

279

2

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**АВТОМАТИКА  
И ТЕЛЕМЕХАНИКА**

2009, №8

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

PACS 42.30.Tz

© 2009 г. Р.В. КУЦОВ, канд. физ.-мат. наук,  
 А.П. ТРИФОНОВ, д-р техн. наук  
 (Воронежский государственный университет)

## ОБНАРУЖЕНИЕ И ОЦЕНКА ВЕКТОРА СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВЕННО-ПРОТЯЖЕННОГО ОБЪЕКТА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ. П<sup>1</sup>

На основе установленных в [1] свойств логарифма функционала отношения правдоподобия получены асимптотические выражения для характеристик обнаружения и оценки вектора скорости движения неоднородного пространственно-протяженного объекта.

### 1. Введение

В [1] рассмотрены алгоритмы максимального правдоподобия обнаружения и оценки вектора скорости движения изображения пространственно-протяженного объекта, наблюдаемого в двумерной области  $\Omega$  в течение интервала времени  $[0, T]$ . Предполагалось, что объект и фон взаимодействуют аппликативно, так что при наличии объекта его квазидетерминированное изображение  $s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t)$ , движущееся с априори неизвестным вектором скорости  $\mathbf{V}_0$ , занимает часть  $\Omega_s$  области  $\Omega$ , а детерминированный фон  $\nu(\mathbf{r})$  – оставшуюся часть области наблюдения. При отсутствии объекта фон занимает всю область наблюдения. В качестве модели шумовых помех использовался аддитивный гауссовский пространственно-временной белый шум  $n(\mathbf{r}, t)$  с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ . В соответствии с [1] полагаем, что в течение интервала времени  $[0, T]$  наблюдению доступна реализация гауссовского случайного поля

$$(1) \quad \Xi(\mathbf{r}, t) = \gamma_0 s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t) I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t) + [1 - \gamma_0 I_s(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t)] \nu(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}, t),$$

где  $\gamma_0 = 1$ , когда справедлива гипотеза  $H_1$  о наличии изображения объекта в наблюдаемой реализации, и  $\gamma_0 = 0$ , если справедлива гипотеза  $H_0$  о его отсутствии,  $I_s(\mathbf{r}) = 1$ , если  $\mathbf{r} \in \Omega_s$ , и  $I_s(\mathbf{r}) = 0$  при  $\mathbf{r} \notin \Omega_s$  – индикаторная функция, описывающая форму изображения объекта.

Для случая, когда функция  $s(x, y)$ , описывающая интенсивность изображения объекта, непрерывна и непрерывно дифференцируема, в [1] получены асимптотические выражения для функций распределения абсолютных (наибольших) максимумов логарифма функционала отношения правдоподобия при отсутствии и наличии изображения объекта в наблюдаемой реализации. Воспользуемся найденными выражениями для расчета характеристик обнаружения и оценки вектора скорости движения изображения неоднородного пространственно-протяженного объекта.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00042).

## 2. Характеристики обнаружения объекта, движущегося с неизвестным вектором скорости

Обычно эффективность алгоритма обнаружения характеризуется величинами вероятностей ошибок ложной тревоги  $\alpha_H$  и пропуска объекта  $\beta_H$ . При использовании максимально правдоподобного алгоритма обнаружения эти вероятности можно записать в виде

$$(2) \quad \alpha_H = P \left[ \sup_{(V_x, V_y) \in W} L_z(V_x, V_y) > u_H \mid \gamma_0 = 0 \right] = P[M_0 > u_H],$$

$$(3) \quad \beta_H = P \left[ \sup_{(V_x, V_y) \in W} L_z(V_x, V_y) < u_H \mid \gamma_0 = 1 \right] = P[M_1 < u_H].$$

Здесь  $M_0$  и  $M_1$  – соответственно величины абсолютного (наибольшего) максимума нормированного логарифма функционала отношения правдоподобия  $L_z(V_x, V_y)$  (см. [1, (17)]) при отсутствии и наличии изображения объекта в наблюдаемой реализации, а  $u_H$  – нормированный порог.

Из (2) следует, что вероятность ложной тревоги выражается через найденную в [1] функцию распределения абсолютного максимума логарифма функционала отношения правдоподобия  $F_0(u_H)$ :

$$(4) \quad \alpha_H = 1 - F_0(u_H).$$

Подставляя [1, (26)] в (4), находим приближенное выражение для вероятности ложной тревоги:

$$(5) \quad \alpha_H = 1 - \exp \left[ -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( m_{yH} \exp(-1/2) + m_{xH} (u_H \sqrt{2} - 1) \exp \left( -\frac{(u_H \sqrt{2} - 1)^2}{2} \right) \right) \right] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_{yH} \int_1^{u_H \sqrt{2} - 1} (x^2 - 1) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ m_{yH} x \exp(-x^2/2) + m_{xH} (u_H \sqrt{2} - x) \exp \left( -\frac{(u_H \sqrt{2} - x)^2}{2} \right) \right] \right\} dx$$

при  $u_H > \sqrt{2}$ , и  $\alpha_H = 1$  при  $u_H \leq \sqrt{2}$ .

Используя в (4) вместо [1, (26)] более простую аппроксимацию для функции распределения  $F_0(u_H)$  [1, (27)], находим упрощенное выражение для вероятности ложной тревоги, справедливое при весьма больших значениях нормированного порога  $u_H$  [2]:

$$(6) \quad \alpha_H \approx m_H u_H (u_H^2 - 3) \exp(-u_H^2/2) / \sqrt{2\pi}.$$

Точность формул (5), (6) возрастает с увеличением  $m_{xH}$ ,  $m_{yH}$  и  $u_H$ . Отметим, что приближенная формула (6) удовлетворительно аппроксимирует зависимость (5) уже при  $\alpha_H < 10^{-1}$ , причем точность этой аппроксимации возрастает с уменьшением  $\alpha_H$  (увеличением  $u_H$ ) [2].

Определим теперь вероятность пропуска объекта  $\beta_H$  (3), полагая, что его изображение присутствует в наблюдаемой реализации. Обозначим

$$(7) \quad M_S = \sup L_z(V_x, V_y) \quad \text{при} \quad |V_x - V_{0x}| < \Delta_{xH}, \quad |V_y - V_{0y}| < \Delta_{yH},$$

$$(8) \quad M_N = \sup L_z(V_x, V_y) \quad \text{при остальных} \quad (V_x, V_y) \in W.$$

Поскольку  $M_1 = \max(M_S, M_N)$ , выражение (3) можно переписать в виде  $\beta_H = P[M_N < u_H, M_S < u_H]$ .

