

295

295



ISSN 0021-3470

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ТОМ 52

5-6
май-июнь

ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

2009

ОЦЕНКА КООРДИНАТ ИЗОБРАЖЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ И ПЛОЩАДЬЮ*

Выполнены синтез и анализ квазиправдоподобного и максимально правдоподобного алгоритмов оценки координат изображения. Найден проигрыш в точности квазиправдоподобной оценки по сравнению с точностью оценки максимального правдоподобия.

Во многих приложениях современной радиоэлектроники возникает необходимость в обработке изображений с неизвестными параметрами [1–3]. В частности могут быть неизвестны интенсивность, координаты и площадь изображения. В [2, 3] рассмотрена задача оценки координат изображения, но его интенсивность и площадь при этом предполагалась априори известными. В тоже время, во многих случаях, обычные условия формирования и передачи изображения [1] приводят к тому, что его максимальная интенсивность (амплитуда) и площадь априори неизвестны. В работе [4] рассмотрено обнаружение изображения с неизвестными координатами, интенсивностью и площадью. Однако, в ряде задач необходимо определение неизвестных параметров полезного изображения на фоне пространственного шума. Обычно основной интерес представляет оценка координат изображения. В связи с чем рассмотрим оценку координат изображения с априори неизвестными интенсивностью и площадью.

Пусть в области G наблюдается реализация двумерного случайного поля

$$\xi(x_1, x_2) = s(x_1, x_2, a_0, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) + n(x_1, x_2) \quad (1)$$

где $n(x_1, x_2)$ — центрированный гауссовский белый шум с односторонней спектральной плотностью N_0 , а распределение интенсивности полезного изображения имеет вид

$$s(x_1, x_2, a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) = af \left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi}} \right) \quad (2)$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 06-07-96301 и 07-01-00042).

Здесь $a = \max_{x_1, x_2} \psi(x_1, x_2, a, \lambda_1, \lambda_2, \chi)$ — амплитуда изображения, параметры λ_1, λ_2 — характеризуют положение изображения в области наблюдения G , а $\chi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(x_1, x_2, a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) dx_1 dx_2 / a^2$ — эквивалентная площадь полезного изображения. Функция $f(x_1, x_2)$ в (2) описывает распределение интенсивности изображения и нормирована так, что

$$\max f(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad (3)$$

Для оценки неизвестных параметров изображения (2) используем алгоритм максимального правдоподобия [5]. В соответствии с этим алгоритмом необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР), как функцию всех неизвестных параметров изображения. Согласно [4] логарифм ФОР можно записать в виде

$$M(a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) = \frac{2a}{N_0} \iint_G \xi(x_1, x_2) f\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi}}\right) dx_1 dx_2 - \frac{a^2 \chi}{N_0} \quad (4)$$

В этом случае оценки максимального правдоподобия (ОМП) $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ неизвестных координат λ_1 и λ_2 определяются из соотношения

$$(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) = \operatorname{argsup} M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \quad (5)$$

где $M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = \sup_a M(\lambda_1, \lambda_2, a, \chi)$. Максимизацию по амплитуде a можно выполнить аналитически. Тогда

$$M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = \sup_a M(a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) = \rho^2(\lambda_1, \lambda_2, \chi) / 2. \quad (6)$$

В (6) функционал

$$\rho(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = \sqrt{\frac{2}{\chi N_0}} \iint_G \xi(x_1, x_2) f\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi}}\right) dx_1 dx_2. \quad (7)$$

Обозначим функционал (7) как

$$\rho_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = \sqrt{\frac{2}{\chi N_0}} \iint_G n(x_1, x_2) f\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi}}\right) dx_1 dx_2 \quad (8)$$

