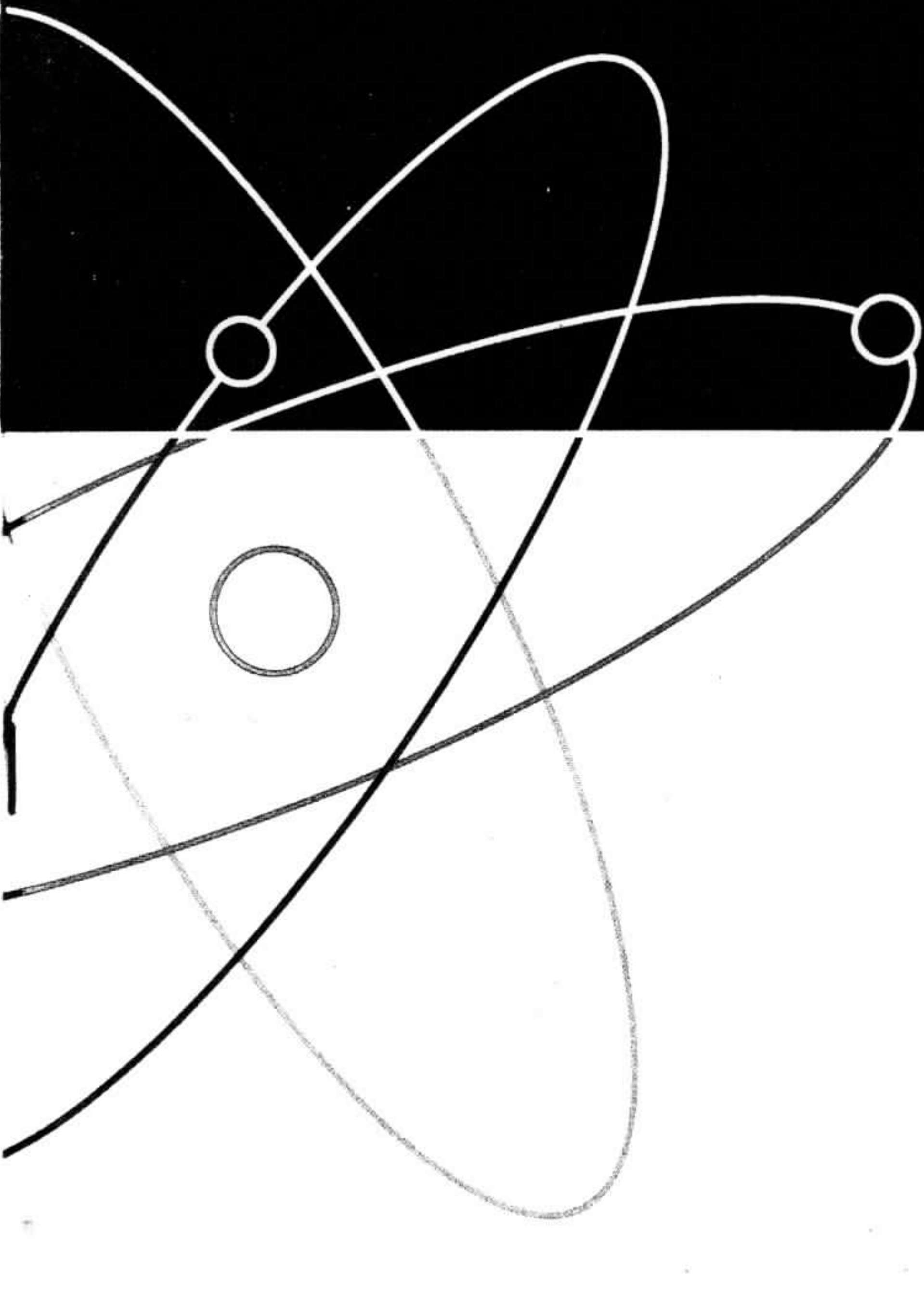
Том 54, № 4
апрель 2011

ISSN 0021-3470

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

**ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ**



ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

УДК 621.391

ТРИФОНОВ А. П., РУДНЕВ П. Е.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНКИ ФАЗЫ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНОГО КВАЗИРАДИОСИГНАЛА

