

# НЕЛИНЕЙНЫЙ МИР

№ 5, т.10, 2012

$$\frac{d^a}{d x^a}, a = \frac{m}{n}$$



Тел./факс: (495) 625-9241  
E-mail: [info@radiotec.ru](mailto:info@radiotec.ru)  
[Http://www.radiotec.ru](http://www.radiotec.ru)

Научно-технический и теоретический журнал

## НЕЛИНЕЙНЫЙ

№ 5, т. 10, 2012

МИР

Журнал включен в Перечень ВАК

## Содержание

Главный редактор  
докт. физ.-мат. наук,  
проф. А. А. Потанин  
РЕДАКЦИОННАЯ

## КОЛЛЕГИЯ:

чл.-корр. РАН В.Н. Борисов  
акад. А.С. Бугаев  
акад. Ю.В. Гуляев  
докт. техн. наук,  
проф. А.Х. Гильмутдинов  
(зам. гл. ред.)  
докт. техн. наук,  
проф. Ю.К. Едлоков  
инж. техн. наук  
В.П. Коннов  
акад. Н.А. Кузнецов  
И.А. Кузьмина  
докт. физ.-мат. наук,  
проф. Д.С. Лукин  
чл.-корр. РАН С.А. Никитин  
акад. В.И. Пустошит  
докт. физ.-мат. наук  
С.Ш. Рехваншили  
чл.-корр. РАН А.П. Рутен  
акад. А.С. Сигов  
докт. техн. наук,  
проф. Е.М. Сухарев  
акад. Н.Б. Федоров  
докт. физ.-мат. наук,  
проф. Л.Ф. Черногор  
инж. техн. наук Е.П. Чигин  
докт. физ.-мат. наук,  
проф. В.А. Черепенин

Зав. редакцией

И. А. Кузьмина

Обнаружение истинно случайных чисел на актуальной  
бесконечности в неевклидовом пространстве. Постановка задачи.

Потанин А. А., Струков А. В.

267

Равноконтрастное цветовое пространство для телевидения.

Ложкин Л. Д., Неганов В. А.

277

Нелинейный алгоритм обнаружения сигнала  
с неизвестными амплитудой и моментами появления и исчезновения.

Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э., Кондратович П. А.

287

Фрактальные свойства крупномасштабной структуры.

Борисов А. А., Агапов А. А., Розачева И. К., Позднеев И. А.,  
Щетикина О. А.

300

Расчет микротвердости легированной стали  
при конквентном механизме массопереноса.

Белашова И. С., Кузьмин С. Д.

312

Алгоритмы оценки выполнимости проекта  
и распределения заданий на основе математического моделирования  
компетенций работников.

Ризаев З. И., Сиразетдинов Р. Т.

317

Математическое моделирование динамики социально-экономической  
системы США.

Андреев В. В., Семёнов М. И.

322

## Нелинейный алгоритм обнаружения сигнала с неизвестными амплитудой и моментами появления и исчезновения

© Авторы, 2012

**А. П. Трифонов** – д. т. н., профессор, зав. кафедрой «Радиофизика»,  
Воронежский государственный университет (ВГУ), засл. деятель науки РФ  
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru, trirad@mail.ru

**Ю. Э. Корчагин** – к. ф.-м. н., доцент, кафедра «Радиофизика»,  
Воронежский государственный университет (ВГУ)  
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru, kortsch@mail.ru

**П. А. Кондратович** – аспирант, кафедра «Радиофизика»,  
Воронежский государственный университет (ВГУ)  
E-mail: pkondr@mail.ru

Установлена структура максимально-правдоподобного обнаружителя для сигнала с неизвестными амплитудой и моментами появления и исчезновения; предложена двухканальная структура нелинейного квазиоптимального обнаружителя сигнала с неизвестными амплитудой, моментами появления и исчезновения; получены асимптотические выражения для характеристик предложенного алгоритма; проведен анализ потерь в эффективности квазиоптимального алгоритма обнаружения.

**Ключевые слова:** обнаружение, момент появления, момент исчезновения, неизвестная амплитуда, максимально правдоподобный алгоритм, квазиоптимальный алгоритм, коэффициент сноса, коэффициент диффузии, марковский процесс, вероятность ложной тревоги и пропуска сигнала.

Structure of maximal-likelihood gauge for detection a signal with unknown amplitude and times of appearing and disappearing is determined. Double-channelled structure of the nonlinear quasi-optimal gauge for detection a signal with unknown amplitude and times of appearing and disappearing is proposed. Asymptotic characteristics of detection for a proposed algorithm are found. Analysis of losses of efficiency of quasi-optimal algorithm of detection is conducted.

**Keywords:** detection, time of appearing, time of disappearing, unknown amplitude, maximal-likelihood algorithm, quasi-optimal algorithm, drift coefficient, diffusion coefficient, Markoff process, probability of a false alarm and omission of a signal.

