(278)

(277)

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

2009, N 7

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

PACS 42.30.Tz

© 2009 г. **Р.В. КУЦОВ, канд. физ.-мат. наук,**
А.П. ТРИФОНОВ, д-р техн. наук
(Воронежский государственный университет)

ОБНАРУЖЕНИЕ И ОЦЕНКА ВЕКТОРА СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВЕННО-ПРОТЯЖЕННОГО ОБЪЕКТА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ. I[1]

Рассмотрены максимально правдоподобные алгоритмы обнаружения и оценки вектора скорости движения изображения неоднородного пространственно-протяженного объекта для аппликативной модели взаимодействия полезного изображения и фона. С использованием метода локально-аддитивной аппроксимации логарифма функционала отношения правдоподобия получены асимптотические выражения для характеристик синтезированных алгоритмов.

1. Введение

Актуальной проблемой при решении задач автоматического контроля и управления является разработка систем обнаружения и оценки параметров движения источников вторичного излучения [1]. Одним из перспективных путей в разработке таких систем является направление, использующее технологии "машинного зрения", которые находят применение в системах локации и навигации, в системах контроля состояния охраняемых зон, природных объектов, окружающей среды, объектов вторжения [2], а также в системах медицинской и технической диагностики [3]. В частности, в процессе обработки результатов дистанционного наблюдения возникает необходимость в обнаружении и измерении скорости движения объектов по их изображениям с учетом затенения фона.

Вопросы обнаружения пространственно-протяженных объектов рассматриваются в [4–8] и др. работах. В [4, 5] показано, что использование аддитивной модели взаимодействия пространственно-протяженного объекта и фона может приводить к недостоверным результатам. В [6, 7] исследованы потенциальные возможности обнаружения пространственно-протяженного объекта, движущегося с известной скоростью, а в [8] рассмотрены алгоритмы обнаружения однородного объекта, движущегося в известном направлении с априори неизвестной скоростью. Однако часто возникают ситуации, когда наблюдателю неизвестны как величина скорости, так и направление движения объекта.

В [9] рассмотрен эвристический метод измерения координат и скорости движения объекта по изменениям положения и размеров его оптического изображения. Предложенные в [10] алгоритмы оценки скорости движения объектов по их изображениям работоспособны лишь при слабых случайных искажениях, тогда как функционирование автоматизированных систем в реальных условиях сопровождается помехами, имеющими случайный характер и различную физическую природу. Для алгоритмов, предложенных в [9, 10], остается открытым вопрос об их оптимальности, и не удается выполнить теоретический анализ эффективности их функционирования. Кроме того, высокая разрешающая способность современных систем дистанционного наблюдения позволяет не только выделить объект по перепаду интенсивности на

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00042).

границе объект-фон, но и различать неоднородности распределения интенсивности изображения объекта. В связи с этим необходимо найти структуру и характеристики алгоритмов обнаружения и оценки вектора скорости движения неоднородного пространственно-протяженного объекта при наличии помех, наиболее распространенной моделью которых является аддитивный гауссовский белый шум.

Цель работы – синтез и анализ максимально-правдоподобных алгоритмов обнаружения и оценки вектора скорости движения неоднородного пространственно-протяженного объекта по его квазидетерминированному (известному с точностью до оцениваемых параметров) изображению при наличии детерминированного фона.

Пусть в двумерной области Ω в течение интервала времени $[0, T]$ доступна наблюдению реализация гауссовского случайного поля $\Xi(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r} = (x, y)$ – радиус-вектор точки на плоскости, принадлежащей Ω, а t – время. Положим [6–8], что при гипотезе H_1 поле $\Xi(\mathbf{r}, t)$ содержит изображение $s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t)$ движущегося из заданного положения со скоростью $\mathbf{V}_0$ объекта, неподвижный фон $v(\mathbf{r})$ и аддитивный гауссовский пространственно-временной белый шум $n(\mathbf{r}, t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $\langle n(\mathbf{r}_1, t_1) n(\mathbf{r}_2, t_2)\rangle = N_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(t_1 - t_2)/2$, где N_0 – односторонняя спектральная плотность белого шума. Будем считать, что функция $s(x, y)$, описывающая интенсивность изображения объекта, непрерывна и непрерывно дифференцируема. При гипотезе H_0 поле $\Xi(\mathbf{r}, t)$ содержит фон $v(\mathbf{r})$ и аддитивный шум $n(\mathbf{r}, t)$.

В соответствии с аппликативной моделью [4–8], учитывающей эффекты затенения объектом участка фона, полагаем, что изображение объекта занимает часть Ω_s области Ω, а фон – оставшуюся часть области наблюдения. При отсутствии объекта фон занимает всю область наблюдения. Будем считать, что разрешающая способность системы наблюдения достаточно высока, так что размеры неоднородностей объекта и фона велики по сравнению с размерами элемента разрешения, в результате чего оказывается существенной зависимость интенсивности изображения объекта от пространственных координат. Тогда в течение интервала времени $[0, T]$ наблюдению доступна реализация изображения

$$\Xi(\mathbf{r}, t) = \gamma_0 s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t) + [1 - \gamma_0 I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_o t)] v(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}, t), \tag{1}$$

где $\gamma_0 = 1$, когда справедлива гипотеза H_1, иначе $\gamma_0 = 0$, а $I_s(\mathbf{r}) = 1$, если $\mathbf{r} \in \Omega_s$, и $I_s(\mathbf{r}) = 0$ при $\mathbf{r} \notin \Omega_s$ – индикаторная функция, описывающая форму изображения объекта.