Воронежский государственный университет,
Россия, Воронеж, 394006, Университетская пл., д. 1

Аннотация. Выполнены синтез и анализ максимально правдоподобного алгоритма оценки фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала с неизвестной амплитудой, длительность которого может составлять несколько периодов или долю периода гармонического колебания. Найдены характеристики классической максимально правдоподобной оценки фазы узкополосного радиосигнала при приеме сверхширокополосного квазирадиосигнала. Сформулированы условия применимости модели узкополосного радиосигнала для решения задачи оценки фазы с заданной точностью

Abstract. Synthesis and analysis of the maximum likelihood algorithm for estimating the phase of ultra-wideband quasi-radio signal with unknown amplitude and phase are performed. Duration of the specified signal may amount to several periods or a fraction of the period of harmonic oscillation. Characteristics of the classical maximum likelihood phase estimate of a narrow-band radio signal are found when receiving an ultra-wideband quasi-radio signal. Applicability conditions of narrow-band radio signal model are defined for solving the problem of phase estimation with the specified accuracy

Ключевые слова: фаза, оценка, сверхширокополосный квазирадиосигнал, оценка максимального правдоподобия, распределение, смещение оценки, дисперсия оценки, phase, estimation, ultrawideband quasi-radio signal, maximum likelihood estimation, distribution, bias of estimation, dispersion of estimation

Задача оптимальной оценки фазы узкополосного радиосигнала с неизвестной амплитудой на фоне белого шума достаточно подробно изучена и ее уже можно назвать классической для статистической радиотехники [1, 2]. Под узкополосными понимаются сигналы, относительная полоса которых, то есть отношение полосы частот к центральной частоте их спектров, много меньше единицы [1–3]. С этой точки зрения, так называемые широкополосные сигналы (радиосигналы с большой базой) так же являются узкополосными. Узкополосные (квазигармонические) радиосигналы долгое время являлись одним из основных объектов исследования в радиоэлектронике [1–3].

В последние годы все больший интерес и применение в радиоэлектронике и ее приложениях находят так называемые сверхширокополосные сигналы (сигналы без несущей) [4–7]. У этих сигналов относительная полоса частот может быть порядка единицы и более. При таких значениях относительной полосы обычные определения огибающей и фазы теряют ясный физический смысл, что может привести к нецелесообразности их использования. Поэтому, известные результаты по оценке параметров радиосигналов с неизвестными амплитудой и фазой существенно использующие их узкополосность не могут быть применены к сверхширокополосным сигналам. Среди множества сверхширокополосных сигналов [4–7] выделим в отдельный класс сигналы, структура которых подобна структуре узкополосных радиосигналов. Назовем их сверхширокополосными квазирадиосигналами.

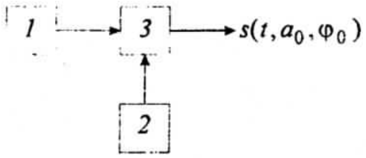


Рис. 1

Как известно, узкополосный радиосигнал (без фазовой модуляции) можно записать в виде [1–3]

$$s(t, a_0, \varphi_0) = a_0 f(t) \cos(\omega_0 t - \varphi_0), \qquad (1)$$

где a_0, ω_0, φ_0 — амплитуда, частота и начальная фаза, а $f(t)$ — нормированная ($\max f(t) = 1$) огибающая узкополосного радиосигнала.

Если полоса частот $\Delta\omega$ и частота ω_0 сигнала (1) удовлетворяют условию [1–3]

$$\Delta\omega << \omega_0, \qquad (2)$$

то сигнал (1) является узкополосным радиосигналом. Отметим, что a_0, ω_0, φ_0 и $f(t)$ могут быть найдены по заданному узкополосному радиосигналу $s(t, a_0, \varphi_0)$ [1, 3]. Очевидно, сигнал вида (1) можно получить с помощью простейшего модулятора, показанного на рис. 1. Здесь *1* — генератор гармонического колебания

$$a_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0), \qquad (3)$$

2 — генератор функции $f(t)$, *3* — перемножитель. Выбором модулирующей функции $f(t)$ можно обеспечить полосу частот $\Delta\omega$ сигнала (1), близкую к частоте ω_0. В этом случае формула (1) описывает сверхширокополосный квазирадиосигнал. Соответственно, a_0, ω_0, φ_0 являются параметрами гармонического колебания (3), используемсго для формирования сверхширокополосного квазирадиосигнала (1). Эти параметры можно определить по сверхширокополосному квазирадиосигналу $s(t, a_0, \varphi_0)$ только если модулирующая функция $f(t)$ априори известна, что предполагается в дальнейшем.

