

266

266

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2008
N 2

МОСКВА

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.391

ОБНАРУЖЕНИЕ И ОЦЕНКА СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВЕННО-ПРОТЯЖЕННОГО ОБЪЕКТА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ*

© 2008 г. Р. В. Куцов, А. П. Трифонов

Воронеж, Воронежский государственный ун-т

Поступила в редакцию 09.01.07 г., после доработки 15.07.07 г.

Выполнены синтез и анализ максимально правдоподобных алгоритмов обнаружения и оценки скорости движения изображения неоднородного пространственно протяженного объекта для аппликативной модели взаимодействия полезного изображения и фона. Работоспособность алгоритмов и границы применимости найденных асимптотических выражений для характеристик обнаружения и оценки установлены с помощью статистического моделирования на ЭВМ.

Введение. В процессе обработки результатов дистанционного наблюдения возникает необходимость в обнаружении и измерении скорости движения объектов по их изображениям. Обычно объекты наблюдаются на некоторой подстилающей поверхности, и сигнал, рассеянный этой поверхностью, представляет собой фоновое излучение (фон). Функционирование систем дистанционного наблюдения в реальных условиях сопровождается шумами, имеющими различную физическую природу, поэтому в задачи системы наблюдения входит одновременно как компенсация пространственно-временного шума, так и выделение объекта на мешающем фоне. Решение этих задач требует учета эффекта затенения пространственно-протяженным объектом (ППО) части подстилающей поверхности [1–7].

В [5–7] рассмотрена задача обнаружения движущегося с неизвестной скоростью однородного изображения пространственно-протяженного объекта на однородном фоне. Однако высокая разрешающая способность современных систем дистанционного наблюдения позволяет не только выделять объект по перепаду интенсивности на границе объект–фон, но и различать неоднородности распределения интенсивности изображения объекта. В [8] приведен эвристический метод измерения координат и скорости движения объекта по изменениям положения и размеров его оптического изображения. Предложенные в [9] алгоритмы оценки скорости движения объектов по их изображениям работоспособны лишь при слабых случайных искажениях. Для алгоритмов, рассмотренных в [8, 9], остается открытым вопрос об их оптимальности и не удается выполнить

теоретический анализ эффективности их функционирования. В связи с этим необходимо найти структуру и характеристики оптимальных алгоритмов обнаружения и оценки скорости движения ППО при наличии шума, наиболее распространенной моделью которого является аддитивный гауссовский белый шум.

Цель работы – синтез и анализ максимально правдоподобных (МП) алгоритмов обнаружения и оценки скорости движения неоднородного ППО по его изображению при наличии однородного фона.

1. Постановка задачи. Пусть в двумерной области Ω в течение интервала времени $[0, T]$ доступна наблюдению реализация гауссовского случайного поля $x(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r} = (x, y)$ – радиус-вектор точки на плоскости, принадлежащей Ω , а t – время. Так же, как и в работах [3, 10], полагаем, что при гипотезе H_1 поле $x(\mathbf{r}, t)$ содержит изображение $s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t)$ объекта, движущегося из заданного положения в известном направлении со скоростью $\mathbf{V}_0$, неподвижный фон $v(\mathbf{r})$ и аддитивный гауссовский пространственно-временной белый шум $n(\mathbf{r}, t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $\langle n(\mathbf{r}_1, t_1)n(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = N_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(t_1 - t_2)/2$, где N_0 – односторонняя спектральная плотность белого шума [11]. При гипотезе H_0 поле $x(\mathbf{r}, t)$ содержит фон $v(\mathbf{r})$ и аддитивный шум $n(\mathbf{r}, t)$. Направим ось X прямоугольной системы координат вдоль вектора скорости $\mathbf{V}_0$, при этом $\mathbf{V}_0 = V_0 \mathbf{i}_x$, где $\mathbf{i}_x$ – орт оси X .

В соответствии с аппликативной моделью [1, 3], учитывающей эффекты затенения объектом участка фона, полагаем, что изображение объекта занимает часть Ω_x области Ω , а фон – оставшуюся часть области наблюдения. Будем считать, что разрешающая способность системы наблюдения достаточно высока, так что размеры

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Воронежской области (проекты № 06-07-96301 и 07-01-00042).

неоднородностей объекта и фона велики по сравнению с размерами элемента разрешения, в результате чего оказывается существенной зависимость интенсивности изображения объекта от пространственных координат. Тогда в течение интервала времени $[0, T]$ наблюдению доступна реализация изображения в картинной плоскости

$$x(\mathbf{r}, t) = \gamma_0 s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t) + v(\mathbf{r}) [1 - \gamma_0 I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t)] + n(\mathbf{r}, t), \quad (1.1)$$

где $\gamma_0 = 0$, когда справедлива гипотеза H_0 , $\gamma_0 = 1$, если справедлива гипотеза H_1 , а $I_s(\mathbf{r}) = 1$ для $\mathbf{r} \in \Omega_s$ и $I_s(\mathbf{r}) = 0$ при $\mathbf{r} \notin \Omega_s$ – индикаторная функция, описывающая форму изображения объекта. На основании наблюдаемых данных необходимо вынести решение о наличии или отсутствии объекта в области наблюдения, а также оценить скорость движения изображения объекта при его наличии.

2. Обнаружение неоднородного объекта, движущегося с неизвестной скоростью. Для решения задачи проверки гипотезы H_1 против альтернативы H_0 необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП). В [4] получено выражение для логарифма ФОП

$$L(V) = \frac{2}{N_0} \iint_{\Omega} \left\{ x(\mathbf{r}, t) [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) - v(\mathbf{r})] - \frac{s^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) - v^2(\mathbf{r})}{2} \right\} I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) d\mathbf{r} dt, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{i}}_x$. Если скорость движения объекта априори известна [5], то решение о наличии или отсутствии объекта в области наблюдения выносится путем сравнения величины $L = L(V_0)$ с порогом h , определяемым выбранным критерием оптимальности [12], в соответствии с правилом

$$\begin{matrix} H_1 \\ L > h. \\ H_0 \end{matrix}$$

Положим теперь, что объект движется из заданного положения в известном направлении с неизвестной скоростью V_0 , которая принимает значения из априорного интервала $W = [0, V_{\max}]$. Для исключения влияния неизвестной скорости заменим в (2.1) ее значение на оценку максимального правдоподобия. Алгоритм МП обнаружения движущегося с неизвестной скоростью объекта [5, 12] формирует величину $\hat{L} = \sup_{V \in W} L(V)$ и принимает решение, сравнивая абсолютный (наибольший) максимум логарифма ФОП $\hat{L}$ с поро-

