

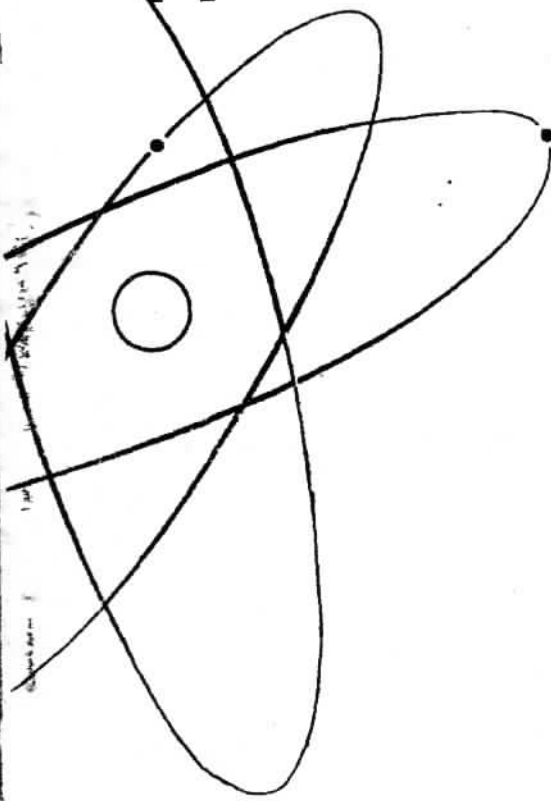


ISSN 0021-3470

268

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА



ТОМ 51

7-8

июль-август

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

2008

ТРИФОНОВ А. П., СМОРГОНСКИЙ А. В.

ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАЗИПРАВДОПОДОБНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ ФИНИТНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРИХОДА*

Для обнаружения сигнала, форма которого априори неизвестна, использован алгоритм, синтезированный для некоторой прогнозируемой формы сигнала. При помехе в виде белого гауссовского шума, найдены асимптотически точные (с ростом отношения сигнал-шум) выражения для характеристик обнаружения. Выполнено моделирование на ЭВМ синтезированного алгоритма.

В [1–3] и др. исследована задача оптимального приема наиболее распространенной модели финитного сигнала — простейшего прямоугольного импульса с неизвестным временем прихода на фоне гауссовского белого шума. Показано, что полезный сигнал является разрывным по неизвестному параметру. Также выполнен синтез алгоритма максимального правдоподобия и найдены характеристики обнаружения сигнала с неизвестным временем прихода. Однако реальные условия генерации и распространения сигнала приводят к отличию его формы от прямоугольной. При априори неизвестной форме принимаемого финитного сигнала, с целью его обнаружения может быть использован квазиправдоподобный (КП) приемник, синтезированный для некоторого прогнозируемого (предполагаемого) сигнала той же длительности [3]. В связи с этим представляет интерес синтез и анализ алгоритма КП обнаружения разрывного сигнала конечной длительности и произвольной формы с неизвестным временем прихода.

Рассмотрим задачу обнаружения финитного сигнала произвольной формы с неизвестным временем прихода

$$s(t - \lambda_0) = f(t - \lambda_0) I \left[\frac{(t - \lambda_0)}{\tau} \right], \quad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 06-07-96301 и 07-01-00042)

наблюдаемого в течение интервала времени $[0, T]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь $I(x) = 1$ при $|x| \leq 1/2$, $I(x) = 0$ при $|x| > 1/2$, $\lambda_0 \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$ — неизвестное время прихода сигнала, τ — длительность сигнала, $f(t)$ — неизвестная дифференцируемая функция, описывающая форму входного сигнала. Величина $\Lambda = \Lambda_2 - \Lambda_1$ определяет длительность априорного интервала возможных значений времени прихода. Реализация наблюдаемых данных на входе приемника имеет вид:

$$x(t) = \gamma_0 s(t - \lambda_0) + n(t), \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

Индекс ноль здесь и далее означает истинное значение соответствующего параметра. Параметр $\gamma_0 \in 0, 1$, причем $\gamma_0 = 0$ соответствует случаю отсутствия сигнала в наблюдаемых данных, $\gamma_0 = 1$ — его наличие. По наблюдаемой реализации $x(t)$ (2) необходимо вынести решение, какое значение принимает параметр γ .

Если форма $f(t)$ сигнала (1) известна, то можно найти логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) и реализовать обнаружитель максимального правдоподобия (МП). Полагаем, что функция $f(t)$ при синтезе алгоритма неизвестна. Поэтому будем использовать алгоритм, синтезированный для некоторой предполагаемой формы сигнала $g(t)$. Тогда на выходе приемника вырабатывается некоторая функция — выходной сигнал КП приемника, который подобен логарифму ФОР, но таковым не является. Выходной сигнал КП приемника для случая (2) будет зависеть от параметров γ , λ и может быть записан в виде [1, 2]:

$$L(\gamma, \lambda) = \frac{2\gamma \int_0^T x(t) s^*(t - \lambda) dt}{N_0} - \frac{\gamma \int_0^T s(t) s^*(t) dt}{N_0} \quad (3)$$

Здесь $s^*(t) = g(t)I(t/\tau)$ — опорный сигнал КП приемника, причем в общем случае $f(t) \neq g(t)$. Если функция $f(t)$ априори известна, то при $g(t) = f(t)$, выражение (3) совпадает с логарифмом ФОР для оптимального приема [3]. Таким образом, равенство

$$g(t) = f(t) \quad (4)$$

— условие оптимального приема сигнала (1).

