286 285

Том 53, № 5
май 2010

ISSN 0021-3470

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

ИЗДАНИЕ НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА УКРАИНЫ «КИЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

УДК 621.391

ТРИФОНОВ А. П., РУДНЕВ П. Е.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНКИ АМПЛИТУДЫ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНОГО КВАЗИРАДИОСИГНАЛА*

Воронежский государственный университет, Россия, Воронеж, 394006, Университетская пл., 1

Аннотация. Выполнены синтез и анализ максимально правдоподобного алгоритма оценки амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала с неизвестными амплитудой и фазой, длительность которого может составлять несколько периодов или долю периода гармонического колебания. Найдены характеристики классической максимально правдоподобной оценки амплитуды узкополосного радиосигнала при приеме сверхширокополосного квазирадиосигнала. Сформулированы условия применимости модели узкополосного радиосигнала для решения задачи оценки амплитуды с заданной точностью

Abstract. The synthesis and analysis of the maximum likelihood algorithm for estimating the amplitude of ultrawideband quasi-radio signal with unknown amplitude and phase have been performed. The duration of the specified signal can amount to several periods or a fraction of the period of harmonic oscillation. The characteristics of the classical maximum likelihood estimate of the amplitude of a narrow-band radio signal were found while receiving an ultrawideband quasi-radio signal. The conditions of applicability of the model of narrow-band radio signal were defined for solving the problem of amplitude estimation with the specified accuracy

Ключевые слова: амплитуда, оценка, сверхширокополосный квазирадиосигнал, оценка максимального правдоподобия, распределение, смещение оценки, дисперсия оценки, amplitude, estimation, ultrawideband quasiradiosignal, maximum likelihood estimation, distribution, bias of estimation, dispersion of estimation

Задача оптимальной оценки амплитуды узкополосного радиосигнала с неизвестными амплитудой и фазой на фоне белого шума достаточно подробно изучена и ее уже можно назвать классической для статистической радиотехники [1, 2]. Под узкополосными понимаются сигналы, относительная полоса которых, то есть отношение полосы частот к центральной частоте их спектров, много меньше единицы. С этой точки зрения, так называемые широкополосные сигналы (радиосигналы с большой базой) так же являются узкополосными. Узкополосные (квазигармонические) радиосигналы долгое время являлись одним из основных объектов исследования в радиоэлектронике[1–3].

В последние годы все больший интерес и применение в радиоэлектронике и ее приложениях находят так называемые сверхширокополосные сигналы (сигналы без несущей) [4–6]. У этих сигналов относительная полоса частот может быть порядка единицы и более. При таких значениях относительной полосы обычные определения огибающей и фазы теряют ясный физический смысл, что может привести к нецелесообразности их использования. Поэтому, известные результаты по оценке параметров радиосигналов с неизвестными амплитудой и фазой существенно использующие

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07–01–00042)

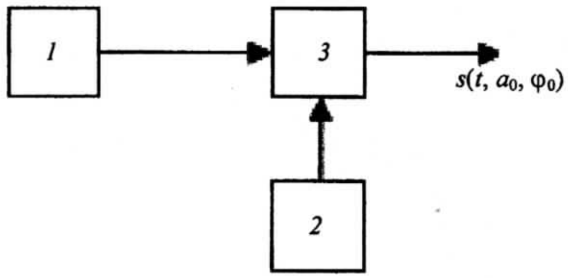

Рис. 1

их узкополосность не могут быть применены к сверхширокополосным сигналам. Среди множества сверхширокополосных сигналов [4–6] выделим в отдельный класс сверхширокополосные сигналы, структура которых подобна структуре узкополосных радиосигналов. Назовем их сверхширокополосными квазирадиосигналами.