при отсутствии полезного изображения. Функционал (8) представляет собой центрированное гауссовское случайное поле, обладающее корреляционной функцией

$$B_0(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2) = \langle \rho_0(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \chi_1) \rho_0(\lambda_{21}, \lambda_{22}, \chi_2) \rangle =$$

$$= \iint_{\Omega} f\left(\frac{x_1 - \lambda_{11}}{\sqrt{\chi_1}}, \frac{x_2 - \lambda_{12}}{\sqrt{\chi_1}}\right) f\left(\frac{x_1 - \lambda_{21}}{\sqrt{\chi_2}}, \frac{x_2 - \lambda_{22}}{\sqrt{\chi_2}}\right) dx_1 dx_2 / \sqrt{\chi_1 \chi_2}. \quad (9)$$

Обозначим

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = B_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi, \chi_0)$$

и подставим реализацию наблюдаемых данных (1) в (6). После этого выражение (6) можем представить в виде

$$M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = [zS(\lambda_1, \lambda_2, \chi) + \rho_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi)]^2 / 2 = \\ = z^2 S^2(\lambda_1, \lambda_2, \chi) / 2 + zS(\lambda_1, \lambda_2, \chi)\rho_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi) + \rho_0^2(\lambda_1, \lambda_2, \chi) / 2, \quad (10)$$

где отношение сигнал-шум (ОСШ) для наблюдаемого изображения

$$z^2 = 2a_0^2 \chi_0 / N_0. \quad (11)$$

Перепишем логарифм ФОП (10) в форме

$$M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = S_{\Delta}(\lambda_1, \lambda_2, \chi) + N_{\Delta}(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$$

где сигнальная и шумовая функции равны соответственно:

$$S_{\Delta}(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = z^2 S^2(\lambda_1, \lambda_2, \chi) / 2, \quad (12)$$

$$N_{\Delta}(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = zS(\lambda_1, \lambda_2, \chi)\rho_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi) + \rho_0^2(\lambda_1, \lambda_2, \chi) / 2$$

Шумовая функция представляет собой негауссовское случайное поле, для которого

$$\langle N_{\Delta}(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \chi_1) N_{\Delta}(\lambda_{21}, \lambda_{22}, \chi_2) \rangle = S_N(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2) = \\ = z^2 B(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_1, \chi_0) B(\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_2, \chi_0) \times \\ \times B_0(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2) + (1 + 2B_0^2(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2)) / 4. \quad (13)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда оценки координат и площади обладают высокой апостериорной точностью, что имеет место при достаточно большом ОСШ (11). Применяя метод малого параметра, можно записать корреляционную матрицу оценок (5) в виде [5]

$$K_{ik} = K_{ik}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi} | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \frac{1}{\Omega^2} \sum_{v,q=1}^p A_{vi} A_{qk} \left[\frac{\partial^2 S_N(\bar{l}_1, \bar{l}_2)}{\partial l_{1v} \partial l_{2q}} \right]_{\bar{l}_0}. \quad (14)$$

Здесь $p = 3$, Ω — определитель третьего порядка с элементами.

$$\omega_{ik} = - \left[\frac{\partial^2 S_{\Delta}(\vec{l})}{\partial l_i \partial l_k} \right]_{\vec{l}_0}, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (15)$$

вектор $\vec{l} = (\lambda_1, \lambda_2, \chi)$ объединяет неизвестные параметры изображения, а A_{ik} — алгебраические дополнения определителя Ω .

Используя (12) и (13), после дифференцирования для элементов определителя Ω (15) и слагаемых под знаком суммы в формуле (14), получаем при $z^2 \gg 1$

$$\omega_{ik} = - \left[\frac{\partial^2 S_{\Delta}(\vec{l})}{\partial l_i \partial l_k} \right]_{\vec{l}_0} = \left[\frac{\partial^2 S_N(\vec{l})}{\partial l_i \partial l_k} \right]_{\vec{l}_0} = z^2 B_{ik}. \quad (16)$$

