



ISSN 0021-3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ЮБИЛЕЙНЫЙ ВЫПУСК

ТОМ 51

1-2

январь-февраль

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

2008

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОБНАРУЖЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМИ КООРДИНАТАМИ И ПЛОЩАДЬЮ*

Выполнены синтез и анализ максимально правдоподобного обнаружителя изображения на фоне пространственного шума. Исследованы потери в эффективности обнаружения изображения вследствие априорного незнания его координат и площади.

Во многих приложениях теории обработки изображений возникает необходимость в обнаружении изображения на фоне пространственного шума [1–3 и др.]. В [2] рассмотрена задача обнаружения изображения с неизвестными координатами, но площадь изображения при этом предполагалась априори известной. В [3] рассмотрена задача обнаружения изображения с неизвестной площадью, но координаты изображения при этом предполагались априори известными. В то же время, во многих случаях у обнаруживаемого изображения могут быть априори неизвестны, как координаты, так и площадь, которая характеризует размеры изображения. Кроме того, обычные условия формирования и передачи изображения [1] приводят к тому, что его максимальная интенсивность (амплитуда) так же априори неизвестна. В связи с чем рассмотрим обнаружения изображения с априори неизвестными координатами, площадью и амплитудой.

Пусть в области G наблюдается реализация двумерного случайного поля

$$\xi(x_1, x_2) = \gamma_0 s(x_1, x_2, a_0, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) + n(x_1, x_2), \quad (1)$$

где $n(x_1, x_2)$ — центрированный гауссовский белый шум с односторонней спектральной площадью N_0 , $\gamma_0 = \{0, 1\}$ — дискретный параметр, отражающий наличие или отсутствие в принятой реализации полезного изображения, которое можно записать в виде

$$s(x_1, x_2, a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) = af \left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi}} \right). \quad (2)$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ и администрации Воронежской области (проекты 06-07-96301 и 07-01-00042).

Здесь $a = \max_{x_1, x_2} s(x_1, x_2, a, \lambda_1, \lambda_2, \chi)$ — амплитуда изображения, параметры λ_1, λ_2 — характеризуют положения изображения в области наблюдения G , а

$$\chi = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} s^2(x_1, x_2, a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) dx_1 dx_2 / a^2$$

— эквивалентная площадь полезного изображения. Функция $f(x_1, x_2)$ в (2) описывает распределение интенсивности изображения и нормирована так, что

$$\max f(x_1, x_2) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad (3)$$

Положим, что неизвестные координаты изображения (2) принимают значения из интервалов $[\lambda_{i \min}, \lambda_{i \max}]$, так что $\lambda_i \in [\lambda_{i \min}, \lambda_{i \max}]$, $i = 1, 2$, а неизвестная площадь $\chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]$. Обозначим $\Pi = \{[\lambda_{1 \min}, \lambda_{1 \max}], [\lambda_{2 \min}, \lambda_{2 \max}], [\chi_{\min}, \chi_{\max}]\}$ — априорная область возможных значений координат и площади изображения. Эта область такова, что при всех $(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi$, изображение (2) расположено внутри области наблюдения G .

Для обнаружения полезного изображения необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП), как функцию всех неизвестных параметров изображения [4]. Согласно [5] логарифм ФОП можно записать как

$$M(a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) = \frac{2a}{N_0} \iint_G \xi(x_1, x_2) f\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi}}\right) dx_1 dx_2 - \frac{a^2 \chi}{N_0} \quad (4)$$

Решение о наличии полезного изображения в принятой реализации наблюдаемых данных (1) принимается в результате сравнения величины абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП (4) с порогом h , выбранным в соответствии с заданным критерием оптимальности обнаружения [4]. В результате, алгоритм обнаружения принимает вид

$$\begin{aligned} \sup_{a, (\chi, \lambda_1, \lambda_2) \in \Pi} M(a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) > h &\Rightarrow \gamma_0 = 1, \\ \sup_{a, (\chi, \lambda_1, \lambda_2) \in \Pi} M(a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) < h &\Rightarrow \gamma_0 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Максимизацию по амплитуде a в (5) можно выполнить аналитически. Тогда

$$M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = \sup_a M(a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) = R^2(\lambda_1, \lambda_2, \chi) / 2, \quad (6)$$

а алгоритм обнаружения (5) переписывается как

$$\sup_{(\chi, \lambda_1, \lambda_2) \in \Pi} M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) > h \Rightarrow \gamma_0 = 1, \quad (7)$$

$$\sup_{(\chi, \lambda_1, \lambda_2) \in \Pi} M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) < h \Rightarrow \gamma_0 = 0.$$

В (6) функционал

$$R(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = \sqrt{\frac{2}{\chi N_0}} \iint_G \xi(x_1, x_2) f\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi}}\right) dx_1 dx_2. \quad (8)$$

Эффективность алгоритма обнаружения (7) будем характеризовать вероятностями ошибок первого рода (ложной тревоги) и второго рода (пропуска изображения) [4].