Таким образом, изменение модулирующей функции $f(t)$ позволяет описать формулой (1) как сверхширокополосные квазирадиосигналы с большой относительной полосой частот, так и узкополосные радиосигналы, для которых выполняется (2). В частности, при малой длительности модулирующей функции получаем сверхширокополосный квазирадиосигнал, у которого на интервале, равном длительности сигнала, размещается несколько периодов или даже доли периода гармонического колебания (3).

В данной работе синтезирован максимально правдоподобный алгоритм оценки фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала с неизвестными амплитудой и фазой. Найдены характеристики максимально правдоподобного алгоритма оценки и характеристики известного [1, 2] алгоритма оценки, синтезированного в предположении, что выполняется (2). Полученные результаты позволяют в частности сформулировать количественно условия применимости модели узкополосного радиосигнала в задаче оценки, при которых обеспечивается необходимая точность известного классического решения задачи оценки фазы [1, 2].

Рассмотрим задачу оценки фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала (1) на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Наблюдаемую смесь сигнала (1) и шума $n(t)$ представим в виде

$$\xi(t) = s(t, a_0, \varphi_0) + n(t), \quad t \in [0, T]. \qquad (4)$$

Для синтеза алгоритма оценки фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала (1) воспользуемся методом максимального правдоподобия [1, 2]. Согласно этому методу, по наблюдаемым данным (4) необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) $L(a, \varphi)$, зависящий от неизвестных значений a и φ. Тогда оценка максимального правдоподобия $\hat{\varphi}$ параметра φ_0 определяется как значение φ, при котором логарифм ФОП достигает абсолютного (наибольшего) максимума [1–3].

При помехе в виде гауссовского белого шума логарифм ФОП можно записать как [1]

$$L(a,\varphi)=\frac{2}{N_0}\int_0^T \xi(t)s(t,a,\varphi)\mathrm{d}t-$$

$$-\frac{1}{N_0}\int_0^T s^2(t,a,\varphi)\mathrm{d}t, \qquad (5)$$

где T — интервал наблюдения.

Подставим в (5) явный вид сверхширокополосного квазирадиосигнала (1) и преобразуем к виду:

$$L(a,\varphi)=a(X\cos\varphi+Y\sin\varphi)-$$

$$-Qa^2(1+\rho_c\cos 2\varphi+\rho_s\sin 2\varphi)/2, \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{2}{N_0}\int_0^T \xi(t)f(t)\cos\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\\ Y&=\frac{2}{N_0}\int_0^T \xi(t)f(t)\sin\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\\ Q&=\frac{1}{N_0}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t,\\ \rho_c&=\frac{1}{QN_0}\int_0^T f^2(t)\cos 2\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\\ \rho_s&=\frac{1}{QN_0}\int_0^T f^2(t)\sin 2\omega_0 t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Решая систему уравнений правдоподобия

$$\left.\frac{\partial L(a,\varphi)}{\partial a}\right|_{\hat a,\hat\varphi}=0,\quad \left.\frac{\partial L(a,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\hat a,\hat\varphi}=0,$$

для оценки фазы получим:

$$\hat\varphi=\mathrm{arctg}\frac{(1+\rho_c)Y-\rho_s X}{(1-\rho_c)X-\rho_s Y}. \qquad (8)$$

В частном случае, когда $f(t)\equiv 1$, величина (8) представляет собой оценку фазы гармонического сигнала с нецелым числом периодов.

Алгоритм оценки (8) можно реализовать в виде измерителя, блок-схема которого представлена на рис. 2. Здесь *1* — умножитель, *2* — интегратор на интервале времени *T*, *3* — сумматор, *4* — блок, осуществляющий деление, *5* — блок, реализующий операцию арктангенс.