Выделим из выходного сигнала КП приемника (3) слагаемое, зависящее от неизвестного параметра λ

$$L(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s^*(t - \lambda) dt. \quad (5)$$

Для принятия решения о наличии или отсутствии сигнала можно использовать обобщенный КП алгоритм обнаружения [3], основанный на сравнении абсолютного (наибольшего) максимума выходного сигнала КП приемника с некоторым порогом h . Если

$$L = \sup L(\lambda) > h, \quad \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2], \quad (6)$$

то выносится решение о наличии сигнала ($\gamma = 1$), если $L < h$ — о его отсутствии ($\gamma = 0$). Порог h может выбираться исходя из различных критериев оптимальности [3].

Подставляя (2) в (5), выходной сигнал КП приемника можно представить в виде суммы сигнальной и шумовой функций [4]:

$$L(\lambda) = \gamma_0 S(\lambda, \lambda_0) + N(\lambda), \quad (7)$$

где $S(\lambda, \lambda_0) = \frac{2}{N_0} \int_0^T s(t - \lambda_0) s^*(t - \lambda) dt$ — сигнальная и

$N(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T n(t) s^*(t - \lambda) dt$ — шумовая функции на выходе линейной части

КП приемника.

Определим условия, при которых положение максимума сигнальной функции $S(\lambda, \lambda_0)$ совпадает с истинным значением времени прихода сигнала λ_0 . Для этого в окрестности λ_0 сигнальная функция должна удовлетворять условиям:

$$S(\lambda_0, \lambda_0) > 0, \quad \left. \frac{dS(\lambda, \lambda_0)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0+0} < 0, \quad \left. \frac{dS(\lambda, \lambda_0)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0-0} > 0. \quad (8)$$

Положим, что сигнальная функция $S(\lambda, \lambda_0)$ удовлетворяет условиям (8). Обозначим

$$S_0 = \max_{\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]} S(\lambda, \lambda_0) = S(\lambda_0, \lambda_0) = \frac{2}{N_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) g(t) dt \quad (9)$$

— величина сигнальной функции в точке истинного значения параметра λ_0 ,

$$\sigma_N^2 = \langle N^2(\lambda) \rangle = \frac{2}{N_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^2(t) dt$$

— дисперсия шумовой функции. Перепишем выражение (7) в виде

$$L(\lambda) = \gamma_0 S_0 \hat{S}(\lambda, \lambda_0) + \sigma_N \hat{N}(\lambda) = \sigma_N [\gamma_0 \hat{S}(\lambda, \lambda_0) + \hat{N}(\lambda)]. \quad (10)$$

Здесь

$$\hat{S}(\lambda, \lambda_0) = \frac{S(\lambda, \lambda_0)}{S_0} = \frac{\int_0^{\tau} f(t - \lambda_0) g(t - \lambda) I[(t - \lambda_0)/\tau] I[(t - \lambda)/\tau] dt}{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) g(t) dt}, \quad (11)$$

$$\hat{N}(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{\sigma_N} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}} \frac{\int_0^{\tau} n(t) g(t - \lambda) I[(t - \lambda)/\tau] dt}{\sqrt{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^2(t) dt}} \quad (12)$$

— нормированные сигнальная (11) и шумовая (12) функции,

$$\tilde{z}^2 = \frac{S_0^2}{\sigma_N^2} = z^2 \frac{\left[\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) g(t) dt \right]^2}{\sqrt{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t) dt} \sqrt{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^2(t) dt}} = z^2 K_{fg}^2 \quad (13)$$

— отношение сигнал-шум (ОСШ) при КП приеме. В выражении (13)

$$z^2 = \frac{2}{N_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t) dt \quad (14)$$

— ОСШ при оптимальном приеме, когда выполняется (4),

$$K_{fg} = \frac{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) g(t) dt}{\sqrt{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t) dt} \sqrt{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^2(t) dt}}$$

— коэффициент корреляции между принимаемым и опорным сигналами.

Найдем корреляционную функцию шумовой функции (12). Эта функция представляет собой реализацию центрированного гауссовского процесса, первые два момента которого имеют вид:

$$\langle \hat{N}(\lambda) \rangle = 0; \quad \hat{B}_N(\lambda_1, \lambda_2) = \langle \hat{N}(\lambda_1) \hat{N}(\lambda_2) \rangle. \quad (15)$$

С учетом (12) и (15) корреляционная функция гауссовского процесса (12) равна

$$\hat{B}_N(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\int_0^{\tau} g(t-\lambda_1)g(t-\lambda_2)I[(t-\lambda_1)/\tau]I[(t-\lambda_2)/\tau]dt}{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^2(t)dt}. \quad (16)$$

Если прием оптимальный (4), то функции (11) и (16) будут совпадать $\hat{S}(\lambda_1, \lambda_2) \Big|_{g=f} = \hat{B}_N(\lambda_1, \lambda_2)$.

