

289  
Том 53, № 1  
январь 2010

282  
ISSN 0021-3470

# РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ИЗВЕСТИЯ  
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ  
ЗАВЕДЕНИЙ



ИЗДАНИЕ  
НАЦИОНАЛЬНОГО  
ТЕХНИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
УКРАИНЫ  
«КНЕВСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ»

УДК 621.391

ТРИФОНОВ А. П., КУДАЕВ А. В.

**ПОРОГОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНОК КООРДИНАТ ИЗОБРАЖЕНИЯ  
С НЕИЗВЕСТНЫМИ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ И ПЛОЩАДЬЮ\****Воронежский государственный университет,  
Воронеж, Университетская площадь 1, Россия*

**Аннотация.** Выполнен анализ максимально правдоподобного алгоритма оценки координат изображения при наличии аномальных ошибок. Найден проигрыш в точности оценки из-за наличия аномальных ошибок.

**Abstract.** The analysis of the maximum likelihood algorithm for estimating image coordinates in the presence of anomalous errors has been carried out. The loss of estimation accuracy caused by the presence of anomalous errors was also determined.

**Ключевые слова:** оценка координат, аномальная ошибка, проигрыш точности, maximum likelihood algorithm

Во многих приложениях радиоэлектроники возникает необходимость в обработке изображений с неизвестными параметрами [1–3]. В [2, 3] рассмотрена задача оценки координат изображения, но его интенсивность и площадь при этом предполагались априори известными. В тоже время, во многих случаях, обычные условия формирования и передачи изображения приводят к тому, что его максимальная интенсивность (амплитуда) и площадь априори неизвестны [1]. В [4] рассмотрено обнаружение изображения с неизвестными координатами, интенсивностью и площадью. Однако, во многих задачах необходимо определение неизвестных параметров изображения на фоне пространственного шума. Обычно основной интерес представляет оценка координат изображения. В [5] найдены характеристики совместно-эффективных оценок координат и площади

изображения с неизвестными интенсивностью. Однако, полученные в [5] выражения могут быть использованы для расчета оценок координат и площади лишь в условиях высокой апостериорной точности, когда отсутствуют аномальные ошибки [6, 7]. Рассмотрим здесь влияние аномальных ошибок на пороговые характеристики оценок координат и площади изображения с неизвестной интенсивностью.

Пусть в области  $G$  наблюдается реализация двумерного случайного поля

$$\xi(x_1, x_2) = s(x_1, x_2, a_0, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) + n(x_1, x_2), \quad (1)$$

где  $n(x_1, x_2)$  — центрированный гауссовский белый шум с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ , а распределение интенсивности полезного изображения имеет вид

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-01-00042).

$$s(x_1, x_2, a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) = af\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi}}\right). \quad (2)$$

Здесь  $a = \max_{x_1, x_2} s(x_1, x_2, a, \lambda_1, \lambda_2, \chi)$  — амплитуда

изображения, параметры  $\lambda_1, \lambda_2$  — характеризуют положения изображения в области наблюдения  $G$ , а

$$\chi = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(x_1, x_2, a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) dx_1 dx_2 \right) / a^2$$

— эквивалентная площадь полезного изображения. Функция  $f(x_1, x_2)$  в (2) описывает распределение интенсивности изображения и нормирована так, что

$$\max f(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1. \quad (3)$$

Положим, что неизвестные координаты изображения (2) принимают значения из интервалов  $[\lambda_{i \min}, \lambda_{i \max}]$  так что  $\lambda_i \in [\lambda_{i \min}, \lambda_{i \max}]$   $i=1, 2$ , а неизвестная площадь  $\chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]$ . Обозначим  $\Pi = \{[\lambda_{1 \min}, \lambda_{1 \max}], [\lambda_{2 \min}, \lambda_{2 \max}], [\chi_{\min}, \chi_{\max}]\}$  — априорная область возможных значений координат и площади изображения. Эта область такова, что при всех  $(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi$ , изображение (2) расположено внутри области наблюдения  $G$ .