Как известно [1, 3] узкополосный радиосигнал (без фазовой модуляции) можно записать в виде

$$s(t, a_0, \varphi_0) = a_0 f(t)\cos(\omega_0 t - \varphi_0). \qquad (1)$$

Если полоса частот $\Delta\omega$ сигнала $s(t, a_0, \varphi_0)$ и частота ω_0 удовлетворяют условию

$$\Delta\omega \ll \omega_0, \qquad (2)$$

то сигнал (1) является узкополосным радиосигналом. Тогда a_0, ω_0, φ_0 — амплитуда, частота и начальная фаза, а $f(t)$ — нормированная ($\max f(t) = 1$) огибающая узкополосного радиосигнала (1). Отметим, что a_0, ω_0, φ_0 и $f(t)$ могут быть найдены по заданному узкополосному радиосигналу $s(t, a_0, \varphi_0)$ [1, 3]. Очевидно, сигнал вида (1) можно получить с помощью простейшего модулятора, показанного на рис. 1. Здесь *1* — генератор гармонического колебания

$$a_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0), \qquad (3)$$

2 — генератор функции $f(t)$, *3* — перемножитель. Выбором модулирующей функции $f(t)$ можно обеспечить полосу частот $\Delta\omega$ сигнала (1) близкую к частоте ω_0. В этом случае формула (1) описывает сверхширокополосный квазирадиосигнал. Соответственно, a_0, ω_0, φ_0 являются параметрами гармонического колебания (3), используемого для формирования сверхширокополосного квазирадиосигнала (1). Эти параметры можно определить по сверхширокополосному квазирадиосигналу $s(t, a_0, \varphi_0)$ только если модулирующая функция $f(t)$ априори известна, что предполагается в дальнейшем.

Таким образом, изменение модулирующей функции $f(t)$ позволяет описать формулой (1) как сверхширокополосные квазирадиосигналы с большой относительной полосой частот, так и узкополосные радиосигналы, для которых выполняется (2). В частности, при малой длительности модулирующей функции получаем сверхширокополосный квазирадиосигнал, у которого на интервале, равном длительности сигнала размещается лишь несколько периодов или даже доли периода гармонического колебания (3).

В данной работе синтезирован максимально правдоподобный алгоритм оценки амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала с неизвестными амплитудой и фазой. Найдены характеристики оценки и характеристики известного [1, 2] алгоритма оценки, синтезированного в предположении, что выполняется (2). Полученные результаты позволили в частности сформулировать количественно условия применимости модели узкополосного радиосигнала в задаче оценки, при которых обеспечивается необходимая точность известного классического решения задачи оценки амплитуды [1, 2].

Рассмотрим задачу оценки амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала (1) на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Наблюдаемую смесь сигнала (1) и шума $n(t)$ представим в виде

$$\xi(t)=s(t,a_0,\varphi_0)+n(t),\quad t\in[0,T]. \tag{4}$$

Для синтеза алгоритма оценки амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала (1) воспользуемся методом максимального правдоподобия [1, 2]. Согласно этому методу, по наблюдаемым данным (4) надо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) $L(a,\varphi)$ зависящий от неизвестных значений a и φ. Тогда оценка максимального правдоподобия $\hat{a}$ параметра a_0 определяется как значение a, при котором логарифм ФОП достигает абсолютного (наибольшего) максимума.

При помехе в виде гауссовского белого шума логарифм ФОП можно записать как[1]

$$L(a,\varphi)= \tag{5}$$

$$=\frac{2}{N_0}\int_0^T\xi(t)s(t,a,\varphi)dt-\frac{1}{N_0}\int_0^T s^2(t,a,\varphi)dt.$$

Подставим в (5) явный вид сверхширокополосного квазирадиосигнала (1) и преобразуем к виду

$$L(a,\varphi)=a(X\cos\varphi+Y\sin\varphi)-$$

$$-Qa^2(1+\rho_c\cos 2\varphi+\rho_s\sin 2\varphi)/2; \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
X&=\frac{2}{N_0}\int_0^T\xi(t)f(t)\cos\omega_0 t\,dt,\\
Y&=\frac{2}{N_0}\int_0^T\xi(t)f(t)\sin\omega_0 t\,dt,\\
Q&=\frac{1}{N_0}\int_0^T f^2(t)dt,\\
\rho_c&=\frac{1}{QN_0}\int_0^T f^2(t)\cos 2\omega_0 t\,dt,\\
\rho_s&=\frac{1}{QN_0}\int_0^T f^2(t)\sin 2\omega_0 t\,dt.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Решая систему уравнений правдоподобия

$$\left.\frac{\partial L(a,\varphi)}{\partial a}\right|_{\hat{a},\hat{\varphi}}=0;\quad \left.\frac{\partial L(a,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\hat{a},\hat{\varphi}}=0,$$

для оценки амплитуды получим (8) — см. внизу с. 24.