**Утверждение 1.** Если число независимых отсчетов [1, (22)] поля  $L_z(V_x, V_y)$  [1, (17)] неограниченно возрастает, т.е.  $m_H \rightarrow \infty$ , то случайные величины  $M_S$  и  $M_N$  статистически независимы с вероятностью, стремящейся к единице.

Обоснования утверждения 1 и последующего утверждения 2 приведены в Приложении.

При выполнении условия

$$(9) \quad m_H \gg 1$$

случайные величины  $M_S$  и  $M_N$  приближенно статистически независимы, поэтому выражение (3) для вероятности пропуска объекта примет вид

$$(10) \quad \beta_H \approx P[M_N < u_H] P[M_S < u_H] = F_N(u_H) F_S(u_H),$$

причем  $F_N(u_H) \approx F_0(u_H)$ , где  $F_0(u_H)$  определяется из [1, (26); 3, 4], а функция распределения  $F_S(u_H)$  величины абсолютного максимума (7) имеет вид [1, (30)].

В соответствии с (10), вероятность пропуска неоднородного объекта  $\beta_H$  при неизвестном векторе скорости движения можно представить в виде

$$(11) \quad \beta_H \approx F_0(u_H) \int_{-\infty}^{\infty} F(u_H \sqrt{2} - x) w(x) dx,$$

где функции  $F_0(u)$ ,  $F(x)$  и  $w(x)$  определены в [1, (26), (31), (32)] соответственно. Точность выражения (11) возрастает с увеличением  $z_H$ ,  $u_H$  и  $m_H$ .

Конкретизируем полученные выражения для случая обнаружения однородного изображения объекта с постоянной интенсивностью. Полагая в (5), (11)  $s(x, y) = s_0$ , получаем, что вероятности ошибок ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска объекта  $\beta$  определяются формулами (5), (11) при замене  $m_{xH}$  и  $m_{yH}$  на  $m_x = TV_{x \max}/2l_x$  и  $m_y = TV_{y \max}/2l_y$ ,  $z_H^2$  - на отношение сигнал/шум для однородного объекта  $z$  [1, (14)], а  $u_H$  - на  $u = h/z + z/2$ .

Рассмотрим влияние априорного незнания вектора скорости движения объекта на характеристики обнаружения. В [5] рассмотрен случай обнаружения однородного изображения объекта, движущегося в априори известном направлении с неизвестной скоростью, принимающей значения из априорного интервала  $W_1 = [0, V_{\max}]$ . В данной работе найдены асимптотические выражения для вероятностей ошибок ложной тревоги и пропуска объекта:

$$(12) \quad \alpha_1 \approx \begin{cases} 1 - \exp[-m_1 u \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}], & u \geq 1, \\ 1, & u < 1, \end{cases}$$

$$(13) \quad \beta_1 \approx \exp[-m_1 u \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}] \times \\ \times \{ \Phi(u - z) - 2 \exp(3z^2/2 - uz) \Phi(u - 2z) + \exp(4z^2 - 2uz) \Phi(u - 3z) \}$$

при  $u \geq 1$  и  $\beta_1 \approx 0$  при  $u < 1$ , где  $\Phi(x)$  - интеграл вероятности [1, (33)],  $z^2$  - отношение сигнал/шум [1, (14)],  $m_1 = l_V TV_{\max}/2G_s$  - приведенная длина априорного интервала  $W_1$  возможных значений скорости,  $l_V$  - максимальный размер изображения объекта в направлении, перпендикулярном движению, а  $G_s$  - площадь изображения объекта.

Конкретизируем приведенные выражения для случая обнаружения однородного изображения прямоугольного объекта размером  $l_x \times l_y$ , стороны которого ориентированы вдоль координатных осей  $X$  и  $Y$  соответственно, движущегося под углом  $\varphi$

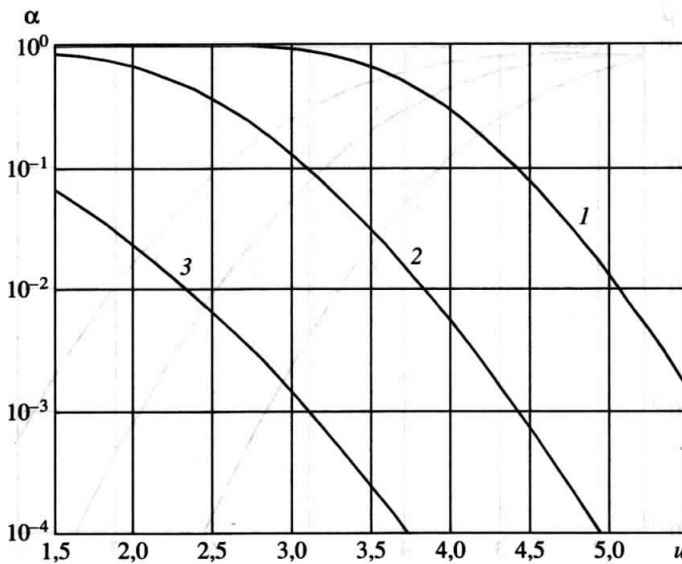


Рис. 1.

к стороне длины  $l_x$ . Без ограничения общности можно считать, что  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ . В этом случае площадь изображения объекта  $G_s = l_x l_y$ , его размер в перпендикулярном направлении  $l_V = l_x \sin \varphi + l_y \cos \varphi$ , неизвестная величина скорости движения принимает значения из интервала  $[0, V_{\max}]$ , где

$$(14) \quad V_{\max} = \begin{cases} V_{x \max} / 2 \cos \varphi, & 0 \leq \varphi < \varphi_0, \\ V_{y \max} / 2 \sin \varphi, & \varphi_0 \leq \varphi \leq 90^\circ, \end{cases}$$

а  $\varphi_0 = \arctg(V_{y \max} / V_{x \max})$ . При этом число разрешимых значений скорости

$$(15) \quad m_1 = \begin{cases} (m_x + m_y \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \varphi_0) / 2, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ (m_y + m_x \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_0) / 2, & \varphi_0 < \varphi \leq 90^\circ. \end{cases}$$

Для сравнения приведем выражения, определяющие вероятности ошибок ложной тревоги и пропуска объекта в случае, когда направление и скорость движения объекта априори известны [6]:

$$(16) \quad \alpha_0 = 1 - \Phi(u),$$

$$(17) \quad \beta_0 = \Phi(u - z).$$

На рис. 1 показаны зависимости вероятности ложной тревоги  $\alpha$  от нормированного порога  $u$  при  $m_x = m_y = 10$  и  $\varphi_0 = 45^\circ$  ( $V_{x \max} = V_{y \max}$ ). Кривая 1 соответствует случаю, когда неизвестны величина скорости и направление движения изображения объекта, и рассчитывалась по формуле (5). Кривая 2 соответствует случаю, когда величина скорости неизвестна, а направление движения известно и составляет угол  $\varphi = \varphi_0$  со стороны длины  $l_x$ , и рассчитывалась по формуле (12). Кривая 3 соответствует случаю, когда величина скорости и направление движения априори известны, и рассчитывалась по формуле (16).