Если полоса частот Δω много меньше частоты ω_0, то есть принимается узкополосный радиосигнал и выполняется (2), то $\rho_c, \rho_s \ll 1$. Тогда, положив в (8) $\rho_c=\rho_s=0$, имеем для оценки фазы:

$$\tilde\varphi=\mathrm{arctg}[Y/X]. \qquad (9)$$

Формула (9), полученная, как частный случай (8), в предположении, что выполняется (2), совпадает с известной формулой для оценки фазы узкополосного радиосигнала с неизвестной амплитудой [2]. Блок–схема квадратурного измерителя, реализующая алгоритм оценки, определяемый формулой (9), показана на рис. 3. Обозначения на рис. 3 соответствуют обозначениям на рис. 2.

Структура максимально правдоподобного алгоритма оценки фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала (рис. 2) существенно отличается от структуры аналогичного алгоритма оценки фазы узкополосного радиосигнала (рис. 3) и является более сложной.

Найдем основные характеристики максимально правдоподобной оценки (8) фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала — распределение, а также условные смещение и дисперсию:

$$b_1(\hat\varphi|\boldsymbol{a_0},\varphi_0)=\langle\hat\varphi\rangle-\varphi_0,$$

$$D_1(\hat\varphi|\boldsymbol{a_0},\varphi_0)=\langle\hat\varphi^2\rangle-\langle\hat\varphi\rangle^2. \qquad (10)$$

В (10) усреднение выполняется по реализациям шума при фиксированных истинных значениях параметров a_0, φ_0. Поскольку оценка фазы (8) определяется через случайные величины (СВ) X и Y (7), то плотность вероятности этой оценки можно определить, зная совместную плотность вероятности СВ X и Y. Случайные величины X и Y (7) являются линейными функционалами от гауссовского случайного процесса. Поэтому их совместная гауссовская плотность вероятности имеет вид (11) (см. внизу с. 6) [1]. В (11)

$$m_x = a_0 Q[\cos\varphi_0(1+\rho_c)+\rho_s\sin\varphi_0],$$

$$m_y = a_0 Q[\sin\varphi_0(1-\rho_c)+\rho_s\cos\varphi_0],$$

$$\sigma_x^2 = Q(1+\rho_c),\ \sigma_y^2 = Q(1-\rho_c),$$

$$R = \rho_s / \sqrt{1-\rho_c^2}.$$

Введя замену переменных $Z=(1+\rho_c)Y-\rho_s X$ и $P=(1-\rho_c)X-\rho_s Y$, из (8) получим следующее выражение для максимально правдоподобной оценки фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала:

$$\hat{\varphi} = \mathrm{arctg}[Z/P]. \quad (12)$$

Случайные величины Z и P — гауссовские, так как они являются линейными комбинациями гауссовских СВ X и Y (7). Совместную плотность вероятности СВ Z и P можно получить из (11) [1] (см. внизу с. 6).

Совместная плотность вероятности СВ Z и P имеет вид (13) (см. внизу с. 6). Здесь

$$m_z = a_0 Q\sin\varphi_0 g^2, \quad m_p = a_0 Q\cos\varphi_0 g^2,$$

$$\sigma_z^2 = Q(1+\rho_c)g^2, \quad \sigma_p^2 = Q(1-\rho_c)g^2,$$

$$W_{XY}(X,Y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left\{-\frac{\left[\dfrac{(X-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\dfrac{(Y-m_y)^2}{\sigma_y^2}-\dfrac{2R(X-m_x)(Y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]}{2(1-R^2)}\right\}. \quad (11)$$

$$W_{ZP}(Z,P) = W_{XY}(X=[(1+\rho_c)P+\rho_s Z]/g^2,$$
$$Y=[(1-\rho_c)Z+\rho_s P]/g^2)|D_0|,$$

$$D_0 = \left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial([(1+\rho_c)P+\rho_s Z]/g^2)}{\partial Z} & \dfrac{\partial([(1+\rho_c)P+\rho_s Z]/g^2)}{\partial P} \\ \dfrac{\partial([(1-\rho_c)Z+\rho_s P]/g^2)}{\partial Z} & \dfrac{\partial([(1-\rho_c)Z+\rho_s P]/g^2)}{\partial P} \end{matrix}\right\| = 1,$$

$$g^2 = 1-\rho_c^2-\rho_s^2.$$

$$W_{ZP}(Z,P) = \frac{1}{2\pi\sigma_z\sigma_p}\exp\left\{-\frac{\left[\dfrac{(Z-m_z)^2}{\sigma_z^2}+\dfrac{(P-m_p)^2}{\sigma_p^2}-\dfrac{2\tilde{R}(Z-m_z)(P-m_p)}{\sigma_z\sigma_p}\right]}{2(1-\tilde{R}^2)}\right\}. \quad (13)$$