гом h , определяемым выбранным критерием оптимальности, в соответствии с правилом

$$\begin{matrix} H_1 \\ \hat{L} > h. \\ H_0 \end{matrix} \quad (2.2)$$

Аппаратурная реализация МП-обнаружителя при неизвестной скорости существенно сложнее, чем оптимального обнаружителя при априори известной скорости. Действительно, МП-обнаружитель должен быть многоканальным по скорости [5]. В i -м канале формируется значение $L_i = L(V_i)$, $i = \overline{1, K}$, где K – число каналов, предполагающееся достаточно большим, а $V_i = V_{\max}(i - 1)/(K - 1)$ при эквидистантном расположении каналов в априорном интервале W возможных значений скорости. Из совокупности полученных значений L_i выбирается наибольшее и сравнивается с порогом согласно (2.2).

Подставляя в (2.1) реализацию наблюдаемых данных (1.1), представим логарифм ФОП в виде суммы сигнальной и шумовой функций [13]

$$L(V) = \gamma_0 \hat{S}(V, V_0) + \hat{N}(V) - \hat{S}(V, V)/2, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{S}(V, V_0) = & \frac{2}{N_0} \iint_{\Omega} \int_0^T [s(x - Vt, y) - v(x, y)] \times \\ & \times [s(x - V_0 t, y) - v(x, y)] I_s(x - Vt, y) \times \\ & \times I_s(x - V_0 t, y) dx dy dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

– сигнальная функция, а $\hat{N}(V)$ – шумовая функция, являющаяся реализацией гауссовского случайного процесса с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$\langle \hat{N}(V_1) \hat{N}(V_2) \rangle = \hat{S}(V_1, V_2). \quad (2.5)$$

Будем далее считать, что Ω_s – односвязная конечная область с кусочно-гладкой границей Γ и любая прямая, параллельная направлению движения, пересекает границу Γ не более чем в двух точках, за исключением прямолинейных участков границы, которые параллельны направлению движения. Области такого вида назовем областями типа K_V . Класс областей типа K_V расширяет класс областей типа K [14], включающий в себя односвязные конечные области с кусочно-гладкой границей, которая пересекается любой прямой не более чем в двух точках. Пусть отрезок $[y_{\min}, y_{\max}]$ оси Y представляет собой проекцию области Ω_s (вместе с границей Γ) на эту ось (рис. 1). Проведем через точки $y_{\min}$ и $y_{\max}$ прямые, параллельные оси X так, как показано на рис. 1. Каждая из этих двух прямых пересекает границу Γ лишь

в одной точке. Эти две точки пересечения указанных прямых с границей Γ разделяют границу на две кривые Γ_- и Γ_+ , которые могут быть однозначно спроецированы на ось Y и описываются уравнениями $x(y) = \Gamma_-(y)$ и $x(y) = \Gamma_+(y)$ соответственно.

Логарифм ФОП (2.3) является гауссовским случайным процессом, поэтому его свойства полностью задаются математическим ожиданием и корреляционной функцией. Согласно (2.3), (2.5), сигнальная функция (2.4) определяет математическое ожидание и корреляционную функцию логарифма ФОП, а значит, все его свойства. При этом характеристики обнаружения зависят от поведения сигнальной функции в окрестности ее максимума [12]. Для определения характеристик обнаружения рассмотрим свойства сигнальной функции $\hat{S}(V, V_0)$ (2.4) в малой окрестности точки V_0 при наличии однородного фона $v(x, y) = v_0$. При этом будем полагать, что функция $s(x, y)$, описывающая интенсивность изображения объекта, непрерывна и непрерывно дифференцируема.

При наличии однородного фона сигнальную функцию $\hat{S}(V, V_0)$ (2.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \hat{S}(V, V_0) &= \hat{S}(\Delta V) = \\ &= \frac{2}{N_0} \int_0^T \iint_{\Omega} [s(x, y) - v_0][s(x - \Delta Vt, y) - v_0] \times \\ &\quad \times I_s(x - \Delta Vt, y) dx dy dt, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\Delta V = V - V_0$. Найдем разложение сигнальной функции в ряд Маклорена по ΔV , ограничиваясь только линейным членом. Согласно (2.6), сигнальная функция непрерывно дифференцируема в окрестности точки максимума $V = V_0$ слева и справа, за исключением точки V_0 , где производная терпит разрыв первого рода. Поэтому при $|\Delta V| \rightarrow 0$ разложение для функции (2.6) будет иметь вид

$$\hat{S}(\Delta V) = \hat{S}(0) + \Delta V \frac{d\hat{S}(\Delta V)}{d\Delta V} \Big|_{\Delta V=0_-} + o(|\Delta V|) \quad (2.7)$$

при $\Delta V \leq 0$ и

$$\hat{S}(\Delta V) = \hat{S}(0) + \Delta V \frac{d\hat{S}(\Delta V)}{d\Delta V} \Big|_{\Delta V=0_+} + o(|\Delta V|) \quad (2.8)$$

при $\Delta V \geq 0$, где $o(|\Delta V|)$ – бесконечно малая функция [14] по сравнению с $|\Delta V|$ при $|\Delta V| \rightarrow 0$.

Вычисляя производные от функции (2.6) отдельно при $\Delta V \rightarrow 0_-$ и $\Delta V \rightarrow 0_+$, получим

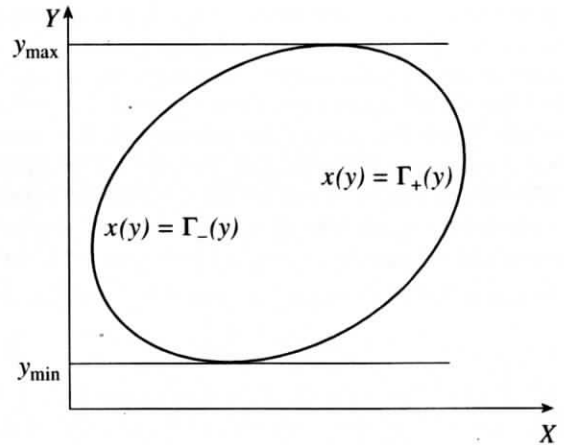


Рис. 1.