На рис. 2 показаны зависимости вероятности пропуска объекта  $\beta$  от отношения сигнал/шум  $z$ . Порог выбирался по заданной вероятности ложной тревоги на основании критерия Неймана-Пирсона при  $\alpha = 10^{-2}$  с использованием формул (5),

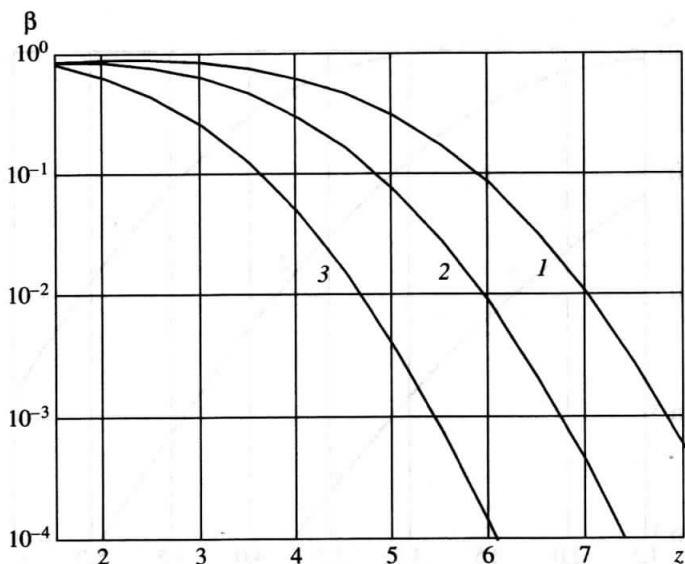


Рис. 2.

(12) и (16). Кривая 1 соответствует случаю, когда неизвестны величина скорости и направление движения изображения объекта, и рассчитывалась по формуле (11). Кривая 2 соответствует случаю, когда величина скорости неизвестна, а направление движения известно и составляет угол  $\varphi = \varphi_0$  со стороны длины  $l_x$ , и рассчитывалась по формуле (13). Кривая 3 соответствует случаю, когда величина скорости и направление движения априори известны, и рассчитывалась по формуле (17).

Согласно рис. 1 и 2 априорное незнание скорости движения объекта может привести к существенному проигрышу в эффективности обнаружения его изображения по сравнению со случаем, когда величина и направление скорости априори известны. К еще более существенному проигрышу по сравнению со случаем, когда направление и величина скорости априори известны, приводит априорное незнание вектора скорости. Так, при отношении сигнал/шум  $z = 6$  вероятность пропуска объекта возрастает почти на два порядка за счет незнания величины скорости по сравнению со случаем, когда величина и направление скорости априори известны, и почти на три порядка за счет незнания направления и величины скорости. При этом потери в эффективности обнаружения возрастают с увеличением числа элементов разрешения по скорости в априорной области возможных значений вектора скорости и с увеличением отношения сигнал/шум.

Рассмотрим влияние степени неоднородности изображения объекта на характеристики обнаружения. В качестве примера рассмотрим обнаружение изображения прямоугольного объекта со сторонами  $l_x$  и  $l_y$ , расположенными вдоль координатных осей  $X$  и  $Y$  соответственно. Полагаем, что интенсивность изображения линейно возрастает в направлении, составляющем угол  $\theta$  со стороной длины  $l_x$ . Таким образом, интенсивность изображения прямоугольного объекта описывается функцией

$$(18) \quad s(x, y) = s_0 [(q-1)(x \cos \theta + y \sin \theta) / (l_x \cos \theta + l_y \sin \theta) + (q+1)/2] \times \\ \times \left[ (q-1)^2 (l_x^2 \cos^2 \theta + l_y^2 \sin^2 \theta) / 12 (l_x \cos \theta + l_y \sin \theta)^2 + (q+1)^2 / 4 \right]^{-1/2},$$

где наклон  $q = s_{\max} / s_{\min}$  — отношение максимального значения интенсивности изображения объекта  $s_{\max} = \max s(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega_s$ , к минимальному значению  $s_{\min} =$

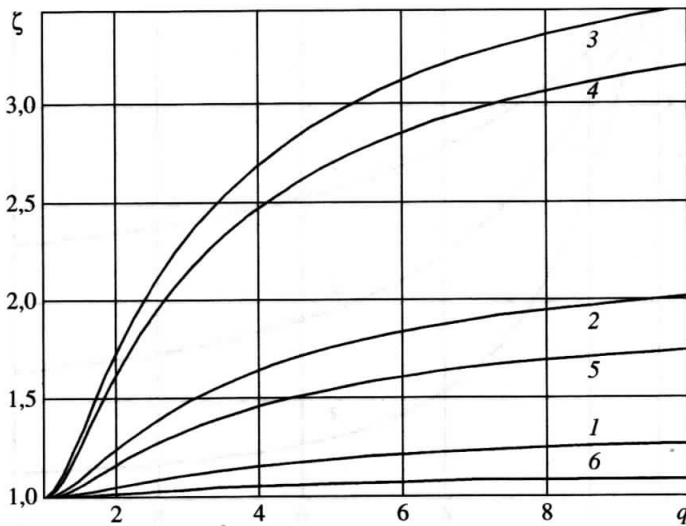


Рис. 3.

$= \min s(x, y), (x, y) \in \Omega_s$ , а  $s_0$  характеризует амплитуду интенсивности. Множитель  $\left[ (q-1)^2 (l_x^2 \cos^2 \theta + l_y^2 \sin^2 \theta) / 12 (l_x \cos \theta + l_y \sin \theta)^2 + (q+1)^2 / 4 \right]^{-1/2}$  обеспечивает неизменность энергии изображения объекта при различных значениях  $q$  и  $\theta$ , так что (18) удовлетворяет [1, (16)]. При этом предполагается, что начало системы координат расположено в точке пересечения диагоналей прямоугольного объекта при  $t = 0$ . Заметим, что для однородного объекта  $q = 1$ , так что  $s(x, y)|_{q=1} = s_0$ , т.е.  $s_0$  — интенсивность изображения однородного объекта такой же формы, с теми же площадью и энергией, что у неоднородного объекта.