Положим, что объект движется из заданного положения с априори неизвестным вектором скорости $\mathbf{V}_0 = V_{0x}\mathbf{i}_x + V_{0y}\mathbf{i}_y$, где $\mathbf{i}_x$ и $\mathbf{i}_y$ – орты осей X и Y прямоугольной системы координат, а V_{0x} и V_{0y} – компоненты вектора $\mathbf{V}_0$, которые представляют собой проекции этого вектора на оси X и Y.

На основе наблюдаемых данных необходимо вынести решение о наличии или отсутствии изображения объекта в области наблюдения, а также оценить вектор скорости движения изображения объекта при его наличии.

2. Алгоритмы обнаружения неоднородного объекта и оценки вектора скорости его движения

Для решения задачи проверки гипотезы H_1 против альтернативы H_0 необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия [7]

$$L(V_x, V_y) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \int_\Omega \{\Xi(\mathbf{r}, t) [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) - v(\mathbf{r})] - \tag{2}$$
$$- \left[s^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) - v^2(\mathbf{r})\right]/2\} I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)\, d\mathbf{r} dt,$$

где V_x и V_y – компоненты вектора $\mathbf{V} = V_x \mathbf{i}_x + V_y \mathbf{i}_y$.

Если скорость движения объекта априори известна, то решение о наличии или отсутствии изображения объекта в области наблюдения выносится путем сравнения величины $L = L(V_{0x}, V_{0y})$ с порогом h, определяемым выбранным критерием оптимальности [11–13], в соответствии с правилом

$$L \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} h.$$

Положим теперь, что объект движется из заданного положения с априори неизвестным вектором скорости $\mathbf{V}_0$, компоненты которого принимают значения из априорных интервалов $W_x = [-V_{x\max}/2; V_{x\max}/2]$, $W_y = [-V_{y\max}/2; V_{y\max}/2]$. Обозначим через W двумерную область, в пределах которой $V_{0x} \in W_x$, $V_{0y} \in W_y$. Для исключения влияния неизвестных компонент вектора скорости заменим в (2) их значения на оценки максимального правдоподобия $\widehat{V}_x$, $\widehat{V}_y$ [12, 13]. Алгоритм максимально правдоподобного обнаружения изображения движущегося с неизвестным вектором скорости объекта формирует величину

$$\widehat{L} = L\left(\widehat{V}_x, \widehat{V}_y\right) = \sup_{(V_x, V_y)\in W} L(V_x, V_y)$$

и принимает решение, сравнивая абсолютный (наибольший) максимум логарифма функционала отношения правдоподобия $\widehat{L}$ с порогом h, определяемым выбранным критерием оптимальности, в соответствии с правилом

$$\widehat{L} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} h. \tag{3}$$

Рассмотрим алгоритм оценки вектора скорости движения изображения объекта, полагая, что его изображение присутствует в наблюдаемой реализации, т.е. в (1) $\gamma_0 = 1$. Оценка максимального правдоподобия компонент вектора скорости определяется как положение абсолютного максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (2) [14]. Логарифм функционала отношения правдоподобия (2) является функцией двух переменных V_x и V_y, поэтому вначале производится совместная оценка компонент вектора скорости в соответствии с правилом

$$\left(\widehat{V}_x, \widehat{V}_y\right) = \arg \sup_{(V_x, V_y)\in W} L(V_x, V_y), \tag{4}$$

на основе которой формируется оценка вектора скорости

$$\widehat{\mathbf{V}} = \widehat{V}_x \mathbf{i}_x + \widehat{V}_y \mathbf{i}_y. \tag{5}$$

3. Некоторые свойства логарифма функционала отношения правдоподобия

Подставляя в (2) явный вид реализации наблюдаемых данных (1), представим логарифм функционала отношения правдоподобия в виде суммы сигнальной и шумовой функций [14]:

$$\begin{aligned} L(V_x, V_y) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \!\! \int_\Omega \{[\gamma_0 [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t) - v(\mathbf{r})] I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t) + v(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}, t)] \times \\ \times [s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) - v(\mathbf{r})] - \left[s^2(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) - v^2(\mathbf{r})\right]/2\} I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)\, d\mathbf{r} dt = \\ = \gamma_0 \widehat{S}(V_x, V_{0x}; V_y, V_{0y}) + \widehat{N}(V_x, V_y) - \widehat{S}(V_x, V_x; V_y, V_y)/2, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$(7) \qquad \widehat{S}\left(V_x, V_{0x}; V_y, V_{0y}\right) = \frac{2}{N_0} \int\limits_0^T \iint\limits_{\Omega} \left[s\left(x - V_x t, y - V_y t\right) - v\left(x, y\right)\right] \times$$
$$\times \left[s\left(x - V_{0x} t, y - V_{0y} t\right) - v\left(x, y\right)\right] I_s\left(x - V_x t, y - V_y t\right) \times$$
$$\times I_s\left(x - V_{0x} t, y - V_{0y} t\right) dxdydt$$