### ВВЕДЕНИЕ

Задача приема сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения, представляющая значительный интерес для радио- и гидролокации, радиосвязи, сейсмологии, телеметрии и других областей науки и техники, не раз обсуждалась в литературе [1 – 4]. В [1] рассмотрена задача обнаружения сигнала со случайными моментами появления и исчезновения, априорные распределения которых предполагаются известными. В [2] эта задача решается для случая неизвестных априорных распределений моментов появления и исчезновения сигнала; получены более простые, чем в [1], алгоритмы обнаружения и обсуждается возможность анализа их эффективности на основе решения соответствующих интегральных уравнений. Найденные алгоритмы обнаружения оказываются крайне сложными как с точки зрения аппаратной или программной реализации, так и с точки зрения анализа их эффективности. В [3] синтезирован ряд оптимальных алгоритмов обнаружения и найдены их асимптотические характеристики, а в [4] получены точные характеристики максимально правдоподобного (МП) алгоритма обнаружения сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения и априори известной амплитудой. Однако реальные условия генерации и распространения приводят к необходимости обнаружения сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения, мощность которых на приемной стороне не известна. Незвестное значение мощности сигнала на приемной стороне приводит к априорному незнанию амплитуды принимаемого сигнала. В этих условиях известные [1 – 4] алгоритмы обнаружения, решающие статистики которых представляют собой линейные функционалы от реализации наблюдаемых данных, теряют свою эффективность.

В работе рассмотрена задача обнаружения сигнала

$$s(t, a, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} af(t), & \theta_1 \leq t \leq \theta_2, \\ 0, & t < \theta_1, t > \theta_2, \end{cases} \quad (1)$$

наблюдаемого в течении интервала времени  $[0, T]$  на фоне аддитивного гауссовского белого шума  $n(t)$  с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ . Здесь известная функция  $f(t)$  описывает форму сигнала;  $a$  – амплитуда;  $\theta_1, \theta_2$  – моменты появления и исчезновения сигнала; они принимают значения из априорных интервалов  $\theta_i \in [\theta_{i\min}, \theta_{i\max}]$ ,  $i = 1, 2$ , причем момент появления сигнала предшествует моменту исчезновения так, что  $\theta_{1\max} < \theta_{2\min}$ . Функция  $f(t)$  при  $t \in [\theta_{1\min}, \theta_{2\max}]$  может обращаться в ноль лишь на интервалах нулевой меры. В моменты появления  $\theta_1$  и исчезновения  $\theta_2$  сигнала (2) функция  $f(t)$  не обращается в ноль,  $f(\theta_i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$  т. е. сигнал (1) является разрывным [5, 6]. Реализация наблюдаемых данных при этом запишется в виде

$$x(t) = \gamma_0 s(t, a_0, \theta_{01}, \theta_{02}) + n(t). \quad (2)$$

Индекс «ноль» здесь и далее означает истинное значение соответствующего параметра. Параметр  $\gamma_0$  дискретный и принимает два значения  $\gamma_0 = 0$ , т. е. в наблюдаемой реализации сигнал отсутствует, и  $\gamma_0 = 1$  когда в наблюдаемой реализации сигнал присутствует. По наблюдаемой реализации (2) необходимо решить, какое значение принимает параметр  $\gamma_0$ .

### МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНЫЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ

Для синтеза алгоритма обнаружения воспользуемся методом максимального правдоподобия [5, 6], согласно которому необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) для принимаемой реализации  $x(t)$  (2) и сравнивать его максимальное значение с порогом  $h$ . В случае превышения порога  $h$  выносится решение о наличии полезного сигнала  $s(t, a_0, \theta_{01}, \theta_{02})$  в принимаемой реализации  $x(t)$  (2), в случае не превышения порога выносится решение об отсутствии сигнала.

В данной постановке задачи логарифм ФОП зависит от четырех неизвестных параметров: амплитуды –  $a$ , моментов появления  $\theta_1$  и исчезновения  $\theta_2$  и дискретного параметра  $\gamma$ , характеризующего наличие или отсутствие сигнала в наблюдаемой реализации:

$$L(\gamma, a, \theta_1, \theta_2) = \frac{2a\gamma}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(t) [x(t) - af(t)/2] dt.$$

В том случае, когда априори известно истинное значение амплитуды  $a$ , логарифм ФОП является линейным функционалом от реализации наблюдаемых данных  $x(t)$  [3, 4]. Однако, когда параметры принимаемого сигнала априори не известны, решающая статистика, как правило, представляет собой нелинейный функционал от реализации наблюдаемых данных  $x(t)$ .