Пусть $\gamma_0 = 0$, т. е. полезное изображение отсутствует в реализации наблюдаемых данных (1). Тогда вероятность ложной тревоги определяется выражением [4]

$$\alpha = P\left[\sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi} M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) > h \mid \gamma_0 = 0\right] = P\left[\sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi} \frac{R^2(\lambda_1, \lambda_2, \chi)}{2} > h\right]. \quad (9)$$

Здесь

$$R_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = \sqrt{\frac{2}{\chi N_0}} \iint_G n(x_1, x_2) f\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi}}\right) dx_1 dx_2 \quad (10)$$

— функционал (8) при отсутствии полезного изображения. Функционал (10) представляет собой центрированное гауссовское случайное поле, обладающее корреляционной функцией

$$\begin{aligned} B_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2) &= \langle R_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \chi_1) R_0(\lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_2) \rangle = \\ &= \iint_G f\left(\frac{x_1 - \lambda_{11}}{\sqrt{\chi_1}}, \frac{x_2 - \lambda_{21}}{\sqrt{\chi_1}}\right) f\left(\frac{x_1 - \lambda_{12}}{\sqrt{\chi_2}}, \frac{x_2 - \lambda_{22}}{\sqrt{\chi_2}}\right) dx_1 dx_2 / \sqrt{\chi_1 \chi_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Перепишем теперь выражение для вероятности ложной тревоги (9) в виде

$$\alpha = 1 - P_N(h), \quad P_N(h) = P\left[\sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi} |R_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi)| < \sqrt{2h}\right]. \quad (12)$$

Согласно (11), случайное поле (10) является неоднородным по параметру χ . Это не позволяет непосредственно воспользоваться результатами [4] для

расчета вероятности $P_N(h)$. Поэтому аналогично [6,7] априорную область Π возможных значений параметров $\lambda_1, \lambda_2, \chi$ разобьем на K подобластей $\Pi_k = \{[\lambda_{1 \min}; \lambda_{1 \max}], [\lambda_{2 \min}; \lambda_{2 \max}], [\chi_{1k}, \chi_{2k}]\}$ таких, что для любой точки $\tilde{\chi}_k \in \Pi_k$ выполняется условие

$$\delta = \max[\Delta\chi_k / \tilde{\chi}_k] \ll 1, \quad (13)$$

где $\Delta\chi_k = \chi_{2k} - \chi_{1k}$. Тогда в каждой подобласти Π_k при $\delta \rightarrow 0$ случайное поле (10) можно приближенно считать локально-однородным. Потребуем далее, чтобы значения поля $R_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$ в различных подобластях Π_k были приближенно статистически независимы. Для этого достаточно, чтобы объем каждой из подобластей Π_k был значительно больше объема области значений $(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$, где корреляционная функция (11) существенно отлична от нуля. Объем подобласти Π_k будет существенно больше объема области высокой корреляции случайного поля (10), если [4]

$$\xi_k = \Lambda_1 \Lambda_2 \Delta\chi_k b(\tilde{\chi}_k) \gg 1. \quad (14)$$

Здесь $\Lambda_i = \lambda_{i \max} - \lambda_{i \min}$, $i = 1, 2$, а $b^2(\chi)$ — определитель матрицы

$$\|B_{ij}(\chi)\|, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (15)$$

элементами которой являются производные корреляционной функции (11)

$$\begin{aligned} B_{11}(\chi) &= \frac{\partial^2 B_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2)}{\partial \lambda_{11} \partial \lambda_{12}} = \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right]^2 dx_1 dx_2, \\ B_{12}(\chi) &= B_{21}(\chi) = \frac{\partial^2 B_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2)}{\partial \lambda_{11} \partial \lambda_{22}} = \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_1 dx_2, \\ B_{13}(\chi) &= B_{31}(\chi) = \frac{\partial^2 B_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2)}{\partial \lambda_{11} \partial \chi_2} = \\ &= \frac{1}{2\chi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \left(x_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + f(x_1, x_2) \right) dx_1 dx_2, \\ B_{22}(\chi) &= \frac{\partial^2 B_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2)}{\partial \lambda_{21} \partial \lambda_{22}} = \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right]^2 dx_1 dx_2, \\ B_{23}(\chi) &= B_{32}(\chi) = \frac{\partial^2 B_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2)}{\partial \lambda_{21} \partial \chi_2} = \\ &= \frac{1}{2\chi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \left(x_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + f(x_1, x_2) \right) dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

