

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОЦЕНКИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ АМПЛИТУДОЙ

*Воронежский государственный университет,
Россия, Воронеж, 394006, Университетская пл., 1*

Аннотация. Синтезированы квазиправдоподобный и максимально правдоподобный алгоритмы оценки длительности сигнала произвольной формы с неизвестной амплитудой. Найдены характеристики эффективности функционирования синтезированных алгоритмов. С помощью ЭВМ проверена работоспособность синтезированных алгоритмов и определены границы применимости асимптотических выражений

Abstract. The quasi and maximum likelihood algorithms for estimation a duration of arbitrary waveform signal with unknown amplitude are synthesis. The efficiency of the algorithm are found. The board of applicability for asymptotical expression for estimation characteristics are found have been established by statistical modeling on the computer

Ключевые слова: оценка максимального правдоподобия, длительность, амплитуда, смещение, рассеяние, maximum likelihood estimation, duration, amplitude, estimation characteristics

Задача оценки длительности сигнала, наблюдаемого на фоне шума актуальна в практических приложениях теории связи, локации, навигации и не раз обсуждалась в литературе. Так, в работах [1,2] исследованы алгоритмы оценивания длительности прямоугольного импульса, а в работе [3] — сигнала произвольной формы. Однако в ряде практических приложений неизвестной оказывается мощность принимаемого сигнала. Поэтому целесообразно рассмотреть алгоритмы оценивания длительности сигнала с неизвестной амплитудой. В работе [4] исследованы алгоритмы приёма сигнала с неизвестными длительностью и амплитудой, но лишь для прямоугольного импульса. В данной работе решается задача синтеза и анализа оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов оценивания длительности сигнала произвольной формы с неизвестной амплитудой.

Пусть на интервале времени $[0, T]$ доступна наблюдению реализация

$$\xi(t) = s(t, a_0, \tau_0) + n(t)$$

аддитивной смеси полезного сигнала

$$s(t, a_0, \tau_0) = \begin{cases} a_0 f(t), & 0 \leq t \leq \tau_0, \\ 0, & t < 0, t > \tau_0, \end{cases} \quad (1)$$

и гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь a_0, τ_0 — неизвестные амплитуда и длительность принимаемого сигнала соответственно, $f(t)$ — функция, описывающая его форму. Полагаем, что длительность сигнала принимает значения из априорного интервала $\tau \in [T_1, T_2]$. Располагая наблюдаемой реализацией $\xi(t)$, необходимо сформировать оценку длительности τ_0 полезного сигнала (1).

Для синтеза алгоритма оценивания длительности воспользуемся методом максимального правдоподобия (МП) [1,2], согласно которому оценка длительности совпадает с положением абсолютного (наибольшего) максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОР). Однако при неизвестных как длительности, так и амплитуде логарифм ФОР зависит от двух неизвестных параметров [1,2]

$$L(a, \tau) = \frac{2a}{N_0} \int_0^\tau \xi(t) f(t) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_0^\tau f^2(t) dt. \quad (2)$$

Следовательно, имеется априорная параметрическая неопределённость относительно амплитуды. Преодолеть эту неопределённость можно, подставляя в выражение (2) вместо неизвестной

амплитуды некоторые её значения. Эти значения могут быть фиксированными, а могут определяться по реализации наблюдаемых данных. Тем самым можно получить ряд алгоритмов оценивания (возможно неоптимальных). Ниже рассмотрены алгоритмы оценивания длительности, которые отличаются своей эффективностью и сложностью аппаратной реализации.

Одним из способов преодоления априорной параметрической неопределенности относительно амплитуды является применение квазиправдоподобного (КП) алгоритма оценивания. Квазиправдоподобный приемник формирует логарифм ФОП (2) для некоторой ожидаемой амплитуды a^* и всех возможных значений длительности $\tau \in [T_1, T_2]$

$$L^*(\tau) = L(a^*, \tau) = \frac{2a^*}{N_0} \int_0^\tau \xi(t)f(t)dt - \frac{a^{*2}}{N_0} \int_0^\tau f^2(t)dt \quad (3)$$

и находит КП оценку длительности как положение абсолютного максимума решающей статистики (3)

$$\tau^* = \arg \sup L^*(\tau). \quad (4)$$

Структура КП измерителя совпадает со структурой максимально правдоподобного измерителя длительности сигнала при априори известной амплитуде [3, рис. 3], с тем отличием, что амплитуда опорного сигнала теперь не равна истинному значению амплитуды принимаемого сигнала.