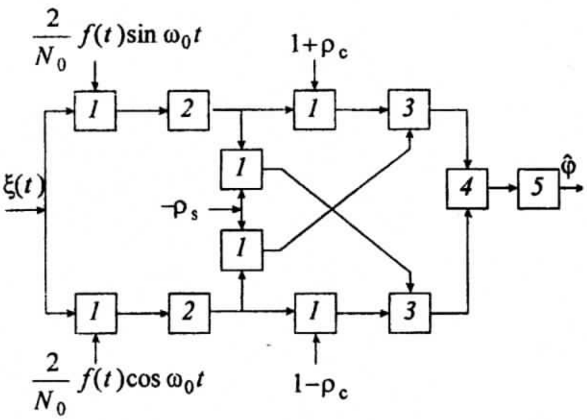


Рис. 2

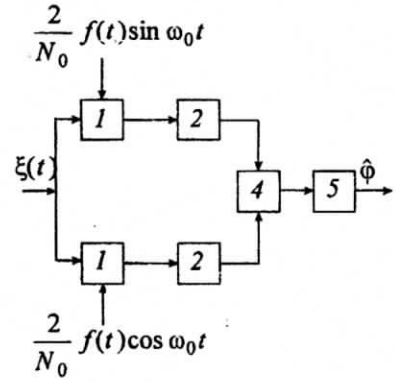


Рис. 3

$$\widetilde{R} = -\rho_s / \sqrt{1-\rho_c^2}.$$

Сделаем замену переменных $Z = \Lambda\cos\varphi$, $P = \Lambda\sin\varphi$ и выполним переход от совместной плотности вероятности СВ Z и P (13) к совместной плотности вероятности СВ Λ и φ. Для этого воспользуемся формулой [1]:

$$W_{\Lambda\varphi}(\Lambda,\varphi) = W_{ZP}(Z = \Lambda\cos\varphi, P = \Lambda\sin\varphi)|D|, \qquad (14)$$

где якобиан преобразования

$$D = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial(\Lambda\cos\varphi)}{\partial\Lambda} & \dfrac{\partial(\Lambda\cos\varphi)}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial(\Lambda\sin\varphi)}{\partial\Lambda} & \dfrac{\partial(\Lambda\sin\varphi)}{\partial\varphi} \end{Vmatrix} = \Lambda. \qquad (15)$$

В результате получим следующее выражение для совместной плотности вероятности СВ Λ и φ:

$$W_{\Lambda\varphi}(\Lambda,\varphi) = C_1 Q\Lambda \times$$
$$\times\exp\left[-\left(\frac{\gamma_1^2(\varphi)\Lambda^2}{Q(1-\rho_c^2-\rho_s^2)^2} - \frac{2\delta_1(\varphi)\Lambda}{\sqrt{Q}(1-\rho_c^2-\rho_s^2)}\right)\right],$$
$$\Lambda > 0, \quad |\varphi| < \pi. \qquad (16)$$

Здесь введены обозначения:

$$C_1 = \frac{\sqrt{1-\rho_c^2-\rho_s^2}}{2\pi} \times$$
$$\times\exp\left[-\frac{z_0^2}{2}(1+\rho_c\cos 2\varphi_0 + \rho_s\sin 2\varphi_0)\right],$$

$$\delta_1(\varphi) = z_0(\cos(\varphi-\varphi_0) + \rho_c\cos(\varphi+\varphi_0) + $$
$$+\rho_s\sin(\varphi+\varphi_0))/2,$$

$$\gamma_1^2(\varphi) = (1+\rho_c\cos 2\varphi + \rho_s\sin 2\varphi)/2.$$

Параметр

$$z_0^2 = Qa_0^2 = a_0^2\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t / N_0 \qquad (17)$$

представляет собой отношение удвоенной энергии сигнала (1) при выполнении (2) к спектральной плотности белого шума, то есть (17) — отношение сигнал/шум для узкополосного радиосигнала [1, 2].