Величины $B_{ik} \equiv B_{ik}(\chi_0)$ были найдены в [4] и определяются выражениями

$$\begin{aligned} B_{11}(\chi) &= \frac{\partial^2 B_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2)}{\partial \lambda_{11} \partial \lambda_{12}} = \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right]^2 dx_1 dx_2, \\ B_{12}(\chi) &= B_{21}(\chi) = \frac{\partial^2 B_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2)}{\partial \lambda_{11} \partial \lambda_{22}} = \\ &= \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_1 dx_2, \\ B_{13}(\chi) &= B_{31}(\chi) = \frac{\partial^2 B_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2)}{\partial \lambda_{11} \partial \chi_2} = \\ &= \frac{1}{2\chi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \left(x_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + f(x_1, x_2) \right) dx_1 dx_2, \quad (17) \\ B_{22}(\chi) &= \frac{\partial^2 B_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2)}{\partial \lambda_{21} \partial \lambda_{22}} = \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right]^2 dx_1 dx_2, \\ B_{23}(\chi) &= B_{32}(\chi) = \frac{\partial^2 B_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2)}{\partial \lambda_{21} \partial \chi_2} = \\ &= \frac{1}{2\chi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \left(x_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + f(x_1, x_2) \right) dx_1 dx_2, \\ B_{33}(\chi) &= \frac{\partial^2 B_0(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2)}{\partial \chi_1 \partial \chi_2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\chi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + f(x_1, x_2) \right)^2 dx_1 dx_2.$$

Все производные в (17) вычисляются для значений $\lambda_{11} = \lambda_{12}$, $\lambda_{21} = \lambda_{22}$, $\chi_1 = \chi_2 = \chi$.

Подставляя (16) в (14) для корреляционной матрицы оценок $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$, $\hat{\chi}$ (5) получаем выражение

$$K = \|K_{ij}\| = z^{-2} B^{-1}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (18)$$

В формуле (18) B — матрица с элементами $B_{ik}(\chi_0)$ (17). Обращая матрицу B для характеристик оценок координат имеем

$$D(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \langle (\hat{\lambda}_1 - \lambda_{01})^2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0 \rangle = (B_{22} B_{33} - B_{23}^2) / z^2 \Theta,$$

$$D(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \langle (\hat{\lambda}_2 - \lambda_{02})^2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0 \rangle = (B_{11} B_{33} - B_{13}^2) / z^2 \Theta,$$

$$K(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \frac{\langle (\hat{\lambda}_1 - \lambda_{01})(\hat{\lambda}_2 - \lambda_{02}) | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0 \rangle}{\sqrt{D(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) D(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0)}} =$$

$$= \frac{(B_{21} B_{33} - B_{23} B_{31})}{\sqrt{(B_{22} B_{33} - B_{23}^2)(B_{11} B_{33} - B_{13}^2)}},$$

где $\Theta = B_{11}(B_{22} B_{33} - B_{23}^2) - B_{12}(B_{21} B_{33} - B_{23} B_{31}) + B_{13}(B_{21} B_{32} - B_{22} B_{31})$ — определитель матрицы B .

Рассмотрим оценки координат λ_1 и λ_2 при априори известной площади χ_0 . Эти оценки имеют вид

$$(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \text{argsup} M(\lambda_1, \lambda_2, \chi_0) \quad (19)$$

где функция $M(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$ определяется из (6).

Для того чтобы найти характеристики оценок (19) надо из матрицы B вычеркнуть последнюю строку и последний столбец и обратить полученную матрицу. Тогда получаем характеристики оценки координат при априори известной площади

$$D(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}) = \langle (\hat{\lambda}_1 - \lambda_{01})^2 | \lambda_{01}, \lambda_{02} \rangle = B_{22} / z^2 (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)$$

$$D(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}) = \langle (\hat{\lambda}_2 - \lambda_{02})^2 | \lambda_{01}, \lambda_{02} \rangle = B_{11} / z^2 (B_{11} B_{22} - B_{12}^2) \quad (20)$$

$$K(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}) = \frac{\langle (\hat{\lambda}_1 - \lambda_{01})(\hat{\lambda}_2 - \lambda_{02}) | \lambda_{01}, \lambda_{02} \rangle}{\sqrt{D(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}) D(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02})}} = -B_{12} / \sqrt{B_{11} B_{22}}.$$