Выполним анализ КП алгоритма оценивания длительности. Согласно (3) случайный процесс $L^*(\tau)$ является гауссовским. Поэтому для полного его описания достаточно знать математическое ожидание и корреляционную функцию. Выполняя усреднение находим математическое ожидание

$$S^*(\tau) = \langle L^*(\tau) \rangle = (1 + \delta_a)q(\min(\tau, \tau_0)) - (1 + \delta_a)^2 q(\tau)/2 \quad (5)$$

и корреляционную функцию

$$K(\tau_1, \tau_2) = (1 + \delta_a)^2 q(\min(\tau_1, \tau_2)),$$

где

$$q(\tau) = \frac{2a_0^2}{N_0} \int_0^\tau f^2(t)dt \quad (6)$$

— отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе приёмника МП для сигнала длительностью τ , $\delta_a = (a^* - a_0)/a_0$ — величина, характеризующая относительное отличие ожидаемой амплитуды от её истинного значения. Нетрудно убедиться, что при $|\delta_a| < 1$ математическое ожидание (5) достигает максимума в точке τ_0 . Следовательно, в отсутствии шума КП оценка (4) совпадает с истинным значением длительности τ_0 , а условие $|\delta_a| < 1$ является достаточным условием состоятельности КП оценки.

Перейдём в (3) к новой переменной $\lambda = q(\tau)$, причем $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$, $\Lambda_1 = q(T_1)$, $\Lambda_2 = q(T_2)$. Положим аналогично [3], что функция $f(t)$, описывающая форму сигнала, обращается в нуль только на части интервала $[0, \tau]$, имеющей нулевую меру. Тогда $q(\tau)$ (6) является монотонно возрастающей функцией и имеет место равенство $q(\min(\tau_1, \tau_2)) = \min(q(\tau_1), q(\tau_2))$. Следовательно, решающую статистику (3) как функцию переменной λ можно представить в виде

$$L^*(\tau) = L^*[\tau(\lambda)] = \mu^*(\lambda) = (1 + \delta_a) \min(\lambda, \lambda_0) - (1 + \delta_a)^2 \lambda/2 + \nu(\lambda), \quad (7)$$

где $\lambda_0 = q(\tau_0)$, $\nu(\lambda)$ — гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$B(\lambda_1, \lambda_2) = (1 + \delta_a)^2 \min(\lambda_1, \lambda_2), \quad (8)$$

а $\tau(\lambda)$ определяется из решения уравнения $q(\tau) = \lambda$.

Согласно (6) случайная величина

$$\lambda^* = \operatorname{argsup} \mu^*(\lambda) \quad (9)$$

связана с оценкой длительности (4) взаимно-однозначным преобразованием. Следовательно, условную плотность вероятности $W_\tau^*(\tau|\tau_0)$ оценки τ^* можно выразить через плотность вероятности $W_\lambda^*(\lambda|\lambda_0)$ случайной величины (9). Для плотности вероятности $W_\lambda^*(\lambda|\lambda_0)$ согласно [2] запишем

$$W_\lambda^*(\lambda|\lambda_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{\partial F_{21}^*(u, v, \lambda)}{\partial u} \Big|_{v=u} \right] du, \quad (10)$$

где

$$F_{21}^*(u, v, \Lambda) = P \left\{ \sup_{\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda} \mu^*(\lambda) < u, \sup_{\Lambda < \lambda \leq \Lambda_2} \mu^*(\lambda) < v \right\} \quad (11)$$

— двумерная функция распределения абсолютных максимумов случайного процесса $\mu^*(\lambda)$. Для нахождения функции (11) воспользуемся методикой [2]. Согласно (7), (8) случайный процесс $\mu^*(\lambda)$ является марковским с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \frac{1}{2} \begin{cases} 1 - \delta_a^2, & \lambda \leq \lambda_0, \\ -(1 + \delta_a)^2, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad k_2 = (1 + \delta_a)^2.$$

Следовательно, функция (11) представляет собой вероятность недостижения марковским случайным процессом $\mu^*(\lambda)$ границ 0 и u на отрезке $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda]$ и границ 0 и v на отрезке $\lambda \in [\Lambda, \Lambda_2]$. Введём вспомогательный случайный процесс

$$y^*(\lambda) = \begin{cases} u - \mu^*(\lambda), & \Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda, \\ v - \mu^*(\lambda), & \Lambda < \lambda \leq \Lambda_2, \end{cases}$$

который является гауссовским марковским с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \frac{1}{2} \begin{cases} \delta_a^2 - 1, & \lambda \leq \lambda_0, \\ (1 + \delta_a)^2, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad k_2 = (1 + \delta_a)^2. \quad (12)$$

Тогда вероятность (11)

$$F_{21}^*(u, v, \Lambda) = P \left\{ \sup_{\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2} y^*(\lambda) > 0 \right\} \quad (13)$$