Согласно (12) и (16), плотность вероятности максимально правдоподобной оценки (8) фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала можно записать как

$$W_\varphi(\varphi) = \int_0^\infty W_{\Lambda\varphi}(\Lambda,\varphi)\mathrm{d}\Lambda = C_1\left(\frac{1}{2\gamma_1^2(\varphi)} + \right.$$

$$+\frac{\delta_1(\varphi)\sqrt{\pi}\Phi[\sqrt{2}\delta_1(\varphi)/\gamma_1(\varphi)]}{\gamma_1^3(\varphi)}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\delta_1^2(\varphi)}{\gamma_1^2(\varphi)}\right\}\Bigg\}, \qquad (18)$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp[-t^2/2]\mathrm{d}t$ — интеграл вероятности.

Используя (18), получаем, что в выражения (10) для смещения и дисперсии оценки фазы необходимо подставить значения первых двух моментов оценки

$$\langle\hat{\varphi}\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi W_{\varphi}(\varphi)\mathrm{d}\varphi,\ \langle\hat{\varphi}^2\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^2 W_{\varphi}(\varphi)\mathrm{d}\varphi. \qquad (19)$$

Выражения (10), (19) существенно упрощаются при больших значениях отношения сигнал–шум (17). Действительно, полагая, что $z_0 \gg 1$ находим асимптотические значения смещения и дисперсии оценки (8) фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала

$$b_{1a}(\hat{\varphi}|a_0,\varphi_0)=(\rho_s\cos 2\varphi_0-\rho_c\sin 2\varphi_0)/[z_0^2\times$$

$$\times(1-\rho_c^2-\rho_s^2)]+3((\rho_c^2-\rho_s^2)\sin 4\varphi_0-$$

$$-2\rho_c\rho_s\cos 4\varphi_0)/[z_0^4(1-\rho_c^2-\rho_s^2)^2], \qquad (20)$$

$$D_{1a}(\hat{\varphi}|a_0,\varphi_0)=(1+\rho_c\cos 2\varphi_0+$$

$$+\rho_s\sin 2\varphi_0)/[z_0^2(1-\rho_c^2-\rho_s^2)]. \qquad (21)$$

Эти выражения можно так же получить непосредственно из (8), (10) методом малого параметра [2], в качестве которого используется величина, обратная отношению сигнал-шум z_0 (17).

Согласно (20), (21) оценка максимального правдоподобия (8) фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала является асимптотически (с ростом отношения сигнал–шум) несмещенной и эффективной [2].

Если выполняется (2), то оценка (8) переходит в оценку максимального правдоподобия $\hat{\varphi}_n$ фазы узкополосного радиосигнала [1, 2]. Полагая в (18) $\rho_c=\rho_s=0$, находим плотность вероятности оценки максимального правдоподобия фазы узкополосного радиосигнала:

$$W_0(\varphi)=\frac{\exp[-z_0^2/2]}{2\pi}+$$

$$+\frac{z_0\cos(\varphi-\varphi_0)\Phi[z_0\cos(\varphi-\varphi_0)]}{\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\exp[-z_0^2\sin^2(\varphi-\varphi_0)/2]. \qquad (22)$$

Выражение (22), полученное как частный случай (18) при выполнении (2), совпадает с известной формулой для плотности вероятности максимально правдоподобной оценки фазы узкополосного радиосигнала [1]. Используя (22), аналогично (10) запишем выражения для смещения и дисперсии оценки фазы узкополосного радиосигнала

$$b_0(\hat{\varphi}_n|a_0,\varphi_0)=\langle\hat{\varphi}_n\rangle-\varphi_0,$$

$$D_0(\hat{\varphi}_n|a_0,\varphi_0)=\langle\hat{\varphi}_n^2\rangle-\langle\hat{\varphi}_n\rangle^2. \qquad (23)$$

Полагая в (23) $z_0 \gg 1$, находим асимптотические значения смещения и дисперсии оценки максимального правдоподобия узкополосного радиосигнала [1–3]

$$b_{0a}(\hat{\varphi}_n|a_0,\varphi_0)=0, \qquad (24)$$

$$D_{0a}(\hat{\varphi}_n|a_0,\varphi_0)=1/z_0^2. \qquad (25)$$

Заметим, что к этим же формулам приходим, положив в (20), (21) $\rho_c=\rho_s=0$. Следовательно, известные [1–3] формулы (24), (25) можно рассматривать как частный случай выражений (20), (21) для характеристик оценки фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала.

