ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 45 | 2009 | Вып. 2

УДК 621.391.1

© 2009 г. **А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин**

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ПРИЕМА СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМИ МОМЕНТАМИ ПОЯВЛЕНИЯ И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ[1]

Рассмотрена эффективность функционирования максимально правдоподобного алгоритма обнаружения и измерения моментов появления и исчезновения сигнала произвольной формы, наблюдаемого на фоне аддитивного белого гауссовского шума. Найдены точные выражения для вероятностей ошибок обнаружения и плотностей вероятностей оценок моментов появления и исчезновения.

§ 1. Введение

Задача приема сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения, представляющая значительный интерес для радио- и гидролокации, радиосвязи, сейсмологии, телеметрии и других областей науки и техники, не раз обсуждалась в литературе. В [1] рассмотрена задача обнаружения сигнала со случайными моментами появления и исчезновения, априорные распределения которых предполагаются известными. Найденные алгоритмы обнаружения оказываются крайне сложными как с точки зрения аппаратурной или программной реализации, так и с точки зрения анализа их эффективности. В [2] эта задача решается для случая неизвестных априорных распределений моментов появления и исчезновения сигнала; получены более простые, чем в [1], алгоритмы обнаружения и обсуждается возможность анализа их эффективности на основе решения соответствующих интегральных уравнений. Однако результаты [2] справедливы лишь при обработке последовательности независимых случайных величин.

Прием детерминированного сигнала с неизвестными (или случайными) моментами появления и исчезновения на фоне гауссовского белого шума при непрерывном времени наблюдения рассмотрен в [3]. Подобное ограничение класса сигналов позволяет найти существенно более простые, чем в [1, 2], алгоритмы обнаружения и оценки моментов появления и исчезновения. Однако анализ эффективности функционирования синтезированных в [3] алгоритмов был выполнен лишь приближенно.

В данной статье на основе результатов [4] найдены точные характеристики эффективности функционирования максимально правдоподобных алгоритмов, синтезированных в [3].

Постановка задачи обнаружения сигнала и оценки неизвестных моментов появления и исчезновения заимствована из [3]. Пусть на интервале времени $[0, T]$ наблюдается случайный процесс $x(t) = \gamma_0 s(t, \theta_{01}, \theta_{02}) + n(t)$, представляющий собой

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 07-01-00042).

аддитивную смесь полезного сигнала

$$s(t,\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} f(t), & \theta_1 \leqslant t \leqslant \theta_2, \\ 0, & t < \theta_1,\ t > \theta_2, \end{cases} \tag{1}$$

и гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Здесь $f(t)$ – априори известная непрерывно дифференцируемая функция, описывающая форму сигнала, θ_1 и θ_2 – неизвестные моменты появления и исчезновения соответственно, которые принимают значения из априорных интервалов

$$\theta_i \in [\theta_{i,\min}, \theta_{i,\max}], \quad i = 1, 2.$$

Для того чтобы сигнал не мог исчезнуть раньше, чем появиться, положим $\theta_{1,\max} < < \theta_{2,\min}$. Будем считать, что $f(\theta_i) \neq 0$, так что сигнал (1) является разрывным [5, 6]. Дискретный параметр γ_0 может с вероятностью p_1 принимать значение $\gamma_0 = 1$ (сигнал присутствует) и с вероятностью $p_0 = 1 - p_1$ – значение $\gamma_0 = 0$ (сигнал отсутствует). Тогда задача обнаружения сигнала (1) сводится к оценке параметра γ. Когда априори известно, что сигнал присутствует в принятой реализации, полезная информация может заключаться в неизвестных параметрах сигнала – моментах появления и исчезновения. Тогда на основе принятой реализации $x(t)$ приемник должен сформировать совместную оценку моментов появления и исчезновения.

Максимально правдоподобные (МП-) алгоритмы обнаружения и оценки моментов появления и исчезновения синтезированы в [3]. Оценка дискретного параметра γ в соответствии с алгоритмом максимального правдоподобия может быть найдена как

$$\gamma_m = \arg\sup_{\gamma} \left[\sup_{\theta_1,\theta_2} L(\gamma,\theta_1,\theta_2) \right], \quad \theta_i \in [\theta_{i,\min}, \theta_{i,\max}].$$

Здесь

$$L(\gamma,\theta_1,\theta_2) = \frac{2\gamma}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(t)[x(t) - f(t)/2]\, dt \tag{2}$$

– логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП), а также предполагается, что интервал наблюдения $[0, T]$ удовлетворяет условию $0 \leqslant \theta_{1,\min} < \theta_{2,\max} \leqslant T$, так что сигнал (1) полностью размещается в этом интервале. Первое слагаемое в выражении (2) – стохастический интеграл в смысле Ито.