представляет собой вероятность недостижения марковским случайным процессом $y^*(\lambda)$ границ 0 и $+\infty$ на отрезке $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$. Согласно [5] для искомой вероятности (13) можно записать

$$F_{21}^*(u, v, \Lambda) = \int_0^\infty W(y, \Lambda_2) dy. \quad (14)$$

Здесь $W(y, \lambda)$ — решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) [2, 5]

$$\frac{\partial W(y, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial y} [k_1 W(y, \lambda)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_2 W(y, \lambda)] = 0 \quad (15)$$

при граничных условиях $W(y = 0, \lambda) = W(y = \infty, \lambda) = 0$ и начальном условии

$$W(y, \lambda)_{\lambda=\Lambda_1} = \frac{1}{(1+\delta_a)\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \exp \left[-\frac{(y-u+(1+\delta_a)\Lambda_1-(1+\delta_a)^2\Lambda_1/2)^2}{2(1+\delta_a)^2\Lambda_1} \right]. \quad (16)$$

Применяя метод отражения с переменной знака [5], находим решение уравнения (15) с коэффициентами (12) отдельно для случаев $\lambda \in [\Lambda_1, \lambda_0]$ и $\lambda \in (\lambda_0, \Lambda_2]$. Подставляя найденные решения в выражение (14), а затем (14) в (10) получаем выражение для плотности вероятности случайной величины (9)

$$W_\lambda(\lambda|\lambda_0) = \frac{(1+\delta_a)^2}{2} \begin{cases} \frac{1-\delta_a}{1+\delta_a} \Psi \left[\frac{(1-\delta_a^2)(\lambda_0-\lambda)}{2}, \frac{(1-\delta_a^2)(\lambda_0-\Lambda_1)}{2}, \frac{(1+\delta_a)^2(\Lambda_2-\lambda_0)}{2}, \frac{1+\delta_a}{1-\delta_a} \right], & \lambda \leq \lambda_0, \\ \Psi \left[\frac{(1+\delta_a)^2(\lambda-\lambda_0)}{2}, \frac{(1+\delta_a)^2(\Lambda_2-\lambda_0)}{2}, \frac{(1-\delta_a^2)(\lambda_0-\Lambda_1)}{2}, \frac{1-\delta_a}{1+\delta_a} \right], & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\Psi(y, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}y^{3/2}} \left\{ \frac{\exp[-(y_1-y)/4]}{\sqrt{\pi}[y_1-y]} + \Phi \left(\sqrt{\frac{y_1-y}{2}} \right) \right\} \times \\ \times \int_0^\infty x \exp \left\{ -\frac{(x+y)^2}{4y} \right\} \left[\Phi \left(\frac{y_2+y_3x}{\sqrt{2}y_2} \right) - \exp(-y_3x) \Phi \left(\frac{y_2-y_3x}{\sqrt{2}y_2} \right) \right] dx. \quad (18)$$

Поскольку $\lambda = q(\tau)$, то из (4) и (9) имеем $W_\tau(\tau|\tau_0) = W_\lambda(q(\tau)|q(\tau_0))q'(\tau)$. На основе этого выражения, а также, используя (18), запишем выражения для условных смещения и рассеяния КП оценки длительности (4)

$$B(\tau^*|\tau_0) = \int_{T_1}^{T_2} (\tau - \tau_0) W_\lambda(q(\tau)|q(\tau_0)) q'(\tau) d\tau, \quad V(\tau^*|\tau_0) = \int_{T_1}^{T_2} (\tau - \tau_0)^2 W_\lambda(q(\tau)|q(\tau_0)) q'(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение плотности вероятности (17), а также смещения и рассеяния (19) при увеличении ОСШ. Введем нормированную переменную (или обобщенную КП оценку длительности)

$$\kappa = \frac{(1+\delta_a)^2}{2} \begin{cases} (\lambda - \lambda_0)(1-\delta_a)/(1+\delta_a), & \lambda \leq \lambda_0, \\ (\lambda - \lambda_0), & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad (20)$$

$\kappa \in [-K_1, K_2]$, $K_1 = [q(\tau_0) - q(T_1)](1-\delta_a^2)/2$, $K_2 = [q(T_2) - q(\tau_0)](1+\delta_a)^2/2$, плотность вероятности которой имеет вид

$$W(\kappa) = \begin{cases} \Psi[-\kappa, K_1, K_2, (1+\delta_a)/(1-\delta_a)], & \kappa \leq 0, \\ \Psi[\kappa, K_2, K_1, (1-\delta_a)/(1+\delta_a)], & \kappa > 0. \end{cases} \quad (21)$$