Для оценки неизвестных параметров изображения (2) используем алгоритм максимального правдоподобия [6]. В соответствии с этим алгоритмом необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР), как функцию всех неизвестных параметров изображения. Согласно [4, 5] логарифм ФОР можно записать в виде

$$M(a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) = \frac{2a}{N_0} \times \int_G \int \xi(x_1, x_2) f\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi}}\right) dx_1 dx_2 - \frac{a^2 \chi}{N_0}.$$

В этом случае оценки максимального правдоподобия (ОМП)  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}$  неизвестных координат  $\lambda_1, \lambda_2$  и площади  $\chi$  определяются из соотношения

$$(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) = \arg \sup_{(\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi} M(\lambda_1, \lambda_2, \chi), \quad (4)$$

где  $M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = \sup_a M(a, \lambda_1, \lambda_2, \chi)$ . Максимизацию по амплитуде  $a$  можно выполнить аналитически. Тогда

$$M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = \sup_a M(a, \lambda_1, \lambda_2, \chi) = \rho^2(\lambda_1, \lambda_2, \chi) / 2. \quad (5)$$

В (5) функционал

$$\rho(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = \sqrt{\frac{2}{\chi N_0}} \iint_G \xi(x_1, x_2) \times f\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi}}\right) dx_1 dx_2. \quad (6)$$

Обозначим

$$\rho_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = \sqrt{\frac{2}{\chi N_0}} \iint_G n(x_1, x_2) \times f\left(\frac{x_1 - \lambda_1}{\sqrt{\chi}}, \frac{x_2 - \lambda_2}{\sqrt{\chi}}\right) dx_1 dx_2 \quad (7)$$

— функционал (6) при отсутствии полезного изображения. Функционал (7) представляет собой центрированное гауссовское случайное поле, обладающее корреляционной функцией

$$B_0(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \chi_1, \chi_2) = \langle \rho_0(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \chi_1) \rho_0(\lambda_{21}, \lambda_{22}, \chi_2) \rangle = \left[ \iint_G \int f\left(\frac{x_1 - \lambda_{11}}{\sqrt{\chi_1}}, \frac{x_2 - \lambda_{12}}{\sqrt{\chi_1}}\right) \times f\left(\frac{x_1 - \lambda_{21}}{\sqrt{\chi_2}}, \frac{x_2 - \lambda_{22}}{\sqrt{\chi_2}}\right) dx_1 dx_2 \right] / \sqrt{\chi_1 \chi_2}. \quad (8)$$

Обозначим

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = B_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) \quad (9)$$

и подставим реализацию наблюдаемых данных (1) в (5). После этого выражение (5) можем представить в виде

$$M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = [zS(\lambda_1, \lambda_2, \chi) + \rho_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi)]^2 / 2 \quad (10)$$

где

$$z^2 = 2\sigma_0^2 \chi_0 / N_0 \quad (11)$$

— отношение сигнал-шум (ОСШ) для наблюдаемого изображения.

Аналогично [4, 6, 7] априорную область  $\Pi$  возможных значений неизвестных параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \chi$  от которых зависит полезное изображение (2), разобьем на две подобласти:  $\Pi_S$  и  $\Pi_N$ . Здесь  $\Pi_S$  — подобласть априорной области  $\Pi$  в которой сигнальная составляющая (9) существенно отлична от нуля, а  $\Pi_N$  — дополнение  $\Pi_S$  до области  $\Pi$ , так что  $\Pi = \Pi_S \cup \Pi_N$ .

Пороговые свойства ОМП (4) зависят от вероятности надежной оценки [6]

$$P_0 = P[(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) \in \Pi_S].$$

В силу определения ОМП (4) это выражение можно переписать как

$$P_0 = P[H_S > H_N] \quad (12)$$

где

$$H_S = \sup M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) | (\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi_S,$$

$$H_N = \sup M(\lambda_1, \lambda_2, \chi) | (\lambda_1, \lambda_2, \chi) \in \Pi_N.$$

Если объем априорной области  $\Pi$  существенно больше объема подобласти  $\Pi_S$ , то случайные величины  $H_S$  и  $H_N$  приближенно статистически независимы [7] и (12) принимает вид

$$P_0 \cong \int F_N(H) dF_S(H). \quad (13)$$

Здесь  $F_N(H)$  — функция распределения случайной величины  $H_N$ , а  $F_S(H)$  — функция распределения случайной величины  $H_S$ . Точные значения этих распределений неизвестны.