Алгоритм оценки (8) можно реализовать в виде измерителя, блок-схема которого представлена на рис. 2. Здесь *1* — умножитель, *2* — интегратор на интервале времени T, *3* — квадратор, *4* — сумматор, *5* — блок извлечения корня.

Если полоса частот $\Delta\omega$ много меньше ω_0, то есть принимается узкополосный радиосигнал и выполняется (2), то $\rho_c, \rho_s \ll 1$. Тогда, положив в (8) $\rho_c, \rho_s=0$, получим следующее выражения для оценки амплитуды:

$$\tilde{a}=\left[\sqrt{X^2+Y^2}\right]\Big/Q. \tag{9}$$

$$\hat{a}=\frac{\sqrt{X^2[(1-\rho_c)^2+\rho_s^2]+Y^2[(1+\rho_c)^2+\rho_s^2]-2\rho_s XY}}{Q(1-\rho_c^2-\rho_s^2)} \tag{8}$$

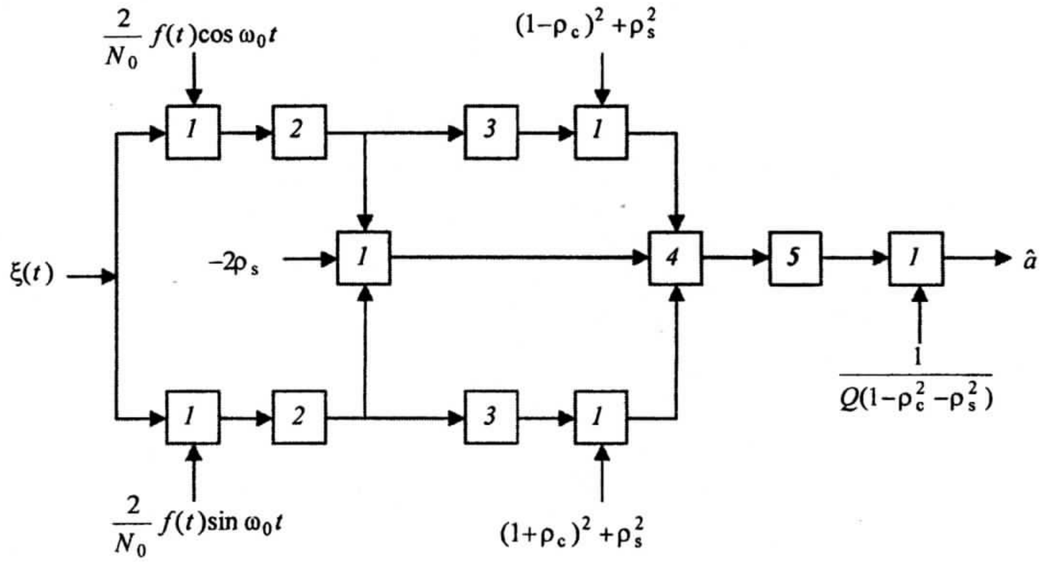

Рис. 2

Формула (9), полученная, как частный случай (8), в предположении, что выполняется (2), совпадает с известной формулой для оценки амплитуды узкополосного радиосигнала с неизвестными амплитудой и начальной фазой [2]. Блок–схема квадратурного измерителя, реализующая алгоритм оценки, определяемый формулой (9), показана на рис. 3. Обозначения на рис. 3 соответствуют обозначениям на рис. 2.

Сравнивая блок–схемы, изображенные на рис. 2 и 3, можно сделать вывод о том, что реализация алгоритма оценки амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала заметно сложнее реализации алгоритма аналогичной оценки амплитуды узкополосного радиосигнала. В результате, структура максимально правдоподобного алгоритма оценки амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала (рис. 2) существенно отличается от структуры максимально правдоподобного алгоритма оценки амплитуды узкополосного радиосигнала (рис. 3).