$$B_{33}(\chi) = \frac{\partial^2 B_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2)}{\partial \chi_1 \partial \chi_2} =$$

$$= \frac{1}{4\chi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + f(x_1, x_2) \right)^2 dx_1 dx_2. \quad (16)$$

Все производные в (16) вычисляются для значений $\lambda_{11} = \lambda_{12}, \lambda_{21} = \lambda_{22}, \chi_1 = \chi_2 = \chi$.

При выполнении (14) вероятность $P_N(h)$ из (12) можно записать как

$$P_N(h) \simeq \prod_{k=1}^K P_{Nk}(h), \quad P_{Nk}(h) = P \left[\sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi_k} |R_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi)| < \sqrt{2h} \right]. \quad (17)$$

Согласно [8], когда выполняется (14), значения $R^{+Nk} = \sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi_k} R_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$ и $R^{-Nk} = \inf_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi_k} R_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$ абсолютных

максимума и минимума случайного поля (10) в каждой подобласти Π_k приближенно статистически независимы. Следовательно, при больших h [8], с учетом (14) для вероятностей $P_{Nk}(h)$ (17) можем записать

$$P_{Nk} \simeq P[\max(-R^{-Nk}; R^{+Nk}) < \sqrt{2h}] = P^{+k}(h)P^{-k}(h), \quad (18)$$

где $P^{+k}(h) = P[R^{+Nk} < \sqrt{2h}]$, $P^{-k}(h) = P[R^{-Nk} > -\sqrt{2h}]$.

Так как в каждой подобласти Π_k поле (10) является центрированным локально-однородным гауссовским случайным полем, то

$$P^{+k}(h) = P^{-k}(h) = F_{0k}(\sqrt{2h}), \quad \text{где } F_{0k}(h) = P \left[\sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi_k} R_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi) < h \right]$$

— функция распределения величины абсолютного максимума поля $R_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$ (10) в подобласти Π_k . Согласно [4,8], при выполнении (13), (14) для функции $F_{0k}(h)$, $k = \overline{1, K}$, справедливы аппроксимации

$$F_{0k}(h) = P_{Nk}^+(h^2/2) = P^{-Nk}(h^2/2) \simeq \begin{cases} \exp[-\xi_k h^2 \exp(-h^2/2)/4\pi^2], & h \geq \sqrt{2} \\ 0, & h < \sqrt{2} \end{cases} \quad (19)$$

Точность приближенной формулы (19) улучшается с ростом h и ξ_k (14).

Подставляя (14) в (19), (19) в (18) и (18) в (17) находим приближенное выражение

$$P_N(h) \simeq \begin{cases} \exp\left[-\frac{h}{\pi^2} \exp(-h) \Lambda_1 \Lambda_2 \sum_{k=1}^K b(\tilde{\chi}_k) \Delta \chi_k\right], & h \geq 1 \\ 0, & h < 1 \end{cases} \quad (20)$$

При выполнении (13) и (14) величина $b(\chi)$ мало изменяется в пределах подобласти Π_k , а вероятность (20) не зависит от способа разбиения априорной области Π на подобласти Π_k . Это позволяет в (20) заменить сумму соответствующим интегралом. В результате, при выполнении (13), (14) выражение (20) можно переписать в виде

$$P_N(h) \simeq \begin{cases} \exp[-\xi h \exp(-h) / \pi^2], & h \geq 1 \\ 0, & h < 1 \end{cases} \quad (21)$$

где приведенный объем априорной области Π возможных значений неизвестных координат и площади изображения [4, 6, 7]

$$\xi = \Lambda_1 \Lambda_2 \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} b(\chi) d\chi. \quad (22)$$

Подставляя (21) в (12) для вероятности ложной тревоги получаем

$$\alpha \simeq \begin{cases} 1 - \exp[-\xi h \exp(-h) / \pi^2], & h \geq 1 \\ 0, & h < 1 \end{cases} \quad (23)$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением ξ (22) и порога h [4].