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{S}(\Delta V)}{d\Delta V} \Big|_{\Delta V=0_-} &= z_H^2 \delta_H, \\ \frac{d\hat{S}(\Delta V)}{d\Delta V} \Big|_{\Delta V=0_+} &= -z_H^2 \delta_H, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$z_H^2 = \hat{S}(V_0, V_0) = \frac{2T}{N_0} \iint_{\Omega} [s(x, y) - v_0]^2 dx dy \quad (2.10)$$

– отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе приемника максимального правдоподобия, а

$$\begin{aligned} \delta_H &= \\ &= \frac{T \left\{ \int_{\Gamma_-} [s(x, y) - v_0]^2 dy + \int_{\Gamma_+} [s(x, y) - v_0]^2 dy \right\}}{4 \iint_{\Omega} [s(x, y) - v_0]^2 I_s(x, y) dx dy}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В числитель дроби в (2.11) входит сумма криволинейных интегралов второго рода (интегралов по проекциям) [14]

$$\int_{\Gamma_-} [s(x, y) - v_0]^2 dy$$

по левой Γ_- и

$$\int_{\Gamma_+} [s(x, y) - v_0]^2 dy$$

по правой Γ_+ частям границы изображения объекта (рис. 1). Эти интегралы вычисляются от квадрата разности интенсивностей изображения объекта и фона (скачка интенсивности) $s(x, y) - v_0$ на этих границах. Отметим, что при одинаковой величине скачка интенсивности более существен-

ный вклад в значения этих интегралов вносят те равновеликие участки границы Γ , которые составляют больший угол с направлением движения. При этом прямолинейные участки границы, параллельные направлению движения, не влияют на величину этих интегралов. Заметим, что при наличии однородного фона ОСШ z_H (2.10) не зависит от истинного значения скорости V_0 , т.е. скорость является неэнергетическим параметром [13, 15].

Введем нормированную сигнальную функцию

$$S(V, V_0) = \hat{S}(V, V_0)/z_H^2. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.9) в (2.7), (2.8) и объединяя эти два выражения, находим, что при $|\Delta V| \rightarrow 0$ для нормированной сигнальной функции справедливо асимптотическое разложение

$$S(V, V_0) = 1 - \delta_H |V - V_0| + o(|V - V_0|). \quad (2.13)$$

Аналогично тому, как это сделано в [5, 7], можно показать, что $S(V, V_0)$ убывает как $|V - V_0|^{-1}$ при $|V - V_0| \rightarrow \infty$, т.е. $S(V, V_0) = O(|V - V_0|^{-1})$ при $|V - V_0| \rightarrow \infty$ [14].

Если изображение объекта является однородным с интенсивностью $s(x, y) = s_0$, то из (2.10) получаем, что ОСШ для однородного объекта определяется выражением

$$z^2 = 2TG_s(s_0 - v_0)^2/N_0, \quad (2.14)$$

а из (2.11) находим значение параметра δ_H для однородного объекта

$$\delta = Tl_V/2G_s, \quad (2.15)$$

где l_V – максимальный размер изображения объекта в направлении, перпендикулярном вектору скорости, а G_s – площадь изображения объекта. Выражения (2.14), (2.15) совпадают с полученными в [5].

Сравним значения ОСШ на выходе приемника максимального правдоподобия для неоднородного и однородного изображений, имеющих одинаковые форму и энергию

$$E_s = T \int_{\Omega_s} s^2(x, y) dx dy = Ts_0^2 G_s, \quad (2.16)$$

где s_0 – интенсивность однородного изображения с энергией E_s . Величина ОСШ z^2 для однородного изображения объекта определяется формулой (2.14). Учитывая (2.16), из (2.10) находим

$$z_H^2 - z^2 = \frac{4Tv_0}{N_0} \int_{\Omega_s} [s_0 - s(x, y)] dx dy.$$

Покажем, что последний интеграл неотрицателен. Поскольку

$$\int_{\Omega_s} [s(x, y) - s_0]^2 dx dy \geq 0,$$

раскрывая скобки в левой части последнего выражения, имеем

$$\int_{\Omega_s} s^2(x, y) dx dy - 2s_0 \int_{\Omega_s} s(x, y) dx dy + s_0^2 G_s \geq 0.$$

Отсюда с учетом равенства (2.16) получаем

$$2s_0^2 G_s - 2s_0 \int_{\Omega_s} s(x, y) dx dy \geq 0.$$

Интенсивность изображения объекта s_0 положительна, поэтому

$$s_0 G_s - \int_{\Omega_s} s(x, y) dx dy \geq 0,$$

так что

$$\int_{\Omega_s} [s_0 - s(x, y)] dx dy \geq 0.$$

Таким образом, $z_H^2 \geq z^2$, т.е. при одинаковых форме и энергии изображений однородного и неоднородного объектов ОСШ для неоднородного объекта не меньше, чем для однородного при любом распределении интенсивности $s(x, y)$, удовлетворяющем условию (2.16).

Вместо $L(V)$ (2.3) введем нормированный член логарифма ФОП, зависящий от скорости

$$\begin{aligned} L_z(V) &= L(V)/z_H + z_H/2 = \\ &= \gamma_0 z_H S(V, V_0) + N(V), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $N(V) = \hat{N}(V)/z_H$ – нормированная шумовая функция, и перепишем правило обнаружения (2.2) в виде

$$\begin{aligned} &H_1 \\ \hat{L}_z &\underset{H_0}{>} u_H, \end{aligned}$$

где

$$\hat{L}_z = \sup_{V \in W} L_z(V),$$

$u_H = h/z_H + z_H/2$ – нормированный порог. Используя разложение (2.13) и результаты [5, 12], применяя метод локально-марковской аппроксимации [12], находим приближенные выражения для вероятностей ошибок ложной тревоги

$$\alpha_H \approx \begin{cases} 1 - \exp\left[-\frac{m_H u_H}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u_H^2}{2}\right)\right], & u_H \geq 1, \\ 1, & u_H < 1, \end{cases} \quad (2.18)$$

и пропуска объекта

$$\beta_H \approx \exp \left[-\frac{m_H u_H}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{u_H^2}{2} \right) \right] \left\{ \Phi(u_H - z_H) - \right. \\ \left. - 2 \exp \left(\frac{3}{2} z_H^2 - u_H z_H \right) \Phi(u_H - 2z_H) + \right. \\ \left. + \exp(4z_H^2 - 2u_H z_H) \Phi(u_H - 3z_H) \right\} \quad (2.19)$$

при $u_H \geq 1$ и $\beta_H \approx 0$ при $u_H < 1$. Здесь

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-g^2/2) dg / \sqrt{2\pi} \quad (2.20)$$

– интеграл вероятности, а $m_H = \delta_H V_{\max}$ – приведенная длина априорного интервала возможных значений скорости [12]. Определим размер элемента разрешения по скорости Δ_V как полуширину сигнальной функции при замене ее треугольной аппроксимацией (2.13): $\Delta_V = 1/\delta_H$. Тогда число разрешимых значений скорости в априорной области W равно $m_H = V_{\max}/\Delta_V = \delta_H V_{\max}$. Точность формулы (2.18) растет с увеличением параметра m_H и нормированного порога u_H , а точность (2.19) – с увеличением ОСШ z_H , параметра m_H и порога u_H . Заметим, что в рассматриваемом приближении вероятность пропуска объекта не зависит от истинного значения скорости V_0 .