Положим в (21), что $K_1 \rightarrow \infty$, $K_2 \rightarrow \infty$. Это в частности имеет место при $\lambda_0 = q(\tau_0) \rightarrow \infty$ и фиксированных значениях T_1 , T_2 . Учитывая (18), находим предельную плотность вероятности нормированной переменной (20)

$$W(\kappa) = \begin{cases} W_0(-\kappa, (1+\delta_a)/(1-\delta_a)), & \kappa \leq 0, \\ W_0(\kappa, (1-\delta_a)/(1+\delta_a)), & \kappa > 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$W_0(x, y) = \Psi(x, \infty, \infty, y) = (2y+1) \exp\{y(y+1)x\} \left[1 - \Phi \left((2y+1)\sqrt{|x|/2} \right) + \Phi \left(\sqrt{|x|/2} \right) \right] - 1.$$

Известно [1,2], что по мере роста ОСШ λ_0 КП оценка τ^* сходится в среднеквадратическом смысле к положению максимума математического ожидания решающей статистики (5), которое при $|\delta_a| < 1$ совпадает с истинным значением τ_0 длительности. Поэтому рассмотрим пове-

дение функции $q(\tau)$ в окрестности точки τ_0 . Разложим (6) в ряд Тейлора по τ в окрестности τ_0 и ограничимся в разложении членами первого порядка малости

$$q(\tau) \approx q(\tau_0) + 2f^2(\tau_0)(\tau - \tau_0)/N_0 = q(\tau_0) + \rho_0^2(\tau - \tau_0)/\tau_0,$$

где $\rho_0^2 = 2f^2(\tau_0)\tau_0/N_0$. Тогда для нормированной переменной κ справедливо выражение

$$\kappa = \frac{(1 + \delta_a)^2 \rho_0^2}{2\tau_0} \begin{cases} (\tau - \tau_0)(1 - \delta_a)/(1 + \delta_a), & \tau \leq \tau_0, \\ (\tau - \tau_0), & \tau > \tau_0. \end{cases} \quad (23)$$

Используя (22) и (23), для асимптотических значений смещения и рассеяния оценки длительно-сти можно записать

$$B_a(\tau^*|\tau_0) = \frac{-8\tau_0\delta_a}{\rho_0^2(\delta_a - 1)^2(\delta_a + 1)^2}, \quad V_a(\tau^*|\tau_0) = \frac{2\tau_0^2(13 + 101\delta_a^2 + 15\delta_a^4 - \delta_a^6)}{\rho_0^4(\delta_a + 1)^4(\delta_a - 1)^4}. \quad (24)$$

Если $a^* = a_0$, то $\delta_a = 0$ и КП оценка длительности (4) совпадает с МП оценкой длительности сигнала с априори известной амплитудой [3]. При $\delta_a = 0$ выражения (24) принимают вид

$$B_0 = 0, \quad V_0 = 26\tau_0^2/\rho_0^4. \quad (25)$$

и совпадают с выражениями для смещения и рассеяния МП оценки длительности сигнала с априори известной амплитудой, найденными в [3].

На рис. 1 и 2 сплошными линиями представлены зависимости от δ_a нормированных смещения $b(\delta_a) = B_a(\tau^*|\tau_0)/\sqrt{V_a(\tau^*|\tau_0)}$, и рассеяния $v(\delta_a) = V_a(\tau^*|\tau_0)/V_0$ КП оценки длительности соответственно. Как видно из рис. 1 и 2, наличие отклонения значения ожидаемой амплитуды от её истинного значения приводит к существенному ухудшению качества оценивания.