Найдем теперь вероятность пропуска полезного изображения. Положим, что полезное изображение присутствует в реализации наблюдаемых данных (1). Тогда при фиксированных истинных значениях неизвестных параметров $a_0, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0$ вероятность пропуска определяется выражением [4]

$$\beta = P \left[\sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi} M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) < h | \gamma_0 = 1 \right] = P \left[\sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi} \frac{R_1(\lambda_1, \lambda_2, \chi)}{2} < h \right], \quad (24)$$

где $R_1(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$ — функционал (8) при наличии полезного изображения. Подставляя (1) в (8) при $\gamma_0 = 1$ получаем

$$R_1(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = zS(\lambda_1, \lambda_2, \chi) + R_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi), \quad (25)$$

где

$$z^2 = 2 \iint_G s^2(x_1, x_2, a_0, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) dx_1 dx_2 / N_0 = 2a_0^2 \frac{\chi_0}{N_0}. \quad (26)$$

— отношение сигнал-шум для наблюдаемого полезного изображения

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = B_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) \quad (27)$$

— нормированная сигнальная составляющая, которая выражается через корреляционную функцию (11) нормированной шумовой составляющей (10).

Пусть Π_S — подобласть априорной области Π в которой сигнальная составляющая (27) существенно отлична от нуля, а Π_N — дополнение Π_S до области Π , так что $\Pi = \Pi_S \cup \Pi_N$. Обозначим

$$H_S = \sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi_S} [M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) | \gamma_0 = 1],$$

$$H_N = \sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi_N} [M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) | \gamma_0 = 1]$$

— абсолютные максимумы случайного поля $M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = R_1(\lambda_1, \lambda_2, \chi)^2 / 2$ в подобластях Π_S и Π_N соответственно. Полагаем, что приведенный объем (22) априорной области Π достаточно велик, так что

$$\xi \gg 1. \quad (28)$$

Последнее всегда имеет место при выполнении (14). Тогда объем подобласти Π_N существенно превосходит объем области Π_S . Поскольку $S(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \approx 0$ при $(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi_N$ можно записать, что

$$H_N = \sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi_N} [R^{2_0}(\lambda_1, \lambda_2, \chi) / 2] \approx \sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi} [R^{2_0}(\lambda_1, \lambda_2, \chi) / 2].$$

При выполнении (28) случайные величины H_S и H_N можно приближенно считать независимыми [4]. Тогда для вероятности пропуска полезного изображения (24) имеем

$$\beta \approx \alpha P(H_N < h) P(H_S < h) \approx (1 - \alpha) P_S(h). \quad (29)$$

Здесь α — вероятность ложной тревоги (23), а $P_S(h) = P(H_S < h)$.

Будем считать, что отношение сигнал-шум (26) велико. Тогда в подобласти Π_S координаты $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi})$ положения абсолютного максимума функции $M(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$ (6) при $\gamma_0 = 1$ лежат в малой окрестности точки $(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0)$. Действительно, согласно [9], при $z \rightarrow \infty$ координаты положения абсолютного максимума функции (6) $\hat{\lambda}_1 \rightarrow \lambda_{01}$, $\hat{\lambda}_2 \rightarrow \lambda_{02}$, $\hat{\chi} \rightarrow \chi_0$ в среднеквадратическом. Следовательно, можно приближенно положить

$$H_S \approx R_1^2(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) / 2. \quad (30)$$

Так как $R_1(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0)$ — случайная гауссовская величина с математическим ожиданием z и единичной дисперсией, то для функции распределения случайной величины H_S имеем

$$P_S(h) = P[|R_1(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0)| < \sqrt{2h}] = \Phi(z + \sqrt{2h}) - \Phi(z - \sqrt{2h}), \quad (31)$$

где

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi} \quad (32)$$

— интеграл вероятности. Подставляя (31) в (29) для вероятности пропуска полезного изображения получаем

$$\beta \simeq (1 - \alpha)[\Phi(z + \sqrt{2h}) - \Phi(z - \sqrt{2h})]. \quad (33)$$

Точность формулы (33) возрастает с увеличением ξ (22), z (26) и h .