Найдем основные характеристики максимально правдоподобной оценки (8) амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала — распределение, а также условные смещение и дисперсию:

$$b_1(\hat{a}|a_0,\varphi_0)=\langle\hat{a}\rangle-a_0;$$

$$D_1(\hat{a}|a_0,\varphi_0)=\left\langle\hat{a}^2\right\rangle-\langle\hat{a}\rangle^2. \qquad (10)$$

В (10) усреднение выполняется по реализациям шума при фиксированных истинных значениях параметров a_0, φ_0. Посколь-

$$W_{XY}(X,Y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left\{-\frac{\left[\frac{(X-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(Y-m_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2R(X-m_x)(Y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]}{2(1-R^2)}\right\} \qquad (11)$$

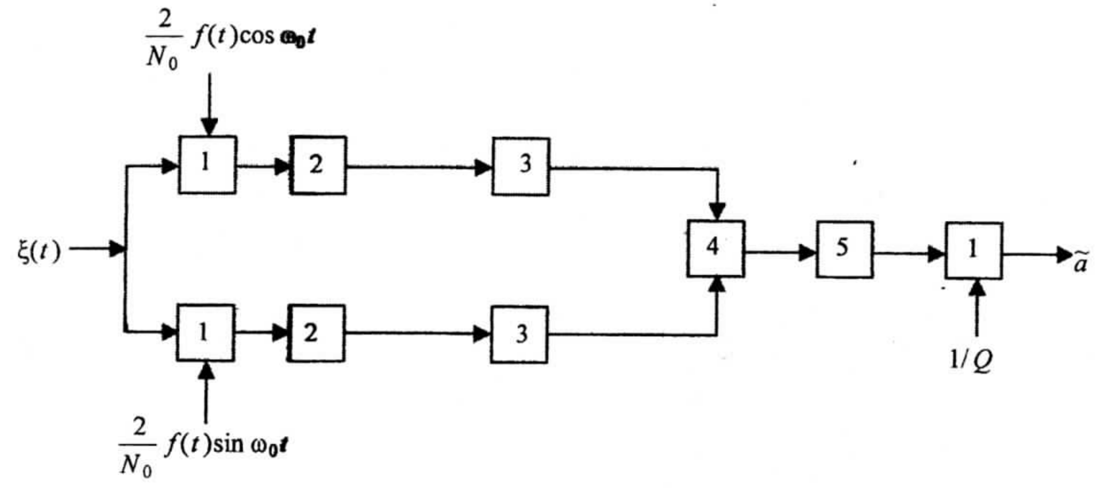

Рис. 3

ку оценка амплитуды (8) определяется через случайные величины (СВ) X и Y (7), то плотность вероятности этой оценки можно определить, зная совместную плотность вероятности СВ X и Y. Случайные величины X и Y (7) являются линейными функционалами от гауссовского случайного процесса. Поэтому их совместная гауссовская плотность вероятности имеет вид [1] (11) — см. внизу стр. 25, где

$$m_x = a_0 Q[\cos\varphi_0(1+\rho_c)+\rho_s \sin\varphi_0];$$

$$m_y = a_0 Q[\sin\varphi_0(1-\rho_c)+\rho_s \cos\varphi_0];$$

$$\sigma_x^2 = Q(1+\rho_c);\ \sigma_y^2 = Q(1-\rho_c);$$

$$R = \rho_s / \sqrt{1-\rho_c^2}.$$

Введя замены $Z = (1+\rho_c)Y - \rho_s X$ и $P = (1-\rho_c)X - \rho_s Y$, из (8) получим следующее выражение для максимально правдоподобной оценки амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала:

$$\hat{a} = \frac{\sqrt{Z^2+P^2}}{Q(1-\rho_c^2-\rho_s^2)}. \qquad (12)$$

Случайные величины Z и P — гауссовские, так как они являются линейными комбинациями гауссовских СВ X и Y (7). Совместную плотность вероятности СВ Z и P можно получить из (11) [1]

$$W_{ZP}(Z,P) = W_{XY}(X = [(1+\rho_c)P + \rho_s Z]/g^2,$$

$$Y = [(1-\rho_c)Z + \rho_s P]/g^2)|D_0|,$$

$$|D_0| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \frac{\partial([(1+\rho_c)P+\rho_s Z]/g^2)}{\partial Z} & \frac{\partial([(1+\rho_c)P+\rho_s Z]/g^2)}{\partial P} \\ \frac{\partial([(1-\rho_c)Z+\rho_s P]/g^2)}{\partial Z} & \frac{\partial([(1-\rho_c)Z+\rho_s P]/g^2)}{\partial P} \end{matrix} \right\| = 1,$$

а $g^2 = 1-\rho_c^2-\rho_s^2$.

