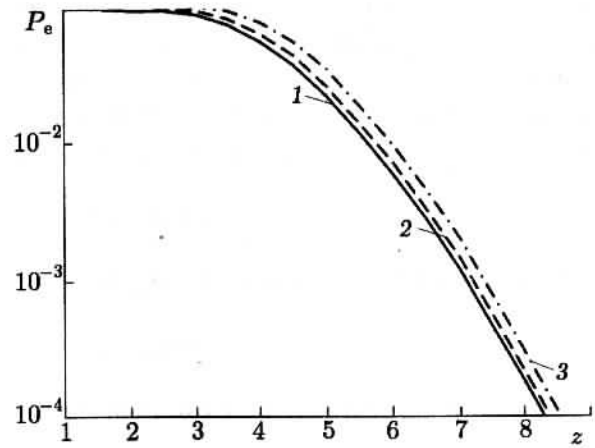


Рис. 2

$m_r = 10$, оптимизированный порог $h = h^*$. Кривая 1 соответствует случаю $q = 1$, кривая 2 — $q = 0$, кривая 3 — $q = -1$. Сопоставление зависимостей 1, 2 и 3 показывает, что отклонение формы сигнала от прямоугольной ведёт к заметному снижению эффективности обнаружения сигнала с неизвестным временем прихода.

Если кроме вероятностей p_0, p_1 известна априорная плотность вероятности времени прихода импульса $W(\lambda)$, то возможно использование байесовского алгоритма обнаружения. Для синтеза байесовского алгоритма используем простую матрицу потерь, у которой стоимости правильных решений принимаются нулевыми, а стоимости ошибок первого и второго рода — одинаковыми, что соответствует критерию идеального наблюдателя [1–3]. Тогда байесовский алгоритм обнаружения сигнала (1) заключается в формировании величины

$$I = \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \exp[L(\lambda) - z^2/2] W(\lambda) d\lambda \quad (31)$$

и сравнении её с порогом p_0/p_1 . Отметим, что реализация байесовского алгоритма затруднительна вследствие необходимости интегрирования нелинейной функции от логарифма ФОП (4). Тем не менее, реализовать байесовский обнаружитель можно с помощью схемы, предложенной в [6]. Действительно, величина (31) обратно пропорциональна коэффициенту нормировки (9) в [6]. Аналитически найти характеристики байесовского обнаружителя для сигнала с неизвестным временем прихода не удаётся.

2. ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ПРИХОДА СИГНАЛА

Рассмотрим теперь задачу оценки времени прихода импульса (1), полагая, что сигнал присутствует ($\gamma_0 = 1$). Алгоритм МП оценки [1] состоит в отыскании положения абсолютного максимума функционала $L(\lambda)$ (4):

$$\hat{\lambda} = \arg \sup L(\lambda), \quad \lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2].$$

С учётом свойств сигнальной функции (17) методом локально-марковской аппроксимации находим рассеяние надёжной МП оценки времени прихода сигнала [2]:

$$V_0(\hat{\lambda} | \lambda_0) = 13/(2z^4 \delta^2). \quad (32)$$

Подставляя (7) и (16) в (32), получаем

$$V_0(\hat{\lambda} | \lambda_0) = \frac{13N_0^2}{2[f^2(\tau/2) + f^2(-\tau/2)]^2}. \quad (33)$$

Аналогичное выражение было также получено в [7]. Согласно (33) предельная (при $z \rightarrow \infty$) точность МП оценки временного положения финитного сигнала не зависит от вида функции $f(t)$, описывающей форму сигнала, а определяется лишь величинами скачков сигнала в моменты времени $t = -\tau/2$ и $t = \tau/2$, соответствующие началу и окончанию сигнала.