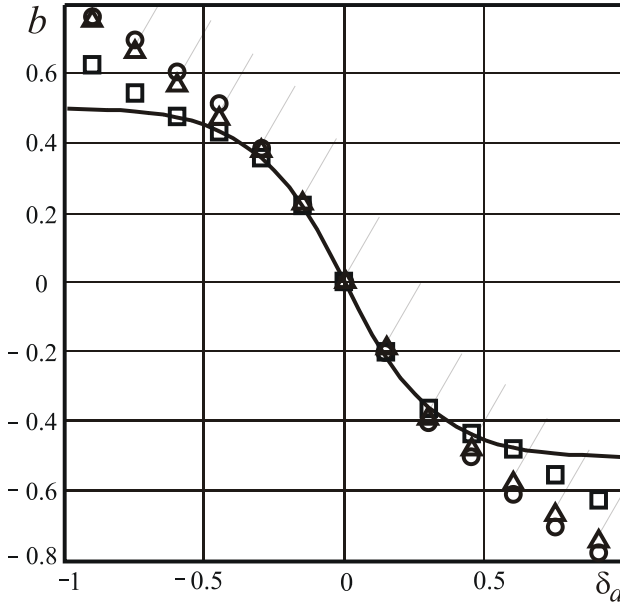


Рис 1

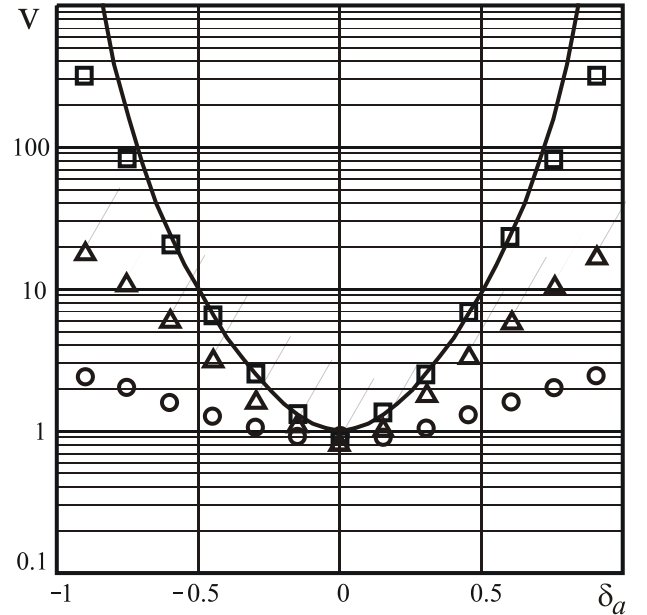


Рис. 2

С целью улучшения точности оценивания длительности можно применить МП алгоритм, основанный на поиске положения абсолютного максимума логарифма ФОП

$$\tau_m = \arg \sup L(\tau), \quad (26)$$

где $L(\tau) = L(a_m, \tau) = \sup_a L(a, \tau)$ — логарифм ФОП, в котором вместо неизвестной амплитуды используется её оценка максимального правдоподобия a_m , что равносильно максимизации вы-

ражения (2) по амплитуде. Выполняя максимизацию логарифма ФОП (2) по амплитуде, получаем

$$L(\tau) = \frac{1}{N_0} \left(\int_0^\tau \xi(t) f(t) dt \right)^2 \bigg/ \int_0^\tau f^2(t) dt. \quad (27)$$

Выражение (27) определяет структуру приемного устройства. Приёмник должен формировать случайный процесс (27) для всех возможных значений длительности и находить МП оценку длительности как положение его максимума. На рис. 3 изображена блок-схема МП измерителя длительности, где обозначено: И — интеграторы на интервале времени $[0, t]$, $t \in [0, T_2]$, РУ — решающее устройство, осуществляющее поиск положения максимума входного сигнала на интервале времени $[T_1, T_2]$.

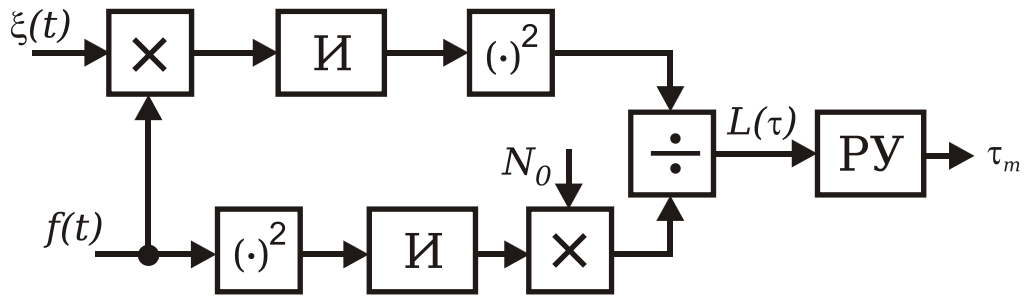


Рис. 3

Для анализа МП алгоритма оценивания рассмотрим вспомогательный случайный процесс

$$M(\tau) = \int_0^\tau \xi(t) f(t) dt. \quad (28)$$

Этот процесс является гауссовским с математическим ожиданием

$$S_M(\tau) = \langle M(\tau) \rangle = N_0 q(\tau_0) \min[q(\tau)/q(\tau_0), 1] / 2a_0$$

и корреляционной функцией

$$K_M(\tau_1, \tau_2) = N_0^2 q(\tau_0) \min[q(\tau_1)/q(\tau_0), q(\tau_2)/q(\tau_0)] / 4a_0^2,$$

где функция $q(\tau)$ определена в (6).