Для расчета характеристик обнаружения необходимо установить локальное поведение сигнальной функции (11) в окрестности истинного значения параметра λ_0 [2, 3]. В связи с этим, рассмотрим поведение функции (11), когда $|\lambda - \lambda_0| \rightarrow 0$, разложив ее в ряд Тейлора по параметру λ , и ограничимся только членом, содержащим первую производную. Согласно (11), сигнальная функция непрерывно дифференцируема в окрестности λ_0 справа и слева, исключая точку $\lambda = \lambda_0$, где производная терпит разрыв непрерывности первого рода. Поэтому, разложение функции (11) будет иметь вид

$$\hat{S}(\lambda, \lambda_0) = 1 + \left[\frac{d\hat{S}(\lambda, \lambda_0)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0-0} \right] (\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0), \quad \lambda < \lambda_0, \quad (17)$$

$$\hat{S}(\lambda, \lambda_0) = 1 + \left[\frac{d\hat{S}(\lambda, \lambda_0)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0+0} \right] (\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0), \quad \lambda > \lambda_0. \quad (18)$$

С учетом (17) и (18) разложение для сигнальной функции (11) в окрестности истинного значения параметра λ_0 можно представить в виде:

$$\hat{S}(\lambda, \lambda_0) = 1 + \begin{cases} \delta_1(\lambda - \lambda_0) + o(|\lambda - \lambda_0|), & \lambda < \lambda_0 \\ -\delta_2(\lambda - \lambda_0) + o(|\lambda - \lambda_0|), & \lambda > \lambda_0 \end{cases} \quad (19)$$

Здесь $\delta_i, i=1, 2$ — коэффициенты разложения

$$\delta_1 = \frac{d\hat{S}(\lambda, \lambda_0)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0-0}, \quad \delta_2 = -\frac{d\hat{S}(\lambda, \lambda_0)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0+0}. \quad (20)$$

Дифференцируя (11) по параметру λ с учетом конечной длительности сигнала τ , можем получить явный вид для коэффициентов разложения (20).

$$\delta_1 = \frac{\left[f(\tau/2)g(\tau/2) + f(-\tau/2)g(-\tau/2) \right] + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} [f(t)g(t) - f(t)g'(t)]dt}{2 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)g(t)dt}, \quad (21)$$

$$\delta_2 = \frac{\left[f(\tau/2)g(\tau/2) + f(-\tau/2)g(-\tau/2) \right] - \int_{-\tau/2}^{\tau/2} [f(t)g(t) - f(t)g'(t)]dt}{2 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)g(t)dt}. \quad (22)$$

Заметим, что с учетом выражений (9) и (19) условия (8) можно переписать в более удобном виде: $S_0 > 0$; $\delta_i > 0$, $i = 1, 2$

Теперь рассмотрим корреляционную функцию (16). Полагая, что $T \gg \tau$, так что сигнал (1) полностью расположен внутри интервала наблюдения $[0, T]$ из (16) получаем, что $\hat{B}_N(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{B}_N(\lambda_1 - \lambda_2)$. Учитывая равенство сигнальной функции (11) и корреляционной функции (16), когда выполняется (4), можем непосредственно получить асимптотическое разложение корреляционной функции (16) при $|\lambda_1 - \lambda_2| \rightarrow 0$ как частный случай выражения (19). Деля замену $f(t) = g(t)$ в (21) и (22), получим

$$\delta_0 \equiv \delta_1|_{f=g} = \delta_2|_{f=g} = \frac{[g^2(\tau/2) + g^2(-\tau/2)]}{2 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^2(t)dt} \quad (23)$$

— коэффициент разложения корреляционной функции (16), причем $\delta_0 > 0$. Подставляя (23) в (19), находим, что при $|\lambda_1 - \lambda_2| \rightarrow 0$ для корреляционной функции (16) справедливо асимптотическое разложение

$$\hat{B}_N(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{S}(\lambda_1, \lambda_2)|_{f=g} = 1 - \delta_0|\lambda_1 - \lambda_2| + o(|\lambda_1 - \lambda_2|). \quad (24)$$

Если опорный сигнал имеет прямоугольную форму, т.е.

$$g(t) = \text{const}, \quad (25)$$

то из выражения (23) имеем

$$\delta_0 = \delta_r = 1/\tau. \quad (26)$$

При выполнении условия (4) и (25), выражение (26) описывает коэффициент разложения сигнальной функции (11) и совпадает с результатом, полученным в [3]. С увеличением $|\lambda_1 - \lambda_2|$ корреляционная функция (16) убывает и при

$|\lambda_1 - \lambda_2| > \tau$ обращается в ноль. Корреляционная функция (16) не имеет второй производной при $\lambda_1 = \lambda_2$, так что реализации выходного сигнала КП приемника (7) не дифференцируемы, но непрерывны с вероятностью единица [5].

Найдем теперь характеристики обнаружения сигнала (2). Эффективность обнаружения обычно характеризуют вероятностью ошибки первого рода — ложной тревоги α и вероятностью ошибки второго рода — пропуска сигнала β . Согласно [3], эти вероятности определяются как

$$\alpha = P[\sup L(\lambda) > h | \gamma_0 = 0] = P[H_0 > h], \quad \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]; \quad (27)$$

$$\beta = P[\sup L(\lambda) < h | \gamma_0 = 1] = P[H_1 < h], \quad \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]. \quad (28)$$

Здесь H_0 и H_1 — значения абсолютного максимума $L(\lambda)$ (7), соответственно в отсутствие и при наличии сигнала $s(t - \lambda_0)$ (1) в принятой реализации $x(t)$ (2).