Введём функцию, характеризующую отношение рассеяния надёжной оценки (32) сигнала (26) к рассеянию надёжной оценки $V_{0r}(\hat{\lambda} | \lambda_0) = 13/(2z^4\delta_r^2)$ для прямоугольного импульса ($q = 1$):

$$\chi(q) = \frac{V_0(\hat{\lambda} | \lambda_0)}{V_{0r}(\hat{\lambda} | \lambda_0)} = \frac{4}{9} \left(1 + \frac{q}{1+q^2}\right)^2. \quad (34)$$

График функции (34) представлен на рис. 3. Из анализа зависимости $\chi(q)$ следует, что $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} \chi(q) = 4/9$. Также функция (34) имеет два экстремума: $\max_q \chi(q) = 1$ при $q = 1$ и $\min_q \chi(q) = 1/9$ при $q = -1$. Следовательно, минимальное значение рассеяния надёжной оценки (32) достигается при $q = -1$ и соответствует $1/9$ от его значения для прямоугольного импульса. Если перейти к пределу при $|q| \rightarrow \infty$, то отношение (34) равно $4/9$, которое характеризует предел уменьшения рассеяния надёжной оценки (32) при больших значениях q .

Если величина ОСШ (7) не очень велика, а приведённая длина априорного интервала возможных значений времени прихода (23) не слишком мала, то при анализе точности МП оценки надо учитывать влияние аномальных ошибок [2, 4]. Точность МП оценки времени прихода финитного сигнала произвольной формы при наличии аномальных ошибок можно охарактеризовать величиной безусловного рассеяния $V(\hat{\lambda})$. Если априорное распределение оцениваемого параметра постоянно на интервале $[\Lambda_1, \Lambda_2]$, то безусловное рассеяние МП оценки при больших значениях ОСШ имеет вид [2]

$$V(\hat{\lambda}) = \langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle \approx P_0 V_0(\hat{\lambda} | \lambda_0) + (1 - P_0) \Lambda^2/6. \quad (35)$$

Здесь усреднение выполняется по $\hat{\lambda}$ и λ_0 , а

$$P_0 \approx 2z \exp\left(\frac{3}{2}z^2\right) \int_1^\infty \exp\left[-\frac{m}{\sqrt{2\pi}}u \exp(-u^2/2)\right] \times \\ \times \left[\exp(-zx)\Phi(x-2z) - \exp\left(\frac{5}{2}z^2 - 2zx\right)\Phi(x-3z) \right] dx$$

— вероятность надёжной оценки, где m определяется выражением (23) [2].

В качестве примера на рис. 4 для $m_r = 10$ приведены зависимости нормированного безусловного рассеяния $\hat{V} = V(\hat{\lambda})/\Lambda^2$ МП оценки времени прихода прямоугольного импульса со скошенной вершиной (26) от ОСШ z . Кривая 1 построена для $q = 1$, кривая 2 — для $q = 0$, кривая 3 — для $q = -1$.

Из рис. 4 видно, что при малых z в области аномальных ошибок отклонение от прямоугольной формы сигнала ведёт к ухудшению характеристик МП оценки. Однако при больших z отклонение формы сигнала от прямоугольной ведёт к уменьшению рассеяния оценки.

Известно [4], что байесовский алгоритм оценивания при квадратичной функции потерь минимизирует средний квадрат ошибки (рассеяние) оценки. Байесовская оценка времени прихода