Задачу обнаружения можно интерпретировать как задачу оценки дискретного параметра  $\gamma_0$ . Для решения задачи обнаружения будем использовать обобщенный МП-алгоритм обнаружения [2, 5], основанный на сравнении абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП с некоторым порогом  $h$ . В соответствии с этим алгоритмом оценка  $\gamma_m$  параметра  $\gamma_0$  имеет вид

$$\gamma_m = \begin{cases} 1, & \sup_{a, \theta_1, \theta_2} L(a, \theta_1, \theta_2) > h, \\ 0, & \sup_{a, \theta_1, \theta_2} L(a, \theta_1, \theta_2) \leq h, \end{cases} \quad (3)$$

где  $L(a, \theta_1, \theta_2) = L(\gamma = 1, a, \theta_1, \theta_2)$ .

Порог  $h$  в выражении (3) может выбираться исходя из различных критериев оптимальности [5, 6]. Максимизацию логарифма ФОП  $L(a, \theta_1, \theta_2)$  по амплитуде  $a$  можно выполнить аналитически:

$$L(\theta_1, \theta_2) = \sup_a L(a, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_0} \left( \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(t) x(t) dt \right)^2 / \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad (4)$$

тогда решающая статистика примет вид

$$L_a = \sup_{\theta_1, \theta_2} L(\theta_1, \theta_2). \quad (5)$$

Решение о наличии сигнала в принятой реализации будем выносить в результате сравнения с порогом  $h$  решающей статистики  $L_a$ . Согласно (4) и (5) решающая статистика зависит от реализации наблюдаемых данных нелинейно.

Выражение (4) определяет структуру приемного устройства. Получить функцию (4) как непрерывную функцию моментов появления  $\theta_1$  и исчезновения  $\theta_2$  не представляется возможным. Приемник должен формировать случайное поле  $L(\theta_{1m}, \theta_{2g}) = L(m\Delta\theta_1, g\Delta\theta_2)$  (4) для каждого дискретного значения моментов появления  $m\Delta\theta_1$  и исчезновения  $g\Delta\theta_2$  и находить величину абсолютного максимума  $L(m\Delta\theta_1, g\Delta\theta_2)$  (здесь  $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2$  – шаги квантования моментов появления и исчезновения;  $m = 1, 2, \dots, n_1$  и  $g = 1, 2, \dots, n_2$ ). Причем, чем точнее необходимо воспроизвести выражение (4), тем меньшие надо брать значения  $\Delta\theta_1$  и  $\Delta\theta_2$ , и тем большее число каналов  $n_1$  и  $n_2$  необходимо для построения приемника. Необходимость формирования двумерного случайного поля вызывает трудности в технической реализации приемного устройства, поскольку приходится использовать многоканальную структуру, содержащую  $n_1 \cdot n_2$  каналов.

На рис. 1 изображена блок-схема одного канала МП обнаружителя, который формирует логарифм ФОП (4) для фиксированных значений моментов появления  $m\Delta\theta_1$  и исчезновения  $g\Delta\theta_2$ . Здесь обозначено:  $K$  – ключи, замкнутые на интервале времени  $[m\Delta\theta_1, g\Delta\theta_2]$ ;  $I$  – интеграторы. Из всех сформированных  $n_1 \cdot n_2$  каналами на рис. 1 значений  $L(m\Delta\theta_1, g\Delta\theta_2)$  выбирается наибольшее и сравнивается со значением порога  $h$ . В случае превышения порога  $h$  выносится решение о наличии полезного сигнала  $s(t, a_0, \theta_{01}, \theta_{02})$  в принимаемой реализации  $x(t)$  (2), в случае не превышения порога выносится решение об отсутствии сигнала.

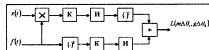


Рис. 1. Блок-схема одного канала МП обнаружителя

Нахождение характеристик МП алгоритма обнаружения является весьма трудоемким, к тому же многоканальность приемного устройства приводит к сложности его реализации на практике, т. к. требуется использовать  $n_1 \cdot n_2$  каналов, как на рис. 1.

### КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ

Ввиду сложности анализа и реализации МП алгоритма обнаружения воспользуемся квазиоптимальным (КО) алгоритмом обнаружения. Запишем логарифм ФОП в виде

$$L(a, \theta_1, \theta_2) = L_1(a, \theta_1) + L_2(a, \theta_2),$$

где  $\theta \in (\theta_{1\max}, \theta_{2\min})$ ;

$$L_1(a, \theta_1) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f(t) x(t) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt; \quad (6)$$

$$L_2(a, \theta_2) = \frac{2a}{N_0} \int_0^{\theta_2} f(t)x(t)dt - \frac{a^2}{N_0} \int_0^{\theta_2} f^2(t)dt. \quad (7)$$