Перейдём в (28) к новой переменной $l = q(\tau)/q(\tau_0)$, $l \in [L_1, L_2]$, $L_1 = q(T_1)/q(\tau_0)$, $L_2 = q(T_2)/q(\tau_0)$. Тогда для случайного процесса (28) как функции переменной l можно записать

$$M(\tau) = M[\tau(l)] = \chi(l) = \frac{N_0 q(\tau_0)}{2a_0} \left[\min(l, 1) + \frac{\omega(l)}{\sqrt{q(\tau_0)}} \right].$$

Здесь $\tau(l)$ определяется из решения уравнения $q(\tau)/q(\tau_0) = l$, а $\omega(l)$ — стандартный винеровский процесс. Используя случайный процесс (28), решающую статистику (27) как функцию переменной l можно представить в виде

$$L(l) = \frac{2a_0^2 \chi^2(l)}{N_0^2 q(\tau_0) l} = z_0^2 \frac{\min^2(1, l)}{2l} + z_0 \frac{\min(1, l)}{l} \omega(l) + \frac{\omega^2(l)}{2l}, \quad (29)$$

где $z_0^2 = q(\tau_0)$ — ОСШ на выходе приёмника для принимаемого сигнала. При больших ОСШ последним слагаемым в (29) можно пренебречь и записать приближённо

$$L(l) \approx z_0^2 \frac{\min^2(1, l)}{2l} + z_0 \frac{\min(1, l)}{l} \omega(l). \quad (30)$$

Выполним в (30) ещё одну замену переменных $\lambda = q(\tau_0)l = z_0^2 l$, причём $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$, $\Lambda_1 = q(T_1)$, $\Lambda_2 = q(T_2)$, $\lambda_0 = q(\tau_0) = z_0^2$. Тогда можно переписать решающую статистику (30) как функцию переменной λ

$$L(l) = L[l(\lambda)] = L\left[\lambda/z_0^2\right] = \frac{\min^2(\lambda_0, \lambda)}{2\lambda} + \frac{\min(\lambda_0, \lambda)}{\lambda} \omega(\lambda). \quad (31)$$

Эта функция представляет собой гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием

$$S(\lambda) = \min^2(\lambda_0, \lambda)/2\lambda \quad (32)$$

и корреляционной функцией

$$K(\lambda_1, \lambda_2) = \min(\lambda_1, \lambda_0) \min(\lambda_2, \lambda_0) \min(\lambda_1, \lambda_2) / \lambda_1 \lambda_2.$$

Коэффициент корреляции решающей статистики (31) $R(\lambda_1, \lambda_2) = \min(\lambda_1, \lambda_2) / \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ удовлетворяет условию [5,6] $R(x, y) = R(x, t)R(t, y)$, $x > t > y$. Следовательно, случайный процесс (31) является марковским с коэффициентами сноса и диффузии [5,6]

$$k_1(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & \lambda \leq \lambda_0, \\ -\lambda_0^2/\lambda^2, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad k_2(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \leq \lambda_0, \\ \lambda_0^2/\lambda^2, & \lambda > \lambda_0. \end{cases}$$

При больших ОСШ положение максимума решающей статистики (31) располагается в окрестности положения максимума её математического ожидания [2]. Математическое ожидание (32) достигает максимального значения при $\lambda = \lambda_0$. Введём величину $\varepsilon = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$, абсолютное значение которой уменьшается с ростом ОСШ $\lambda_0 = z_0^2$ и перепишем коэффициенты сноса и диффузии в виде

$$k_1(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & \lambda \leq \lambda_0, \\ -(1+\varepsilon)^{-2}, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad k_2(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \leq \lambda_0, \\ (1+\varepsilon)^{-2}, & \lambda > \lambda_0. \end{cases}$$

Поскольку $\varepsilon \rightarrow 0$ при $z_0 \rightarrow \infty$, то можно решающую статистику (31) в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ аппроксимировать гауссовским марковским случайным процессом $\mu(\lambda)$ с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & \lambda \leq \lambda_0, \\ -1, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad k_2(\lambda) = 1. \quad (33)$$

Будем использовать эту аппроксимацию на всём интервале возможных значений параметра $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$. Согласно (6) случайная величина $\lambda_m = \arg \sup \mu(\lambda)$ связана с оценкой длительности τ_m (26) взаимно-однозначным преобразованием. Следовательно, условную плотность вероятности $W_\tau(\tau|\tau_0)$ МП оценки длительности τ_m можно выразить через плотность вероятности $W_\lambda(\lambda|\lambda_0)$ случайной величины λ_m . Для плотности вероятности $W_\lambda(\lambda|\lambda_0)$ справедливо выражение, аналогичное (10), где под $F_{21}^*(u, v, \Lambda)$ понимается двумерная функция распределения абсолютных максимумов случайного процесса $\mu(\lambda)$. Заметим, что коэффициенты сноса и диффузии (33) случайного процесса $\mu(\lambda)$ совпадают при $\delta_a = 0$ с коэффициентами сноса и диффузии (12) случайного процесса $\mu^*(\lambda)$ (7), а плотность вероятности случайной величины $u - \mu(\Lambda_1)$ совпадает при $\delta_a = 0$ с плотностью вероятности (16) случайной величины $u - \mu^*(\Lambda_1)$. Следовательно распределение положения максимума случайного процесса $\mu(\lambda)$ можно получить, полагая в выражении (17) $\delta_a = 0$

$$W_{\lambda}(\lambda|\lambda_0) = \frac{1}{2} \begin{cases} \Psi\left[\frac{\lambda_0 - \lambda}{2}, \frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{2}, \frac{\Lambda_2 - \lambda_0}{2}, 1\right], & \lambda \leq \lambda_0, \\ \Psi\left[\frac{\lambda - \lambda_0}{2}, \frac{\Lambda_2 - \lambda_0}{2}, \frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{2}, 1\right], & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad (34)$$