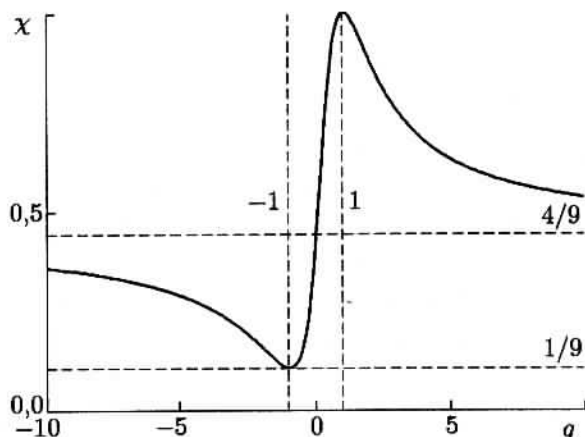


Рис. 3

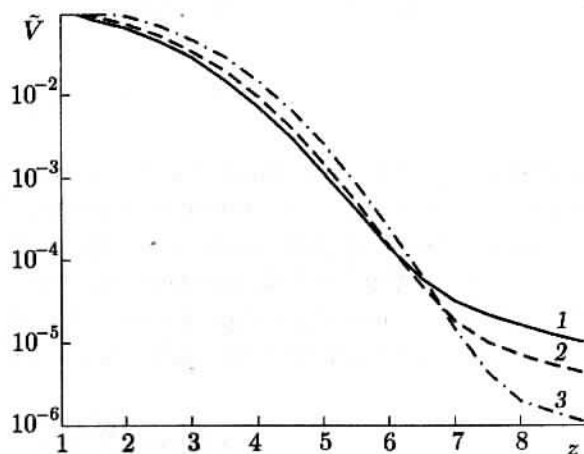


Рис. 4

при известной априорной плотности вероятности времени прихода сигнала $W(\lambda)$ в рассматриваемых условиях определяется как [4, 6]

$$\lambda_B = \frac{\int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \lambda \exp[L(\lambda)] W(\lambda) d\lambda}{\int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \exp[L(\lambda)] W(\lambda) d\lambda}. \quad (36)$$

Структура числителя и знаменателя выражения (36) сходна со структурой байесовского алгоритма обнаружения (31). В (36), как и в (31), присутствует интегрирование нелинейной функции от логарифма ФОП. Видим, что алгоритм, описываемый выражением (36), имеет те же трудности реализации, что и байесовский алгоритм обнаружения сигнала с неизвестным временем прихода (31). Этот факт в определённой степени затрудняет использование байесовского алгоритма при оценке времени прихода сигнала. Тем не менее, реализовать байесовский алгоритм можно с помощью относительно простой схемы, предложенной в [6].

Теоретический анализ байесовской оценки (36) наталкивается на существенные трудности. Однако используя результаты [7], можно записать приближённое выражение для условного рассеяния байесовской оценки, справедливое при больших значениях ОСШ:

$$V_0(\lambda_B | \lambda_0) \approx \frac{CN_0^2}{4[f^2(\tau/2) + f^2(-\tau/2)]^2}. \quad (37)$$

Здесь постоянная $C \approx 19,5 \pm 0,5$ найдена в [7] в результате статистического моделирования на ЭВМ.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Работоспособность байесовских и МП алгоритмов обнаружения и оценки времени прихода прямоугольного импульса со скошенной вершиной (26) была исследована методами статистического моделирования на ЭВМ.

Перейдём к нормированным переменным $\theta = \lambda/\tau$, $\theta_0 = \lambda_0/\tau$. Тогда логарифм ФОП $L(\lambda)$ (6) можно представить в виде $L(\theta) = \gamma_0 S(\theta, \theta_0) + N(\theta)$, где

$$S(\theta, \theta_0) = z^2 \frac{|\theta - \theta_0|^3 d^2/6 - (|\theta - \theta_0| - 1)(1 + d + d^2/2)}{1 + d + d^2/3}, \quad d = q - 1,$$

$$N(\theta) = \frac{z \sqrt{2\tau/N_0}}{\sqrt{1+d+d^2/3}} \int_{-1/2+\theta}^{1/2+\theta} n(\tau x) (1 + [(x-\theta) + 1/2] d) dx$$

— гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $\langle N(\theta_1)N(\theta_2) \rangle = S(\theta_1, \theta_2)$.

При моделировании вырабатывались отсчёты функции $N(\theta)$ с шагом $\Delta\theta$, на основе которых реализация логарифма ФОП (4) аппроксимировалась ступенчатой функцией с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью $\varepsilon = 0,05$. Дискретные отсчёты логарифма ФОП представлялись в виде [8]

$$L(j \Delta\theta) = \gamma_0 S(j \Delta\theta, j_0 \Delta\theta) + z \sqrt{\Delta\theta} \sum_{k=-N}^N \xi[k+j] \frac{(1 + [k \Delta\theta + 1/2] d)}{\sqrt{1+d+d^2/3}}, \quad (38)$$

где $\xi[k]$ — гауссовские независимые случайные величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией, $\Delta\theta = \varepsilon^2/\psi(q)$, $N = \text{ent}[(\psi(q)/\varepsilon^2 - 1)/2]$, $j \in [J_1; J_2]$, $J_i = \text{ent}[\Lambda_i \psi(q)/(\varepsilon^2 \tau)]$, $j_0 = \text{ent}[\theta_0 \psi(q)/\varepsilon^2]$, $\text{ent}(x)$ — целая часть числа x .