Сделаем замену переменных в (12): $Z = \Lambda\cos\theta$, $P = \Lambda\sin\theta$. Тогда:

$$\hat{a} = \Lambda / Q(1-\rho_c^2-\rho_s^2).$$

Выполним переход от совместной плотности вероятности СВ Z и P к совместной плотности вероятности СВ Λ и θ. Для этого воспользуемся формулой [1]:

$$W_{\Lambda\theta}(\Lambda,\theta)=W_{ZP}(Z=\Lambda\cos\theta, P=\Lambda\sin\theta)|D|, \tag{13}$$

где якобиан преобразования

$$|D|=\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial(\Lambda\cos\theta)}{\partial\Lambda} & \dfrac{\partial(\Lambda\cos\theta)}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial(\Lambda\sin\theta)}{\partial\Lambda} & \dfrac{\partial(\Lambda\sin\theta)}{\partial\theta}\end{matrix}\right\|=\Lambda. \tag{14}$$

Затем переходя в (13) от СВ Λ и θ к СВ $a=\Lambda/Q(1-\rho_c^2-\rho_s^2)$ и θ, находим

$$W_{a\theta}(a,\theta)=W_{\Lambda\theta}(a=\Lambda/Q(1-\rho_c^2-\rho_s^2),\theta)|\widetilde{D}|, \tag{15}$$

где якобиан преобразования

$$|\widetilde{D}|=1/Q(1-\rho_c^2-\rho_s^2).$$

В результате получим следующее выражение для совместной плотности вероятности СВ a и θ:

$$W_{a\theta}(a,\theta)= \tag{16}$$

$$=C_1Qa\exp\left[-\left(\gamma_1^2(\theta)Qa^2-2\delta_1(\theta)\sqrt{Q}a\right)\right].$$

Здесь введены обозначения:

$$C_1=\frac{\sqrt{1-\rho_c^2-\rho_s^2}}{2\pi}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{z_0^2}{2}(1+\rho_c\cos 2\varphi_0+\rho_s\sin 2\varphi_0)\right],$$

$$\delta_1(\theta)=z_0(\cos(\theta-\varphi_0)+$$

$$+\rho_c\cos(\theta+\varphi_0)+\rho_s\sin(\theta+\varphi_0))/2,$$

$$\gamma_1^2(\theta)=(1+\rho_c\cos 2\theta+\rho_s\sin 2\theta)/2.$$

Параметр

$$z_0^2=Qa_0^2=a_0^2\int_0^T f^2(t)dt/N_0 \tag{17}$$

представляет собой отношение удвоенной энергии сигнала (1) при выполнении (2) к спектральной плотности белого шума, то есть (17) — отношение сигнал/шум для узкополосного радиосигнала [1, 2].

Согласно (16), плотность вероятности максимально правдоподобной оценки (8) амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала можно записать как

$$W_a(a)=\int_{-\pi}^{\pi}W_{a\theta}(a,\theta)d\theta= \tag{18}$$

$$=C_1Qa\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left[-\left(\gamma_1^2(\theta)Qa^2-2\delta_1(\theta)\sqrt{Q}a\right)\right]d\theta.$$

Используя (18), получаем, что в выражения для смещения и дисперсии оценки амплитуды (10) надо подставить значения первых двух моментов оценки

$$\langle\hat{a}\rangle=\int_0^\infty aW_a(a)da,$$

$$\left\langle\hat{a}^2\right\rangle=\int_0^\infty a^2W_a(a)da. \tag{19}$$

Выполняя в (19) интегрирование по a, получим:

$$\langle\hat{a}\rangle=(C_1/\sqrt{Q})\int_{-\pi}^{\pi}J_1(\theta)d\theta,$$

$$\left\langle\hat{a}^2\right\rangle=(C_1/Q)\int_{-\pi}^{\pi}J_2(\theta)d\theta. \tag{20}$$