– сигнальная, а $\widehat{N}\left(V_x, V_y\right)$ – шумовая функции, зависящие от неизвестных компонент вектора скорости. Функция $\widehat{N}\left(V_x, V_y\right)$ представляет собой реализацию гауссовского случайного поля с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$(8) \qquad \left\langle \widehat{N}\left(V_{1x}, V_{1y}\right) \widehat{N}\left(V_{2x}, V_{2y}\right) \right\rangle = \widehat{S}\left(V_{1x}, V_{2x}; V_{1y}, V_{2y}\right).$$

Логарифм функционала отношения правдоподобия (6) является гауссовским случайным полем, поэтому его свойства полностью определяются математическим ожиданием и корреляционной функцией. Согласно (6), (8) сигнальная функция (7) определяет математическое ожидание и корреляционную функцию логарифма функционала отношения правдоподобия, а значит, все его свойства. При этом характеристики обнаружения и оценки зависят от поведения сигнальной функции в окрестности ее максимума [12–14]. Для определения характеристик алгоритмов обработки исследуем свойства сигнальной функции $\widehat{S}\left(V_x, V_{0x}; V_y, V_{0y}\right)$ (7) в малой окрестности точки $\left(V_{0x}, V_{0y}\right)$ при наличии однородного (постоянного) фона $v\left(x, y\right) = v_0$. Будем полагать, что функция $s\left(x, y\right)$, описывающая интенсивность изображения объекта, непрерывна и непрерывно дифференцируема.

Рассмотрим случай обнаружения изображения прямоугольного объекта со сторонами l_x и l_y, расположенными вдоль координатных осей X и Y соответственно, так что $I_s\left(x, y\right) = 1$ при $\left(x, y\right) \in \left\{\left[-l_x/2, l_x/2\right], \left[-l_y/2, l_y/2\right]\right\}$ и $I_s\left(x, y\right) = 0$ в противном случае. При наличии однородного фона сигнальную функцию $\widehat{S}\left(V_x, V_{0x}; V_y, V_{0y}\right)$ (7) можно переписать в виде

$$(9) \qquad \widehat{S}\left(V_x, V_{0x}; V_y, V_{0y}\right) = \widehat{S}\left(\Delta V_x, \Delta V_y\right) =$$
$$= \frac{2}{N_0} \int\limits_0^T \int\limits_{\max\left(-\frac{l_y}{2}, -\frac{l_y}{2} + \Delta V_y t\right)}^{\min\left(\frac{l_y}{2}, \frac{l_y}{2} + \Delta V_y t\right)} \int\limits_{\max\left(-\frac{l_x}{2}, -\frac{l_x}{2} + \Delta V_x t\right)}^{\min\left(\frac{l_x}{2}, \frac{l_x}{2} + \Delta V_x t\right)} \left[s\left(x, y\right) - v_0\right] \times$$
$$\times \left[s\left(x - \Delta V_x t, y - \Delta V_y t\right) - v_0\right] dxdydt,$$

где $\Delta V_x = V_x - V_{0x}$, $\Delta V_y = V_y - V_{0y}$. В (9) предполагается, что $|\Delta V_x| T \leq l_x$, $|\Delta V_y| T \leq l_y$.

Утверждение 1. *При $\Delta_m = \max\left(\left|\Delta V_x\right|, \left|\Delta V_y\right|\right) \to 0$ для сигнальной функции (9) справедливо асимптотическое разложение*

$$(10) \qquad \widehat{S}\left(V_x, V_{0x}; V_y, V_{0y}\right) = z_H^2 \left[1 - \delta_{xH} \left|V_x - V_{0x}\right| - \delta_{yH} \left|V_y - V_{0y}\right| + o\left(\Delta_m\right)\right],$$

где

$$(11) \qquad z_H^2 = \widehat{S}\left(0, 0\right) = \frac{2T}{N_0} \int\limits_{-l_y/2}^{l_y/2} \int\limits_{-l_x/2}^{l_x/2} \left[s\left(x, y\right) - v_0\right]^2 dxdy$$

– *отношение сигнал/шум на выходе приемника максимального правдоподобия,*

$$(12)\qquad \delta_{xH} = \frac{T\int\limits_{-l_y/2}^{l_y/2}\left\{\left[s\left(-\frac{l_x}{2},y\right)-v_0\right]^2+\left[s\left(\frac{l_x}{2},y\right)-v_0\right]^2\right\}dy}{4\int\limits_{-l_y/2}^{l_y/2}\int\limits_{-l_x/2}^{l_x/2}\left[s\left(x,y\right)-v_0\right]^2dxdy},$$

$$(13)\qquad \delta_{yH} = \frac{T\int\limits_{-l_x/2}^{l_x/2}\left\{\left[s\left(x,-\frac{l_y}{2}\right)-v_0\right]^2+\left[s\left(x,\frac{l_y}{2}\right)-v_0\right]^2\right\}dx}{4\int\limits_{-l_y/2}^{l_y/2}\int\limits_{-l_x/2}^{l_x/2}\left[s\left(x,y\right)-v_0\right]^2dxdy}.$$

Обоснования утверждения 1 и последующих утверждений 2–4 приведены в Приложении.