Вначале найдем вероятность ложной тревоги (27). Полагаем, что полезный сигнал отсутствует ($\gamma_0 = 0$) на входе обнаружителя. Если речь идет о малых значениях вероятности ложной тревоги, когда наибольший максимум выходного сигнала КП приемника (7) превышает некоторый достаточно высокий порог h , то характеристики обнаружения определяются локальным поведением корреляционной функции (16) в максимуме [3]. Т. к. $H_0 = \sigma_N \hat{N}(\lambda_m)$, где λ_m — положение абсолютного максимума $L(\lambda)$, $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$ то вероятность ложной тревоги

$$\alpha = P\left[\hat{N}(\lambda_m) > \frac{h}{\sigma_N}\right] = P[\hat{N}(\lambda_m) > u], \quad u = \frac{h}{\sigma_N} \quad (29)$$

При этом согласно (29) для определения вероятности ложной тревоги надо найти функцию распределения абсолютного максимума реализации процесса $N(\lambda)$ (12): $F_0(H) = P[N(\lambda_m) < H]$. Точное выражение для $F_0(H)$ неизвестно [3]. Однако, используя результаты, полученные Д. Пикандсом [6], можно найти асимптотическое выражение для $F_0(H)$, справедливое при $H \rightarrow \infty$ [2, 3]

$$F_0(H) \cong \begin{cases} \exp\left[-\frac{mH \exp(-H^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\right], & H \geq 1 \\ 0, & H < 1 \end{cases}, \quad (30)$$

где

$$m = \Lambda \delta_0 \quad (31)$$

— приведенная длина априорного интервала $[\Lambda_1, \Lambda_2]$. Из формулы (30) и (29) находим приближенное выражение для вероятности ложной тревоги

$$\alpha(u) = 1 - F_0(u). \quad (32)$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением m и нормированного порога

$$u = h / \sigma_N. \quad (33)$$

Найдем теперь вероятность пропуска β (28). Пусть полезный сигнала присутствует на входе КП приемника ($\gamma_0 = 1$). Полагаем, что условия (8) выполняются. Тогда с ростом ОСШ (13), положение абсолютного максимума выходного сигнала КП приемника (7) будет лежать в малой окрестности истинного значения параметра λ_0 . Обозначим H_S — значение абсолютного максимума $L(\lambda)$ (7) при $\lambda_0 - \tau < \lambda < \lambda_0 + \tau$ и H_N — то же самое при $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0 - \tau$; $\lambda_0 + \tau \leq \lambda \leq \lambda_2$. Если $\Lambda \gg \tau$ или, что то же самое, для большинства сигналов $m \gg 1$ (31), то случайные величины H_S и H_N приближенно статистически независимы. Следовательно, когда $m \gg 1$, приближенное выражение для вероятности пропуска сигнала можно представить в виде [3]

$$\beta = P(H_N < h)P(H_S < h) = P_N(u)P_S(u). \quad (34)$$

Приближенное значение вероятности $P_N(u)$ при $m \gg 1$ можно записать как

$$P_N(u) \cong F_0(u), \quad (35)$$

где $F_0(\cdot)$ определяется из (30). Функция $P_S(u)$ в (34) представляет собой распределение величины абсолютного максимума $L(\lambda)$ при $|\lambda - \lambda_0| < \tau$. При наличии сигнала и $|\lambda - \lambda_0| < \tau$ имеем

$$H_S = L(\hat{\lambda}) = S_0 \hat{S}(\lambda_0, \hat{\lambda}) + \sigma_N \hat{N}(\hat{\lambda}),$$

где $\hat{\lambda}$ — положение абсолютного максимума H_S . Можно показать, что при $z \rightarrow \infty$ величина $\hat{\lambda} \rightarrow \lambda_0$ в среднеквадратическом [2]. Следовательно, при больших ОСШ $\hat{z}$ (13) достаточно исследовать поведение абсолютного максимума функции $L(\lambda)$ в малой окрестности λ_0 . Поэтому рассмотрим распределение

$$P_\epsilon(h) = P[L(\lambda) < h], \quad \lambda_0 - \epsilon \leq \lambda \leq \lambda_0 + \epsilon, \quad (36)$$

где ϵ фиксировано и настолько мало, что для сигнальной функции (11) справедлива аппроксимация (19). Очевидно, что если ϵ выбрано так, что $\tau \geq \epsilon > 0$, то при $\tilde{z} \rightarrow \infty$ искомая функция $P_S(h) \rightarrow P_\epsilon(h)$. Переходя к нормированному выходному сигналу КП приемника $M(\lambda) = L(\lambda) / \sigma_N$, перепишем (36) как

$$P_\epsilon(u) = P_\epsilon(h / \sigma_N) = P[M(\lambda) < u] = P[\eta(\lambda) < u - M_0], \quad \lambda_0 - \epsilon \leq \lambda \leq \lambda_0 + \epsilon.$$