Вследствие большей сложности измерителя фазы рис. 2, может оказаться целесообраз-

 ISSN 0021—3470. Радиоэлектроника. 2011. № 4.

ным использование более простого измерителя рис. 3 для оценки фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала. Найдем характеристики измерителя рис. 3, когда сигнал (1) возможно не удовлетворяет условию узкополосности (2). Анализ этих характеристик позволяет в частности, сформулировать условия применимости модели узкополосного радиосигнала для решения задачи оценки его фазы с контролируемой точностью.

Найдем вначале плотность вероятности оценки (9), получаемой с помощью квадратурного измерителя рис. 3. Сделаем замену переменных $X = \Lambda\cos\varphi$, $Y = \Lambda\sin\varphi$ и выполним переход от совместной плотности вероятности СВ X и Y (11) к совместной плотности вероятности СВ Λ и φ аналогично (14), (15)

$$\widetilde{W}_{\Lambda\varphi}(\Lambda,\varphi) = C_2 Q\Lambda\exp[-(\gamma_2^2(\varphi)\Lambda^2/Q - -2\delta_2(\varphi)\Lambda/\sqrt{Q})]. \qquad (26)$$

В (26) введены следующие обозначения:

$$C_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_c^2-\rho_s^2}} \times \times\exp\left[-\frac{z_0^2}{2}(1+\rho_c\cos 2\varphi_0 + \rho_s\sin 2\varphi_0)\right],$$

$$\delta_2(\varphi) = z_0\cos(\varphi-\varphi_0)/2,$$

$$\gamma_2^2(\varphi) = \frac{(1-\rho_c\cos 2\varphi - \rho_s\sin 2\varphi)}{2(1-\rho_c^2-\rho_s^2)}.$$

Таким образом, плотность вероятности оценки (9) фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала можно записать как

$$\widetilde{W}_\varphi(\varphi) = \int_0^\infty \widetilde{W}_{\Lambda\varphi}(\Lambda,\varphi)d\Lambda = C_2\left(\frac{1}{2\gamma_2^2(\varphi)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_2(\varphi)\sqrt{\pi}\Phi[\sqrt{2}\delta_2(\varphi)/\gamma_2(\varphi)]}{\gamma_2^3(\varphi)} \times \exp\left\{\frac{\delta_2^2(\varphi)}{\gamma_2^2(\varphi)}\right\}\right). \qquad (27)$$

Используя (27), аналогично (10), найдем выражения для смещения и дисперсии оценки фазы (9):

$$b_2(\widetilde{\varphi}|a_0,\varphi_0) = \langle\widetilde{\varphi}\rangle - \varphi_0,$$

$$D_2(\widetilde{\varphi}|a_0,\varphi_0) = \langle\widetilde{\varphi}^2\rangle - \langle\widetilde{\varphi}\rangle^2, \qquad (28)$$

$$\langle\widetilde{\varphi}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi\widetilde{W}_\varphi(\varphi)d\varphi, \quad \langle\widetilde{\varphi}^2\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi^2\widetilde{W}_\varphi(\varphi)d\varphi.$$

Выражения (28) существенно упрощаются при больших отношениях сигнал–шум (17). Действительно, полагая, что $z_0 \gg 1$, находим асимптотические значения смещения и дисперсии оценки (9) фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала

$$b_{2a}(\widetilde{\varphi}|a_0,\varphi_0) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left[\frac{(1-\rho_c)\sin\varphi_0 + \rho_s\cos\varphi_0}{(1+\rho_c)\cos\varphi_0 + \rho_s\sin\varphi_0}\right] - $$

$$-\frac{(\rho_s\cos 2\varphi_0 - \rho_c\sin 2\varphi_0)g}{z_0^2(1+r)^2} - \varphi_0 +$$