Если изображение объекта является однородным с интенсивностью $s\left(x,y\right)=s_0$, то из (11) получаем, что отношение сигнал/шум для однородного объекта определяется выражением

$$(14)\qquad z^2 = 2Tl_xl_y\left(s_0-v_0\right)^2/N_0,$$

а из (12), (13) находим значения коэффициентов разложения (10) для однородного объекта:

$$(15)\qquad \delta_x = T/2l_x,\quad \delta_y = T/2l_y.$$

Сравним значения отношений сигнал/шум на выходе приемника максимального правдоподобия для неоднородного и однородного изображений, имеющих одинаковые форму и энергию

$$(16)\qquad E_s = T\iint\limits_{\Omega_s} s^2\left(x,y\right)dxdy = Ts_0^2l_xl_y,$$

где s_0 – интенсивность однородного изображения с энергией E_s.

Утверждение 2. *При одинаковых форме и энергии изображений однородного и неоднородного объектов, отношение сигнал/шум для неоднородного объекта не меньше, чем для однородного при любом распределении интенсивности* $s\left(x,y\right)$, *удовлетворяющем условию* (16), *т.е.* $z_H^2 \geq z^2$.

Учитывая, что отношение сигнал/шум z_H^2 (11) не зависит от скорости, вместо $L\left(V_x,V_y\right)$ (6) введем нормированный член логарифма функционала отношения правдоподобия, зависящий от скорости:

$$(17)\qquad L_z\left(V_x,V_y\right) = L\left(V_x,V_y\right)/z_H + z_H/2 = \gamma_0 z_H S\left(V_x,V_{0x};V_y,V_{0y}\right) + N\left(V_x,V_y\right),$$

где

$$(18)\qquad S\left(V_x,V_{0x};V_y,V_{0y}\right) = S\left(V_x-V_{0x},V_y-V_{0y}\right) = \widehat{S}\left(V_x,V_{0x};V_y,V_{0y}\right)/z_H^2$$

– нормированная сигнальная функция,

$$(19)\qquad N\left(V_x,V_y\right) = \widehat{N}\left(V_x,V_y\right)/z_H$$

– нормированная шумовая функция. Правила обнаружения (3) и оценки (4) можно переписать в виде

$$\widehat{L}_z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} u_H,$$

$$\left(\widehat{V}_x, \widehat{V}_y\right) = \arg \sup_{(V_x,V_y)\in W} L_z\left(V_x, V_y\right),$$

где $\widehat{L}_z = \sup L_z\left(V_x, V_y\right)$, $\left(V_x, V_y\right) \in W$, а $u_H = h/z_H + z_H/2$ – нормированный порог.

Согласно (10) нормированная сигнальная функция (18) допускает в окрестности точки истинного значения вектора скорости асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} S\left(V_x, V_{0x}; V_y, V_{0y}\right) &= S\left(V_x - V_{0x}; V_y - V_{0y}\right) = \\ &= 1 - \delta_{xH}\left|V_x - V_{0x}\right| - \delta_{yH}\left|V_y - V_{0y}\right| + o\left(\Delta_m\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Найдем функции распределения абсолютного (наибольшего) максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (17) при отсутствии и наличии изображения объекта в реализации наблюдаемых данных.

Полагая в (17) $\gamma_0 = 0$, получаем, что при отсутствии объекта в области наблюдения функция распределения абсолютного максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (17) совпадает с функцией распределения абсолютного максимума реализации однородного центрированного гауссовского случайного поля $N\left(V_x, V_y\right)$ (19):

$$F_0\left(u_H\right) = P\left[L_z\left(\widehat{V}_x, \widehat{V}_y\right) < u_H \mid \gamma_0 = 0\right] = P\left[N\left(\widehat{V}_x, \widehat{V}_y\right) < u_H\right]. \tag{21}$$

Здесь $\left(\widehat{V}_x, \widehat{V}_y\right)$ – положение абсолютного максимума (17) при $\left(V_x, V_y\right) \in W$ и отсутствии изображения объекта ($\gamma_0 = 0$) в области наблюдения.

Определим размеры элемента разрешения по компонентам вектора скорости V_x и V_y как полуширину соответствующего сечения сигнальной функции при замене ее аппроксимацией (20): $\Delta_{xH} = 1/\delta_{xH}$, $\Delta_{yH} = 1/\delta_{yH}$. Тогда число разрешимых значений компонент скорости в априорной области W_x равно $m_{xH} = V_{x\max}/\Delta_{xH}$, а в априорной области W_y – $m_{yH} = V_{y\max}/\Delta_{yH}$. Параметр

$$m_H = m_{xH} m_{yH}, \tag{22}$$

определяющий приведенную площадь априорной области возможных значений компонент вектора скорости [12], равен числу независимых отсчетов поля (17) в области W.

Используя разработанный в [15] метод локально-аддитивной аппроксимации, получим асимптотически точное (с ростом порога u_H) выражение для функции распределения (21). Будем считать порог u_H достаточно большим, так что вероятность $F_0\left(u_H\right)$ непревышения этого порога реализацией однородного гауссовского случайного поля $N\left(V_x, V_y\right)$ (19) определяется только локальными свойствами его корреляционной функции [12, 13].