В (20) введены обозначения:

$$J_1(\theta)=\frac{\delta_1(\theta)}{2\gamma_1^4(\theta)}+\frac{\sqrt{\pi}\Phi[\sqrt{2}\delta_1(\theta)/\gamma_1(\theta)]}{2\gamma_1^3(\theta)}\times$$

$$\times \exp\{\delta_1^2(\theta)/\gamma_1^2(\theta)\}[1+2\delta_1^2(\theta)/\gamma_1^2(\theta)],$$

$$J_2(\theta)=\frac{1}{2\gamma_1^4(\theta)}\times\left[1+\frac{\delta_1^2(\theta)}{\gamma_1^2(\theta)}\right]+$$

$$+\frac{\delta_1(\theta)\sqrt{\pi}\Phi[\sqrt{2}\delta_1(\theta)/\gamma_1(\theta)]}{\gamma_1^5(\theta)}\times$$

$$\times \exp\{\delta_1^2(\theta)/\gamma_1^2(\theta)\}\left[\frac{3}{2}+\frac{\delta_1^2(\theta)}{\gamma_1^2(\theta)}\right],$$

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp[-t^2/2]dt$ — интеграл вероятности.

Выражения (10), (19) существенно упрощаются при больших значениях отношения сигнал–шум (17). Действительно, полагая, что $z_0 >> 1$ находим асимптотические значения смещения и дисперсии оценки (8) амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала

$$\widetilde{b}_1(\hat{a}|a_0,\varphi_0)=\frac{a_0}{2z_0^2}\frac{1+\rho_c\cos 2\varphi_0+\rho_s\sin 2\varphi_0}{1-\rho_c^2-\rho_s^2}, \tag{21}$$

$$\widetilde{D}_1(\hat{a}|a_0,\varphi_0)=\frac{a_0^2}{z_0^2}\frac{1-\rho_c\cos 2\varphi_0-\rho_s\sin 2\varphi_0}{1-\rho_c^2-\rho_s^2}. \tag{22}$$

Эти выражения можно также получить непосредственно из (8), (10) методом малого параметра [2], в качестве которого используется величина обратная отношению сигнал–шум z_0 (17).

Согласно (21), (22) оценка максимального правдоподобия (8) амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала является асимптотически (с ростом отношения сигнал–шум) несмещенной и эффективной [2].

Если полоса частот $\Delta\omega$ функции $f(t)$ в (1) много меньше ω_0, так что выполняется (2), то ρ_c, $\rho_s << 1$ (7). При этом оценка (8) переходит в оценку максимального правдоподобия $\hat{a}_n$ амплитуды узкополосного радиосигнала [1, 2]. Полагая в (18) $\rho_c=\rho_s=0$, находим плотность вероятности оценки максимального правдоподобия амплитуды узкополосного радиосигнала:

$$W_0(a)=Qa\exp\left\{-\frac{z_0^2+Qa^2}{2}\right\}I_0\left(z_0a\sqrt{Q}\right), \tag{23}$$

где $I_0(\cdot)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента.

Выражение (23), полученное как частный случай (18) при выполнении (2), совпадает с известной формулой для плотности вероятности максимально правдоподобной оценки амплитуды узкополосного радиосигнала [1]. Используя (23), аналогично (10) запишем выражения для смещения и дисперсии оценки амплитуды узкополосного радиосигнала

$$b_0(\hat{a}_n|a_0,\varphi_0)=\langle\hat{a}_n\rangle-a_0,$$

$$D_0(\hat{a}_n|a_0,\varphi_0)=\left\langle\hat{a}_n^2\right\rangle-\langle\hat{a}_n\rangle^2. \tag{24}$$

$$\langle\hat{a}_n\rangle=\sqrt{\pi/2Q}\exp[-z_0^2/4][I_0[z_0^2/4]\times$$

$$\times(1+z_0^2/2)+I_1[z_0^2/4]z_0^2/2],$$

$$\left\langle\hat{a}_n^2\right\rangle=(2+z_0^2)/Q,$$

где $I_1(\cdot)$ — функции Бесселя первого порядка от мнимого аргумента [2].

Полагая в (24) $z_0 >> 1$ находим асимптотические значения смещения и дисперсии оценки максимального правдоподобия амплитуды узкополосного радиосигнала [1–3]

$$\widetilde{b}_0(\hat{a}_n|a_0,\varphi_0)=a_0/2z_0^2, \tag{25}$$

$$\widetilde{D}_0(\hat{a}_n|a_0,\varphi_0)=a_0^2/z_0^2. \qquad (26)$$

Заметим, что к этим же формулам приходим, положив в (21), (22) $\rho_c=\rho_s=0$. Следовательно, известные [1–3] формулы (25), (26) можно рассматривать как частный случай соответствующих выражений для характеристик оценки амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала.