Учитывая, что $L(\gamma = 0, \theta_1, \theta_2) = 0$, получаем, что МП–алгоритм обнаружения сигнала (1) заключается в сравнении с нулевым порогом величины абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП:

$$L = \sup L(\theta_1,\theta_2) \underset{\gamma_m=0}{\overset{\gamma_m=1}{\gtrless}} 0, \tag{3}$$

где

$$L(\theta_1,\theta_2) = L(\gamma = 1, \theta_1, \theta_2). \tag{4}$$

Вместо алгоритма (3) можно использовать обобщенный МП–алгоритм обнаружения [2, 7], основанный на сравнении абсолютного максимума логарифма ФОП с некоторым порогом c:

$$L \underset{\gamma_m=0}{\overset{\gamma_m=1}{\gtrless}} c. \tag{5}$$

Порог c в выражении (5) может выбираться исходя из различных критериев оптимальности.

Если априори известно, что сигнал присутствует в принятой реализации, то алгоритм нахождения оценок максимального правдоподобия (ОМП) моментов появления и исчезновения состоит в поиске положения абсолютного (наибольшего) максимума случайного поля $L(\theta_1, \theta_2)$ (4)

$$(\theta_{1m}, \theta_{2m}) = \arg\sup L(\theta_1, \theta_2), \quad \theta_i \in [\theta_{i,\min}, \theta_{i,\max}]. \tag{6}$$

§ 2. Свойства логарифма функционала отношения правдоподобия

Согласно алгоритмам (5), (6) приемник должен формировать двумерное случайное поле (4) для всех возможных значений неизвестных моментов появления и исчезновения. Поэтому его аппаратурная реализация оказывается в общем случае довольно сложной. Действительно, нахождение величины L предполагает построение структуры, многоканальной по обоим неизвестным параметрам. Однако трудностей аппаратурной реализации алгоритмов (5), (6) частично удается избежать, если представить логарифм ФОП (4) в виде суммы [3] $L(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2)$ двух случайных процессов. Первый из них зависит только от момента появления θ_1, а второй – только от момента исчезновения θ_2:

$$L_1(\theta_1) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f(t)[x(t) - f(t)/2]\, dt, \tag{7}$$

$$L_2(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f(t)[x(t) - f(t)/2]\, dt, \tag{8}$$

где θ – произвольная точка, принадлежащая интервалу $(\theta_{1,\max}, \theta_{2,\min})$.

Согласно выражениям (7), (8) функции $L_1(\theta_1)$ и $L_2(\theta_2)$ статистически независимы, так как представляют собой интегралы от белого шума на неперекрывающихся интервалах (θ_1, θ) и (θ, θ_2). Тогда в (3)

$$L = L_1 + L_2, \quad L_1 = \sup L_1(\theta_1), \quad L_2 = \sup L_2(\theta_2),$$

где L_1 и L_2 – статистически независимые случайные величины.

Следовательно, величину L можно получить посредством раздельной максимизации функций (7), (8). В работе [3] приведена структурная схема МП-обнаружителя сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения.

В силу статистической независимости случайных процессов $L_1(\theta_1)$ (7) и $L_2(\theta_2)$ (8) положение максимума случайного поля $L(\theta_1, \theta_2)$ по переменной θ_1 совпадает с положением максимума случайного процесса $L_1(\theta_1)$, а по переменной θ_2 – с положением максимума $L_2(\theta_2)$. В результате для ОМП моментов появления и исчезновения можно записать

$$\theta_{im} = \arg\sup L_i(\theta_i), \quad \theta_i \in [\theta_{i,\min}, \theta_{i,\max}], \quad i = 1, 2.$$

Представление логарифма ФОП в виде суммы двух статистически независимых случайных процессов позволяет не только предложить достаточно простую аппаратурную реализацию [3] алгоритмов обнаружения и оценивания, но и выполнить анализ синтезированных МП-алгоритмов и найти точные характеристики эффективности их функционирования. Для полного статистического описания логарифма ФОП достаточно знать математические ожидания и корреляционные функции гауссовских независимых случайных процессов (7), (8). Выполняя усреднение, находим математические ожидания

$$S_i(\theta_i) = \langle L_i(\theta_i)\rangle = \gamma_0 S_i(\theta_{0i},\theta_i) - S_i(\theta_i,\theta_i)/2, \quad i=1,2,$$

и корреляционные функции

$$B_i(\theta_{1i},\theta_{2i}) = \langle [L_i(\theta_{1i}) - S_i(\theta_{1i})][L_i(\theta_{2i}) - S_i(\theta_{2i})]\rangle = S_i(\theta_{1i},\theta_{2i}), \quad i=1,2,$$