Конкретизируем полученные выражения для случая обнаружения однородного изображения объекта с постоянной интенсивностью $s(x, y) = s_0$. Полагая в (2.18), (2.19) $s(x, y) = s_0$, получаем, что вероятности ошибок ложной тревоги и пропуска однородного объекта определяются следующим образом:

$$\alpha \approx \begin{cases} 1 - \exp \left[-\frac{m u}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) \right], & u \geq 1, \\ 1, & u < 1, \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\beta \approx \exp \left[-\frac{m u}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) \right] \left\{ \Phi(u - z) - \right. \\ \left. - 2 \exp \left(\frac{3}{2} z^2 - u z \right) \Phi(u - 2z) + \right. \\ \left. + \exp(4z^2 - 2u z) \Phi(u - 3z) \right\} \quad (2.22)$$

при $u \geq 1$ и $\beta \approx 0$ при $u < 1$. Здесь

$$m = l_V T V_{\max} / 2 G_s \quad (2.23)$$

– число разрешимых значений скорости движения однородного объекта, z^2 – ОСШ для однородного объекта (2.14), а $u = h/z + z/2$ – нормированный порог. Формулы (2.21), (2.22) совпадают с полученными в [5] выражениями для характеристик обнаружения однородного изображения, движущегося с неизвестной скоростью.

Рассмотрим влияние степени неоднородности изображения объекта на характеристики обнаружения. В качестве примера найдем характеристики обнаружения объекта, имеющего форму прямоугольника. Положим, что прямоугольник имеет стороны длиной a и b , причем интенсивность изображения объекта линейно возрастает в направлении, составляющем угол θ со стороной a , вдоль которой движется объект. Таким образом, интенсивность изображения прямоугольного объекта описывается функцией

$$s(x, y) = s_R(x, y) = \frac{(q-1)(x \cos \theta + y \sin \theta)}{a \cos \theta + b \sin \theta} + \frac{q+1}{2} \\ = s_0 \frac{(q-1)^2 a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{12} (a \cos \theta + b \sin \theta)^2} + \left(\frac{q+1}{2} \right)^2, \quad (2.24)$$

где наклон $q = s_{\max}/s_{\min}$ – отношение максимального значения интенсивности изображения объекта

$$s_{\max} = \max_{(x, y) \in \Omega_s} s(x, y)$$

к минимальному значению

$$s_{\min} = \min_{(x, y) \in \Omega_s} s(x, y),$$

s_0 характеризует амплитуду изменения интенсивности, а множитель

$$\left[\frac{(q-1)^2 a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}{12 (a \cos \theta + b \sin \theta)^2} + \left(\frac{q+1}{2} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

обеспечивает неизменность энергии изображения объекта при различных значениях q и θ . При этом предполагается, что начало системы координат расположено в точке пересечения диагоналей изображения прямоугольного объекта при $t=0$, а координатные оси параллельны сторонам прямоугольника. Нетрудно убедиться, что распределение интенсивности (2.24) удовлетворяет условию (2.14). Заметим, что для однородного объекта $q=1$, так что $s_R(x, y)|_{q=1} = s_0$, т.е. s_0 – интенсивность изображения однородного объекта такой же формы, с теми же площадью и энергией, что у неоднородного объекта.

Подставляя (2.24) в (2.10), находим выражение для ОСШ на выходе приемника максимального

правдоподобия при наличии в реализации наблюдаемых данных изображения неоднородного прямоугольного объекта (2.24), однородного фона и гауссовского белого шума

$$z_{RH}^2 = \frac{z_R^2}{(z_F - 1)^2} \left[z_F^2 + 1 - z_F(q+1) \sqrt{\frac{(q-1)^2 \cos^2 \theta + \psi^2 \sin^2 \theta}{12 (\cos \theta + \psi \sin \theta)^2} + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2} \right], \quad (2.25)$$

где

$$z_R^2 = z_{sR}^2 (1 - 1/z_F)^2 \quad (2.26)$$

– ОСШ для однородного изображения прямоугольного объекта при наличии фона, $z_{sR}^2 = 2abTs_0^2/N_0$ – ОСШ для однородного изображения прямоугольного объекта при отсутствии фона и наличии только гауссовского белого шума [4], $z_F^2 = s_0^2/v_0^2$ – отношение сигнал/фон (ОСФ), а $\psi = b/a$ – отношение сторон прямоугольника.

На рис. 2 показана зависимость величины $\zeta_R = z_{RH}/z_R$ от величины наклона q при $\theta = 0$, где $z_F = 1.5$ (кривая 1), $z_F = 1.2$ (2), $z_F = 1.1$ (3), $z_F = 0.9$ (4), $z_F = 0.8$ (5), $z_F = 0.5$ (6). Согласно (2.26), $z_R \rightarrow 0$ при $z_F \rightarrow 1$, так что $\zeta_R \rightarrow \infty$ при $z_F \rightarrow 1$. Из (2.25) следует, что $z_{RH} \rightarrow z_R$ при $z_F \rightarrow \infty$ и $z_F \rightarrow 0$, так что ζ_R убывает до 1 с уменьшением z_F при $z_F < 1$ и с увеличением z_F при $z_F > 1$. Из сравнения кривых на рис. 2 также следует, что неоднородность изображения объекта приводит к существенному увеличению выигрыша в величине ОСШ по сравнению с однородным изображением при близких к единице значениях ОСФ z_F , причем этот выигрыш уменьшается по мере отклонения z_F от единицы.