Конкретизируем полученные общие формулы для оценки координат изображения, распределение интенсивности которого описывается формулой

$$f(x_1, x_2) = \exp \left[-\pi \frac{(x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi)^2}{2\gamma_1^2} - \pi \frac{(x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi)^2}{2\gamma_2^2} \right]. \quad (21)$$

Если выполняется условие $\gamma_1 \gamma_2 = 1$ то функция (21) удовлетворяет условиям нормировки (3). Сечения функции (21) параллельные плоскости регистрации изображения имеют форму эллипсов, длина осей которых определяется величинами γ_1 и γ_2 , а φ — угол между осью эллипса γ_1 и осью координат x_1 . Подставляя (21) в (17) получаем

$$B_{11}(\chi) = \frac{\pi}{2\chi} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cos^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin^2 \varphi \right), \quad B_{12}(\chi) = B_{21}(\chi) = \frac{\pi}{4\chi} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \sin 2\varphi, \\ B_{22}(\chi) = \frac{\pi}{2\chi} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cos^2 \varphi \right), \quad (22)$$

$$B_{13}(\chi) = B_{23}(\chi) = B_{31}(\chi) = B_{32}(\chi) = 0, \quad B_{33}(\chi) = 1/4\chi^2.$$

Для изображения (21) в случае, когда неизвестны координаты, интенсивность и площадь изображения, дисперсия оценки координаты λ_1 равна

$$D(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \frac{1}{z^2} \frac{2\chi}{\pi} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cos^2 \varphi \right), \quad (23)$$

дисперсия оценки координаты λ_2 запишется в виде

$$D(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \frac{1}{z^2} \frac{2\chi}{\pi} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cos^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin^2 \varphi \right), \quad (24)$$

а коэффициент корреляции между оценками координат

$$K(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \sin 2\varphi / 2 \sqrt{1 + \frac{\sin^2 2\varphi}{2} \left(\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \right)}. \quad (25)$$

Для того чтобы получить характеристики оценок координат λ_1 и λ_2 , когда площадь χ априори известна надо (22) подставить в формулы (20). Получаемые при этом выражения полностью совпадают с формулами (23)–(25). Значит для изображения (21) априорное незнание площади не приводит к ухудшению точности оценки координат. Однако, если площадь изображения неизвестна, для реализации алгоритма необходимо вырабатывать логарифм ФОП (6), как функцию трех переменных λ_1 , λ_2 и χ (5), а это приводит к существенным трудностям при аппаратной и программной реализации алгоритма.

Получить логарифм ФОП как непрерывную функцию $\chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]$ как правило не удается. Поэтому его параллельно формируют с шагом $\Delta\chi$ для дискретных значений $\chi_i = \chi_{\min} + \Delta\chi i$, $i = 1..n$, где $n = \text{int}[(\chi_{\max} - \chi_{\min}) / \Delta\chi]$, $\text{int}[x]$ — целая часть числа. Таким образом, для каждого значения χ_i необходимо формировать логарифм ФОП (4), как функцию координат λ_1 и λ_2 , что представляет собой один канал многоканального приемника. Для того чтобы повысить точность оценки необходимо использовать большое количество каналов n и малый шаг $\Delta\chi$. Чем больше число каналов, тем точнее оценка. Необходимость использования большого числа каналов приводит к существенным трудностям реализации алгоритма оценки.

Поэтому рассмотрим квазиправдоподобную оценку (КПО) координат [5], когда логарифм ФОП вырабатывается как функция λ_1, λ_2 лишь для одного значения χ^* , которое представляет собой предполагаемое или прогнозируемое значение неизвестной истинной площади $\chi^* \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]$. Следовательно, КПО может быть получена в соответствии с алгоритмом

$$(\hat{\lambda}_1^*, \hat{\lambda}_2^*) = \text{argsup} M(\lambda_1, \lambda_2, \chi^*) \quad (26)$$