где использованы обозначения

$$S_1(\theta_{11},\theta_{21}) = \frac{2}{N_0}\int\limits_{\max(\theta_{11},\theta_{21})}^{\theta} f^2(t)\,dt, \tag{9}$$

$$S_2(\theta_{12},\theta_{22}) = \frac{2}{N_0}\int\limits_{\theta}^{\min(\theta_{12},\theta_{22})} f^2(t)\,dt. \tag{10}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$Q(\theta_1,\theta_2) = \frac{2}{N_0}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t)\,dt \tag{11}$$

– отношение сигнал/шум (ОСШ) для сигнала с моментом появления θ_1 и моментом исчезновения θ_2. Пусть $f(t)$ может обращаться в нуль только на части интервала $[\theta_1,\theta_2]$, имеющей нулевую меру. Тогда $Q(\theta_1,\theta)$ – монотонно убывающая функция от θ_1, а $Q(\theta,\theta_2)$ – монотонно возрастающая функция от θ_2. Использование ОСШ (11) позволяет переписать функции (9), (10) в виде

$$S_1(\theta_{11},\theta_{21}) = \min[Q(\theta_{11},\theta), Q(\theta_{21},\theta)],$$
$$S_2(\theta_{12},\theta_{22}) = \min[Q(\theta,\theta_{12}), Q(\theta,\theta_{22})].$$

Перейдем в выражении (7) от θ_1 к новой переменной $\lambda_1 = Q(\theta_1,\theta)$, где $\lambda_1 \in [\lambda_{1,\min},\lambda_{1,\max}]$, $\lambda_{1,\min} = Q(\theta_{1,\max},\theta)$, $\lambda_{1,\max} = Q(\theta_{1,\min},\theta)$, а в выражении (8) – от θ_2 к новой переменной $\lambda_2 = Q(\theta,\theta_2)$, $\lambda_2 \in [\lambda_{2,\min},\lambda_{2,\max}]$, $\lambda_{2,\min} = Q(\theta,\theta_{2,\min})$, $\lambda_{1,\max} = Q(\theta,\theta_{2,\max})$. Тогда для случайных процессов (7), (8) можно записать

$$L_i(\lambda_i) = L_i[Q_i(\lambda_i)] = \mu_i(\lambda_i) = \gamma_0\min(\lambda_{0i},\lambda_i) - \lambda_i/2 + \nu_i(\lambda_i), \quad i=1,2, \tag{12}$$

где $Q_1(\lambda_1)$ – решение уравнения $\lambda_1 = Q(\theta_1,\theta)$ относительно θ_1, $\lambda_{01} = Q(\theta_{01},\theta)$, $Q_2(\lambda_2)$ – решение уравнения $\lambda_2 = Q(\theta,\theta_2)$ относительно θ_2, $\lambda_{02} = Q(\theta,\theta_{02})$, $\nu_i(\lambda_i)$ – статистически независимые гауссовские случайные процессы, для которых

$$\langle\nu_i(\lambda_i)\rangle = 0, \quad \langle\nu_i(\lambda_{1i})\nu_i(\lambda_{2i})\rangle = \min(\lambda_{1i},\lambda_{2i}). \tag{13}$$

Согласно (12), (13) процессы $\mu_i(\lambda_i)$ являются статистически независимыми гауссовскими марковскими случайными процессами с коэффициентами сноса и диффузии [8]

$$k_{1i}(\gamma_0) = \begin{cases}\gamma_0 - 1/2, & \lambda_{i,\min} \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_{0i},\\ -1/2, & \lambda_{0i} < \lambda_i \leqslant \lambda_{i,\max},\end{cases} \qquad k_{2i} = 1. \tag{14}$$

Используя марковские свойства случайных процессов $\mu_i(\lambda_i)$, можно найти характеристики эффективности функционирования синтезированных алгоритмов МП.

§ 3. Характеристики обнаружения сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения

Вероятности ошибок 1-го рода (ложной тревоги) α и 2-го рода (пропуска сигнала) $\beta(\theta_{01}, \theta_{02})$ при использовании приемника МП определяются выражениями [7]:

$$\alpha = \mathbf{P}\big[\sup L(\theta_1, \theta_2) > c \,|\, \gamma_0 = 0\big] = 1 - P_0(c), \tag{15}$$

$$\beta(\theta_{01}, \theta_{02}) = \mathbf{P}\big[\sup L(\theta_1, \theta_2) < c \,|\, \gamma_0 = 1\big] = P_1(c), \tag{16}$$