Подставляя (18) в [1, (11)], находим выражение для отношения сигнал/шум на выходе приемника максимального правдоподобия при наличии в реализации наблюдаемых данных изображения неоднородного прямоугольного объекта (18), однородного фона и гауссовского белого шума:

$$(19) \quad z_H^2 = \frac{z^2}{(z_F - 1)^2} \left[ z_F^2 + 1 - 2z_F(q+1) / \sqrt{\frac{(q-1)^2 \cos^2 \theta + \psi^2 \sin^2 \theta}{3 (\cos \theta + \psi \sin \theta)^2} + (q+1)^2} \right],$$

где  $z^2 = z_s^2 (1 - 1/z_F)^2$  — отношение сигнал/шум для однородного прямоугольного объекта при наличии фона,  $z_s^2 = 2l_x l_y T s_0^2 / N_0$  — отношение сигнал/шум для однородного изображения прямоугольного объекта при отсутствии фона и наличии только гауссовского белого шума [6],  $z_F^2 = s_0^2 / \nu_0^2$  — отношение сигнал/фон, а  $\psi = l_y / l_x$  — отношение сторон прямоугольника.

На рис. 3 показана зависимость величины  $\zeta = z_H / z$  от величины наклона  $q$  при  $\psi = 1$  и  $\theta = 45^\circ$ . Кривая 1 соответствует  $z_F = 1,5$ , кривая 2 —  $z_F = 1,2$ , кривая 3 —  $z_F = 1,1$ , кривая 4 —  $z_F = 0,9$ , кривая 5 —  $z_F = 0,8$ , кривая 6 —  $z_F = 0,5$ . Как следует из сравнения кривых на рис. 3, неоднородность изображения объекта приводит к существенному увеличению значения отношения сигнал/шум  $z_H$  при близких к единице отношениях сигнал/фон  $z_F$ .

Согласно (5) и (11) для расчета характеристик обнаружения необходимо найти число элементов разрешения по каждой компоненте вектора скорости  $m_{xH} = \delta_{xH} V_{x \max}$ ,  $m_{yH} = \delta_{yH} V_{y \max}$ . Подставляя (18) в [1, (12), (13)], получим выражения

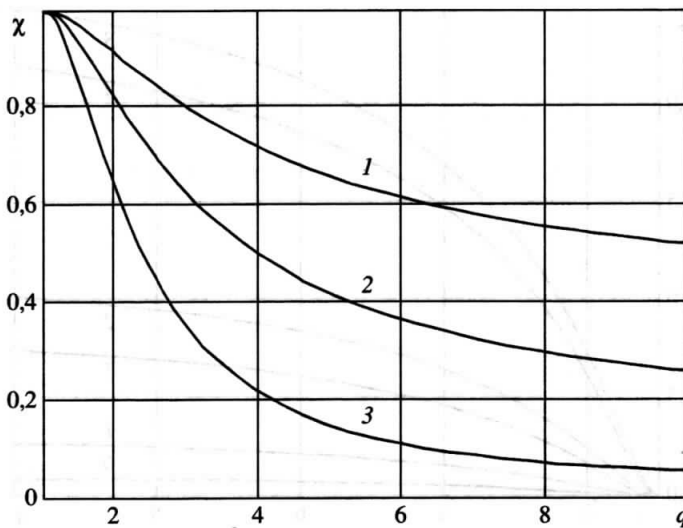


Рис. 4.

для параметров  $\delta_{xH}$  и  $\delta_{yH}$  в случае обнаружения неоднородного прямоугольного объекта, интенсивность изображения которого описывается функцией (18):

$$(20) \quad \delta_{xH} = \delta_x \left\{ \frac{z_F^2 (q-1)^2 (3 \cos^2 \theta + \psi^2 \sin^2 \theta)}{(q-1)^2 (\cos^2 \theta + \psi^2 \sin^2 \theta) + 3 (\cos \theta + \psi \sin \theta)^2 (q+1)^2} + \left( (q+1) z_F / \sqrt{\frac{(q-1)^2 \cos^2 \theta + \psi^2 \sin^2 \theta}{3} (\cos \theta + \psi \sin \theta)^2 + (q+1)^2 - 1} \right)^2 \right\} \times \\ \times \left[ z_F^2 + 1 - 2z_F (q+1) / \sqrt{\frac{(q-1)^2 \cos^2 \theta + \psi^2 \sin^2 \theta}{3} (\cos \theta + \psi \sin \theta)^2 + (q+1)^2} \right]^{-1},$$

$$(21) \quad \delta_{yH} = \delta_y \left\{ \frac{z_F^2 (q-1)^2 (\cos^2 \theta + 3\psi^2 \sin^2 \theta)}{(q-1)^2 (\cos^2 \theta + \psi^2 \sin^2 \theta) + 3 (\cos \theta + \psi \sin \theta)^2 (q+1)^2} + \left( (q+1) z_F / \sqrt{\frac{(q-1)^2 \cos^2 \theta + \psi^2 \sin^2 \theta}{3} (\cos \theta + \psi \sin \theta)^2 + (q+1)^2 - 1} \right)^2 \right\} \times \\ \times \left[ z_F^2 + 1 - 2z_F (q+1) / \sqrt{\frac{(q-1)^2 \cos^2 \theta + \psi^2 \sin^2 \theta}{3} (\cos \theta + \psi \sin \theta)^2 + (q+1)^2} \right]^{-1},$$

где  $\delta_x$  и  $\delta_y$  определяются из [1, (15)] и представляют собой значения параметров [1, (12), (13)] для однородного прямоугольного объекта (при  $q = 1$ ). При этом число элементов разрешения по компонентам скорости движения однородного изображения объекта  $m_x = \delta_x V_{x \max}$ ,  $m_y = \delta_y V_{y \max}$ .