Максимально правдоподобный измеритель амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала, показанный на рис. 2 имеет более сложную структуру чем квадратурный измеритель амплитуды узкополосного радиосигнала, показанный на рис. 3. Поэтому может оказаться целесообразным использование более простого квадратурного измерителя для оценки амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала. Найдем характеристики квадратурного измерителя рис. 3, когда сигнал (1) возможно не удовлетворяет условию узкополосности (2). Анализ этих характеристик позволяет в частности, сформулировать условия применимости модели узкополосного радиосигнала для решения задачи оценки его амплитуды с контролируемой точностью.

Найдем вначале плотность вероятности оценки (9), получаемой с помощью квадратурного измерителя рис. 3. Сделаем замену переменных в (9): $X=\Lambda\cos\theta$, $Y=\Lambda\sin\theta$. Тогда

$$\widetilde{a}=\Lambda/Q.$$

Выполним переход от совместной плотности вероятности СВ X и Y (11) к совместной плотности вероятности СВ Λ и θ согласно (13), (14). Затем, используя (15), переходим от СВ Λ и θ к СВ $a=\Lambda/Q$ и θ и получим совместную плотность вероятности СВ a и θ

$$\widetilde{W}_{a\theta}(a,\theta)= \qquad (27)$$

$$=C_2Qa\exp[-(\gamma_2^2(\theta)Qa^2-2\delta_2(\theta)\sqrt{Q}a)].$$

В (27) введены следующие обозначения:

$$C_2=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_c^2-\rho_s^2}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{z_0^2}{2}(1+\rho_c\cos 2\varphi_0+\rho_s\sin 2\varphi_0)\right],$$

$$\delta_2(\theta)=z_0\cos(\theta-\varphi_0)/2,$$

$$\gamma_2^2(\theta)=\frac{1-\rho_c\cos 2\theta-\rho_s\sin 2\theta}{2(1-\rho_c^2-\rho_s^2)}.$$

Таким образом, плотность вероятности оценки амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала (9) можно записать как

$$\widetilde{W}_a(a)=\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{W}_{a\theta}(a,\theta)d\theta= \qquad (28)$$

$$=C_2Qa\int_{-\pi}^{\pi}\exp[-(\gamma_2^2(\theta)Qa^2-2\delta_2(\theta)\sqrt{Q}a)]d\theta.$$

Используя (28), аналогично (10), найдем выражения для смещения и дисперсии оценки амплитуды (9):

$$b_2(\widetilde{a}|a_0,\varphi_0)=\langle\widetilde{a}\rangle-a_0,$$

$$D_2(\widetilde{a}|a_0,\varphi_0)=\left\langle\widetilde{a}^2\right\rangle-\langle\widetilde{a}\rangle^2, \qquad (29)$$

$$\langle\widetilde{a}\rangle=\int_0^{\infty}a\widetilde{W}_a(a)da,\quad \left\langle\widetilde{a}^2\right\rangle=\int_0^{\infty}a^2\widetilde{W}_a(a)da.$$

Вычислив интегралы по a, получим:

$$\langle\widetilde{a}\rangle=(C_2/\sqrt{Q})\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{J}_1(\theta)d\theta,$$

$$\left\langle\widetilde{a}^2\right\rangle=(C_2/Q)\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{J}_2(\theta)d\theta,$$

где

$$\widetilde{J}_1(\theta) = \frac{\delta_2(\boldsymbol{\theta})}{2\gamma_2^4(\boldsymbol{\theta})} +$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\Phi[\sqrt{2}\delta_2(\theta)/\gamma_2(\theta)]}{2\gamma_2^3(\theta)}\mathbf{exp}\{\delta_2^2(\theta)/\gamma_2^2(\theta)\}\times$$

$$\times[1+2\delta_2^2(\theta)/\boldsymbol{\gamma}_2^2(\theta)],$$

$$\widetilde{J}_2(\theta) = \frac{1}{2\gamma_2^4(\theta)}\left[1+\frac{\boldsymbol{\delta}_2^2(\theta)}{\boldsymbol{\gamma}_2^2(\theta)}\right]+$$

$$+\frac{\delta_2(\theta)\sqrt{\pi}\Phi[\sqrt{2}\delta_2(\boldsymbol{\theta})/\gamma_2(\theta)]}{\gamma_2^5(\theta)}\times$$

$$\times\exp\{\delta_2^2(\theta)/\gamma_2^2(\theta)\}\left[\frac{3}{2}+\frac{\delta_2^2(\theta)}{\gamma_2^2(\theta)}\right].$$

Выражения (29) существенно упрощаются при больших отношениях сигнал–шум (17). Действительно, полагая, что $z_0 >> 1$, находим асимптотические значения смещения и дисперсии оценки (9) амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала (30), (31) — см. внизу стр. 30.