где $\theta_i \in [\theta_{i,\min}, \theta_{i,\max}]$, а $P_j(c) = \mathbf{P}\big[\sup L(\theta_1, \theta_2) < c \,|\, \gamma_0 = j\big]$ – функции распределения величины абсолютного максимума случайного поля $L(\theta_1, \theta_2)$. Используя представление логарифма ФОП в виде суммы статистически независимых случайных процессов (7), (8), получаем, что

$$P_0(c) = \mathbf{P}\big[L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2) < c \,|\, \gamma_0 = 0\big] = \int F_{20}(c - x)\, dF_{10}(x), \tag{17}$$

$$P_1(c) = \mathbf{P}\big[L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2) < c \,|\, \gamma_0 = 1\big] = \int F_{21}(c - x)\, dF_{11}(x), \tag{18}$$

$$\begin{aligned} F_{ij}(u) &= \mathbf{P}\big[\sup L_i(\theta_i) < u,\ \theta_{i,\min} \leqslant \theta_i \leqslant \theta_{i,\max} \,|\, \gamma_0 = j\big] = \\ &= \mathbf{P}\big[\sup \mu_i(\lambda_i) < u,\ \lambda_{i,\min} \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_{i,\max} \,|\, \gamma_0 = j\big] \end{aligned} \tag{19}$$

– функции распределения величин абсолютных максимумов процессов $L_i(\theta_i)$.

Рассмотрим вначале функцию $F_{i0}(u)$, для которой аналогично [3, 6, 7] можно записать

$$F_{i0}(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} W_i(y, \lambda_{i,\max})\, dy, \tag{20}$$

где $W_i(y, \lambda_i)$ – решение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК)

$$\frac{\partial W(y, \lambda_i)}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial}{\partial y}[k_{1i} W_i(y, \lambda_i)] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[k_{2i} W_i(y, \lambda_i)] = 0 \tag{21}$$

с коэффициентами сноса $k_{1i}(0)$ и диффузии k_{2i} (14) при начальном условии

$$W_i(y, \lambda_{i,\min}) = \exp\left[-(y + \lambda_{i,\min}/2)^2 / 2\lambda_{i,\min}\right] / \sqrt{2\pi\lambda_{i,\min}}$$

и граничных условиях $W_i(y = u, \lambda_i) = W_i(y = -\infty, \lambda_i) = 0$. Применяя метод отражения с переменой знака [8], находим решение уравнения (21)

$$\begin{aligned} W_i(y, \lambda_i) &= \frac{\exp\big[y/2 - (\lambda_i - \lambda_{i,\min})/8\big]}{\sqrt{2\pi(\lambda_i - \lambda_{i,\min})}} \times \\ &\times \int\limits_0^{\infty} \frac{\exp\big[-(\xi - u - \lambda_{i,\min}/2)^2/2\lambda_{i,\min} - \xi/2\big]}{\sqrt{2\pi\lambda_{i,\min}}} \times \\ &\times \left[\exp\left(-\frac{(y - \xi)^2}{2(\lambda_i - \lambda_{i,\min})}\right) - \exp\left(-\frac{(y + \xi)^2}{2(\lambda_i - \lambda_{i,\min})}\right)\right] d\xi, \end{aligned}$$

подставив которое при $\lambda_i = \lambda_{i,\max}$ в выражение (20), получаем

$$F_{i0}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_{\min}}} \int\limits_0^{\infty} \exp\left[-(u - \xi + \lambda_{\min}/2)^2/2\lambda_{\min}\right] \varphi(1, \lambda_{i,\max} - \lambda_{i,\min}, \xi)\, d\xi, \tag{22}$$

где

$$\varphi(y_1,y_2,y_3)=\Phi(y_1\sqrt{y_2}/2+y_3/y_1\sqrt{y_2})-\exp(-y_3)\Phi(y_1\sqrt{y_2}/2-y_3/y_1\sqrt{y_2}),$$

а $\Phi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\exp(-t^2/2)\,dt\,/\sqrt{2\pi}$ – интеграл вероятности. Подставляя функции (22) в выражение (17), а затем (17) в (15), находим точное выражение для вероятности ложной тревоги

$$\alpha=1-\frac{1}{z_{\min}^2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\xi_1+\xi_2-c}{z_{\min}}-\frac{z_{\min}}{2}\right)\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{(\xi_1+\xi_2-c-z_{\min}^2/2)^2}{2z_{\min}^2}\right]\varphi(1,\eta_1,\xi_1)\varphi(1,\eta_2,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2, \tag{23}$$
$$z_{\min}^2=Q(\theta_{1,\max},\theta_{2,\min}),\quad \eta_i=Q(\theta_{i,\max},\theta_{i,\min}),\quad i=1,2.$$

Перейдем теперь к определению вероятности пропуска сигнала (1), полагая, что $\gamma_0=1$, т.е. сигнал присутствует в принятой реализации. Рассмотрим функции $F_{i1}(u)$, $i=1,2$, из (19), для которых аналогично [3,6] можно записать

$$F_{i1}(u)=\int\limits_{-\infty}^{u}W_i(y,\lambda_{i,\max})\,dy, \tag{24}$$

где $W_i(y,\lambda_{i,\max})=W_i(y,\lambda_i=\lambda_{i,\max})$, а $W_i(y,\lambda_i)$ – решения уравнения (21) при $i=1,2$ с коэффициентами сноса $k_{1i}(1)$ и диффузии k_{2i} (14) при начальном условии

$$W_i(y,\lambda_{i,\min})=\exp\left[-(y-\lambda_{i,\min}/2)^2/2\lambda_{i,\min}\right]/\sqrt{2\pi\lambda_{i,\min}}.$$