Согласно (2.18), (2.19), для расчета характеристик обнаружения необходимо найти значение приведенной длины априорного интервала возможных значений скорости $m_H = \delta_H V_{\max}$. Подставляя (2.24) в (2.11), получим выражение для параметра δ_H в случае неоднородного прямоугольного объекта, интенсивность изображения которого описывается функцией (2.24)

$$\begin{aligned} \delta_{RH} = \delta_R \left\{ \frac{z_F^2 (q-1)^2 (3 \cos^2 \theta + \psi^2 \sin^2 \theta)}{(q-1)^2 (\cos^2 \theta + \psi^2 \sin^2 \theta) + 3(q+1)^2 (\cos \theta + \psi \sin \theta)^2} + \right. \\ \left. + \left((q+1)z_F / 2 \sqrt{\frac{(q-1)^2 \cos^2 \theta + \psi^2 \sin^2 \theta}{12 (\cos \theta + \psi \sin \theta)^2} + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2} - 1 \right)^2 \right\} \times \\ \times \left[z_F^2 + 1 - z_F(q+1) \sqrt{\frac{(q-1)^2 \cos^2 \theta + \psi^2 \sin^2 \theta}{12 (\cos \theta + \psi \sin \theta)^2} + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

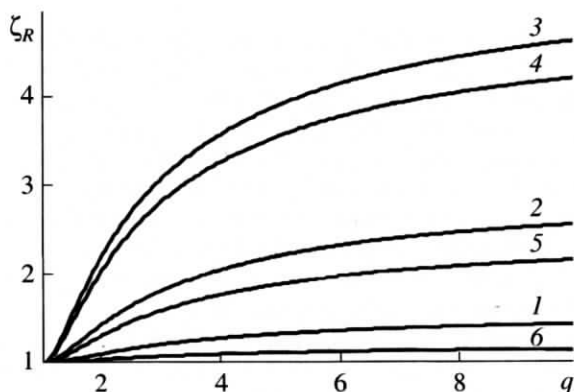


Рис. 2.

где $\delta_R = T/2a$ определяется из (2.15) и представляет собой значение параметра (2.27) для однородного изображения прямоугольного объекта (при $q = 1$). При этом число элементов разрешения по скорости для неоднородного объекта $m_{RH} = \delta_{RH} V_{\max}$, а для однородного – $m_R = \delta_R V_{\max} = TV_{\max}/2a$.

На рис. 3 показаны зависимости отношения вероятностей пропуска неоднородного и однородного прямоугольных объектов при порогах, определенных на основании критерия Неймана–Пирсона для одинаковых значений вероятностей ложных тревог $\alpha = \alpha_H = 10^{-2}$. Значения порогов определялись по заданным вероятностям ложных тревог с использованием формул (2.18), (2.21) при $\theta = 0$, числе элементов разрешения по скорости

сти для однородного объекта $m_R = 5$ и ОСФ $z_F = 3$. При этом число элементов разрешения для неоднородного объекта равно $m_{RH} = m_R \delta_{RH} / \delta_R$, а ОСШ рассчитывается по формуле (2.25). Кривая 1 соответствует значению ОСШ для однородного изображения прямоугольного объекта в отсутствие фона $z_{sR} = 10$ ($\beta \sim 10^{-3}$), кривая 2 – $z_{sR} = 7$ ($\beta \sim 10^{-1}$), кривая 3 – $z_{sR} = 5$ ($\beta \sim 0.5$).

Из сравнения кривых на рис. 3 следует, что при не слишком малых значениях ОСШ z_{sR} для однородного изображения прямоугольного объекта при отсутствии фона, когда вероятность пропуска не превышает 0.1, вероятность пропуска неоднородного объекта всегда меньше, чем однородного, т.е. $\beta_H < \beta$. Это объясняется тем, что при одинаковых энергиях изображений однородного и неоднородного объектов неоднородный объект в большей степени отличается по текстуре от однородного фона.

3. Оценка скорости движения объекта. Рассмотрим теперь задачу оценки скорости движения изображения объекта, полагая, что он присутствует в наблюдаемой реализации, т.е. в (1.1) и (2.3) $\gamma_0 = 1$. Оценка максимального правдоподобия скорости движения изображения объекта определяется как положение абсолютного максимума логарифма ФОП (2.1) [13, 15, 16]

$$\hat{V} = \arg \sup_{V \in W} L(V) = \arg \sup_{V \in W} L_z(V). \quad (3.1)$$

Разобьем априорную область возможных значений скорости W на сигнальную W_S и шумовую W_N подобласти. К первой отнесем те значения V , для которых $|V - V_0| < \Delta_V$, все остальные значения V – к шумовой подобласти. В сигнальной подобласти оценка является надежной, а в шумовой подобласти имеют место аномальные ошибки [13, 15]. Точность оценки будем характеризовать безусловным рассеянием (средним квадратом ошибки) [15]. Учитывая установленные свойства сигнальной функции и используя результаты [15, 16], находим, что надежная оценка скорости движения объекта является условно несмещенной, а ее рассеяние $B_{0H}(\hat{V})$ совпадает с дисперсией $D_{0H}(\hat{V})$, задаваемой выражением [15]

$$B_{0H}(\hat{V}) = D_{0H}(\hat{V}) = \frac{13}{2z_H^4 \delta_H^2} = \frac{26N_0^2}{T^4 \left[\int_{\Gamma_-} [s(x, y) - v_0]^2 dy + \int_{\Gamma_+} [s(x, y) - v_0]^2 dy \right]^2}. \quad (3.2)$$

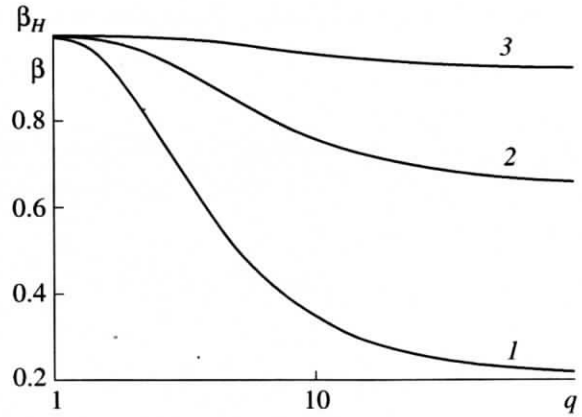


Рис. 3.