Согласно (20), при $\Delta_N = \max\left(\left|V_{1x} - V_{2x}\right|, \left|V_{1y} - V_{2y}\right|\right) \to 0$ корреляционная функция $S\left(V_{1x} - V_{2x}, V_{1y} - V_{2y}\right)$ (18) поля (19) допускает асимптотическое представление

$$S\left(V_{1x} - V_{2x}, V_{1y} - V_{2y}\right) = \frac{1}{2} B_x\left(V_{1x} - V_{2x}\right) + \frac{1}{2} B_y\left(V_{1y} - V_{2y}\right) + o\left(\left|\Delta_N\right|\right), \tag{23}$$

где

$$B_x\left(V_{1x}-V_{2x}\right)=\begin{cases}1-2\delta_{xH}\left|V_{1x}-V_{2x}\right|,\left|V_{1x}-V_{2x}\right|<\Delta_{xH}/2,\\ 0,\left|V_{1x}-V_{2x}\right|\geq\Delta_{xH}/2,\end{cases}\tag{24}$$

$$B_y\left(V_{1y}-V_{2y}\right)=\begin{cases}1-2\delta_{yH}\left|V_{1y}-V_{2y}\right|,\left|V_{1y}-V_{2y}\right|<\Delta_{yH}/2,\\ 0,\left|V_{1y}-V_{2y}\right|\geq\Delta_{yH}/2.\end{cases}\tag{25}$$

Утверждение 3. *При больших значениях u_H для функции распределения $F_0\left(u_H\right)$ (21) справедливо асимптотическое выражение*

$$\begin{aligned}F_0\left(u_H\right)&=\\ &=\exp\left[-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(m_{yH}\exp(-1/2)+m_{xH}\left(u_H\sqrt{2}-1\right)\exp\left(-\left(u_H-1/\sqrt{2}\right)^2\right)\right)\right]+\\ &+\sqrt{\frac{2}{\pi}}m_{yH}\int\limits_1^{u_H\sqrt{2}-1}\left(x^2-1\right)\exp\left\{-\frac{x^2}{2}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[m_{yH}x\exp\left(-x^2/2\right)+\right.\right.\\ &\left.\left.+\;m_{xH}\left(u_H\sqrt{2}-x\right)\exp\left(-\left(u_H\sqrt{2}-x\right)^2/2\right)\right]\right\}dx\end{aligned}\tag{26}$$

при $u_H>\sqrt{2}$ и $F_0\left(u_H\right)=0$ при $u_H\leq\sqrt{2}$, точность которого возрастает с увеличением m_{xH}, m_{yH} и u_H. При умеренных значениях m_{xH}, m_{yH} и больших u_H справедливо приближенное выражение

$$F_0\left(u_H\right)\approx 1-m_Hu_H\left(u_H^2-3\right)\exp\left(-u_H^2/2\right)/\sqrt{2\pi}.\tag{27}$$

Найдем функцию распределения $F_S\left(u_H\right)$ абсолютного максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (17) в малой окрестности точки истинного значения скорости $\left(V_{0x},V_{0y}\right)$ при наличии объекта в области наблюдения ($\gamma_0=1$). Для определения функции распределения $F_S\left(u_H\right)$ достаточно исследовать поведение сигнальной и шумовой функций в малой окрестности точки $\left(V_{0x},V_{0y}\right)$. При $\Delta=\max\left(\left|V_x-V_{0x}\right|,\left|V_y-V_{0y}\right|,\left|V_{1x}-V_{2x}\right|,\left|V_{1y}-V_{2y}\right|\right)\to 0$ математическое ожидание и корреляционная функция поля (17) допускают асимптотические представления

$$\begin{aligned}\left\langle L_z\left(V_x,V_y\right)\right\rangle&=z_HS\left(V_x-V_{0x},V_y-V_{0y}\right)=\\ &=\frac{z_H}{2}B_x\left(V_x-V_{0x}\right)+\frac{z_H}{2}B_y\left(V_y-V_{0y}\right)+o\left(|\Delta|\right),\end{aligned}\tag{28}$$

$$S\left(V_{1x}-V_{2x},V_{1y}-V_{2y}\right)=\frac{1}{2}B_x\left(V_{1x}-V_{2x}\right)+\frac{1}{2}B_y\left(V_{1y}-V_{2y}\right)+o\left(|\Delta|\right),\tag{29}$$

где $B_x\left(\cdot\right)$ и $B_y\left(\cdot\right)$ определяются выражениями (24) и (25) соответственно.