Задавая нулевые граничные условия $W_i(y=u,\lambda_i)=0$ и $W_i(y=-\infty,\lambda_i)=0$ при $\lambda_i\in$ $\in[\lambda_{i,\min},\lambda_{i,\max}]$, решая уравнение ФПК методом отражения с переменой знака [8], получаем при $\lambda_i\geqslant\lambda_{0i}$

$$W_i(y,\lambda_i)=\frac{\exp\bigl[y/2-(\lambda_i-\lambda_{i,\min})/8\bigr]}{2\pi\sqrt{2\pi\lambda_{i,\min}(\lambda_i-\lambda_{0i})(\lambda_{0i}-\lambda_{i,\min})}}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(\xi_1-\xi)^2}{2(\lambda_{0i}-\lambda_{i,\min})}\right)-\right.$$
$$\left.-\exp\left(-\frac{(\xi_1+\xi)^2}{2(\lambda_{0i}-\lambda_{i,\min})}\right)\right]\left[\exp\left(-\frac{(y-\xi_1)^2}{2(\lambda_i-\lambda_{0i})}\right)-\exp\left(-\frac{(y+\xi)^2}{2(\lambda_i-\lambda_{0i})}\right)\right]\times$$
$$\times\exp\bigl[-(\xi-u+\lambda_{i,\min}/2)^2/2\lambda_{i,\min}+\xi/2-\xi_1\bigr]\,d\xi\,d\xi_1. \tag{25}$$

Подставив решение (25) при $\lambda_i=\lambda_{i,\max}$ в выражение (24), запишем выражение для функции $F_{i1}(u)$ в виде

$$F_{i1}(u)=\frac{\exp\bigl[-(\lambda_{0i}-\lambda_{i,\min})/8\bigr]}{2\pi\sqrt{\lambda_{i,\min}(\lambda_{0i}-\lambda_{i,\min})}}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(\xi_1-\xi)^2}{2(\lambda_{0i}-\lambda_{i,\min})}\right)-\right.$$
$$\left.-\exp\left(-\frac{(\xi_1+\xi)^2}{2(\lambda_{0i}-\lambda_{i,\min})}\right)\right]\exp\left[-\frac{(\xi-u+\lambda_{i,\min}/2)^2}{2\lambda_{i,\min}}+\frac{\xi-\xi_1}{2}\right]\times$$
$$\times\varphi(1,\lambda_{i,\max}-\lambda_{0i},\xi_1)\,d\xi\,d\xi_1. \tag{26}$$

Подставляя далее функции (26) в формулу (18), а затем (18) в (16), получаем точное выражение для вероятности пропуска

$$\beta(\theta_{01},\theta_{02}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_1\mu_2}} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi_1+\xi_3-c+z_{\min}^2/2)^2}{2z_{\min}^2}\right] \times$$
$$\times\, \chi\big[\xi_1,\xi_2,0,\mu_1\big]\chi\big[\xi_3,\xi_4,0,\mu_2\big]\varphi(1,m_1,\xi_2)\varphi(1,m_2,\xi_4)\exp\left[-(\mu_1+\mu_2)/8\right]\times$$
$$\times \exp\left((\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4)/2\right)(\xi_1+\xi_3-c+z_{\min}^2/2)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\xi_4/2\pi z_{\min}^3. \qquad (27)$$

Здесь использованы обозначения $m_1 = Q(\theta_{1,\min},\theta_{01})$, $m_2 = Q(\theta_{02},\theta_{2,\max})$, $\mu_1 = Q(\theta_{01},\theta_{1,\max})$, $\mu_2 = Q(\theta_{2,\min},\theta_{02})$. Отметим, что вероятность ложной тревоги (23) и вероятность пропуска сигнала (27) не зависят от выбора значения θ в (7), (8).

§ 4. Характеристики оценок моментов появления и исчезновения

Наиболее полными характеристиками ОМП моментов появления и исчезновения являются их условные плотности вероятностей $W_i(\theta_i\,|\,\theta_{0i})$ [9]. Согласно [6] для этих плотностей вероятностей можно записать

$$W_i(\theta_i\,|\,\theta_{0i}) = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial F_{i1}(u,v,\theta_i)}{\partial u}\bigg|_{v=u}\right]du, \qquad (28)$$

где

$$F_{i1}(u,v,\tau) = \mathbf{P}\left[\sup_{\theta_{i,\min}\leqslant\theta_i<\tau} L_i(\theta_i)<u,\ \sup_{\tau\leqslant\theta_i\leqslant\theta_{i,\max}} L_i(\theta_i)<v\right] \qquad (29)$$

– двумерные функции распределения величин абсолютных максимумов случайных процессов $L_i(\theta_i)$, $i=1,2$, при наличии полезного сигнала в принятой реализации.