Однако, в [4] найдены асимптотические выражения для  $F_N(H)$  и  $F_S(H)$ . Подставляя эти выражения в (13) для вероятности надежной ОМП (4) получаем

$$P_0 \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{(z+x)^2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2}\right) \right\} \exp\left(-\xi \frac{x^2}{2\pi^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) dx. \quad (14)$$

В этом выражении

$$\xi = \Lambda_1 \Lambda_2 \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} b(\chi) d\chi, \quad (15)$$

— приведенный объем априорной области  $\Pi$  возможных значений неизвестных координат и площади изображения [7],  $\Lambda_i = \lambda_{i \max} - \lambda_{i \min}$ ,  $i=1, 2$ , а

$$b^2(\chi) = B_{11}(\chi) (B_{22}(\chi) B_{33}(\chi) - B_{23}^2(\chi)) - B_{12}(\chi) (B_{21}(\chi) B_{33}(\chi) - B_{23}(\chi) B_{31}(\chi)) + B_{13}(\chi) (B_{21}(\chi) B_{32}(\chi) - B_{22}(\chi) B_{31}(\chi)) \quad (16)$$

— определитель матрицы  $\|B_{ij}(\chi)\|$ ,  $i, j=1, 2, 3$ , элементы которой найдены в [4] и имеют вид

$$B_{11}(\chi) = \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right]^2 dx_1 dx_2,$$

$$B_{12}(\chi) = \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_1 dx_2,$$

$$B_{13}(\chi) = B_{31}(\chi) = \frac{1}{2\chi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \left( x_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + f(x_1, x_2) \right) dx_1 dx_2,$$

$$B_{22}(\chi) = \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right]^2 dx_1 dx_2,$$

$$B_{23}(\chi) = B_{32}(\chi) = \frac{1}{2\chi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \times \\ \times \left( x_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + f(x_1, x_2) \right) \times \\ \times dx_1 dx_2, \\ B_{33}(\chi) = \frac{1}{4\chi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( x_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + x_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + f(x_1, x_2) \right)^2 dx_1 dx_2. \quad (17)$$

Формула (14) является приближенной, но ее точность улучшается с увеличением ОСШ  $z^2$  (11) и приведенного объема  $\xi$  (15). Согласно [7] приведенный объем характеризует число различных значений неизвестных параметров. В дальнейшем предполагается, что приведенный объем (15) априорной области  $\Pi$  достаточно велик, так что

$$\xi \gg 1. \quad (18)$$

В этом случае для условных рассеяний ОМП координат и площади с учетом аномальных ошибок, используя [6, 7], получаем выражения

$$V(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \langle (\hat{\lambda}_1 - \lambda_{01})^2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0 \rangle = \\ = P_0 D(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) + (1 - P_0) V_a(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}), \\ V(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \langle (\hat{\lambda}_2 - \lambda_{02})^2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0 \rangle = \\ = P_0 D(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) + (1 - P_0) V_a(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{02}), \\ V(\hat{\chi} | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \langle (\hat{\chi} - \chi_0)^2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0 \rangle = \\ = P_0 D(\hat{\chi} | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) + (1 - P_0) V_a(\hat{\chi} | \chi_0). \quad (19)$$

Здесь дисперсии надежных оценок найдены в [5] и определяются выражениями

$$D(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = (B_{22} B_{33} - B_{23}^2) / z^2 \Theta, \\ D(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = (B_{11} B_{33} - B_{13}^2) / z^2 \Theta, \\ D(\hat{\chi} | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = (B_{11} B_{22} - B_{12}^2) / z^2 \Theta,$$

$$B_{ij} = B_{ij}(\chi_0), \quad \Theta = b^2(\chi_0). \quad (20)$$

Для расчета рассеяний аномальных оценок  $V_a(\cdot)$  надо найти совместную плотность вероятности аномальных оценок  $W_a(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi})$ .

С этой целью, аналогично [4, 8, 9] априорную область  $\Pi$  возможных значений параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \chi$  разобьем на  $K$  подобластей  $\Pi_k = \{[\lambda_{1 \min}, \lambda_{1 \max}], [\lambda_{2 \min}, \lambda_{2 \max}], [\chi_{1k}, \chi_{2k}]\}$  таких, что для любой точки  $\tilde{\chi}_k \in \Pi_k$  выполняется условие

$$\delta = \max[\Delta\chi_k / \tilde{\chi}_k] < 1, \quad (21)$$

где  $\Delta\chi_k = \chi_{2k} - \chi_{1k}$ . Тогда в каждой подобласти  $\Pi_k$  при  $\delta \rightarrow 0$  случайное поле  $M_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$  можно приближенно считать локально-однородным. Здесь  $M_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi) = M(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$  (10) при  $z = 0$ . В силу локальной однородности положение абсолютного максимума функционала  $M_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$  в каждой из подобластей  $\Pi_k$  описывается плотностью вероятности

$$W_{ak}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) = \begin{cases} 1 / \Lambda_1 \Lambda_2 \Delta\chi_k, & (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) \in \Pi_k, \\ 0, & (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) \notin \Pi_k. \end{cases} \quad (22)$$