На рис. 4 показаны зависимости от параметра  $q$  отношения  $\chi = \beta_H / \beta$  вероятностей пропуска неоднородного  $\beta_H$  и однородного  $\beta$  прямоугольных объектов при порогах, определенных на основании критерия Неймана-Пирсона для одинаковых значений вероятностей ложных тревог  $\alpha = \alpha_H = 10^{-2}$ . Значения порогов определя-



лись по заданным вероятностям ложных тревог при отношении сигнал/фон  $z_F = 2$ , отношении сторон  $\psi = 2$ , числе элементов разрешения по компонентам скорости для однородного объекта  $m_x = m_y = 5$  и  $\theta = \arctg \psi$ . При этом число элементов разрешения по компонентам вектора скорости движения неоднородного объекта  $m_{xH} = m_x \delta_{xH} / \delta_x$ ,  $m_{yH} = m_y \delta_{yH} / \delta_y$ . Кривая 1 соответствует значению отношения сигнал/шум для однородного изображения прямоугольного объекта в отсутствии фона  $z_s = 10$ , кривая 2 -  $z_s = 12$ , а кривая 3 -  $z_s = 15$ .

Из сравнения кривых на рис. 4 следует, что при не слишком малых значениях отношения сигнал/шум  $z_s$  для однородного изображения прямоугольного объекта при отсутствии фона, когда вероятность пропуска не превышает 0,1, вероятность пропуска неоднородного объекта всегда меньше, чем однородного. Это объясняется тем, что при одинаковых энергиях изображений однородного и неоднородного объектов, неоднородный объект в большей степени отличается по текстуре от однородного фона.

### 3. Характеристики оценки вектора скорости движения объекта

Разобьем априорную область возможных значений скорости  $W$  на сигнальную  $W_S$  и шумовую  $W_N$  подобласти. К первой отнесем те значения  $(V_x, V_y)$ , для которых  $|V_x - V_{0x}| \leq \Delta_{xH}/2$  и  $|V_y - V_{0y}| \leq \Delta_{yH}/2$ . Все остальные значения  $(V_x, V_y)$  отнесем к шумовой подобласти. В сигнальной подобласти оценки [1, (4), (5)] являются надежными, а в шумовой подобласти имеют место аномальные ошибки [4, 7], обусловленные шумовыми выбросами логарифма функционала отношения правдоподобия. Аномальные ошибки возможны при умеренных отношениях сигнал/шум, если размеры априорной области  $W$  существенно больше размеров сигнальной подобласти  $W_S$ , т.е. если справедливо условие (9).

Согласно [1, (5)], смещение и рассеяние оценки вектора скорости

$$(22) \quad b(\hat{\mathbf{V}}) = \langle \hat{\mathbf{V}} - \mathbf{V}_0 \rangle = b(\hat{V}_x) \mathbf{i}_x + b(\hat{V}_y) \mathbf{i}_y,$$

$$(23) \quad B_H(\hat{\mathbf{V}}) = \langle |\hat{\mathbf{V}} - \mathbf{V}_0|^2 \rangle = B_H(\hat{V}_x) + B_H(\hat{V}_y),$$

где

$$(24) \quad b(\hat{V}_x) = \langle \hat{V}_x - V_{0x} \rangle, \quad B_H(\hat{V}_x) = \langle (\hat{V}_x - V_{0x})^2 \rangle,$$

$$(25) \quad b(\hat{V}_y) = \langle \hat{V}_y - V_{0y} \rangle, \quad B_H(\hat{V}_y) = \langle (\hat{V}_y - V_{0y})^2 \rangle$$

– смещения и рассеяния оценок компонент  $\hat{V}_x$  и  $\hat{V}_y$  соответственно. В (24) усреднение выполняется по значениям  $\hat{V}_x$  и  $V_{0x}$ , в (25) – по  $\hat{V}_y$  и  $V_{0y}$ .

Определим вначале характеристики надежной оценки вектора скорости, полагая, что отношение сигнал/шум достаточно велико.

**Утверждение 2.** *Надежные оценки  $\hat{V}_x$ ,  $\hat{V}_y$  компонент вектора скорости являются несмещенными, а их рассеяния соответственно равны*

$$(26) \quad B_{0H}(\hat{V}_x) = \langle (\hat{V}_x - V_{0x})^2 \rangle = \frac{13}{2z_H^4 \delta_{xH}^2},$$

$$B_{0H}(\hat{V}_y) = \langle (\hat{V}_y - V_{0y})^2 \rangle = \frac{13}{2z_H^4 \delta_{yH}^2}.$$

Согласно (22) оценка вектора скорости является несмещенной. Подставляя в (23) вместо  $B_H(\widehat{V}_x)$ ,  $B_H(\widehat{V}_y)$  рассеяния надежных оценок  $B_{0H}(\widehat{V}_x)$ ,  $B_{0H}(\widehat{V}_y)$  (26), получаем, что рассеяние надежной оценки вектора скорости определяется выражением

$$(27) \quad B_{0H}(\widehat{\mathbf{V}}) = \left\langle |\widehat{\mathbf{V}} - \mathbf{V}_0|^2 \right\rangle = 13 \left( \delta_{xH}^{-2} + \delta_{yH}^{-2} \right) / 2z_H^4.$$

Найдем теперь характеристики максимально правдоподобной оценки вектора скорости с учетом аномальных ошибок [4, 7]. Обозначим через  $P_{0H} = P[(V_x, V_y) \in W_S]$  вероятность надежной оценки [7]. Поскольку оценка скорости определяется по положению максимума выходного сигнала приемника максимального правдоподобия, с учетом обозначений (7), (8) последнее выражение можно переписать как  $P_{0H} = P[M_N \leq M_S]$ . При выполнении условия (9) случайные величины  $M_N$  и  $M_S$  приближенно статистически независимы [4], поэтому

$$(28) \quad P_{0H} = \int F_N(\lambda) dF_S(\lambda),$$

где  $F_N(\lambda) \approx F_0(\lambda)$  и  $F_S(\lambda)$  – функции распределения величин  $M_N$  и  $M_S$  соответственно, определяемые выражениями [1, (26), (30)]. Подставляя [1, (26), (30)] в (28), получим

$$(29) \quad P_{0H} = \sqrt{2} \int_{\sqrt{2}}^{\infty} F_0(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda\sqrt{2} - x) w(x) dx d\lambda,$$

где функция  $w(x)$  определяется формулой [1, (32)].