где $M(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$ определяется формулой (6). Подставляя в $M(\lambda_1, \lambda_2, \chi^*)$ реализацию наблюдаемых данных, логарифм ФОП (26) можно, аналогично (10), представить в виде суммы сигнальной и шумовой функций $M(\lambda_1, \lambda_2, \chi^*) = S^*(\lambda_1, \lambda_2) + N^*(\lambda_1, \lambda_2)$. Здесь сигнальная функция

$$S^*(\lambda_1, \lambda_2) = S_{\Delta}(\lambda_1, \lambda_2, \chi^*) \quad (27)$$

а шумовая функция

$$N^*(\lambda_1, \lambda_2) = N_{\Delta}(\lambda_1, \lambda_2, \chi^*) \quad (28)$$

Соответственно, для шумовой функции (28) можно записать

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_{\Delta}(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \chi^*) \hat{N}_{\Delta}(\lambda_{21}, \lambda_{22}, \chi^*) \rangle &= \hat{S}_N(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \chi^*, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \chi^*) = \\ &= z^2 S^*(\lambda_{11}, \lambda_{12}) S^*(\lambda_{21}, \lambda_{22}) B_0(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \chi^*, \chi^*) + \\ &+ (1 + 2B_0^2(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \chi^*, \chi^*)) / 4, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} S^*(\lambda_1, \lambda_2) &= B_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi^*, \chi_0) = \\ &= \iint_G f\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi^*}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi^*}}\right) f\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi_0}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi_0}}\right) dx_1 dx_2 / \sqrt{\chi^* \chi_0}. \end{aligned}$$

Полагая, что КПО обладает высокой апостериорной точностью, для расчета ее характеристик воспользуемся формулой (14) при $p = 2$. Выполняя дифференцирование функций (27), (29) и подставляя результаты в (14), получим характеристики КПО (26)

$$\begin{aligned} D(\hat{\lambda}_1^* | \lambda_{01}, \lambda_{02}) &= \langle (\hat{\lambda}_1^* - \lambda_{01})^2 | \lambda_{01}, \lambda_{02} \rangle = \\ &= (S_{22}^2 \beta_{11} - 2S_{22}S_{12}\beta_{12} + S_{12}^2 \beta_{22}) (S_{11}S_{22} - S_{12}^2)^{-2}, \\ D(\hat{\lambda}_2^* | \lambda_{01}, \lambda_{02}) &= \\ &= \langle (\hat{\lambda}_2^* - \lambda_{02})^2 | \lambda_{01}, \lambda_{02} \rangle = (S_{12}^2 \beta_{11} - 2S_{12}S_{11}\beta_{12} + S_{11}^2 \beta_{22}) (S_{11}S_{22} - S_{12}^2)^{-2}, \\ K(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}) &= \frac{\langle (\hat{\lambda}_1^* - \lambda_{01})(\hat{\lambda}_2^* - \lambda_{02}) | \lambda_{01}, \lambda_{02} \rangle}{\sqrt{D(\hat{\lambda}_1^* | \lambda_{01}, \lambda_{02})D(\hat{\lambda}_2^* | \lambda_{01}, \lambda_{02})}} = \\ &= (S_{12}^2 \beta_{12} - S_{22}S_{12}\beta_{11} - S_{11}S_{12}\beta_{22} + S_{11}S_{22}\beta_{12}) \times \\ &\times [(S_{22}^2 \beta_{11} - 2S_{22}S_{12}\beta_{12} + S_{12}^2 \beta_{22})(S_{12}^2 \beta_{11} - 2S_{12}S_{11}\beta_{12} + S_{11}^2 \beta_{22})]^{-1/2}. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_{11} &= -z^2 S_m \iint_G \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1^2} f\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi^*}}, \frac{x_2}{\sqrt{\chi^*}}\right) f\left(\frac{x_1}{\sqrt{\chi_0}}, \frac{x_2}{\sqrt{\chi_0}}\right) dx_1 dx_2 / \sqrt{\chi^* \chi_0}, \\ S_{12} &= -z^2 S_m \iint_G \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} f\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi^*}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi^*}}\right) f\left(\frac{x_1}{\sqrt{\chi_0}}, \frac{x_2}{\sqrt{\chi_0}}\right) dx_1 dx_2 / \sqrt{\chi^* \chi_0}, \\ S_{22} &= -z^2 S_m \iint_G \frac{\partial^2}{\partial \lambda_2^2} f\left(\frac{x_1}{\sqrt{\chi^*}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi^*}}\right) f\left(\frac{x_1}{\sqrt{\chi_0}}, \frac{x_2}{\sqrt{\chi_0}}\right) dx_1 dx_2 / \sqrt{\chi^* \chi_0}, \end{aligned}$$