Для того чтобы найти плотность вероятности оценки во всей области аномальных ошибок  $\Pi_N$ , потребуем далее, чтобы значения поля  $M_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$  в различных подобластях  $\Pi_k$  были приближенно статистически независимы. Для этого достаточно, чтобы объем каждой из подобластей  $\Pi_k$  был значительно больше объема области значений  $(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$ , где корреляционная функция (8) существенно отлична от нуля. Объем подобласти  $\Pi_k$  будет существенно больше объема области высокой корреляции случайного поля (7), если [7]

$$\xi_k = \Lambda_1 \Lambda_2 \Delta\chi_k b(\tilde{\chi}_k) \gg 1$$

Величина  $b^2(\chi)$  определяется из (16).

Плотность вероятности оценок по всей области аномальных ошибок  $\Pi_N$  можно записать как

$$W_a(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) = \sum_{k=1}^K W_{ak}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) P_{mk}. \quad (23)$$

Здесь  $P_{mk} = P[H_k > H_r, r=1, \dots, K, k \neq r]$  — вероятность попадания ОМП в подобласть  $\Pi_k$ ;  $H_k$  и  $H_r$  — абсолютные максимумы функционала  $M_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$  в подобластях  $\Pi_k$  и  $\Pi_r$  соответственно. Очевидно

$$P_{mk}(h) = \int \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^K P_{Nr}(h) dP_{Nk}(h), \quad (24)$$

где  $P_{Nk}(h)$  — функция распределения абсолютных максимумов функционала  $M_0(\lambda_1, \lambda_2, \chi)$  в подобласти  $\Pi_k$ , найденная в [4].

Подставляя (22) и значения  $P_{Nk}(h)$  из [4] в (24) и производя интегрирование, получаем

$$P_{mk} = b(\tilde{\chi}) \Delta \chi_k / \sum_{r=1}^K b(\tilde{\chi}_r) \Delta \chi_r. \quad (25)$$

Подставляя далее (25) в (23) и учитывая (18) находим плотность вероятности оценок при наличии только аномальных ошибок

$$W_a(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) \approx \begin{cases} \frac{\sum_{k=1}^K \varphi_k b(\tilde{\chi}_k)}{\Lambda_1 \Lambda_2 \sum_{k=1}^K b(\tilde{\chi}_k) \Delta \chi_k}, & (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) \in \Pi, \\ 0, & (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) \notin \Pi, \end{cases} \quad (26)$$

где  $\varphi_k = 1$  при  $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) \in \Pi_k$  и  $\varphi_k = 0$  при  $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) \notin \Pi_k$ .

Когда выполняется (21) функция  $b(\chi)$  мало изменяется в пределах подобласти  $\Pi_k$ , а плотность вероятности (26) не зависит от способа разбиения априорной области  $\Pi$  на подобласти  $\Pi_k$ . Это позволяет в (26) заменить сумму соответствующим интегралом и записать приближенное выражение для плотности вероятности аномальных оценок

$$W_a(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) \approx$$

$$\approx \begin{cases} b(\hat{\chi}) / \Lambda_1 \Lambda_2 \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} b(\chi) d\chi, & (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) \in \Pi, \\ 0, & (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\chi}) \notin \Pi. \end{cases} \quad (27)$$

На основе свойства согласованности из (27) находим одномерные плотности вероятности каждой из аномальных оценок. Используя эти плотности вероятности, для условных рассеяний аномальных оценок можем записать

$$V_a(\hat{\lambda}_i | \lambda_{0i}) = \int_{\lambda_{i \min}}^{\lambda_{i \max}} (\lambda - \lambda_{0i})^2 d\lambda / \Lambda_i, \quad i=1,2,$$

$$V_a(\hat{\chi} | \chi_0) = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} (\chi - \chi_0)^2 b(\chi) d\chi / \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} b(\chi) d\chi. \quad (28)$$