Из (29) следует, что вероятность надежной оценки  $P_{0H}$  в рассматриваемом приближении не зависит от истинного значения скорости. Положим, что компоненты вектора скорости  $V_x$  и  $V_y$  равномерно распределены в априорных областях  $W_x$  и  $W_y$  соответственно. Тогда при наличии аномальных ошибок оценки компонент вектора скорости являются безусловно несмещенными, т.е.

$$(30) \quad b(\widehat{V}_x) = 0, \quad b(\widehat{V}_y) = 0,$$

а их безусловные рассеяния определяются выражениями:

$$(31) \quad B_H(\widehat{V}_x) = P_{0H} B_{0H}(\widehat{V}_x) + (1 - P_{0H}) V_{x \max}^2 / 6,$$

$$(32) \quad B_H(\widehat{V}_y) = P_{0H} B_{0H}(\widehat{V}_y) + (1 - P_{0H}) V_{y \max}^2 / 6.$$

Здесь  $B_{0H}(\widehat{V}_x)$  и  $B_{0H}(\widehat{V}_y)$  – рассеяния надежных оценок компонент вектора скорости (26).

Согласно (30) оценка вектора скорости является несмещенной, т.е.  $b(\widehat{\mathbf{V}}) = 0$ . Подставляя (26), (29) в (31), (32) и используя полученные выражения в (22), получим безусловное рассеяние оценки вектора скорости с учетом аномальных ошибок

$$(33) \quad B_H(\widehat{\mathbf{V}}) = B_{\max} \left( \frac{39P_{0H}}{z_H^4 m_{xH}^2} \frac{1 + \delta_{xH}^2 / \delta_{yH}^2}{1 + V_{y \max}^2 / V_{x \max}^2} + 1 - P_{0H} \right),$$

где  $B_{\max} = (V_{x\max}^2 + V_{y\max}^2)/6$  – максимальное рассеяние оценки вектора скорости. Формула (33) является асимптотически точной при  $z_H \rightarrow \infty$  и  $m_{xH}, m_{yH} \rightarrow \infty$ .

Рассеяние  $B(\hat{V})$  оценки вектора скорости движения однородного изображения прямоугольного объекта с интенсивностью  $s_0$  определяется формулой (33) при замене  $m_{xH}$  и  $m_{yH}$  на  $m_x = TV_{x\max}/2l_x$  и  $m_y = TV_{y\max}/2l_y$ ,  $\delta_{xH}$  и  $\delta_{yH}$  – на  $\delta_x$  и  $\delta_y$  [1, (15)], а отношения сигнал/шум  $z_H^2$  – на отношение сигнал/шум для однородного объекта  $z^2$  [1, (14)]. Рассеяние надежной оценки вектора скорости  $B_0(\hat{V})$  определяется формулой (27) при замене  $\delta_{xH}$  и  $\delta_{yH}$  на  $\delta_x$  и  $\delta_y$  [1, (15)], а  $z_H^2$  – на  $z^2$  [1, (14)].

Рассмотрим влияние априорного незнания направления движения однородного изображения объекта на точность оценки скорости движения. В [8] рассмотрена оценка скорости движения однородного изображения объекта, движущегося в априори известном направлении со скоростью, принимающей значения из априорного интервала  $W_1 = [0, V_{\max}]$ . В данной работе установлено, что оценка скорости является асимптотически несмещенной, а ее рассеяние с учетом аномальных ошибок определяется выражением

$$(34) \quad B_1(\hat{V}) = \frac{V_{\max}^2}{6} \left( \frac{39P_{01}}{z^4 m_1^2} + 1 - P_{01} \right),$$

где

$$P_{01} = 2z \exp\left(\frac{3z^2}{2}\right) \int_1^{\infty} \exp\left[-\frac{m_1 x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] \times \\ \times [\exp(-zx) \Phi(x - 2z) - \exp(5z^2/2 - 2zx) \Phi(x - 3z)] dx$$

– вероятность надежной оценки. Здесь оставлены обозначения, использованные в (12), (13).

Конкретизируем приведенные выражения для случая оценки скорости движения однородного изображения прямоугольного объекта размером  $l_x \times l_y$ , стороны которого ориентированы вдоль координатных осей  $X$  и  $Y$  соответственно, движущегося под углом  $\varphi$  к стороне длины  $l_x$ . Без ограничения общности можно считать, что  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ . В этом случае длина априорного интервала возможных значений скорости  $V_{\max}$  определяется формулой (14), а число разрешимых значений скорости  $m_1$  – формулой (15). Находим рассеяние оценки скорости объекта, направление движения которого априори известно:

$$B_1(\hat{V}) = \begin{cases} \frac{V_{x\max}^2}{24 \cos^2 \varphi} \left( \frac{39P_{01}}{z^4 m_1^2} + 1 - P_{01} \right), & \varphi \leq \varphi_0, \\ \frac{V_{x\max}^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{24 \sin^2 \varphi} \left( \frac{39P_{01}}{z^4 m_1^2} + 1 - P_{01} \right), & \varphi > \varphi_0. \end{cases}$$

На рис. 5 показаны зависимости отношения рассеяний оценок скорости однородного изображения объекта при неизвестном и известном направлении движения  $\xi = B(\hat{V})/B_1(\hat{V})$  от отношения сигнал/шум  $z$  при  $m_x = m_y = 10$  и  $\varphi_0 = 45^\circ$ . Кривая 1 соответствует  $\varphi = 0^\circ$ , кривая 2 –  $\varphi = 20^\circ$ , кривая 3 –  $\varphi = 30^\circ$ , а кривая 4 –  $\varphi = 45^\circ$ . Как следует из анализа кривых на рис. 5, незнание направления движения объекта может приводить к существенному увеличению рассеяния оценки модуля вектора скорости по сравнению со случаем, когда направление движения априори известно.

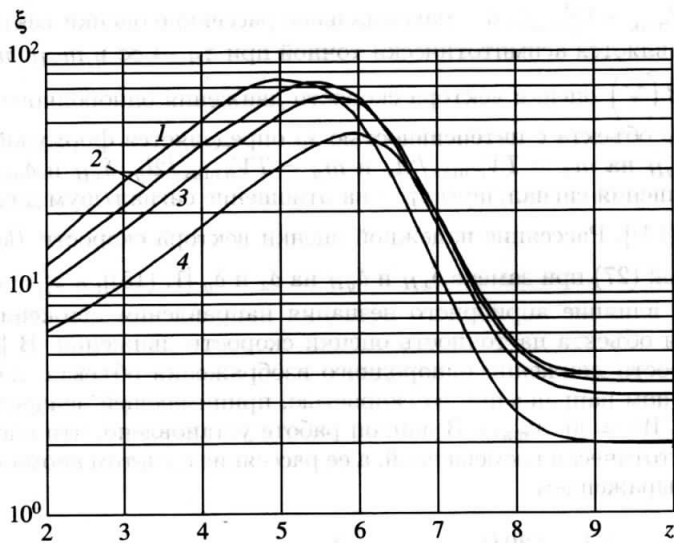


Рис. 5.