Здесь $M_0 = M(\lambda_0)$, $\eta(\lambda) = [L(\lambda) - L(\lambda_0)] / \sigma_N = M(\lambda) - M(\lambda_0)$ — реализация гауссовского случайного процесса, обладающего корреляционной функцией

$$B(\lambda_1, \lambda_2) = \langle [\eta(\lambda_1) - \langle \eta(\lambda_1) \rangle][\eta(\lambda_2) - \langle \eta(\lambda_2) \rangle] \rangle. \quad (37)$$

При $\max[|\lambda_1 - \lambda_2|, |\lambda_1 - \lambda_0|, |\lambda_2 - \lambda_0|] \rightarrow 0$, используя (24), выражение (37) можно представить в виде

$$B_\eta(\lambda_1, \lambda_2) = 2\delta_0 \begin{cases} \min(|\lambda_1 - \lambda_0|, |\lambda_2 - \lambda_0|), & (\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0) \geq 0 \\ 0, & (\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_0) < 0 \end{cases} \quad (38)$$

где δ_0 определяется выражением (23). Коэффициенты сноса и диффузии для гауссовского процесса с корреляционной функцией (38) равны соответственно [2, 7]:

$$K_1 = \bar{z} \begin{cases} \delta_1, \lambda < \lambda_0 \\ -\delta_2, \lambda > \lambda_0 \end{cases}, \quad K_2 = 2\delta_0,$$

где $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ и $\bar{z}$ определяются выражениями (23), (21), (22) и (13). Из формулы (38) следует [8, 9], что $\eta(\lambda)$ — реализация гауссовского марковского процесса, причем значения этого процесса на неперекрывающихся интервалах $[\lambda_0 - \varepsilon; \lambda_0]$ и $[\lambda_0; \lambda_0 + \varepsilon]$ статистически независимы. Отсюда имеем, что

$$P_\varepsilon(u) = P[\eta(\lambda) < u - M_0] P[\eta(\lambda) < u - M_0] \quad (39)$$

$\lambda_0 - \varepsilon \leq \lambda < \lambda_0$
 $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$

Обозначим

$$F_\varepsilon^-(x) = P[\eta(\lambda) < x], \quad \lambda_0 - \varepsilon \leq \lambda < \lambda_0; \quad F_\varepsilon^+(x) = P[\eta(\lambda) < x], \quad \lambda_0 \leq \lambda < \lambda_0 + \varepsilon \quad (40)$$

Тогда при фиксированном значении $M(\lambda_0)$

$$P[\eta(\lambda) < u - M_0] = F_\varepsilon^-(u - M_0); \quad P[\eta(\lambda) < u - M_0] = F_\varepsilon^+(u - M_0). \quad (41)$$

$\lambda_0 - \varepsilon \leq \lambda < \lambda_0$
 $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$

Так как по определению $M_0 = M(\lambda_0)$, то из (39), (41) получаем

$$P_\varepsilon(u) = \int_{-\infty}^u F_\varepsilon^-(u-x) F_\varepsilon^+(u-x) W_0(x) dx. \quad (42)$$

где $W_0(y)$ — плотность вероятности случайной величины M_0 .

В рассматриваемом случае

$$W_0(y) = \frac{\exp[-(y - \bar{z})^2 / 2]}{\sqrt{2\pi}}. \quad (43)$$

Найдем $F_\varepsilon^-(x)$ и $F_\varepsilon^+(x)$ (40), используя марковские свойства процесса $\eta(\lambda)$ при $\lambda_0 - \varepsilon \leq \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$. Определим вначале $F_\varepsilon^-(x)$, переписав это распределение в виде

$$F_\varepsilon^-(x) = P[\eta(\lambda) > 0], \quad \lambda_0 - \varepsilon \leq \lambda < \lambda_0. \quad (44)$$

Здесь $y(\lambda) = x - \eta(\lambda)$ — гауссовский марковский процесс с коэффициентами сноса и диффузии

$$K_1 = -\delta_1 \tilde{z}, \quad K_2 = 2\delta_0$$

Следовательно

$$F_{\varepsilon}^{-}(x) = \int_0^{\infty} W_{\varepsilon}^{-}(y, \lambda_0 - \varepsilon) dy, \quad (45)$$

где $W_{\varepsilon}^{-}(y, \lambda)$ — решение обратного уравнения Колмогорова [8, 9]

$$\frac{\partial W_{\varepsilon}^{-}(y, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{K_1 \partial W_{\varepsilon}^{-}(y, \lambda)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{K_2 \partial^2 W_{\varepsilon}^{-}(y, \lambda)}{\partial y^2} = 0 \quad (46)$$

при граничных условиях $W_{\varepsilon}^{-}(y, \lambda)|_{y=0} = W_{\varepsilon}^{-}(y, \lambda)|_{y=\infty} = 0$ и условии, заданном на правом конце интервала $[\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0]$ $W_{\varepsilon}^{-}(y, \lambda_0) = \delta(y - x)$. После замены переменных решение уравнения (46) можно найти методом отражения с переменной знака [2, 8, 9]. Подставляя это решение в (45) имеем

$$F_{\varepsilon}(x) = \Phi\left(\frac{\tilde{z}m_1^{\varepsilon}}{\sqrt{2m_0^{\varepsilon}}} + \frac{x}{\sqrt{2m_0^{\varepsilon}}}\right) - \exp\left(-\frac{\tilde{z}x\delta_1}{\delta_0}\right) \Phi\left(\frac{\tilde{z}m_1^{\varepsilon}}{\sqrt{2m_0^{\varepsilon}}} - \frac{x}{\sqrt{2m_0^{\varepsilon}}}\right), \quad (47)$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dy$ — интеграл вероятности, $m_0^{\varepsilon} = \delta_0 \varepsilon$, $m_1^{\varepsilon} = \delta_1 \varepsilon$.