Рассмотрим сначала функцию $F_{21}(u,v,\tau)$, которую аналогично [6, 7] представим в виде

$$F_{21}(u,v,\tau) = \mathbf{P}\left[\sup_{\lambda_{2,\min}\leqslant\lambda_2<\lambda''}\mu_2(\lambda_2)<u,\ \sup_{\lambda''\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_{2,\max}}\mu_2(\lambda_2)<v\right] =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{v} W_2(y,\lambda_{2,\max})\,dy,$$

где $\lambda'' = Q(\theta,\tau)$, $W_2(y,\lambda_{2,\max}) = W_2(y,\lambda_2=\lambda_{2,\max})$, а $W_2(y,\lambda_2)$ – решение уравнения (21) при $i=2$ с коэффициентами сноса $k_{12}(1)$ и диффузии k_{22} (14) при начальном условии $W_2(y,\lambda_{2,\min}) = \exp[-(y-\lambda_{2,\min}/2)^2/2\lambda_{2,\min}]/\sqrt{2\pi\lambda_{2,\min}}$. Задавая нулевые граничные условия $W_2(y=u,\lambda_2)=0$ при $\lambda_2\in[\lambda_{2,\min},\lambda'']$, $W_2(y=v,\lambda_2)=0$ при $\lambda_2\in[\lambda'',\lambda_{2,\max}]$ и $W_2(y=-\infty,\lambda_2)=0$ при $\lambda_2\in[\lambda_{2,\min},\lambda_{2,\max}]$ и решая уравнение ФПК методом отражения с переменой знака [8], получаем

$$F_{21}(u,v,\tau,) = \exp\left[-\frac{\chi_2}{|\chi_2|}\frac{u-v}{2} - \frac{|\chi_2|+\chi_1}{8}\right]\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty W_2(u-\xi,\lambda_{2,\min})\times$$
$$\times\,\chi\big[\xi_2,\xi_1,(u-v)\Theta(\chi_2),|\chi_2|\big]\chi\big[\xi_1,\xi,(u-v)\Theta(-\chi_2),\chi_1\big]\varphi(1,\chi_3,\xi_2)\times$$
$$\times\exp\big[\xi/2-\xi_2\chi_2/2|\chi_2|-\xi_1\Theta(\chi_2)\big]\,d\xi\,d\xi_1\,d\xi_2/2\pi\sqrt{|\chi_2|\chi_1}. \qquad (30)$$

Здесь использованы обозначения

$$\chi(y_1, y_2, y_3, y_4) = \left\{\exp\left[-(y_1 - y_2 + y_3)^2/2y_4\right] - \exp\left[-(y_1 + y_2 + y_3)^2/2y_4\right]\right\},$$

$\chi_1 = \min(\lambda_{02}, \lambda'') - \lambda_{2,\min}$, $\chi_2 = \lambda'' - \lambda_{02}$, $\chi_3 = \lambda_{2,\max} - \max(\lambda_{02}, \lambda'')$, $\Theta(x) = 1$ при $x \geqslant 0$ и $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$.

Рассмотрим теперь функцию $F_{11}(u, v, \tau)$ (19). В силу того, что $Q(\theta_1, \theta)$ – монотонно убывающая функция θ_1, можно записать

$$F_{11}(u, v, \tau) = \mathbf{P}\left[\sup_{\lambda_{1,\min} \leqslant \lambda_1 < \lambda'} \mu_1(\lambda_1) < v, \sup_{\lambda' \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_{1,\max}} \mu_1(\lambda_1) < u\right]. \tag{31}$$

Согласно (11), (12) статистические характеристики случайных процессов $\mu_i(\lambda_i)$ различаются только номером i. Следовательно, чтобы получить функцию $F_{11}(u, v, \tau)$, можно воспользоваться выражением (30), где необходимо заменить $\lambda_{2,\min}$, $\lambda_{2,\max}$, λ_{02}, λ'' на $\lambda_{1,\min}$, $\lambda_{1,\max}$, λ_{01}, λ' соответственно и поменять местами переменные u и v. В результате находим

$$F_{11}(u, v, \tau) = \exp\left[\frac{\varkappa_2}{|\varkappa_2|}\frac{u - v}{2} - \frac{|\varkappa_2| + \varkappa_1}{8}\right] \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty W_1(u - \xi, \lambda_{1,\min}) \times$$
$$\times \chi\left[\xi_2, \xi_1, (v - u)\Theta(-\varkappa_2), |\varkappa_2|\right] \chi\left[\xi_1, \xi, (v - u)\Theta(\varkappa_2), \varkappa_1\right] \varphi(1, \varkappa_3, \xi_2) \times$$
$$\times \exp\left[\xi/2 - \xi_2\varkappa_2/2|\varkappa_2| - \xi_1\Theta(-\varkappa_2)\right] d\xi\, d\xi_1\, d\xi_2 / 2\pi\sqrt{|\varkappa_2|\varkappa_1}, \tag{32}$$