Таким образом, точность ОМП координат и площади с учетом аномальных ошибок можно характеризовать рассеяниями оценок (19). Для расчета рассеяний оценок надо в (19) подставить вероятность надежной оценки из (14), дисперсии надежных оценок из (20) и рассеяния аномальных оценок из (28). Найденные выражения дают представление о точности совместных ОМП координат изображения при наличии пороговых эффектов. Однако, в ряде задач более удобно характеризовать точность оценки местоположения изображения величиной среднего квадрата расстояния

$$\Delta R = \sqrt{(\hat{\lambda}_1 - \lambda_{01})^2 + (\hat{\lambda}_2 - \lambda_{02})^2}$$

между местоположением изображения  $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$  найденным в результате оценки и истинным местоположением изображения  $(\lambda_{01}, \lambda_{02})$ . При совместной оценке координат и площади, эта величина определяется выражением

$$\begin{aligned} V_R(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) &= \langle \Delta R^2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0 \rangle = \\ &= V(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) + V(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \\ &= P_0 [D(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) + D(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0)] + \\ &+ (1 - P_0) [V_a(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}) + V_a(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{02})] \end{aligned} \quad (29)$$

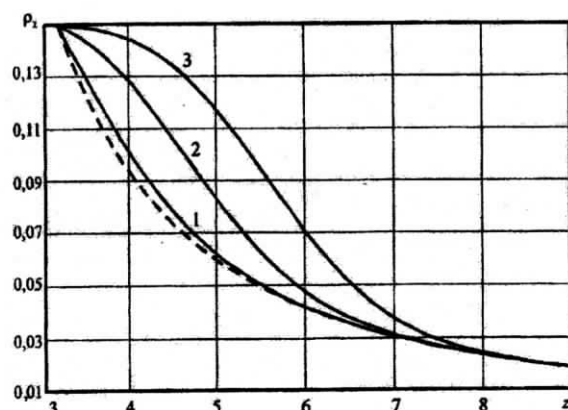


Рис. 1

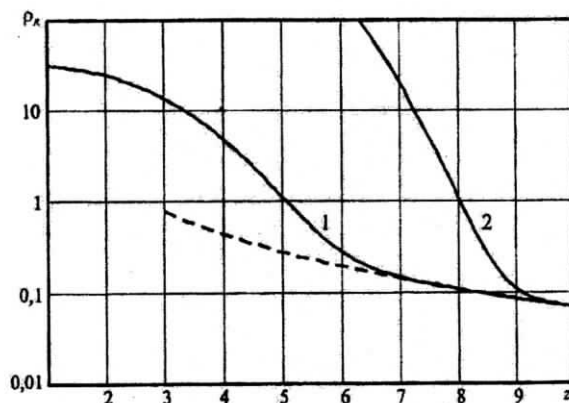


Рис. 2

Полагая здесь  $P_0 = 1$ , получаем средний квадрат расстояния между оценкой местоположения и его истинным значением при отсутствии аномальных ошибок

$$D_R(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = D(\hat{\lambda}_1 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) + D(\hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0). \quad (30)$$

Сопоставление (19) и (20), а также (29) и (30) позволяет исследовать роль пороговых эффектов при оценке параметров изображения, а также сформулировать условия, при выполнении которых можно пренебречь аномальными ошибками.

Конкретизируем полученные общие формулы для оценки координат изображения, распределение интенсивности которого описывается формулой

$$f(x_1, x_2) = \exp \left[ -\pi \frac{(x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi)^2}{2\gamma_1^2} - \pi \frac{(x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi)^2}{2\gamma_2^2} \right]. \quad (31)$$

Если  $\gamma_1 \gamma_2 = 1$ , то функция (31) удовлетворяет условиям нормировки (3). Сечения функции (31) параллельные плоскости регистрации изображения имеют форму эллипсов, длина осей которых определяется величинами  $\gamma_1$  и