Здесь $r = \rho_c^2 + \rho_s^2 + 2\rho_c\cos 2\varphi_0 + 2\rho_s \sin 2\varphi_0$.

Как следует из (30), смещение оценки амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала (9) отлично от нуля и с ростом отношения сигнал–шум к нулю не стремится, то есть оценка не является состоятельной [2]. Поэтому применение квадратурного измерителя (рис. 3) для оценки амплитуды, когда не выполняется (2), приводит к систематической ошибке даже при неограниченном увеличении отношения сигнал–шум.

Если полоса частот $\Delta\omega$ функции $f(t)$ в (1) много меньше ω_0, так что выполняется (2), то $\rho_c, \rho_s << 1$ (7). При этом оценка (9) переходит в оценку максимального правдоподобия $\hat{a}_n$ амплитуды узкополосного радиосигнала [1, 2]. Полагая в (28) $\rho_c = \rho_s = 0$, получаем что (28) переходит в плотность вероятности оценки максимального правдоподобия амплитуды узкополосного радиосигнала (23). Аналогично при $\rho_c = \rho_s = 0$ выражения (29) переходят в (24), а формулы (30), (31) — в (25), (26).

Точные формулы (28)–(31) позволяют рассчитать характеристики квадратурного измерителя рис. 3 при любых значениях отношения $\omega_0/\Delta\omega$. В тоже время классические формулы (23)–(26) для характеристик оценки максимального правдоподобия амплитуды узкополосного радиосигнала лишь асимптотически точны, когда $\omega_0/\Delta\omega \to \infty$ [1–3]. Сопоставление (28)–(31) и (23)–(26) позволяет количественно определить точность классических результатов [1–3] решения задачи оценки амплитуды узкополосного радиосигнала при конечных значениях отношения $\omega_0/\Delta\omega$ для конкретных форм сигнала (1).

$$\widetilde{b}_2(\widetilde{a}|a_0\varphi_0) = a_0\left[\sqrt{1+r}\times\left(1+\frac{(1-\rho_c^2-\rho_s^2)(1+\rho_c\cos 2\varphi_0+\rho_s\sin 2\varphi_0)}{2z_0^2(1+r)^2}\right)-1\right] \qquad (30)$$

$$\widetilde{D}_2(\widetilde{a}|a_0,\varphi_0) = \frac{a_0^2}{z_0^2}\left[1+\frac{(\rho_c\cos 2\varphi_0+\rho_s\sin 2\varphi_0)(1+\rho_c^2+\rho_s^2)+2(\rho_c^2+\rho_s^2)}{1+r}\right]. \qquad (31)$$

Показано, что невыполнение условия относительной узкополосности приводит к существенному отличию структуры алгоритма максимально правдоподобной оценки амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала от структуры алгоритма максимально правдоподобной оценки амплитуды узкополосного радиосигнала. Найденные точные формулы для характеристик оценки амплитуды позволяют для конкретной формы сигнала сформулировать количественные ограничения, при которых классическое решение задачи оценки амплитуды узкополосного радиосигнала обладает требуемой точностью.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. — М. : Советское радио, 1966. — 680с.

2. *Куликов Е.И.* Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М. : Советское радио, 1978. — 296 с.

3. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. — М. : Советское радио, 1966. — 728 с.

4. *Астанин Л.Ю.* Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений / Л. Ю. Астанин, А. А. Костылев. — М. : Радио и связь, 1989. — 192 с.

5. *Taylor J.D.* Introduction to Ultrawideband Radar Systems / J.D. Taylor. — CRC press. New–York, 1995.

6. *Кольцов Ю.В.* Методы и средства анализа и формирования сверхширокополосных сигналов / Ю. В. Кольцов. — М. : Радиотехника, 2004. — 128 с.

Поступила в редакцию 26.08.2009