Отметим, что при малых значениях вероятности ложной тревоги ($\alpha < 0,1$) приближенные выражения (23) и (32) можно несколько упростить, переписав их как

$$\alpha \simeq \xi h \exp(-h) / \pi^2, \quad (34)$$

$$\beta \simeq \Phi(z + \sqrt{2h}) - \Phi(z - \sqrt{2h}). \quad (35)$$

Оценим проигрыш в эффективности обнаружения вследствие априорного незнания координат и площади полезного изображения. Когда максимальная интенсивность изображения неизвестна, а координаты и площадь априори заданы, алгоритм обнаружения запишется как

$$M(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) > h \Rightarrow \gamma_0 = 1, \quad (36)$$

$$M(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) < h \Rightarrow \gamma_0 = 0.$$

Здесь $M(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$ определяется из (6), а порог h выбирается в соответствии с заданным критерием оптимальности обнаружения [4].

Пусть $\gamma_0 = 0$, т.е. полезное изображение отсутствует в реализации наблюдаемых данных (1). Тогда вероятность ложной тревоги при априори известных координатах и площади изображения согласно (36) определяется выражением

$$\alpha_0 = P[M(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) > h | \gamma_0 = 0] = P\left[\frac{R^2(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0)}{2} > h\right]. \quad (37)$$

Поскольку $R_0(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0)$ — гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (10), то из (37) имеем

$$\alpha_0 = 2[1 - \Phi(\sqrt{2h})]. \quad (38)$$

Найдем теперь вероятность пропуска β_0 изображения с априори известными координатами и площадью. Согласно (33)

$$\beta_0 = P[M(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) < h | \gamma_0 = 1] = P\left[\frac{R^2(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0)}{2} < h\right].$$

Из (25) следует, что $R_1(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0)$ — гауссовская случайная величина с математическим ожиданием z и единичной дисперсией, поэтому, аналогично (31), можем записать

$$\beta_0 = \Phi(z + \sqrt{2h}) - \Phi(z - \sqrt{2h}). \quad (39)$$

Сравнивая (35) и (39) видим, что предельное (при $z \rightarrow \infty$ и $h \rightarrow \infty$) значение вероятности пропуска изображения с неизвестными координатами и площадью совпадает с вероятностью пропуска изображения, координаты и площадь которого априори известны. Значит предельная вероятность пропуска изображения инвариантна по отношению к неизвестным координатам и площади изображения.

Сравним теперь вероятности ложной тревоги (34) и (38). Поскольку (34) справедливо при $h \rightarrow \infty$, используем известное асимптотическое выражение для интеграла вероятности [10]. Действительно, при $x \rightarrow \infty$

$$1 - \Phi(x) \simeq \exp(-x^2/2) / x\sqrt{2\pi}.$$

Тогда из (34) и (38) получаем, что при $\beta \simeq \beta_0$ и $h \rightarrow \infty$

$$\alpha / \alpha_0 \simeq \xi(h/\pi)^{3/2}. \quad (40)$$

Значит, относительные потери в эффективности обнаружения, вследствие априорного незнания координат и площади изображения возрастают с увеличением приведенного объема ξ (30) априорной области возможных значений неизвестных параметров и с уменьшением требуемого уровня ложной тревоги, так как $\alpha, \alpha_0 \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$. Действительно, воспользуемся для определенности критерием Неймана–Пирсона [4]. Тогда порог h для заданной вероятности ложной тревоги α_0 определяется из (38)

$$h = [\text{arc}\Phi(1 - \alpha_0/2)]^2 / 2,$$

где $\text{arc}\Phi(x)$ — функция обратная интегралу вероятности (32). Обозначим

$$q = \alpha / \alpha_0 \xi \simeq [\text{arc}\Phi(1 - \alpha_0/2)]^3 / (2\pi)^{3/2} \quad (41)$$

— относительное увеличение вероятности ложной тревоги на единицу приведенного объема априорной области возможных значений неизвестных координат и площади изображения. На рис. 1 представлена зависимость величины q (41) от требуемого уровня ложной тревоги α_0 . Согласно рис. 1 относительный проигрыш в эффективности обнаружения (41) может достигать значительной величины при малых уровнях ложных тревог.