все производные вычисляются при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,

$$S_m = \iint_G f\left(\frac{x_1}{\sqrt{\chi^*}}, \frac{x_2}{\sqrt{\chi^*}}\right) f\left(\frac{x_1}{\sqrt{\chi_0}}, \frac{x_2}{\sqrt{\chi_0}}\right) dx_1 dx_2 / \sqrt{\chi^* \chi_0},$$

$$\beta_{11} = z^2 S_m^2 B_{11}(\chi^*), \quad \beta_{12} = z^2 S_m^2 B_{12}(\chi^*), \quad \beta_{22} = z^2 S_m^2 B_{22}(\chi^*),$$

а $B_{ij}(\chi)$ определяются из (17).

Рассмотрим в качестве примера КПО координат изображения, интенсивность которого описывается формулой (21). Тогда получаем для дисперсий КПО координат

$$D(\hat{\lambda}_1^* | \lambda_{01}, \lambda_{02}) = \frac{\chi_0}{8\pi z^2} \frac{(1+\nu)^4}{\nu^2} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cos^2 \varphi \right), \quad (30)$$

$$D(\hat{\lambda}_2^* | \lambda_{01}, \lambda_{02}) = \frac{\chi_0}{8\pi z^2} \frac{(1+\nu)^4}{\nu^2} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cos^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin^2 \varphi \right),$$

где $\nu = \chi^* / \chi_0$.

Сопоставляя формулы (30) с формулами (23), (24) можем определить потери в точности КПО координат по сравнению с точностью ОМП. Для этого введем отношение

$$\mu = \frac{D(\hat{\lambda}_1^* | \lambda_{01}, \lambda_{02})}{D(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0)} = \frac{D(\hat{\lambda}_2^* | \lambda_{01}, \lambda_{02})}{D(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0)} = (1+\nu)^4 / 16\nu^2,$$

которое характеризует проигрыш в точности КПО по сравнению с точностью ОМП. Нетрудно убедиться, что величина μ возрастает по мере отклонения ν от 1. В частности $\mu \rightarrow \infty$ при $\nu \rightarrow 0$ или при $\nu \rightarrow \infty$.

Очевидно, величина ν может иметь максимальное значение $\nu = \chi_{\max} / \chi_{\min} = \kappa$, где κ — динамический диапазон изменения неизвестной площади, а минимальное значение $\nu = 1/\kappa$. Следовательно, если динамический диапазон изменения неизвестной площади равен κ , то максимальное значение проигрыша в точности КПО координат будет равно $\mu_{\max} = (1+\kappa)^4 / 16\kappa^2$. Зависимость $\mu_{\max}(\kappa)$ показана на рис. 1 кривой 1.

Из рис. 1 видно, что величина $\mu_{\max}$ может достигать больших значений. Следовательно, незнание площади может привести к существенному проигрышу в точности КПО координат изображения.