где $\varkappa_1 = \min(\lambda_{01}, \lambda') - \lambda_{1,\min}$, $\varkappa_2 = \lambda_{01} - \lambda'$, $\varkappa_3 = \lambda_{1,\max} - \max(\lambda_{01}, \lambda')$, а

$$W_1(y, \lambda_{1,\min}) = \exp\left[-(y - \lambda_{1,\min}/2)^2/2\lambda_{1,\min}\right] / \sqrt{2\pi\lambda_{1,\min}}$$

– плотность вероятности случайной величины $\mu_1(\lambda_{1,\min})$.

Подставляя функции распределения (30) и (32) в (28), получаем точные выражения для условных плотностей вероятностей ОМП моментов появления и исчезновения в виде

$$W_i(\theta_i \,|\, \theta_{0i}) = \frac{2f^2(\theta_i)}{N_0} \times$$
$$\times \begin{cases} \Psi\left(-Q(\theta_{0i}, \theta_i), Q(\theta_{i,\min}, \theta_{0i}), Q(\theta_{0i}, \theta_{i,\max})\right), & \theta_{i,\min} \leqslant \theta_i \leqslant \theta_{0i}, \\ \Psi\left(Q(\theta_i, \theta_{0i}), Q(\theta_{0i}, \theta_{i,\max}), Q(\theta_{i,\min}, \theta_{0i})\right), & \theta_{0i} < \theta_i \leqslant \theta_{i,\max}, \end{cases} \tag{33}$$

где

$$\Psi(y, y_1, y_2) = \left\{\Phi\left(\sqrt{\frac{y_1 - y}{4}}\right) + \exp\left[-\frac{y_1 - y}{8}\right] \Big/ \sqrt{\frac{\pi(y_1 - y)}{2}}\right\} \left[\,|y|^{3/2}\sqrt{2\pi}\,\right]^{-1} \times$$
$$\times \int_0^\infty \xi \exp\left[-\frac{(\xi + y/2)^2}{2y}\right] \left[\Phi\left(\frac{\xi + y_2/2}{\sqrt{y_2}}\right) - \exp(-\xi)\Phi\left(\frac{-\xi + y_2/2}{\sqrt{y_2}}\right)\right] d\xi. \tag{34}$$

При этом плотность вероятности (33) не зависит от выбора значения θ в (7), (8).

Точность оценок моментов появления и исчезновения можно характеризовать условными смещением и рассеянием [9]

$$B(\theta_{im} \,|\, \theta_{0i}) = \int_{\theta_{i,\min}}^{\theta_{i,\max}} (\theta_i - \theta_{0i}) W_i(\theta_i \,|\, \theta_{0i})\, d\theta_i, \tag{35}$$

$$V(\theta_{im}\,|\,\theta_{0i}) = \int\limits_{\theta_{i,\,\min}}^{\theta_{i,\,\max}} (\theta_i - \theta_{0i})^2 W_i(\theta_i\,|\,\theta_{0i})\, d\theta_i. \tag{36}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение плотностей вероятностей (33), смещений (35) и рассеяний (36) при увеличении ОСШ. Введем нормированные переменные (или обобщенные ОМП моментов появления и исчезновения)

$$\ell_{im} = Q(\theta_{i0}, \theta_{im}), \tag{37}$$

$\ell_{im} \in [-\ell_{i,\min}, \ell_{i,\max}]$, где $\ell_{i,\min} = Q(\theta_{i,\min}, \theta_{0i}) \geqslant 0$, $\ell_{i,\max} = Q(\theta_{0i}, \theta_{i,\max}) \geqslant 0$. Для плотностей вероятностей случайных величин (37) с учетом (33) можно записать

$$W_i(\ell_i) = \begin{cases} \Psi\left[-\ell_i, \ell_{i,\min}, \ell_{i,\max}\right], & -\ell_{i,\min} \leqslant \ell_i \leqslant 0, \\ \Psi\left[\ell_i, \ell_{i,\max}, \ell_{i,\min}\right], & 0 < \ell_i \leqslant \ell_{i,\max}. \end{cases} \tag{38}$$