Согласно (40), (41) проигрыш в эффективности обнаружения пропорционален приведенному объему ξ (22) априорной области координат и площади изображения (2), с коэффициентом пропорциональности (41). Найдем приведенный объем (22) для изображения, распределение интенсивности которого описывается функцией

$$f(x_1, x_2) = \exp \left[-\pi \frac{(x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi)^2}{2\gamma_1^2} - \pi \frac{(x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi)^2}{2\gamma_2^2} \right]. \quad (42)$$

Если выполняется условие

$$\gamma_1 \gamma_2 = 1,$$

то функция (42) удовлетворяет условиям нормировки (3). Сечения функции (42) параллельные плоскости регистрации изображения имеют форму эллип-

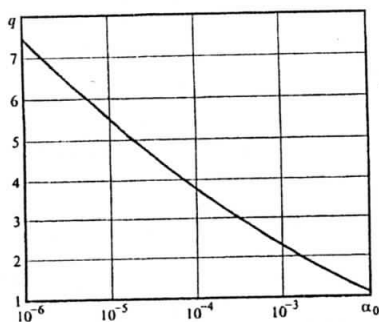


Рис. 1

сов, длина осей которых определяется величинами γ_1 и γ_2 , а φ — угол между осью эллипса γ_1 и осью координат x_1 .

Подставим (42) в (16) и найдем элементы матрицы (15)

$$B_{11}(\chi) = \frac{\pi}{2\chi} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cos^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin^2 \varphi \right), \quad B_{12}(\chi) = B_{21}(\chi) = \frac{\pi}{4\chi} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \sin 2\varphi, \quad (43)$$

$$B_{22}(\chi) = \frac{\pi}{2\chi} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cos^2 \varphi \right), \quad B_{13}(\chi) = B_{23}(\chi) = B_{31}(\chi) = B_{32}(\chi) = 0,$$

$$B_{33}(\chi) = 1/4\chi^2.$$

Используя (43) для определителя матрицы (15) имеем выражение

$$b^2(\chi) = \pi^2 / 16\chi^4. \quad (44)$$

Подставляя (44) в (22) получаем приведенный объем априорной области возможных значений неизвестных координат и площади изображения (42)

$$\xi = m(1 - \kappa^{-1}) / 4\pi. \quad (45)$$

Здесь $m = \Lambda_1 \Lambda_2 / \chi_{\min}$ — отношение площади априорной области возможных значений координат изображения к минимально возможному значению неизвестной площади изображения, а $\kappa = \chi_{\max} / \chi_{\min}$ — динамический диапазон изменения неизвестной площади изображения. Согласно (34) и (45) вероятность ложной тревоги (при малых ее значениях) возрастает пропорционально площади $S_\lambda = \Lambda_1 \Lambda_2$ области возможных значений неизвестных координат и возрастает обратно пропорционально уменьшению минимальной площади изображения. Вероятность ложной тревоги также увеличивается с ростом динамического диапазона κ изменения неизвестной площади. Однако, влияние динамического диапазона κ на вероятность ложной тревоги невелико. Так при увеличении динамического диапазона κ от значения $\kappa = 2$ до значения $\kappa = 20$, т.е. в 10 раз, вероятность ложной тревоги возрастает лишь в 2 раза.

Таким образом, полученные результаты позволяют определить потери в эффективности обнаружения изображения вследствие априорного незнания его координат и площади.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Красильников Н. Н. Теория передачи и восприятия изображений. — М.: Радио и связь, 1986. — 248 с.
2. Трифонов А. П., Зюльков А. В. Характеристики обнаружения и оценки положения источника сигнала, модулирующего пуассоновское случайное поле. // Радиозлектроника. — 1981. — № 12. — С.32–38. (Изв. вузов).
3. Трифонов А. П., Прибытков Ю. Н. Обнаружение объектов с неизвестной площадью при наличии фона. // Автометрия. — 2005. — Т.41. — №4. — С. 24–39.
4. Теория обнаружения сигналов / П. С. Акимов, П. А. Бакут, В. А. Богданович и др.; Под ред. П. А. Бакута. — М.: Радио и связь, — 1984. — 440 с.
5. Трифонов А. П., Зюльков А. В., Маршаков В. К. Характеристики оптимальных оценок параметров оптических сигналов на фоне пространственных помех. // Радиозлектроника. — 1981. — № 1. — С.14–21 (Изв. вузов).
6. Трифонов А. П., Шаранов С. И. Оценка местоположения точечной цели в зоне Френеля приемной антенны. // Радиотехника и электроника. — 1984. — Т.29. — №2. — С. 242–249.
7. Проняев Е. В. Анализ пороговых эффектов при обработке сигнала в условиях параметрической априорной неопределенности. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2003. — Т.6. — №2. — С. 72–79.
8. Питербарг В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских процессов и полей. — М.: МГУ, — 1988. — 176 с.
9. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М.: Сов. Радио, — 1978. — 296 с.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, — 1971. — 1108 с.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.10.07