а предельную форму плотности вероятности (34) при увеличении ОСШ можно получить из выражения (22) при $\delta_a = 0$

$$W_{\lambda}(\lambda|\lambda_0) = W_0\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{2}\right) / 2, \quad W_0(x) = 3 \exp(2|x|) \left\{ 1 - \Phi\left(3\sqrt{|x|/2}\right) \right\} + \Phi\left(\sqrt{|x|/2}\right) - 1.$$

Соответственно, асимптотические выражения для смещения и рассеяния МП оценки длительности сигнала с неизвестной амплитудой получаем, положив в (24) $\delta_a = 0$

$$B_a(\tau_m|\tau_0) = 0, \quad V_a(\tau^*|\tau_0) = 26\tau_0^2 / \rho_0^4 = 13N_0^2 / 2a_0^4 f^4(\tau_0).$$

Эти выражения совпадают с аналогичными выражениями для смещения и рассеяния МП оценки длительности (25) при априори известной амплитуде, найденными в [3]. Следовательно, априорное незнание амплитуды сигнала не влияет на предельную точность МП оценки длительности сигнала. Это обстоятельство позволяет интерпретировать зависимости, изображённые на рис. 1 и 2 как выигрыш в точности МП алгоритма (26) (рис. 4) по сравнению с КП алгоритмом оценивания (4) (рис. 1).

С целью проверки работоспособности синтезированных алгоритмов оценивания, а также с целью установления границ применимости найденных асимптотических выражений для рассеяния и смещения оценки было выполнено имитационное статистическое моделирование на ЭВМ КП и МП алгоритмов оценивания длительности прямоугольного импульса со скошенной вершиной [7]. Форма импульса описывалась линейной функцией

$$f(t) = [1 + bt/T_2] / \sqrt{1 + b + b^2/3}.$$

Параметр b характеризует наклон скошенной вершины. Множитель $(1 + b + b^2/3)^{-1/2}$ введён для того, чтобы энергия сигнала максимальной длительности не зависела от наклона импульса, что даёт возможность сравнивать точность оценивания длительности сигналов с разным наклоном вершины, но одинаковой энергией. Для моделирования КП алгоритма оценивания логарифм ФОП (3) представлялся в виде

$$\begin{aligned} L^*(\eta) &= S^*(\eta, \eta_0) + N^*(\eta), \\ S^*(\eta, \eta_0) &= (1 + \delta_a) z_r^2 \min(\eta, \eta_0) \frac{1 + b \min(\eta, \eta_0) + b^2 \min^2(\eta, \eta_0)/3}{1 + b + b^2/3} - (1 + \delta_a)^2 z_r^2 \eta \frac{1 + b\eta + b^2\eta^2/3}{2(1 + b + b^2/3)}, \\ N^*(\eta) &= z_r(1 + \delta_a) \sqrt{\frac{T_2}{N_0}} \int_0^{\eta} n(T_2 x) (1 + bx) dx / \sqrt{1 + b + b^2/3}, \end{aligned}$$

где $\eta = \tau/T_2$, $z_r^2 = 2a_0^2 T_2 / N_0$ — максимально возможное ОСШ для принимаемого сигнала.

При моделировании с шагом $\Delta\eta = 10^{-6}$ вырабатывались отсчёты функции $N^*(\eta)$, на основе которых реализация логарифма ФОП аппроксимировалась ступенчатой функцией с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью $\varepsilon = 0,1$. Дискретные отсчёты логарифма ФОП представлялись в виде

$$L^*(n\Delta\eta) = S^*(n\Delta\eta, n_0\Delta\eta) + z_r(1 + \delta_a) \sqrt{\Delta\eta/2} \sum_{k=1}^n (1 + bk\Delta\eta) x_k / \sqrt{1 + b + b^2/3},$$

где x_k — гауссовские статистически независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $n = \overline{n_1, n_2}$, $n_1 = 1/\gamma\Delta\eta$, $n_2 = 1/\Delta\eta$, $n_0 = \eta_0/\Delta\eta$,