Точность ОМП и КПО можно также характеризовать величиной дисперсии, средней по всем возможным истинным значениям площади. Предположим, что площадь χ_0 — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$. Тогда средние значения дисперсий КПО имеют вид

$$D_1^* = \frac{1}{\chi_{\max} - \chi_{\min}} \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} D(\hat{\lambda}_1^* | \lambda_{01}, \lambda_{02}) d\chi_0,$$

$$D_2^* = \frac{1}{\chi_{\max} - \chi_{\min}} \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} D(\hat{\lambda}_2^* | \lambda_{01}, \lambda_{02}) d\chi_0. \quad (31)$$

Соответственно, средние значения дисперсий ОМП запишутся в виде

$$D_1 = \frac{1}{\chi_{\max} - \chi_{\min}} \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} D(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) d\chi_0,$$

$$D_2 = \frac{1}{\chi_{\max} - \chi_{\min}} \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} D(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) d\chi_0. \quad (32)$$

При вычислении (31), (32) необходимо учесть, что ОСШ z^2 (11) пропорционально площади изображения χ_0 . Подставляя (11) в (23), (24) для дисперсий ОМП координат находим

$$D(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \frac{N_0}{\pi a^2} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cos^2 \varphi \right), \quad (33)$$

$$D(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \frac{N_0}{\pi a^2} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cos^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin^2 \varphi \right). \quad (34)$$

Соответственно, при подстановке (11) в (30) для дисперсий КПО координат получаем

$$D(\hat{\lambda}_1^* | \lambda_{01}, \lambda_{02}) = \frac{N_0}{16\pi a^2} \frac{(\chi_0 + \chi^*)^4}{\chi_0^2 (\chi_2^*)^2} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cos^2 \varphi \right), \quad (35)$$

$$D(\hat{\lambda}_2^* | \lambda_{01}, \lambda_{02}) = \frac{N_0}{16\pi a^2} \frac{(\chi_0 + \chi^*)^4}{\chi_0^2 (\chi_2^*)^2} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cos^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin^2 \varphi \right). \quad (36)$$

Согласно (33) и (34) дисперсии ОМП координат не зависят от истинного значения χ_0 неизвестной площади изображения, распределение интенсивности которого описывается формулой (21). Поэтому в (32)

$$D_1 = D(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) \quad D_2 = D(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) \quad (37)$$

Проигрыш в точности КПО по сравнению с ОМП в величине средней дисперсии оценки будем характеризовать отношением

$$\rho = D_1^* / D_1 = D_2^* / D_2. \quad (38)$$

Подставляя в (31) значения дисперсии КПО из (35) и (36), затем (31) и (37) в (38) имеем

$$\rho = \int_1^{\kappa} [(\alpha + x)^4 / x^2 dx] / 16\alpha^2 (\kappa - 1), \quad (39)$$

где $\alpha = \chi^* / \chi_{\min}$, $1 \leq \alpha \leq \kappa$.

Выполняя интегрирование в (39) получаем

$$\rho = \frac{1}{16\alpha^2(\kappa-1)} \times \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\kappa^4 + 6\alpha\kappa^3 + 18\alpha^2\kappa^2 + 12\alpha^3 \ln(\kappa)\kappa - 3\alpha^4}{\kappa} - 1 \right) - \alpha(2 - \alpha^3 + 6\alpha) \right). \quad (40)$$

Зависимости ρ (40) от динамического диапазона изменения неизвестной площади κ приведены на рис. 1. Кривая 2 рассчитана для случая когда $\alpha = 1$, что соответствует $\chi^* = \chi_{\min}$, т.е. приемник оптимален для изображения, площадь которого принимает минимальное значение. Кривая 3 рассчитана для $\alpha = \kappa$, что соответствует $\chi^* = \chi_{\max}$, т.е. приемник оптимален для изображения, площадь которого принимает максимальное значение. Кривая 4 — для случая $\alpha = (\kappa + 1)/2$, т.е. приемник оптимален для изображения, площадь которого принимает среднее значение из интервала $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$. Видим, что выбором величины α можно существенно уменьшить средний проигрыш в точности оценки координат. При выборе $\alpha_{\text{опт}} = \arg \min \rho(\alpha)$ этот проигрыш минимален. Следовательно, с целью повышения точности КПО координат целесообразно выбирать $\chi^* = \chi_{\min} \alpha_{\text{опт}}$.