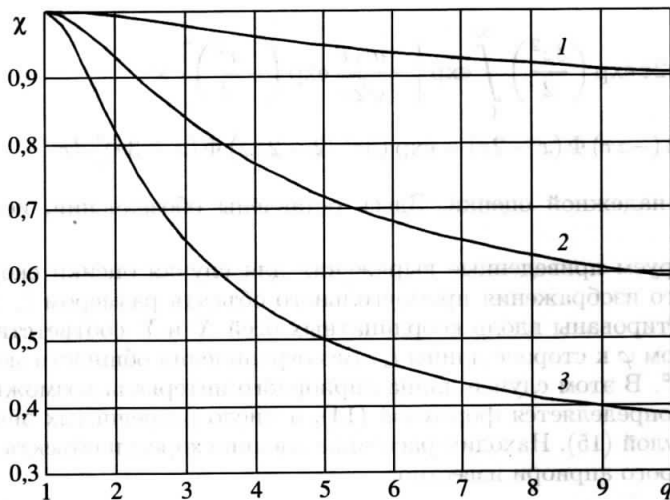


Рис. 6.

Рассмотрим влияние неоднородности изображения объекта на характеристики оценки вектора скорости с учетом аномальных ошибок. В качестве примера рассмотрим изображение неоднородного прямоугольного объекта (18). На рис. 6 приведены зависимости отношения рассеяний оценок скорости движения неоднородного и однородного прямоугольных объектов  $\chi = B_H(\hat{V})/B(\hat{V})$  от величины наклона  $q$ . Расчет производился с использованием формулы (33) при числе элементов разрешения по компонентам вектора скорости для однородного квадратного объекта ( $l_x = l_y$ )  $m_x = m_y = 10$  и  $V_{x \max} = V_{y \max}$ , отношении сигнал/фон  $z_F = 2$  и  $\theta = 45^\circ$ . При этом параметры  $\delta_{xH}$ ,  $\delta_{yH}$  и число элементов разрешения по компонентам скорости для неоднородного квадратного объекта определялись как  $m_{xH} = m_x \delta_{xH} / \delta_x$ ,

$m_{yH} = m_x \delta_{yH} / \delta_y$  с использованием формул (20), (21), а отношение сигнал/шум  $z_H^2$  — по формуле (19). Кривая 1 соответствует  $z_s = 7$ , кривая 2 —  $z_s = 10$ . Кривой 3 показана зависимость отношения рассеяний надежных оценок скорости неоднородного и однородного изображений объекта  $\chi_0 = B_{0H}/B_0$  при тех же значениях отношения сигнал/фон  $z_F$ , отношения сторон  $\psi$  и угла  $\theta$ . Как следует из сравнения кривых на рис. 6, точность оценки скорости движения неоднородного объекта при не слишком малых отношениях сигнал/шум оказывается выше, чем точность оценки скорости движения однородного объекта. При этом повышение точности оценки скорости движения за счет неоднородности изображения объекта оказывается более значительным по мере увеличения отношения сигнал/шум.

#### 4. Заключение

Априорное незнание направления и скорости движения изображения объекта может привести к существенному проигрышу в эффективности его обнаружения. Незнание направления движения объекта приводит к снижению точности оценки скорости движения его изображения. Точность оценки скорости снижается особенно существенно при умеренных значениях отношения сигнал/шум, когда оказывается заметным влияние аномальных ошибок.

Неоднородность изображения объекта увеличивает отношение сигнал/шум по сравнению со случаем, когда изображение объекта является однородным и имеет ту же энергию, что неоднородное изображение. В результате эффективность обнаружения и точность оценки скорости движения изображения неоднородного объекта оказываются выше, чем однородного.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Обоснование утверждения 1.* По определению, логарифм функционала отношения правдоподобия принимает значение  $M_S$  (7) в точке  $(V_{1x}, V_{1y})$ , принадлежащей области, заданной неравенствами  $|V_x - V_{0x}| < \Delta_{xH}$ ,  $|V_y - V_{0y}| < \Delta_{yH}$ , а значение  $M_N$  (8) — в точке  $(V_{2x}, V_{2y})$ , принадлежащей оставшейся части априорной области  $W$ , площадь которой равна  $V_{x \max} V_{y \max} - 4\Delta_{xH}\Delta_{yH}$ . При этом

$$(П.1) \quad |V_{1x} - V_{0x}| < \Delta_{xH} \quad \text{и} \quad |V_{1y} - V_{0y}| < \Delta_{yH}.$$

В соответствии с [1, (8), (10)] случайные величины  $M_S = L(V_{1x}, V_{1y})$  и  $M_N = L(V_{2x}, V_{2y})$  статистически зависимы лишь при

$$(П.2) \quad |V_{1x} - V_{2x}| < \Delta_{xH}, \quad |V_{1y} - V_{2y}| < \Delta_{yH},$$

когда корреляционная функция  $\hat{S}(V_{1x}, V_{2x}; V_{1y}, V_{2y})$  существенно отлична от нуля. Из (П.1), (П.2) следует, что случайные величины  $M_S$  и  $M_N$  могут быть статистически зависимыми только при одновременном выполнении неравенств

$$(П.3) \quad |V_{2x} - V_{0x}| < 2\Delta_{xH}, \quad |V_{2y} - V_{0y}| < 2\Delta_{yH}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае постоянного фона случайное поле  $L(V_x, V_y)$  является однородным, вероятность  $P_c$  выполнения неравенств (П.3) удовлетворяет условию  $P_c < 16\Delta_{xH}\Delta_{yH}/(V_{x \max}V_{y \max} - 4\Delta_{xH}\Delta_{yH}) = 16/(m_H - 4)$ . Следовательно, при  $m_H \rightarrow \infty$  вероятность  $P_c \rightarrow 0$ , а вероятность, с которой случайные величины  $M_S$  и  $M_N$  статистически независимы, стремится к единице [3, 4]. Таким образом, при выполнении (9) случайные величины  $M_S$  и  $M_N$  приближенно статистически независимы.