Утверждение 4. *При больших значениях отношения сигнал/шум z_H для функции распределения $F_S\left(u_H\right)$ справедливо асимптотическое выражение*

$$F_S\left(u_H\right)\approx\int\limits_{-\infty}^{\infty}F\left(u_H\sqrt{2}-x\right)w\left(x\right)dx,\tag{30}$$

где

$$F(x) = \Phi\left(x - z_H/\sqrt{2}\right) - 2\exp\left(3z_H^2/4 - xz_H/\sqrt{2}\right)\Phi\left(x - \sqrt{2}z_H\right) + \\ + \exp\left(2z_H^2 - \sqrt{2}xz_H\right)\Phi\left(x - 3z_H/\sqrt{2}\right), \tag{31}$$

$$w(x) = z_H\sqrt{2}\left[\exp\left(3z_H^2/4 - xz_H/\sqrt{2}\right)\Phi\left(x - \sqrt{2}z_H\right) - \right. \\ \left. - \exp\left(2z_H^2 - \sqrt{2}xz_H\right)\Phi\left(x - 3z_H/\sqrt{2}\right)\right], \tag{32}$$

а

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-g^2/2\right) dg/\sqrt{2\pi} \tag{33}$$

– интеграл вероятности. Точность формулы (30) *повышается с увеличением отношения сигнал/шум* z_H.

4. Заключение

При одинаковых форме и энергии изображений однородного и неоднородного объектов отношение сигнал/шум для неоднородного объекта не меньше, чем для однородного.

Показано, что логарифм функционала отношения правдоподобия представляет собой двумерное гауссовское случайное поле. Найдены локальные характеристики этого поля и получены асимптотические выражения для функции распределения наибольшего максимума логарифма функционала отношения правдоподобия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обоснование утверждения 1. Согласно (9) сигнальная функция непрерывно дифференцируема в окрестности точки истинного значения вектора скорости (V_{0x}, V_{0y}), за исключением самой точки, где производная терпит разрыв непрерывности первого рода. Поэтому при $\Delta_m = \max(|\Delta V_x|, |\Delta V_y|) \to 0$ разложение для функции (9) будет иметь вид:

$$\widehat{S}(\Delta V_x, \Delta V_y) = \\ = \widehat{S}(0,0) + \Delta V_x \left.\frac{\partial \widehat{S}(\Delta V_x, \Delta V_y)}{\partial \Delta V_x}\right|_{(0_-,0_-)} + \Delta V_y \left.\frac{\partial \widehat{S}(\Delta V_x, \Delta V_y)}{\partial \Delta V_y}\right|_{(0_-,0_-)} + o(\Delta_m)$$

при $\Delta V_x \le 0$, $\Delta V_y \le 0$;

$$\widehat{S}(\Delta V_x, \Delta V_y) = \\ = \widehat{S}(0,0) + \Delta V_x \left.\frac{\partial \widehat{S}(\Delta V_x, \Delta V_y)}{\partial \Delta V_x}\right|_{(0_-,0_+)} + \Delta V_y \left.\frac{\partial \widehat{S}(\Delta V_x, \Delta V_y)}{\partial \Delta V_y}\right|_{(0_-,0_+)} + o(\Delta_m)$$

при $\Delta V_x \le 0$, $\Delta V_y \ge 0$;

$$\widehat{S}(\Delta V_x, \Delta V_y) = \\ = \widehat{S}(0,0) + \Delta V_x \left.\frac{\partial \widehat{S}(\Delta V_x, \Delta V_y)}{\partial \Delta V_x}\right|_{(0_+,0_-)} + \Delta V_y \left.\frac{\partial \widehat{S}(\Delta V_x, \Delta V_y)}{\partial \Delta V_y}\right|_{(0_+,0_-)} + o(\Delta_m)$$

при $\Delta V_x \geq 0$, $\Delta V_y \leq 0$;

$$\widehat{S}\left(\Delta V_x, \Delta V_y\right) =$$

$$= \widehat{S}\left(0,0\right) + \Delta V_x \left.\frac{\partial \widehat{S}\left(\Delta V_x, \Delta V_y\right)}{\partial \Delta V_x}\right|_{(0_+,0_+)} + \Delta V_y \left.\frac{\partial \widehat{S}\left(\Delta V_x, \Delta V_y\right)}{\partial \Delta V_y}\right|_{(0_+,0_+)} + o\left(\Delta_m\right)$$

при $\Delta V_x \geq 0$, $\Delta V_y \geq 0$.

Вычисляя производные отдельно при $\Delta V_x \to \pm 0$, $\Delta V_y \to \pm 0$, подставляя результаты в разложение сигнальной функции при соответствующих знаках величин ΔV_x, ΔV_y и объединяя полученные выражения, находим, что для сигнальной функции (9) справедливо асимптотическое разложение (10).

Обоснование утверждения 2. Величина отношения сигнал/шум для неоднородного изображения объекта определяется формулой (11), а для однородного – формулой (14). Учитывая (16), находим:

$$\text{(П.1)} \qquad z_H^2 - z^2 = \frac{4Tv_0}{N_0} \iint\limits_{\Omega_s} \left[s_0 - s\left(x,y\right)\right] dxdy.$$

Поскольку

$$\iint\limits_{\Omega_s} \left[s\left(x,y\right) - s_0\right]^2 dxdy \geq 0,$$

раскрывая скобки в левой части, имеем:

$$\iint\limits_{\Omega_s} s^2\left(x,y\right) dxdy - 2s_0 \iint\limits_{\Omega_s} s\left(x,y\right) dxdy + s_0^2 l_x l_y \geq 0.$$

Отсюда с учетом равенства (16) получаем:

$$2s_0^2 l_x l_y - 2s_0 \iint\limits_{\Omega_s} s\left(x,y\right) dxdy \geq 0.$$

Интенсивность изображения объекта s_0 положительна, поэтому

$$s_0 l_x l_y - \iint\limits_{\Omega_s} s\left(x,y\right) dxdy \geq 0,$$

так что

$$\text{(П.2)} \qquad \iint\limits_{\Omega_s} \left[s_0 - s\left(x,y\right)\right] dxdy \geq 0.$$

Из (П.1) и (П.2) следует, что $z_H^2 \geq z^2$.