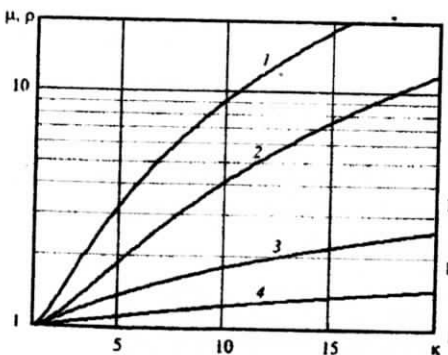


Рис. 1

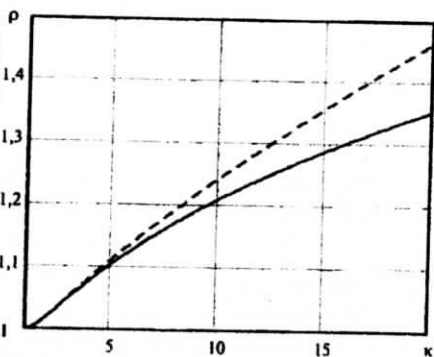


Рис. 2

На рис. 2 сплошной линией приведена зависимость $\rho_{\min} = \rho(\kappa)_{\alpha=\alpha_{\text{опт}}}$, как функция динамического диапазона изменения площади κ . Для сравнения штриховой линией показана зависимость среднего проигрыша от κ , для значения $\alpha = (1 + \kappa)/2$, которое соответствует кривой 4, обеспечивающей

минимальный проигрыш на рис. 1. Видим, что выбор $\alpha_{\text{опт}}$ в отличие от значения $\alpha = (1 + \kappa) / 2$ позволяет несколько снизить проигрыш в точности оценки. Так при $\kappa = 20$ можно снизить проигрыш на 8%.

Полученные результаты позволяют сделать обоснованный выбор между ОМП и КПО в зависимости от требований предъявляемых к точности оценки координат и к степени простоты реализации алгоритма оценки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Красильников Н. Н. Теория передачи и восприятия изображений / Н. Н. Красильников — М.: Радио и связь, 1986. — 248 с.
2. Трифонов А. П. Характеристики обнаружения и оценки положения источника сигнала, модулирующего пуассоновское случайное поле / А. П. Трифонов, А. В. Зюльков // Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 1981. — № 12. — С.32—38.
3. Трифонов А. П. Характеристики оптимальных оценок параметров оптических сигналов на фоне пространственных помех / А. П. Трифонов, А. В. Зюльков, В. К. Маршаков // Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 1981. — № 1. — С.14—21.
4. Трифонов А. П. Эффективность обнаружения изображения с неизвестными координатами и площадью / А. П. Трифонов, А. В. Кудасев // Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 2008. — № 2. — С.3—14.
5. Куликов Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов — М.: Сов. Радио, 1978. — 296 с.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 26.06.08

УДК 621.382.029

ЛУКИН К. А., МАКСИМОВ П. П.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАВИННО-КАСКАДНОГО УМНОЖЕНИЯ ПЕРВИЧНЫХ ФОТОЭЛЕКТРОНОВ В ОБРАТНО СМЕЩЕННОЙ $pn-i-pn$ СТРУКТУРЕ

Выполнено моделирование лавинно-каскадного умножения первичных фотоэлектронов в обратно смещенной $pn-i-pn$ структуре с положительной обратной связью по дрейфовому току между $p-n$ переходами. В качестве объекта исследований рассматривается система уравнений диффузионно-дрейфовой модели (ЛДМ) обратно смещенных $p-n$ переходов с ударной ионизацией. Рассчитаны основные характеристики фотоумножителя на основе $pn-i-pn$ структур — коэффициент усиления, быстродействие и шум лавинного умножения, и проведено их сравнение с характеристиками лавинного фотодиода (ЛФД).

Одними из широко применяемых в настоящее время фотодетекторов с внутренним усилением являются ЛФД. Они используются, например, для регистрации и измерения в различных системах обработки оптической информации, в волоконно-оптической системе связи для преобразования оптического