$\gamma_2$ , а  $\varphi$  — угол между осью эллипса  $\gamma_1$  и осью координат  $x_1$ . Подставляя (31) в (17) получаем

$$\begin{aligned} B_{11}(\chi) &= \frac{\pi}{2\chi} \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cos^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \sin^2 \varphi \right), \\ B_{12}(\chi) &= B_{21}(\chi) = \frac{\pi}{4\chi} \left( \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \sin 2\varphi, \\ B_{22}(\chi) &= \frac{\pi}{2\chi} \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cos^2 \varphi \right), \\ B_{13}(\chi) &= B_{23}(\chi) = B_{31}(\chi) = B_{32}(\chi) = 0, \\ B_{33}(\chi) &= 1/4\chi^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Для изображения (31), когда неизвестны координаты, площадь и интенсивность изображения условное рассеяние оценки площади (19) принимает вид

$$\begin{aligned} V(\hat{\chi} | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) &= P_0 \frac{4\chi_0^2}{z^2} + \\ &+ (1 - P_0) \left( \kappa - 2 \frac{\kappa}{(\kappa - 1)} \ln(\kappa) \alpha_0 + \alpha_0^2 \right) \chi_{\min}^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь  $\kappa = \chi_{\max} / \chi_{\min}$  — динамический диапазон изменения неизвестной площади изображения,  $\alpha_0 = \chi_0 / \chi_{\min}$  — нормированное истинное значение площади, а вероятность надежной оценки (14) равна

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x+z)^2}{2}\right] + \exp\left[-\frac{(x-z)^2}{2}\right] \right\} \times \\ \times \exp\left[-\frac{m(1-\kappa^{-1})x^2}{8\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] dx,$$

где

$$m = \Lambda_1 \Lambda_2 / \chi_{\min} = m_1 m_2, \quad m_i = \Lambda_i / \sqrt{\chi_{\min}}. \quad (34)$$

Величина (34) представляет собой отношение площади априорной области возможных значений неизвестных координат изображения к минимально возможному значению площади изображения. При отсутствии аномальных ошибок дисперсия надежной оценки площади (20) определяется выражением

$$D(\hat{\chi} | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = 4\chi_0^2 / z^2. \quad (35)$$

Если координаты изображения априори известны, то для дисперсии надежной оценки площади изображения с неизвестной интенсивностью из [5] имеем

$$D(\hat{\chi} | \chi_0) = 1 / z^2 B_{33}. \quad (36)$$

Подставляя сюда значение  $B_{33}(\chi_0)$  из [5] (32) получаем, что (35) и (36) совпадают. Следовательно, для изображения (31) априорное незнание координат не влияет на точность надежной оценки площади.

На рис. 1 для значений  $\kappa=10$  и  $\chi_0 = (\chi_{\min} + \chi_{\max}) / 2$  штриховой линией представлена зависимость нормированной дисперсии надежной оценки площади

$$\rho_{0\chi}(z) = D(\hat{\chi} | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) / (\chi_{\min} - \chi_{\max})^2 = \\ = D(\hat{\chi} | \chi_0) / (\chi_{\min} - \chi_{\max})^2$$

от ОСШ  $z$  (11). Кривые 1–3 на рис. 1 показывают зависимость нормированного рассеяния оценки площади

$$\rho_{\chi}(z) = V(\hat{\chi} | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) / (\chi_{\min} - \chi_{\max})^2$$

изображения с априори неизвестными координатами. Кривая 1 рассчитана по формуле (33)

при  $m_1 = m_2 = 10$  и  $m = 10^2$ , кривая 2 — при  $m_1 = m_2 = 10^2$  и  $m = 10^4$ , а кривая 3 — при  $m_1 = m_2 = 10^3$  и при  $m = 10^6$ . Таким образом, в отсутствии аномальных ошибок априорное незнание координат изображения не влияет на точность оценки площади, а наличие аномальных ошибок приводит к увеличению рассеяния оценки площади в 1,5–2 раза. Проигрыш в точности оценки вследствие априорного незнания координат возрастает с увеличением параметра  $m$  (34), который определяет число изображений с минимальной площадью, которые могут разместиться в априорной области возможных значений неизвестных координат.