Обоснование утверждения 3. В работах, посвященных проблеме пересечений, отмечается, что вероятностные характеристики пересечений высокого уровня реализациями случайных процессов и полей определяются лишь их локальными свойствами. Обозначим через $N_x\left(V_x\right)$ и $N_y\left(V_y\right)$ статистически независимые центрированные гауссовские стационарные случайные процессы с корреляционными функциями (24) и (25) соответственно. Из (23)–(25) следует, что корреляционные функции гауссовских полей $N(V_x, V_y)$ (19) и $[N_x(V_x) + N_y(V_y)]/\sqrt{2}$ совпадают при $\Delta_N \to 0$, поэтому

$$P\left[\sup_{(V_x,V_y)\in W} N(V_x, V_y) < u_H\right] = P\left[\sup_{V_x\in W_x} N_x(V_x) + \sup_{V_y\in W_y} N_y(V_y) < u_H\sqrt{2}\right].$$

Тогда функцию распределения $F_0(u_H)$ (21) можно записать в виде [15]:

(П.3) $$F_0(u_H) \approx P\left[\sup_{V_x\in W_x} N_x(V_x) + \sup_{V_y\in W_y} N_y(V_y) < u_H\sqrt{2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} F_x\left(u_H\sqrt{2} - x\right) w_y(x)\, dx,$$

где

$$F_x(x) = P\left[\sup_{V_x\in W_x} N_x(V_x) < x\right] \quad \text{и} \quad F_y(x) = P\left[\sup_{V_y\in W_y} N_y(V_y) < x\right]$$

– функции распределения абсолютных максимумов случайных процессов $N_x(V_x)$ и $N_y(V_y)$, а $w_y(x) = dF_y(x)/dx$.

Точные выражения для $F_x(x)$ и $F_y(x)$ найти не удается, однако в [12, 13] для этих функций получены аппроксимации:

(П.4) $$F_x(x) = \begin{cases} \exp\left[-\sqrt{2/\pi}\, m_{xH} x \exp\left(-x^2/2\right)\right], & x \geq 1, \\ 0, \quad x < 1, \end{cases}$$

(П.5) $$F_y(x) = \begin{cases} \exp\left[-\sqrt{2/\pi}\, m_{yH} x \exp\left(-x^2/2\right)\right], & x \geq 1, \\ 0, \quad x < 1. \end{cases}$$

Точность аппроксимаций (П.4), (П.5) возрастает с увеличением m_{xH}, m_{yH} и x. В [15] показано, что аппроксимации (П.4), (П.5) можно использовать для приближенного вычисления интеграла (П.3) при больших значениях u_H. Согласно (П.5) имеем

(П.6) $$w_y(x) = \sqrt{2/\pi}\, m_{yH}\left(x^2 - 1\right)\exp\left(-x^2/2 - \sqrt{2/\pi}\, m_{yH} x \exp\left(-x^2/2\right)\right) + \delta(x-1)\exp\left(-\sqrt{2/\pi}\, m_{yH}\exp(-1/2)\right)$$

при $x \geq 1$ и $w_y(x) = 0$ при $x < 1$. Подставляя (П.4), (П.6) в (П.3), получим выражение (26), точность которого возрастает с увеличением m_{xH}, m_{yH} и u_H.

При умеренных значениях m_{xH}, m_{yH} и больших x из (П.4), (П.5) получим менее точные, но более простые выражения для функций распределения абсолютных максимумов случайных процессов $N_x(V_x)$ и $N_y(V_y)$ [13, 15]:

(П.7) $$F_x(x) = 1 - \sqrt{2/\pi}\, m_{xH} x \exp\left(-x^2/2\right), \quad F_y(x) = 1 - \sqrt{2/\pi}\, m_{yH} x \exp\left(-x^2/2\right).$$

Подставляя (П.7) в (П.3), находим упрощенное выражение для вероятности ложной тревоги (27), справедливое при весьма больших значениях u_H [15].