Отметим, что полученная оценка вероятности  $P_c$  справедлива при любом значении отношения сигнал/шум  $z_H$ . Поскольку  $V_{1x} \rightarrow V_{0x}$ ,  $V_{1y} \rightarrow V_{0y}$  в среднеквадратическом при  $z_H \rightarrow \infty$ , при любом значении  $m_H > 4$  вероятность  $P_c \rightarrow 0$  при неограниченном увеличении отношения сигнал/шум.

**Обоснование утверждения 2.** Обозначим через  $L_x(V_x)$ ,  $L_y(V_y)$  статистически независимые гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями  $z_H B_x(V_x - V_{0x})/\sqrt{2}$ ,  $z_H B_y(V_y - V_{0y})/\sqrt{2}$  и корреляционными функциями  $B_x(V_{1x} - V_{2x})$  [1, (24)],  $B_y(V_{1y} - V_{2y})$  [1, (25)] соответственно. Из [1, (28), (29)] следует, что статистические характеристики гауссовских случайных полей  $L_z(V_x, V_y)$  [1, (17)] и  $[L_x(V_x) + L_y(V_y)]/\sqrt{2}$  асимптотически совпадают в малой окрестности точки  $(V_{0x}, V_{0y})$ , поэтому при достаточно больших отношениях сигнал/шум характеристики надежных оценок максимального правдоподобия компонент вектора скорости  $\hat{V}_x$  и  $\hat{V}_y$  приближенно совпадают с характеристиками положений абсолютных максимумов случайных процессов  $L_x(V_x)$  и  $L_y(V_y)$  при  $|V_x - V_{0x}| \leq \Delta_{xH}/2$  и  $|V_y - V_{0y}| \leq \Delta_{yH}/2$  соответственно. В соответствии с [1, (24), (25)] корреляционные функции случайных процессов  $L_x(V_x)$  и  $L_y(V_y)$  в этих подобластях имеют вид  $K_{L_x}(V_{1x}, V_{2x}) = 1 - 2\delta_{xH}|V_{1x} - V_{2x}|$  и  $K_{L_y}(V_{1y}, V_{2y}) = 1 - 2\delta_{yH}|V_{1y} - V_{2y}|$  соответственно. Введем в рассмотрение случайные процессы  $\eta_x(V_x) = [L_x(V_x) - L_x(\chi_x)]/\sqrt{2}z_H$  и  $\eta_y(V_y) = [L_y(V_y) - L_y(\chi_y)]/\sqrt{2}z_H$ , где  $\chi_x$  и  $\chi_y$  - произвольные значения компонент вектора скорости, принимающие значения из интервалов  $[V_{0x} - \Delta_{xH}/2, V_{0x} + \Delta_{xH}/2]$  и  $[V_{0y} - \Delta_{yH}/2, V_{0y} + \Delta_{yH}/2]$  соответственно. Процессы  $\eta_x(V_x)$  и  $\eta_y(V_y)$  являются гауссовскими, а их корреляционные функции  $K_{\eta_x}(V_{1x}, V_{2x})$ ,  $K_{\eta_y}(V_{1y}, V_{2y})$  имеют вид

$$(II.4) \quad K_{\eta_x}(V_{1x}, V_{2x}) = \begin{cases} 2\delta_{xH} \min(|V_{1x} - V_{0x}|, |V_{2x} - V_{0x}|), & (V_{1x} - \chi_x)(V_{2x} - \chi_x) > 0, \\ 0, & (V_{1x} - \chi_x)(V_{2x} - \chi_x) \leq 0, \end{cases}$$

$$(II.5) \quad K_{\eta_y}(V_{1y}, V_{2y}) = \begin{cases} 2\delta_{yH} \min(|V_{1y} - V_{0y}|, |V_{2y} - V_{0y}|), & (V_{1y} - \chi_y)(V_{2y} - \chi_y) > 0, \\ 0, & (V_{1y} - \chi_y)(V_{2y} - \chi_y) \leq 0. \end{cases}$$

При больших отношениях сигнал/шум оценки [1, (4)] компонент вектора скорости  $\hat{V}_x$ ,  $\hat{V}_y$  совпадают с положениями абсолютных максимумов случайных процессов  $\eta_x(V_x)$  и  $\eta_y(V_y)$  соответственно:

$$\begin{aligned} \hat{V}_x &= \arg \sup \eta_x(V_x), & |V_x - V_{0x}| &\leq \Delta_{xH}/2; \\ \hat{V}_y &= \arg \sup \eta_y(V_y), & |V_y - V_{0y}| &\leq \Delta_{yH}/2. \end{aligned}$$

С помощью (II.4), (II.5) находим, что процессы  $\eta_x(V_x)$  и  $\eta_y(V_y)$  являются гауссовскими марковскими процессами [4], коэффициенты сноса и диффузии которых соответственно равны

$$(II.6) \quad k_{1x} = z_H \delta_{xH} \begin{cases} -1, & V < V_0, \\ 1, & V > V_0, \end{cases} \quad k_{2x} = 2\delta_{xH};$$

$$(II.7) \quad k_{1y} = z_H \delta_{yH} \begin{cases} -1, & V < V_0, \\ 1, & V > V_0, \end{cases} \quad k_{2y} = 2\delta_{yH}.$$

В [4] с использованием марковских свойств процессов с коэффициентами сноса и диффузии вида (II.6), (II.7) найдено выражение для функции распределения ошибки надежной оценки. Воспользовавшись этим выражением при больших отношениях сигнал/шум, получаем, что надежные оценки  $\hat{V}_x$ ,  $\hat{V}_y$  компонент вектора скорости являются несмещенными, а их рассеяния определяются формулой (26).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куцов Р.В., Трифонов А.П. Обнаружение и оценка вектора скорости движения неоднородного пространственно-протяженного объекта по изображению. I // АиТ. 2009. № 7. С. 85–97.
2. Трифонов А.П., Захаров А.В. Эффективность обнаружения разрывного случайного радиоимпульса с неизвестными временем прихода и центральной частотой // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. № 11. С. 1329–1337.
3. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П.А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984.
4. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
5. Куцов Р.В., Трифонов А.П. Алгоритмы обнаружения движущегося объекта на изображении // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 3. С. 129–138.
6. Трифонов А.П., Куцов Р.В. Обнаружение движущегося пространственно протяженного объекта на фоне с неизвестной интенсивностью // Автометрия. 2005. Т. 41. № 1. С. 3–18.
7. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
8. Трифонов А.П., Куцов Р.В. Оценка скорости движения объекта по изображению // Автометрия. 2007. Т. 43. № 6. С. 17–27.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.А. Лотоцким.*

Поступила в редакцию 17.09.2007