Согласно (3.2), предельная (при неограниченном увеличении ОСШ) точность МП-оценки скорости движения не зависит от значений интенсивности во внутренних точках изображения объекта. Предельная точность оценки скорости определяется суммой криволинейных интегралов второго рода (интегралов по проекциям) от величин квадрата скачка интенсивности $s(x, y) - v_0$ на левой Γ_- и правой Γ_+ границах изображения объекта (рис. 1). Конкретизируем полученное выражение для случая оценки скорости движения изображения однородного объекта, имеющего постоянную интенсивность s_0 . Полагая в (3.2) $s(x, y) = s_0$, получим выражение для рассеяния надежной оценки скорости движения однородного изображения

$$B_0(\hat{V}) = D_0(\hat{V}) = \frac{13}{2z^2 \delta^2} = \frac{26G_s^2}{z^4 T^2 l_V^2} = \frac{13N_0^2}{2T^4 l_V^2 (s_0 - v_0)^4}, \quad (3.3)$$

где $\delta = l_V T / 2G_s$, а ОСШ z^2 для изображения однородного объекта определяется формулой (2.14).

Исследуем влияние неоднородности изображения объекта на характеристики оценки скорости его движения. Отношение рассеяний надежных оценок скорости для неоднородного объекта B_{0H} (3.2) и для однородного объекта B_0 (3.3) равно

$$\kappa = \frac{B_{0H}}{B_0} = \left(\frac{z^2 \delta}{z_H^2 \delta_H} \right)^2. \quad (3.4)$$

В качестве примера рассмотрим характеристики оценки скорости движения изображения прямо-

угольного объекта (2.24). Подставляя (2.25), (2.27) в (3.4), находим

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_R = [z_F - 1]^4 & \left\{ \frac{z_F^2(q-1)^2}{12} \frac{3\cos^2\theta + \psi^2\sin^2\theta}{(\cos\theta + \psi\sin\theta)^2} \left[\frac{(q-1)^2}{12} \frac{\cos^2\theta + \psi^2\sin^2\theta}{(\cos\theta + \psi\sin\theta)^2} + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \left((q+1)z_F / 2 \sqrt{\frac{(q-1)^2}{12} \frac{\cos^2\theta + \psi^2\sin^2\theta}{(\cos\theta + \psi\sin\theta)^2} + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2} - 1 \right)^2 \right\}^{-2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Анализ зависимости отношения рассеяний надежных оценок скорости $\mathfrak{x}_R$ от угла θ показывает, что если интенсивность изменяется в направлении движения объекта, то точность оценки скорости движения неоднородного объекта оказывается выше, чем в случае, когда интенсивность изменяется в направлении, перпендикулярном направлению движения. Отметим, что при фиксированном значении угла θ с уменьшением отношения сторон прямоугольника $\psi = b/a$ влияние неоднородности изображения объекта на характеристики оценки скорости его движения возрастает, т.е. при малых значениях ψ величина $\mathfrak{x}_R$ убывает с увеличением наклона q быстрее, чем при больших ψ .

При больших значениях приведенной длины априорного интервала возможных значений скорости и конечных значениях ОСШ возможны аномальные ошибки [13, 15]. Вычислим вероятность надежной оценки $P_{0H} = P[|\hat{V} - V_0| < \Delta_V]$. Поскольку оценка скорости определяется по положению максимума выходного сигнала приемника максимального правдоподобия, последнее выражение можно переписать в виде $P_{0H} = P[M_N \leq M_S]$. Здесь

$$M_N = \sup_{V \in W_N} L_z(V) \text{ и } M_S = \sup_{V \in W_S} L_z(V)$$

– величины абсолютных максимумов функции $L(V)$ в шумовой и сигнальной подобластях, являющиеся приближенно статистически независимыми случайными величинами при $m \gg 1$ [15]. Тогда

$$P_{0H} = \int F_N(x) dF_S(x), \quad (3.6)$$

где $F_N(x)$ и $F_S(x)$ – функции распределения величин M_N и M_S соответственно. Точные выражения для $F_N(x)$ и $F_S(x)$ неизвестны, однако в [12, 15] для этих функций получены асимптотические выражения

$$F_N(x) \approx \begin{cases} \exp\left[-\frac{m_H x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right], & x \geq 1, \\ 0, & x < 1, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} F_S(x) & \approx \Phi(x - z_H) - 2\exp(3z_H^2/2 - z_H x) \times \\ & \times \Phi(x - 2z_H) + \exp(4z_H^2 - 2z_H x) \Phi(x - 3z_H), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\Phi(\cdot)$ – интеграл вероятности (2.20). Точность аппроксимации (3.7) возрастает по мере увеличения x и m_H , а точность аппроксимации (3.8) возрастает по мере увеличения x и z_H . Подставляя (3.7), (3.8) в (3.6), находим асимптотическое выражение для вероятности надежной оценки

$$\begin{aligned} P_{0H} & = 2z_H \exp\left(\frac{3z_H^2}{2}\right) \times \\ & \times \int_1^\infty \exp\left[-\frac{m_H x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] [\exp(-z_H x) \times \\ & \times \Phi(x - 2z_H) - \exp(5z_H^2/2 - 2z_H x) \Phi(x - 3z_H)] dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.9) следует, что вероятность надежной оценки P_{0H} в рассматриваемом приближении не зависит от истинного значения скорости V_0 . Положим, что скорость движения изображения объекта распределена равномерно в априорной области W . Тогда при наличии аномальных ошибок оценка скорости является, безусловно, несмещенной, т.е. $b_H(\hat{V}) = \langle \hat{V} - V_0 \rangle = 0$, а ее рассеяние определяется выражением [15]

$$\begin{aligned} B_H(\hat{V}) & = \langle (\hat{V} - V_0)^2 \rangle = \\ & = P_{0H} B_{0H}(\hat{V}) + (1 - P_{0H}) V_{\max}^2 / 6. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь усреднение выполняется по значениям $\hat{V}$ и V_0 , а $B_{0H}(\hat{V})$ – рассеяние надежной оценки скорости (3.2). Подставляя (3.2), (3.9) в (3.10), получим безусловное рассеяние оценки скорости с учетом аномальных ошибок

$$B_H(\hat{V}) = B_{\max}(39P_{0H}/z_H^4 m_H^2 + 1 - P_{0H}), \quad (3.11)$$

где $B_{\max} = V_{\max}^2/6$ – максимальное рассеяние оценки скорости. Формулы (3.9), (3.11) являются асимптотически точными при $z_H \rightarrow \infty$ и $m_H \rightarrow \infty$. Рассеяние $B(\hat{V})$ оценки скорости движения изображения однородного объекта с интенсивностью s_0 определяется формулой (3.11) при замене z_H на ОСШ для однородного объекта z (2.14), а m_H – на m (2.23).