Параметр γ_0 принимал значения 0 и 1 с вероятностью p_0 и p_1 соответственно. Обнаружение методом максимального правдоподобия проводилось путём сравнения абсолютного максимума (38) с оптимизированным порогом h^* . Аналогично для моделирования байесовского алгоритма обнаружения сигнала при равномерном априорном распределении времени прихода на основе отсчётов (38) вырабатывалась величина

$$I = \Delta\theta \sum_{j=J_1}^{J_2} \exp[L(j \Delta\theta) - z^2/2],$$

которая сравнивалась с порогом p_0/p_1 . В качестве оценок вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала использовались относительные частоты появления соответствующих ошибок. Результатом моделирования было экспериментальное определение средней вероятности общей ошибки (30).

При наличии сигнала ($\gamma_0 = 1$) МП оценка определялась как аргумент максимума логарифма ФОП (38):

$$\hat{\theta} = \hat{j} \Delta\theta = \arg \sup_j [L(j \Delta\theta)] \Delta\theta.$$

Для моделирования байесовского алгоритма оценивания априори равномерно распределённого времени прихода сигнала формировалась величина (36):

$$\theta_B = \frac{\lambda_B}{\tau} = \Delta\theta \frac{\sum_{j=J_1}^{J_2} j \exp[L(j \Delta\theta)]}{\sum_{j=J_1}^{J_2} \exp[L(j \Delta\theta)]},$$

которая является нормированной байесовской оценкой временного положения импульса (26). При моделировании истинное значение нормированного временного положения импульса θ_0 выбиралось случайным образом с равномерной плотностью вероятности при $\theta \in [\Lambda_1/\tau, \Lambda_2/\tau]$. В процессе моделирования для каждого значения ОСШ z было реализовано 10^6 циклов испытаний. Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений вероятности общей ошибки и нормированного безусловного рассеяния не более чем на 5% при $\{P_e, \tilde{V}\} > 10^{-3}$ и не более чем на 16% при $\{P_e, \tilde{V}\} > 10^{-4}$ [9, 10].

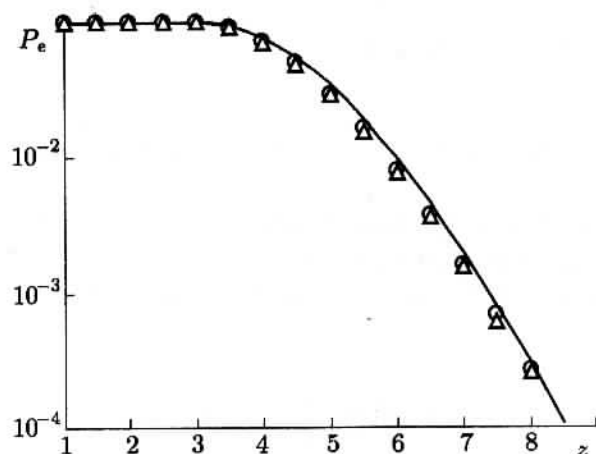


Рис. 5

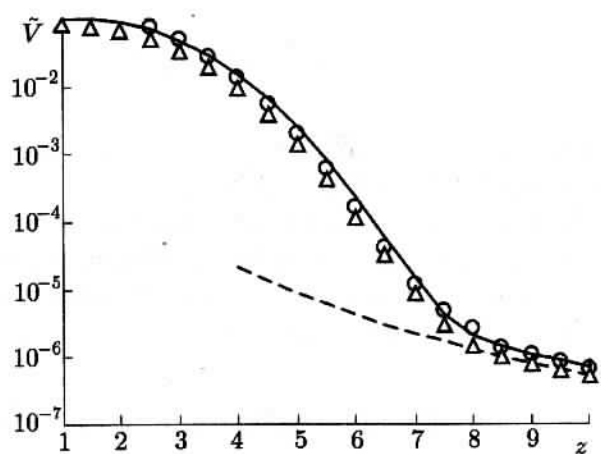


Рис. 6

Результаты статистического моделирования приведены на рис. 5, 6 для $m_r = 10$, $p_0 = 0,1$ и $q = -1$. На графиках сплошной линией нанесены теоретические зависимости вероятности общей ошибки (30). (рис. 5) и нормированного безусловного рассеяния (35) $\tilde{V} = V(\hat{\lambda})/\Lambda^2$ (рис. 6). На рис. 6 штриховой линией показано нормированное рассеяние надёжной байесовской оценки $\tilde{V}_B = V_0(\lambda_B | \lambda_0)/\Lambda^2$, рассчитанное по формуле (37). Экспериментальные данные отображены маркерами. Маркеры в виде круга соответствуют результатам моделирования для МП алгоритма, в виде треугольника — для байесовского алгоритма.