$$+\frac{6}{z_0^4(1+r)^4}\{\sin 2\varphi_0[2\rho_c^3(1-\rho_s^2) - 2\rho_c(\rho_c^4 +$$

$$+\rho_s^4 - \rho_c^2)] + \cos 4\varphi_0[-\rho_c\rho_s(1-(\rho_c^2+\rho_s^2)^2)] +$$

$$+\cos 2\varphi_0[-2\rho_s^3(1+2\rho_c^2) + 2\rho_s(\rho_c^4+\rho_s^4-\rho_c^2)] +$$

$$+\sin 4\varphi_0[(\rho_c^2-\rho_s^2)(1-\rho_c^2\rho_s^2) - \rho_c^6 + \rho_s^6]/2\}, \qquad (29)$$

$$D_{2a}(\widetilde{\varphi}|a_0,\varphi_0) =$$

$$= \frac{(1+\rho_c\cos 2\varphi_0 + \rho_s\sin 2\varphi_0)g}{z_0^2(1+r)}, \qquad (30)$$

где $g = 1 - \rho_c^2 - \rho_2^2$, $r = \rho_c^2 + \rho_s^2 + 2\rho_c \cos 2\varphi_0 + $
$+ 2\rho_s \sin 2\varphi_0$.

Как следует из (29), смещение оценки фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала (9) отлично от нуля и с ростом отношения сигнал–шум к нулю не стремится, то есть оценка не является состоятельной [2]. Поэтому применение квадратурного измерителя рис. 3 для оценки фазы, когда не выполняется (2), приводит к систематической ошибке даже при неограниченном увеличении отношения сигнал-шум.

При выполнении (2), оценка (9) переходит в оценку максимального правдоподобия $\hat{\varphi}_n$ фазы узкополосного радиосигнала [1, 2]. Полагая в (27) $\rho_c = \rho_s = 0$, получаем плотность вероятности оценки максимального правдоподобия фазы узкополосного радиосигнала (22). Аналогично при $\rho_c = \rho_s = 0$ выражения (28) переходят в (23), а формулы (29), (30) — в (24), (25).

Точные формулы (27), (28) позволяют рассчитать характеристики квадратурного измерителя рис. 3 при любых значениях отношения $\omega_0 / \Delta\omega$. В тоже время классические формулы (22)–(25) для характеристик оценки максимального правдоподобия фазы узкополосного радиосигнала лишь асимптотически точны, когда $\omega_0 / \Delta\omega \to \infty$ [1–3]. Сопоставление (27)–(30) и (22)–(25) позволяет количественно определить точность классических результатов [1–3] решения задачи оценки фазы узкополосного радиосигнала при конечных значениях отношения $\omega_0 / \Delta\omega$ для конкретных форм сигнала (1).

Показано, что невыполнение условия относительной узкополосности приводит к существенному отличию структуры алгоритма максимально правдоподобной оценки фазы сверхширокополосного квазирадиосигнала от структуры алгоритма максимально правдоподобной оценки фазы узкополосного радиосигнала. Найденные точные значения характеристик оценки фазы позволяют для конкретной формы сигнала сформулировать количественные ограничения, при которых классическое решение задачи оценки фазы узкополосного радиосигнала обладает требуемой точностью.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. — М. : Сов. радио, 1966. — 680 с.
2. *Куликов Е. И.* Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М. : Сов. радио, 1978. — 296 с.
3. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. — М. : Сов. радио, 1966. — 728 с.
4. *Астанин Л. Ю.* Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений / Л. Ю. Астанин, А. А. Костылев. — М. : Радио и связь, 1989. — 192 с.
5. *Taylor J.D.* Introduction to Ultrawideband Radar Systems / J. D. Taylor. — New–York : CRC Press, 1995.
6. *Кольцов Ю. В.* Методы и средства анализа и формирования сверхширокополосных сигналов / Ю. В. Кольцов. — М. : Радиотехника, 2004. — 128 с.
7. *Радзиевский В. Г.* Обработка сверхширокополосных сигналов и помех / В. Г. Радзиевский, П. А. Трифонов. — М. : Радиотехника, 2009. — 288 с.

Поступила после переработки 29.12.2010