Найдем теперь $F_{\varepsilon}^{+}(x)$, переписав это распределение аналогично (44) $F_{\varepsilon}^{+}(x) = P[y(\lambda) > 0]$, $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 + \varepsilon$. Здесь $y(\lambda) = x - \eta(\lambda)$ — опять гауссовский марковский процесс с коэффициентами сноса и диффузии

$$K_1 = \delta_2 \tilde{z}, \quad K_2 = 2\delta_0$$

Для марковского процесса $y(\lambda)$ можем записать

$$F_{\varepsilon}^{+}(x) = \int_0^{\infty} W_{\varepsilon}^{+}(y, \lambda_0 + \varepsilon) dy \quad (48)$$

Функция $W_{\varepsilon}^{+}(y, \lambda)$ — решение прямого уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова [8, 9]

$$\frac{\partial W_{\varepsilon}^{+}(y, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial [K_1 W_{\varepsilon}^{+}(y, \lambda)]}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [K_2 W_{\varepsilon}^{+}(y, \lambda)]}{\partial y^2} = 0, \quad (49)$$

при граничных условиях $W_{\varepsilon}^{+}(y, \lambda)|_{y=0} = W_{\varepsilon}^{+}(y, \lambda)|_{y=\infty} = 0$ и начальном условии, заданном на левом конце интервала $[\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon]$ $W_{\varepsilon}^{+}(y, \lambda_0) = \delta(y-x)$. Решая уравнение (49) методом отражения с переменной знака и подставляя решение в (48), приходим к формуле

$$F_{\varepsilon}^{+}(x) = \Phi\left(\frac{\tilde{z}m_2^{\varepsilon}}{\sqrt{2m_0^{\varepsilon}}} + \frac{x}{\sqrt{2m_0^{\varepsilon}}}\right) - \exp\left(-\frac{\tilde{z}x\delta_2}{\delta_0}\right) \Phi\left(\frac{\tilde{z}m_2^{\varepsilon}}{\sqrt{2m_0^{\varepsilon}}} - \frac{x}{\sqrt{2m_0^{\varepsilon}}}\right) \quad (50)$$

Подставляя в (42) выражения (43), (47) и (50), получаем

$$P_{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-u+\tilde{z})^2}{2}\right] \left\{ \Phi\left[\frac{zm_1^{\varepsilon}+x}{\sqrt{2m_0^{\varepsilon}}}\right] - \exp\left[-\frac{\tilde{z}x\delta_1}{\delta_0}\right] \Phi\left[\frac{zm_1^{\varepsilon}-x}{\sqrt{2m_0^{\varepsilon}}}\right] \right\} \times \\ \times \left\{ \Phi\left[\frac{zm_2^{\varepsilon}+x}{\sqrt{2m_0^{\varepsilon}}}\right] - \exp\left[-\frac{\tilde{z}x\delta_2}{\delta_0}\right] \Phi\left[\frac{zm_2^{\varepsilon}-x}{\sqrt{2m_0^{\varepsilon}}}\right] \right\} dx \quad (51)$$

С ростом ОСШ аргументы интегралов вероятности возрастают и интегралы вероятности стремятся к единице. Тогда выражение (51) можно упростить

$$P_{\varepsilon}(u) \cong \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[1 - \exp\left(-\frac{\tilde{z}x\delta_1}{\delta_0}\right) \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{\tilde{z}x\delta_2}{\delta_0}\right) \right] \exp\left[-\frac{(x-u+\tilde{z})^2}{2}\right] dx$$

Выполняя здесь интегрирование, окончательно находим при больших, но конечных ОСШ

$$P_S(u) \cong P_{\varepsilon}(u) \cong B(D_0) - B(D_0 + D_1) - B(D_0 + D_2) + B(D_0 + D_1 + D_2) \quad (52)$$

$$\text{Здесь } B(x) = \exp\left[\frac{\tilde{z}^2(x^2-1)}{2} - i\tilde{z}(x-1)\right] \Phi[u - \tilde{z}x] \text{ а}$$

$$D_i = \delta_i / \delta_0, \quad i \in \{0, 1, 2\} \quad (53)$$

Заметим, что для функции $B(\cdot)$ справедливо $B(D_0) = \Phi[u - \tilde{z}]$. Вероятность пропуска определяется выражением (34). Подставляя в него (30), (52) приходим к приближенному выражению для вероятности пропуска

$$B(u) \cong F_0(u) [B(D_0) - B(D_0 + D_1) - B(D_0 + D_2) + B(D_0 + D_1 + D_2)] \quad (54)$$

Точность этой формулы растет с увеличением ОСШ $\tilde{z}$ (13), параметра m (31) и нормированного порога u (33)

Если выполняется условие (4), то $D_i = 1, i \in \{0, 1, 2\}$, $\tilde{z} = z$ — ОСШ на выходе оптимального приемника (14) и выражение (54) примет вид

$$\beta_0(u) \equiv F_0(u) [\Phi(u-z) - 2 \exp(3z^2/2 - uz) \Phi(u-2z) + \exp(4z^2 - 2uz) \Phi(u-3z)] \quad (55)$$

Выражение (55) совпадает с результатом, полученным в [3] для оптимального приема, когда выполняется (4).