Обоснование утверждения 4. В условиях высокой апостериорной точности оценок компонент вектора скорости, реализующихся при больших отношениях сигнал/шум z_H, для расчета характеристик алгоритма максимального правдоподобия необходимо обеспечить высокую точность аппроксимации характеристик логарифма функционала отношения правдоподобия в окрестности точки (V_{0x}, V_{0y}). При этом точность аппроксимации характеристик логарифма функционала отношения правдоподобия за пределами этой области не играет существенной роли [12]. Обозначим через $L_x(V_x)$, $L_y(V_y)$ статистически независимые гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями $z_H B_x(V_x - V_{0x})/\sqrt{2}$, $z_H B_y(V_y - V_{0y})/\sqrt{2}$ и корреляционными функциями $B_x(V_{1x} - V_{2x})$ (24), $B_y(V_{1y} - V_{2y})$ (25) соответственно. Из (28), (29) следует, что статистические характеристики гауссовских случайных полей $L_z(V_x, V_y)$ (17) и $\Lambda_z(V_x, V_y) = [L_x(V_x) + L_y(V_y)]/\sqrt{2}$ асимптотически совпадают в малой окрестности точки (V_{0x}, V_{0y}), поэтому

$$
\begin{aligned}
(\Pi.8)\qquad & P\left[\sup L_z(V_x, V_y) < u_H, |V_x - V_{0x}| < \Delta_{xH}, |V_y - V_{0y}| < \Delta_{yH}\right] = \\
&= P\left[\sup \Lambda_z(V_x, V_y) < u_H, |V_x - V_{0x}| < \Delta_{xH}, |V_y - V_{0y}| < \Delta_{yH}\right] = \\
&= P\left[\Lambda_z\left(\widehat{V}_x, \widehat{V}_y\right) < u_H\right].
\end{aligned}
$$

При $z_H \gg 1$ оценки максимального правдоподобия компонент вектора скорости $\widehat{V}_x$ и $\widehat{V}_y$ приближенно совпадают с положениями абсолютных максимумов случайных процессов $L_x(V_x)$ и $L_y(V_y)$ на интервалах $[V_{0x} - \Delta_{xH}, V_{0x} + \Delta_{xH}]$ и $[V_{0y} - \Delta_{yH}, V_{0y} + \Delta_{yH}]$ соответственно, поэтому

$$
(\Pi.9)\qquad \Lambda_z\left(\widehat{V}_x, \widehat{V}_y\right) \approx \sup_{|V_x - V_{0x}| < \Delta_{xH}} L_x(V_x) + \sup_{|V_y - V_{0y}| < \Delta_{yH}} L_y(V_y).
$$

Из (П.8) и (П.9) следует, что

$$
\begin{aligned}
F_S(u_H) &\approx P\left[\sup_{|V_x - V_{0x}| \le \Delta_{xH}} L_x(V_x) + \sup_{|V_y - V_{0y}| \le \Delta_{yH}} L_y(V_y) < u_H\sqrt{2}\right] = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F\left(u_H\sqrt{2} - x\right) w(x)\, dx,
\end{aligned}
$$

где

$$
F(x) \approx P\left[\sup_{|V_x - V_{0x}| \le \Delta_{xH}} L_x(V_x) < x\right] = P\left[\sup_{|V_y - V_{0y}| \le \Delta_{yH}} L_y(V_y) < x\right]
$$

– совпадающие функции распределения абсолютных максимумов случайных процессов $L_x(V_x)$ и $L_y(V_y)$, а $w(x) = dF(x)/dx$ – соответствующая плотность вероятности. В [12] на основе метода локально-марковской аппроксимации получено приближенное выражение для функции распределения $F(x)$ в виде (31), при этом плотность вероятности $w(x)$ определяется выражением (32).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Странгуль О.Н., Тарасенко В.П.* Корреляционно-экстремальные системы навигации и локации подвижных объектов // АиТ. 2001. № 7. С. 201–210.
2. *Виленчик Л.С., Катулев А.Н., Малевинский М.Ф.* Минимаксный метод оценки параметров изображения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 2. С. 120–123.

3. *Попова Г.М., Степанов В.Н.* Анализ и обработка изображений медико-биологических микрообъектов // АиТ. 2004. № 1. С. 131–142.
4. *Трифонов А.П., Прибытков Ю.Н.* Обнаружение случайных изображений пространственно-протяженных объектов, затеняющих фон // Автометрия. 2000. Т. 36. № 4. С. 14–25.
5. *Бычков А.А., Понькин В.А.* Обнаружение изображений пространственно-протяженных затеняющих фон объектов // Автометрия. 1992. № 4. С. 33–40.
6. *Ефремов В.В., Ковалев Г.С., Лаптев И.В., Понькин В.А.* Потенциальные возможности обнаружения и маскирования движущихся объектов на неравномерных фонах // Информ.-измер. и управл. системы. 2003. № 4. С. 24–29.
7. *Трифонов А.П., Куцов Р.В.* Обнаружение движущегося пространственно протяженного объекта на фоне с неизвестной интенсивностью // Автометрия. 2005. Т. 41. № 1. С. 3–18.
8. *Куцов Р.В., Трифонов А.П.* Алгоритмы обнаружения движущегося объекта на изображении // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 3. С. 129–138.
9. *Туринов В.И.* К вопросу об измерении скорости удаленных объектов по изменениям положения и размеров оптического изображения // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41. № 5. С. 548–551.
10. *Гнеушев А. Н.* Система для оценки скорости транспортных средств по контурным признакам в режиме реального времени // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 1. С. 133–143.
11. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966.
12. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П.А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984.
13. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
14. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
15. *Трифонов А.П., Захаров А.В.* Эффективность обнаружения разрывного случайного радиоимпульса с неизвестными временем прихода и центральной частотой // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. № 11. С. 1329–1337.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.А. Лотоцким.

Поступила в редакцию 17.09.2007