Положим, что границы области возможных значений неизвестных координат являются симметричными так что

$$\lambda_{i\min} = -\Lambda_i / 2, \quad \lambda_{i\max} = \Lambda_i / 2, \quad i=1,2$$

Кроме того, пусть обрабатываемое изображение расположено в начале координат

$$\lambda_{01} = \lambda_{02} = 0.$$

Тогда для изображения (31) средний квадрат расстояния между оценкой местоположения изображения и его истинным значением (29) принимает вид

$$V_R(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \\ = P_0 \frac{2\chi_0}{\pi z^2} \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) + \frac{(1-P_0)}{12} (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2). \quad (37)$$

При отсутствии аномальных ошибок величина среднего квадрата расстояния (30) определяется выражением

$$D_R(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 | \lambda_{01}, \lambda_{02}, \chi_0) = \frac{2\chi_0}{\pi z^2} \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right). \quad (38)$$

На рис. 2 при  $\gamma_1 = \gamma_2$ ,  $\chi_0 = (\chi_{\min} + \chi_{\max}) / 2$  и  $\kappa = 10$  приведены зависимости нормированного среднего квадрата расстояния между оценкой местоположения и его истинным значением для изображения (31) с неизвестными площадью и интенсивностью от ОСШ  $z$  (11).

Штриховой линией представлена зависимость  $\rho_{0R}(z) = D_R(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 | 0, 0, \chi_0) / \chi_{\min}$  при отсутствии аномальных ошибок (38). Кривые 1 и 2 показывают зависимость

$$\rho_R(z) = V_R(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 | 0, 0, \chi_0) / \chi_{\min}$$

с учетом пороговых эффектов. Кривая 1 рассчитана по формуле (37) при  $m_1 = m_2 = 10$  и  $m = 10^2$ , а кривая 2 — при  $m_1 = m_2 = 10^2$  и  $m = 10^4$ . Из сопоставления штриховой и сплошных кривых следует, что наличие аномальных ошибок может привести к существенному увеличению среднего квадрата расстояния между оценкой местоположения и его истинным значением для изображения с неизвестными площадью и интенсивностью. При этом проигрыш в точности оценки вследствие наличия аномальных ошибок возрастает с увеличением параметра  $m$  (34).

Результаты анализа пороговых эффектов позволяют определить условия при выполнении которых можно пренебречь влиянием аномальных ошибок. Согласно рис. 1 при оценке площади изображения с неизвестными координатами и интенсивностью влиянием аномальных ошибок можно пренебречь, если ОСШ  $z > 5,5$  для  $m = 10^2$  и  $z > 7$  для  $m = 10^4$ .

Соответственно, при оценке местоположения изображения с неизвестными площадью и интенсивностью, аномальными ошибками можно пренебречь (рис. 2), если ОСШ  $z > 6,5$  при  $m = 10^2$  и  $z > 9,5$  при  $m = 10^4$ . Отметим, что в общем случае, пороговые эффекты оказывают более существенное влияние на точность оцен-

ки координат, чем на точность оценки площади изображения с неизвестной интенсивностью.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Красильников Н. Н. Теория передачи и восприятия изображений / Н. Н. Красильников. — М.: Радио и связь, 1986. — 248 с.
2. Трифонов А. П. Характеристики обнаружения и оценки положения источника сигнала, модулирующего пуассоновское случайное поле / А. П. Трифонов, А. В. Зюльков // Радиозлектроника. — 1981. — № 12. — С.32—38. — (Изв. вузов).
3. Трифонов А. П. Характеристики оптимальных оценок параметров оптических сигналов на фоне пространственных помех / А. П. Трифонов, А. В. Зюльков, В. К. Маршаков // Радиозлектроника. — 1981. — № 1. — С.14—21. — (Изв. вузов).
4. Трифонов А. П. Эффективность обнаружения изображения с неизвестными координатами и площадью / А. П. Трифонов, А. В. Кудав // Радиозлектроника. — 2008. — № 1. — С.3—14. — (Изв. вузов).
5. Трифонов А. П. Оценка координат изображения с неизвестными интенсивностью и площадью / А. П. Трифонов, А. В. Кудав // Радиозлектроника. — 2009. — №5. — С. 3—14. — (Изв. вузов).
6. Куликов Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М.: Сов. Радио, 1978. — 296 с.
7. Трифонов А. П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
8. Трифонов А. П. Оценка местоположения точечной цели в зоне Френеля приемной антенны / А. П. Трифонов, С. И. Шарпов // Радиотехника и электроника. — 1984. — Т. 29. — №2. — С. 242—249.
9. Проняев Е. В. Анализ пороговых эффектов при обработке сигнала в условиях параметрической априорной неопределенности / Е. В. Проняев // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2003. — Т. 6. — № 2. — С. 72—79.

Поступила в редакцию 28.04.2009