Рассмотрим случай, когда алгоритм синтезирован для обнаружения прямоугольного импульса с амплитудой a и длительностью τ :

$$g(t) = a \quad (56)$$

Априори неизвестную форму сигнала, поступающего на вход обнаружителя, будем описывать прямоугольным импульсом со скошенной вершиной [10]

$$f(t) = a \left[(q-1) \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \right) + 1 \right] \sqrt{\frac{3}{(q^2 + q + 1)}} \quad (57)$$

Здесь τ — длительность сигнала, $q = \frac{f(\tau/2)}{f(-\tau/2)}$ — наклон его скошенной

вершины. Множитель $\sqrt{3/(q^2 + q + 1)}$ в (57) обеспечивает постоянство энергии сигнала при различном наклоне вершины, что позволяет сравнивать эффективность обнаружения сигналов с различными наклонами и одинаковой энергией, так что для (56) и (57) выполняется условие:

$$E = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f^2(t) dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} g^2(t) dt = a^2 \tau = \text{const.}$$

Для расчета характеристик обнаружения (32) и (54) запишем в явном виде параметры (53) и (13). Подставляя соответствующие $f(t)$ (57) и $g(t)$ (56) в эти выражения, получаем:

$$D_0 = 1, \quad D_1 = 1 - \frac{(1-q)}{(1+q)}, \quad D_2 = 1 + \frac{(1-q)}{(1+q)}, \quad \tilde{z} = z \left[\frac{\sqrt{3}(q+1)}{2\sqrt{q^2 + q + 1}} \right] \quad (58)$$

Здесь z — ОСШ при оптимальном приеме (14). Для расчета (32), (54) также необходимо вычислить параметр (31). В рассматриваемом случае с учетом (26) выражение (31) принимает вид $m = m_r = \Lambda \delta_r = \Lambda / \tau$ — приведенная длина априорного интервала возможных значений времени прихода для прямоугольного импульса.

На рис. 1, 2 представлены зависимости вероятности пропуска сигнала (54) от ОСШ z (14). Значения параметров при расчете выбирались следующими: приведенная длина априорного интервала при обнаружении прямоугольного импульса $m_r = 10$, порог определялся по критерию Неймана-Пирсона

на для вероятности ложной тревоги $\alpha = 10^{-2}$. На обоих рисунках сплошными линиями показана вероятность пропуска при оптимальном приеме, когда $q = 1$. Штриховым линиям на рис. 1 соответствует $q = 0,5$; на рис. 2 — $q = 0,2$. Пунктирными линиями: рис. 1 соответствует $q = 0,1$; на рис. 2 — $q = 0,05$. Сопоставление приведенных зависимостей показывает, что отклонение формы входного сигнала от формы опорного ведет к заметному снижению эффективности обнаружения сигнала с неизвестным временем прихода.

С целью проверки работоспособности рассмотренного КП алгоритма обнаружения сигнала с неизвестным временем прихода и априори неизвестной формой, а также для установления границ применимости полученных асимптотических формул для характеристик обнаружения было проведено статистическое моделирование на ЭВМ. Моделирование было выполнено для КП алгоритма обнаружения прямоугольного импульса со скошенной вершиной (57) при опорном сигнале (56).

Случайный процесс $L(\lambda)$ (10) был представлен как функция нормированного аргумента $\hat{L}(\theta) = L(\theta) / \sigma_N = S(\theta, \theta_0) + N(\theta)$, где $\theta = \lambda / \tau$, $\theta_0 = \lambda_0 / \tau$ — нормированное время прихода. Здесь сигнальная функция с учетом (56), (57) и (58) имеет вид

$$S(\theta, \theta_0) = \tilde{z} \hat{S}(\theta, \theta_0) =$$

$$= \frac{z\sqrt{3}/2}{\sqrt{1+q+q^2}} \begin{cases} [(\theta - \theta_0)^2 (q-1) + 2(\theta - \theta_0)q] + (q+1), & -1 \leq \theta - \theta_0 < 0 \\ -[(\theta - \theta_0)^2 (q-1) + 2(\theta - \theta_0)] + (q+1), & 0 \leq \theta - \theta_0 \leq 1, \\ 0, & |\theta - \theta_0| > 1 \end{cases}$$

$$N(\theta) = \sqrt{2\tau/N_0} \int_{-1/2+\theta}^{1/2+\theta} n(x) dx$$

— гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $\langle N(\theta_1)N(\theta_2) \rangle = \hat{B}_N(\theta_1, \theta_2) = \max(1 - |\theta_1 - \theta_2|; 0)$ вида (24).