Влияние неоднородности изображения объекта на характеристики оценки скорости его движения с учетом аномальных ошибок рассмотрим на примере изображения неоднородного прямоугольного объекта (2.24). На рис. 4 приведены зависимости отношения рассеяний оценок скорости движения неоднородного и однородного прямоугольных объектов $\chi_R = B_H(\hat{V})/B(\hat{V})$ от величины наклона q . Расчет производился с использованием формулы (3.11) при числе элементов разрешения по скорости для однородного объекта $m_R = 10$, ОСФ $z_F = 2$, отношении сторон прямоугольника $\psi = 1$ и $\theta = 0$. Число элементов разрешения по скорости m_{RH} для неоднородного прямоугольного объекта определялось как $m_{RH} = m_R \delta_{RH}/\delta_R$ с использованием формулы (2.27), а ОСШ z_{RH} – по формуле (2.25). При этом $z_{sR} = 5$ (кривая 1), $z_{sR} = 7$ (2), $z_{sR} = 10$ (3). Кривой 4 показана зависимость отношения рассеяний надежных оценок χ_R (3.5) при тех же значениях ОСФ z_F , отношения сторон ψ и угла θ . Как следует из сравнения кривых на рис. 4, точность оценки скорости движения неоднородного объекта при не слишком малых значениях ОСШ оказывается выше, чем точность

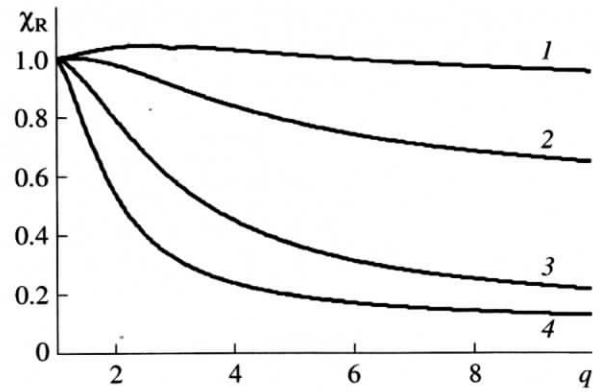


Рис. 4.

оценки скорости движения однородного объекта. При этом повышение точности оценки скорости движения за счет неоднородности изображения объекта оказывается более значительным по мере увеличения ОСШ.

4. Результаты статистического моделирования алгоритмов обнаружения и оценки скорости на ЭВМ. Для моделирования был выбран объект в форме прямоугольника со сторонами a и b , движущийся вдоль стороны a , интенсивность изображения которого определяется формулой (2.24) при $\theta = 0$, т.е. изменяется вдоль направления движения. При этом логарифм ФОП (2.3) представлялся в виде

$$L(\eta) = \gamma_0 z_H^2 S(\eta, \eta_0) + z_H N(\eta) - z_H^2/2,$$

где $S(\eta, \eta_0) = S(\tau)$, $\tau = |\eta - \eta_0|$,

$$S(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{\tau \left[\frac{3z_F^2(q^2+1)}{2(q^2+q+1)} + 1 - z_F(q+1) \sqrt{\frac{3}{q^2+q+1}} \right] - \tau^3 \frac{(q-1)^2 z_F^2}{q^2+q+1}}{z_F^2 + 1 - z_F(q+1) \sqrt{3/(q^2+q+1)}}, & 0 \leq \tau < \frac{1}{2}, \\ \frac{[1 - z_F(q+1) \sqrt{3}/2 \sqrt{q^2+q+1}]^2}{4\tau [z_F^2 + 1 - z_F(q+1) \sqrt{3/(q^2+q+1)}]}, & \tau \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$\eta = TV/2a$, $\eta_0 = TV_0/2a$, причем $\eta, \eta_0 \in [0, m_R]$, $m_R = TV_{\max}/2a$, $N(\eta)$ – гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, единичной дисперсией и корреляционной функцией

$\langle N(\eta_1)N(\eta_2) \rangle = S(\eta_1, \eta_2) = S(\tau_1)$, $\tau_1 = |\eta_1 - \eta_2| \in [0, m_R]$.

При моделировании с шагом $\Delta\eta$ вырабатывались отсчеты функций $S(\eta, \eta_0)$ и $N(\eta)$, на основе

которых формируемая реализация $N(\eta)$ аппроксимировалась ступенчатой функцией с макси-

мальной относительной среднеквадратической погрешностью [17]

$$\varepsilon = \sqrt{2[1 - S(\Delta\eta/2)]} \approx \sqrt{\Delta\eta \left[1 + \frac{z_F^2(q-1)^2}{2\sqrt{q^2+q+1}[(z_F^2+1)\sqrt{q^2+q+1} - z_F(q+1)\sqrt{3}]} \right]};$$

$$N(j\Delta\eta) =$$

$$= \sum_{k=0}^K \sigma_k [\varphi_k \cos(kj\Delta\omega\Delta\eta) + \psi_k \sin(kj\Delta\omega\Delta\eta)],$$

где φ_k, ψ_k – независимые гауссовские случайные величины с нулевыми средними значениями и единичными дисперсиями, $\sigma_k = \sqrt{F(k\Delta\omega)/2m_R}$, $\Delta\omega = \pi/m_R$, а

$$F(\omega) = 2 \int_0^{m_R} S(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau.$$

Шаг дискретизации выбирался равным $\Delta\eta = 5 \times 10^{-3}$ из условия $\varepsilon \leq 0.1$ для всех используемых значений q и z_F , а число слагаемых K выбиралось таким, чтобы относительное различие дисперсии формируемого процесса $D_K = \sum_{k=0}^K \sigma_k^2$ и дисперсии процесса $N(\eta)$ не превышало $\varepsilon_\sigma = 1 - D_K < 3 \times 10^{-3}$.