$\gamma = T_2/T_1$ — динамический диапазон изменения неизвестной длительности. В i -ом опыте на основе отсчётов $L_i^*(n\Delta\eta)$ вырабатывались величины

$$n_i^* = \arg \sup L_i^*(n\Delta\eta), \quad \eta_i^* = n_i^* \Delta\eta.$$

В процессе моделирования было реализовано $N = 10^5$ циклов испытаний. Экспериментальные значения смещения и рассеяния КП оценки длительности рассчитывались по формулам

$$B^* = \frac{T_2 \Delta\eta}{N} \sum_{i=1}^N (n_i^* - n_0), \quad V^* = \frac{T_2^2 \Delta\eta^2}{N} \sum_{i=1}^N (n_i^* - n_0)^2.$$

Для моделирования МП алгоритма оценивания логарифм ФОП (27) представлялся в виде

$$L(\eta) = \frac{[z_r S(\eta, \eta_0) + N(\eta)]^2}{2(1 + b\eta + b^2\eta^2/3)},$$

$$S(\eta, \eta_0) = \min(\eta, \eta_0) \left[1 + b \min(\eta, \eta_0) + b^2 \min^2(\eta, \eta_0)/3 \right] / \sqrt{1 + b + b^2/3},$$

$$N(\eta) = \sqrt{\frac{T_2}{N_0}} \int_0^\eta n(T_2 x) (1 + bx) dx.$$

При моделировании с шагом $\Delta\eta = 10^{-6}$ вырабатывались отсчёты функции $N(\eta)$, на основе которых реализация логарифма ФОП аппроксимировалась ступенчатой функцией с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью $\varepsilon = 0,1$. Дискретные отсчёты логарифма ФОП представлялись в виде

$$L(n\Delta\eta) = \frac{\left[z_r S(n\Delta\eta, n_0\Delta\eta) + \sqrt{\Delta\eta/2} \sum_{k=1}^n (1 + bk\Delta\eta) x_k \right]^2}{2(1 + bn\Delta\eta + b^2 n^2 \Delta\eta^2 / 3)},$$

на основе которых в i -ом опыте вырабатывались величины

$$n_{mi} = \arg \sup L_i(n\Delta\eta), \quad \eta_{mi} = n_{mi} \Delta\eta.$$

В процессе моделирования было реализовано $N = 10^5$ циклов испытаний. Экспериментальные значения смещения и рассеяния МП оценки длительности рассчитывались по формулам

$$B_m = \frac{T_2 \Delta\eta}{N} \sum_{i=1}^N (n_{mi} - n_0), \quad V_m = \frac{T_2^2 \Delta\eta^2}{N} \sum_{i=1}^N (n_{mi} - n_0)^2.$$

Результаты имитационного статистического моделирования показаны на рис. 1, 2. Кружками, треугольниками и квадратами изображены зависимости нормированных смещения $B^*/\sqrt{V^*}$ и рассеяния V^*/V_m , полученные в результате моделирования для прямоугольного импульса с наклоном скошенной вершины $b=1$ при различных ОСШ. Кружки соответствуют ОСШ $z_r = 5$, треугольники — $z_r = 10$, квадратики — $z_r = 20$. Предполагалось, что истинное значение длительности сигнала располагается в середине априорного интервала, а динамический диапазон изменения неизвестной длительности $\gamma = 8$. Как видно из рис. 1 и 2, с ростом ОСШ экспериментальные зависимости приближаются к теоретическим, а также увеличивается диапазон возможных значений δa , при которых асимптотические выражения для смещения и рассеяния удовлетворительно описывают экспериментальные данные.

Полученные выражения для характеристик различных алгоритмов оценки длительности сигнала с неизвестной амплитудой позволяют сделать обоснованный выбор необходимого алгоритма оценки в зависимости от имеющейся априорной информации об амплитуде сигнала, а также от требований, предъявляемых к простоте реализации алгоритма и от требований к точности оценки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тихонов В.И.* Оптимальный прием сигналов / В.И. Тихонов. — М.: Радио и связь, 1983. — 319с.
2. *Трифонов А.П.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А.П. Трифонов, Ю.С. Шинаков. — М.: Радио и связь, 1986. — 267с.
3. *Трифонов А.П., Корчагин Ю.Э.* Прием сигнала с неизвестной длительностью // Известия ВУЗов. Радиофизика. — 2002. Т.45, №7. — С. 625 – 637.
4. *Трифонов А.П., Бутейко В.К.* Прием сигнала с неизвестными амплитудой и длительностью на фоне белого шума // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. — 1981. Т.27, №8. — С.28 – 34.
5. *Тихонов В.И.*, Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. — М.: Радио и связь, 1977. — 488с.
6. *Сосулин Ю.Г.* Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов / Ю.Г. Сосулин. — М.: Сов. радио, 1978. — 320с.
7. *Грязнов М.И.* Измерение параметров импульсов / М.И. Грязнов, М.Л. Гуревич, Ю.А. Рябинин. — М.: Радио и связь. 1991. — 216с.