Положим в (38), что $\ell_{i,\min} \to \infty$, $\ell_{i,\max} \to \infty$. Это, в частности, имеет место при $z_{\min} \to \infty$ и фиксированных значениях $\theta_{i,\min}$, $\theta_{i,\max}$, $i = 1, 2$. Учитывая (34), находим предельную плотность вероятности нормированных переменных (37)

$$W_a(\ell_i) = 3\exp\bigl(2|\ell_i|\bigr)\left[1 - \Phi\left(3\sqrt{|\ell_i|/2}\right)\right] + \Phi\left(\sqrt{|\ell_i|/2}\right) - 1, \quad \ell_i \in (-\infty, +\infty). \tag{39}$$

Впервые эта плотность вероятности была получена, по-видимому, в [10], а ее свойства изучены и описаны в [11]. Плотность вероятности (39) существенно отличается от гауссовской, имеет нулевые математическое ожидание и коэффициент асимметрии, обладает дисперсией 13/2 и коэффициентом эксцесса $1779/169 \approx 10{,}53$. Известно [5, 6, 9], что по мере роста ОСШ $z_{\min}$ ОМП θ_{im} сходятся к истинным значениям θ_{0i}, $i = 1, 2$, моментов появления и исчезновения в среднеквадратическом смысле. Поэтому при достаточно больших ОСШ оценки максимального правдоподобия располагаются в малой окрестности истинного значения оцениваемого параметра. Рассмотрим поведение функции $Q(\theta_{0i}, \theta_i)$ в окрестности θ_{0i}. Разложим ее в ряд Тейлора по θ_i в окрестности θ_{0i} и ограничимся в разложении членами первого порядка

$$Q(\theta_{0i}, \theta_i) \approx 2f^2(\theta_{0i})(\theta_i - \theta_{0i})/N_0 = 2\rho_{i1}^2(\theta_{0i})(\theta_i - \theta_{0i})/T_{\max},$$

где $T_{\max}$ – максимальная длительность сигнала, $\rho_{i1}^2 = 2f^2(\theta_{0i})T_{\max}/N_0$. Тогда для нормированных переменных ℓ_{im} справедливо выражение

$$\ell_{im} = \rho_{i1}^2(\theta_{0i})(\theta_{im} - \theta_{0i})/T_{\max}. \tag{40}$$

Используя (39), (40), для асимптотических значений смещения (35) и рассеяния (36) оценок моментов появления и исчезновения можно записать

$$B_a(\theta_{im}\,|\,\theta_{0i}) = 0, \quad V_a(\theta_{im}\,|\,\theta_{0i}) = 26T_{\max}^2/\rho_{i1}^4. \tag{41}$$

Выражения (41) непосредственно следуют из результатов [5], если интерпретировать ОМП θ_{im} как оценки момента скачкообразного изменения сигнала, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. Сопоставление (41) и (35), (36) для конкретных сигналов позволяет определить границы применимости асимптотических формул, полученных в [5].

§ 5. Заключение

Представление логарифма функционала отношения правдоподобия в виде суммы двух статистически независимых случайных процессов, а также применение оригинальной замены переменных дало возможность найти точные выражения для характеристик алгоритмов приема сигнала произвольной формы с неизвестными моментами появления и исчезновения. Полученные результаты позволяют исследовать влияние формы сигнала на эффективность его приема, а также определить границы применимости найденных ранее асимптотических выражений. Показано, что с ростом отношения сигнал/шум найденные точные выражения для характеристик обнаружения и оценивания совпадают с аналогичными асимптотическими характеристиками, найденными ранее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тартаковский А.Г.* Обнаружение сигналов со случайными моментами появления и исчезновения // Пробл. передачи информ. 1988. Т. 24. № 2. С. 39–50.
2. *Репин В.Г.* Обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Пробл. передачи информ. 1991. Т. 27. № 1. С. 61–72.
3. *Трифонов А.П., Корчагин Ю.Э.* Оптимальный прием сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Пробл. передачи информ. 2001. Т. 37. № 1. С. 52–71.
4. *Трифонов А.П.* Эффективность обнаружения сигнала с неизвестной длительностью // Памяти А.Н. Малахова. Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2000. С. 65–69.
5. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
6. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
7. *Трифонов А.П.* Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами // Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984. С. 12–89.
8. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977.
9. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
10. *Терентьев А.С.* Распределение вероятностей временного положения абсолютного максимума на выходе согласованного фильтра // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13. № 4. С. 652–657.
11. *Трифонов А.П.* Разрывные модели сигналов и оценка их параметров // Прикладная теория случайных процессов и полей. Ульяновск: УлГТУ, 1995. С. 164–214.

Трифонов Андрей Павлович
Корчагин Юрий Эдуардович
Воронежский государственный университет
trifonov@phys.vsu.ru
korchagin@phys.vsu.ru

Поступила в редакцию
09.04.2008
После переработки
10.07.2008