Из рис. 5, 6 видно, что результаты статистического моделирования МП алгоритмов обнаружения и оценки удовлетворительно аппроксимируются зависимостями, рассчитанными по соответствующим теоретическим формулам практически во всём диапазоне значений ОСШ z . В то же время удовлетворительное согласование расчётов по формуле (37) и результатов статистического моделирования байесовской оценки наблюдается лишь при $z \geq 8$. Байесовские алгоритмы обнаружения и оценки, как и следовало ожидать, всегда дают некоторый выигрыш в помехоустойчивости. В случае обнаружения отличие характеристик байесовского обнаружителя и максимально правдоподобного обнаружителя с оптимизированным порогом незначительно. Это позволяет рекомендовать выражения (21), (22) и (30) для расчёта вероятности общей ошибки при использовании байесовского обнаружителя: $P_{eB} \approx \inf P_e(h)$. Однако сравнение значений рассеяния оценки, полученных при использовании байесовского алгоритма и МП оценки, показало, что байесовский алгоритм даёт заметный выигрыш в точности оценки по сравнению с максимально правдоподобным. При больших z отношение безусловного рассеяния байесовской оценки к безусловному рассеянию МП оценки равно $\chi = V(\lambda_B)/V(\hat{\lambda}) \approx 0,76$. Практически такое же значение χ получается из сопоставления (33) и (37). При малых значениях ОСШ отношение $\chi = V(\lambda_B)/V(\hat{\lambda}) \approx 0,6$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Асимптотические выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска финитного сигнала не зависят от его формы. Вероятности ошибок обнаружения полностью определяются значениями сигнала в точках его начала и окончания, а также отношением сигнал/шум для принятого сигнала. Если вероятность ложной тревоги мала, то вероятность пропуска сигнала от его формы не зависит. Отметим также, что при одинаковом объёме априорной информации и равномерном

априорном распределении времени прихода сигнала характеристики байесовского алгоритма обнаружения и максимально правдоподобного алгоритма обнаружения с оптимизированным порогом практически совпадают. Этот факт позволяет использовать максимально правдоподобный алгоритм с оптимизированным порогом вместо байесовского алгоритма практически без снижения эффективности обнаружения.

Асимптотические характеристики оценки определяются значениями сигнала в точках его начала и окончания и не зависят от его формы. Для оценки времени прихода, если необходима максимальная точность, байесовский алгоритм предпочтительней алгоритма максимального правдоподобия. Однако если не требуется высокая точность оценки, возможно применение максимально правдоподобного измерителя, который проще реализовать аппаратурно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и администрации Воронежской области (проекты 06-07-96301 и 07-01-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И. Оптимальный приём сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
2. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
3. Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др. Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984.
4. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
5. Грязнов М. И., Гуревич М. А., Рябинин М. А. Измерение параметров импульсов. М.: Радио и связь, 1991.
6. Ванжа А. В., Силаев А. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 12. С. 1257.
7. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
8. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971.
9. Трифонов А. П., Нечаев Е. П., Парфёнов В. И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Воронеж: ВГУ, 1991.
10. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 7 июня 2006 г.; принята в печать 26 сентября 2006 г.

RECEPTION EFFICIENCY OF FINITE SIGNAL WITH UNKNOWN ARRIVAL TIME

A. P. Trifonov and A. V. Smorgonsky

Maximum-likelihood and Bayesian algorithms for detecting and estimating arrival time of an arbitrary-waveform signal observed against a background of white Gaussian noise are synthesized. Asymptotically exact expressions for the characteristics of the maximum-likelihood algorithms are found. The synthesized algorithms are computer simulated.