Дискретные отсчеты логарифма ФОП (2.3) представлялись в виде

$$L(j\Delta\eta) = \gamma_0 z_H^2 S[(j-j_0)\Delta\eta] + z_H N(j\Delta\eta) - z_H^2/2,$$

где $j = \overline{0, J}$, $J = \text{int}[m_R/\Delta\eta]$, $j_0 = \text{int}(\eta_0/\Delta\eta)$, а $\text{int}(\cdot)$ – целая часть числа. При наличии сигнала величина η_{0i} выбиралась случайной и равномерно распределенной в интервале $[0, J\Delta\eta]$ в каждом эксперименте. Вероятность ложной тревоги α

определялась как относительная частота превышения порога наибольшим из отсчетов $L(j\Delta\eta)$ при $\gamma_0 = 0$, вероятность пропуска объекта β – как относительная частота непревышения порога наибольшим из отсчетов $L(j\Delta\eta)$ при $\gamma_0 = 1$.

В процессе моделирования для каждого значения ОСШ z_{SR} был реализован объем выборки $N_{ex} = 10^5$, так что с вероятностью 0.9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений вероятностей ложной тревоги α_H и пропуска объекта β_H не более чем на 15% при $\alpha_H, \beta_H > 10^{-3}$. Формулы (2.18), (2.19) для характеристик обнаружения движущегося с неизвестной скоростью неоднородного изображения при $m_R \geq 2.5$ и $z_{SR} \geq 1.5$ также удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные зависимости, как (2.21), (2.22) для характеристик обнаружения однородного изображения аппроксимируют соответствующие экспериментальные зависимости, приведенные в [5]. Аппроксимация считалась удовлетворительной, если расхождение теоретических и экспериментальных значений не превышало 15%.

Для моделирования МП-алгоритма измерения скорости движения изображения объекта в соответствии с (3.1) при $\gamma_0 = 1$ определялись значения $\hat{\eta}_i = \hat{j}_i \Delta\eta$, при которых достигаются максимальные значения функции $L(\eta)$ в i -й реализации, $i = \overline{1, N_{ex}}$. При этом нормированные рассеяния оценки скорости рассчитывались как

$$B = \frac{6}{(N_{ex} - 1)J^2 \Delta\eta^2} \sum_{i=1}^{N_{ex}} (\hat{\eta}_i - \eta_{0i})^2.$$

Для реализованного объема выборки $N_{ex} = 10^5$ с вероятностью 0.9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений безусловного рассеяния $B(\hat{V})$ не более чем на 15% при $B(\hat{V})/B_{\max} > 10^{-3}$.

Результаты моделирования МП алгоритма оценивания скорости движения объекта приведены на рис. 5. На этом же рисунке показаны зависимости нормированного на максимум безусловного рассеяния оценки скорости от ОСШ для однородного объекта в отсутствие фона z_{SR} . Эти зависи-

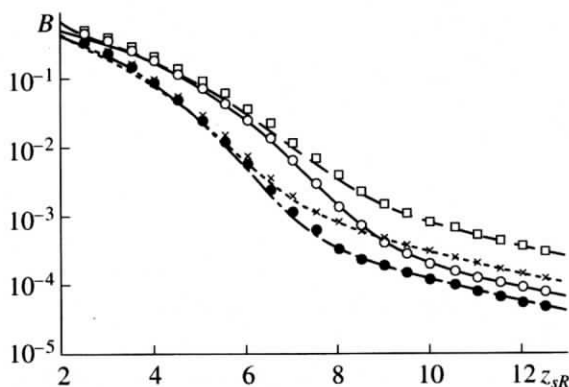


Рис. 5.

мости рассчитаны по формуле (3.11) при $m_{RH} = m_R \delta_{RH} / \delta_R$, где $m_R = 5$. Сплошная линия и светлые кружочки соответствуют $q = 10$, $z_F = 3$; штриховая линия и квадратики – $q = 1$, $z_F = 3$; пунктирные линии и крестики – $q = 1$, $z_F = 6$; штрихпунктирная линия и темные кружочки – $q = 10$, $z_F = 6$. Как следует из рис. 5, формула (3.11) удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные зависимости уже при $m_R \geq 2.5$ и $z_{sR} \geq 1.5$. Аппроксимация считалась удовлетворительной, если расхождение теоретических и экспериментальных значений не превышало 15%.

Заключение. Неоднородность изображения объекта приводит к увеличению ОСШ по сравнению со случаем, когда изображение объекта является однородным. В результате эффективность обнаружения изображения и точность оценки скорости движения неоднородного объекта оказываются выше, чем однородного. Это может быть объяснено влиянием различия текстур неоднородного изображения объекта и однородного фона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бычков А.А., Понькин В.А. Обнаружение протяженных затеняющих фон объектов // Автометрия. 1992. № 4. С. 33–40.
2. Трифонов А.П., Прибытков Ю.Н. Обнаружение квазидетерминированного изображения при наличии фона с неизвестными параметрами // Автометрия. 2002. № 4. С. 19–31.
3. Ефремов В.В., Ковалев Г.С., Лаптев И.В. и др. Потенциальные возможности обнаружения и маскирования движущихся объектов на неравномерных фонах // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2003. № 4. С. 24–29.
4. Трифонов А.П., Куцов Р.В. Обнаружение движущегося пространственно протяженного объекта на фоне с неизвестной интенсивностью // Автометрия. 2005. № 1. С. 3–18.
5. Куцов Р.В., Трифонов А.П. Алгоритмы обнаружения движущегося объекта на изображении // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 3. С. 129–138.
6. Трифонов А.П., Куцов Р.В. Обнаружение движущегося с неизвестной скоростью пространственно-протяженного объекта по его изображению с неизвестной интенсивностью // Радиотехника. 2005. № 7. С. 92–96.
7. Трифонов А.П., Куцов Р.В. Обнаружение движущегося с произвольной скоростью объекта при неизвестных интенсивностях изображения и фона // Автометрия. 2006. № 4. С. 3–16.
8. Туринов В.И. К вопросу об измерении скорости удаленных объектов по изменениям положения и размеров оптического изображения // Радиотехника и электроника. 1996. № 5. С. 548–551.
9. Гнеушев А.Н. Система для оценки скорости транспортных средств по контурным признакам в режиме реального времени // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 1. С. 133–143.
10. Лисицын В.М., Обросов К.В., Розенталь Н.А. и др. Субоптимальная процедура обнаружения смещающихся образов на сложных сценах // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 1. С. 100–109.
11. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио., 1966.
12. Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П.А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984.
13. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио., 1978.
14. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Наука, 1980.
15. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
16. Васильев К.К., Драган Я.П., Казаков В.А. и др. Прикладная теория случайных процессов и полей / Под ред. К.К. Васильева, В.А. Омельченко. Ульяновск: УлГТУ, 1995.
17. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971.