При моделировании вырабатывались дискретные отсчеты функции $N(\theta)$ с шагом $\Delta\theta$, на основе которых реализация выходного сигнала КП обнаружителя (10) аппроксимировалась ступенчатой функцией с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью $\varepsilon = 0,1$. Согласно [11] дискретные отсчеты выходного сигнала КП приемника представлялись в виде

$$\hat{L}(j\Delta\theta) = S(j\Delta\theta, j_0\Delta\theta) + \sqrt{\Delta\theta} \sum_{k=j-N}^{j+N} \xi[k]$$

где $\xi[k]$ — гауссовские независимые случайные величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией, $\Delta\theta = \varepsilon^2$ — шаг дискретизации, $N = \text{ent}[(1/\varepsilon^2 - 1)/2]$ — число элементов суммирования, $j \in \{J_1; J_2\}$, $J_i = \text{ent}[\Lambda_i / \varepsilon^2 \tau]$, $i = 1, 2$, $j_0 = \text{ent}[\theta_0 / \varepsilon^2]$, $\text{ent}(x)$ — целая часть числа x .

Моделировался КП алгоритм обнаружения (6) при нормированном пороге z , определяемом по критерию Неймана-Пирсона [2] при значении вероятности ложной тревоги $\alpha = 10^{-2}$ (32). В процессе моделирования для каждого значения ОСШ z было реализовано не менее 10^8 циклов испытаний. Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений вероятности пропуска сигнала не более чем на 1,0% при $\beta > 10^{-4}$ и не более чем на 16,5% при $\beta > 10^{-6}$ [7].

Для $m_r = 10$ результаты статистического моделирования представлены на рис. 1, рис. 2. На рис. 1 и рис. 2 круглыми маркерами обозначена вероятность пропуска для оптимального случая $q = 1$. На рис. 1 треугольными маркерами обозначена вероятность пропуска при $q = 0,5$, маркерами в форме квадрата при $q = 0,1$. На рис. 2 треугольные маркеры соответствуют случаю $q = 0,2$, маркеры в форме ромба случаю $q = 0,05$. Из рисунков видно, что с увеличением ОСШ z теоретические зависимости с удовлетворительной точностью описывают поведение вероятности пропуска сигнала при КП приеме.

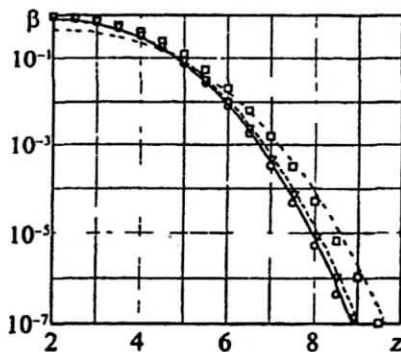


Рис. 1

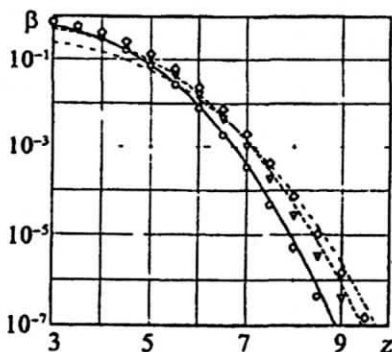


Рис. 2

Из сравнения полученных теоретических зависимостей (54), (55) и результатов статистического моделирования видим, что для расчета вероятности пропуска β можно использовать формулу:

$$\beta^*(u) \equiv \max\{\beta(u), \beta_0(u)\}. \quad (59)$$

Здесь $\beta(u)$, $\beta_0(u)$ — вероятности пропуска сигнала, определяемые выражениями (54) и (55) соответственно. Выражение (59) с удовлетворительной степенью точности описывает вероятность пропуска сигнала при КП обнаружении.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с.
2. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
3. Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П.А.Бакута. — М.: Радио и связь, 1984. — 440 с.
4. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. — М., Сов. радио, 1978. — 296 с.
5. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. — М.: Мир, 1969.
6. Pickands J. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian process. — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 145, November.
7. Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / Под ред. А.П.Трифорова. — Воронеж: ВГУ, — 1991. — 246 с.
8. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М.: Наука, 1977. — 488 с.
9. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. — М.: Сов. радио, 1975. — 704 с.
10. Грязнов М.И., Гуревич М.А., Рябинин М.А. Измерение параметров импульсов. — М.: Радио и связь, 1991. — 216 с.
11. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1971. — 326 с.

Воронежский гос. ун-т.

Поступила в редакцию 17.01.08

УДК 671.327.1

СОКОЛОВ С.В., КАМЕНСКИЙ В.В.

ОПТИЧЕСКИЙ АНАЛОГОВО-ЦИФРОВОЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ПОРАЗРЯДНОГО КОДИРОВАНИЯ

Предложен оптический АЦП поразрядного кодирования, предназначен для преобразования в позиционный двоичный код как электрических, так и оптических, аналоговых сигналов с быстродействием, потенциально достижимым для чисто оптических устройств обработки информации.

Среди различных актуальных проблем теории и практики цифровой обработки сигналов особо следует выделить задачу обеспечения высокого быстродействия аналогово-цифровых преобразователей. Разработанные