Выполним аналитически максимизацию (6) и (7) по амплитуде. Для этого приравняем производные функций (6) и (7) по  $a$  нулю

$$\left. \frac{\partial L_1(a, \theta_1)}{\partial a} \right|_{a_{m1}} = \frac{2}{N_0} \int_0^{\theta_1} f(t)x(t)dt - \frac{2a_{m1}}{N_0} \int_0^{\theta_1} f^2(t)dt = 0,$$

$$\left. \frac{\partial L_2(a, \theta_2)}{\partial a} \right|_{a_{m2}} = \frac{2}{N_0} \int_0^{\theta_2} f(t)x(t)dt - \frac{2a_{m2}}{N_0} \int_0^{\theta_2} f^2(t)dt = 0$$

и решим полученные уравнения относительно  $a_{m1}$  и  $a_{m2}$ :

$$a_{m1} = \int_0^{\theta_1} f(t)x(t)dt \bigg/ \int_0^{\theta_1} f^2(t)dt, \quad a_{m2} = \int_0^{\theta_2} f(t)x(t)dt \bigg/ \int_0^{\theta_2} f^2(t)dt. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6) и (7), получим

$$L_{1a}(\theta_1) = \frac{1}{N_0} \left( \int_0^{\theta_1} f(t)x(t)dt \right)^2 \bigg/ \int_0^{\theta_1} f^2(t)dt, \quad (9)$$

$$L_{2a}(\theta_2) = \frac{1}{N_0} \left( \int_0^{\theta_2} f(t)x(t)dt \right)^2 \bigg/ \int_0^{\theta_2} f^2(t)dt. \quad (10)$$

В случае КО алгоритма обнаружения сигнала  $s(t, a, \theta_{01}, \theta_{02})$  будем сравнивать с порогом  $h$  не абсолютный максимум суммы процессов  $L_1(a, \theta_1)$  и  $L_2(a, \theta_2)$ , как в случае МП алгоритма обнаружения, а сумму абсолютных максимумов процессов  $L_{1a}(\theta_1)$  и  $L_{2a}(\theta_2)$ , обозначив

$$L_{qa} = \sup_{\theta_1} L_{1a}(\theta_1) + \sup_{\theta_2} L_{2a}(\theta_2). \quad (11)$$

Тогда алгоритм обнаружения принимает вид

$$\gamma_m = \begin{cases} 1, & L_{qa} > h, \\ 0, & L_{qa} \leq h. \end{cases} \quad (12)$$

Отметим, что решающая статистика  $L_{qa}$  (11) так же, как и в (5), представляет собой нелинейный функционал от реализации наблюдаемых данных  $x(t)$ . Согласно (11), (12) КО алгоритм обнаружения может быть реализован в виде двухканального устройства.

На рис. 2 показана блок-схема устройства, реализующего КО алгоритм обнаружения (12), построенная на основе выражений (9), (10), где обозначено:  $K1$  и  $K2$  – ключи, замкнутые на интервалах времени  $[\theta_{1\min}, \theta]$  и  $[\theta, \theta_{2\max}]$ ;  $H$  – интеграторы;  $ЛЗ$  – линии задержки на время  $\theta - \theta_{1\min}$ ;  $ПД1$  и  $ПД2$  – пиковые детекторы, фиксирующие величины абсолютных максимумов сигналов на отрезках времени  $[\theta, 2\theta - \theta_{1\min}]$  и  $[\theta, \theta_{2\max}]$  соответственно;  $ПУ$  – пороговое устройство, сравнивающее входной сигнал с порогом  $h$  и выносящее решение о наличии полезного сигнала ( $\gamma_m = 1$ ) в принятой реализации в случае

превышения порога и о его отсутствии ( $\gamma_m = 0$ ) – в противном случае. Таким образом, использование КО алгоритма обнаружения (12) позволяет существенно упростить техническую реализацию обнаружителя. Действительно, для реализации предложенного алгоритма обнаружения достаточно двухканальной схемы (рис. 2) в отличие от МП алгоритма обнаружения, где необходимо использовать  $n_1 \cdot n_2$  каналов, показанных на рис. 1. Отметим, что КО алгоритм обнаружения (12) является существенно нелинейным относительно принимаемой реализации  $x(t)$ .

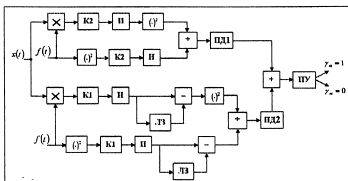


Рис. 2. Блок-схема КО алгоритма обнаружения

### СВОЙСТВА РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ

Для анализа КО алгоритма обнаружения рассмотрим вспомогательные случайные процессы:

$$M_1(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta} f(t)x(t)dt, \quad M_2(\theta_2) = \int_{\theta}^{\theta_2} f(t)x(t)dt, \quad (13)$$

расположенные под квадратами в выражениях (9) и (10). Они представляют собой гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями

$$S_1(\theta_1) = \langle M_1(\theta_1) \rangle = a_0 \gamma_0 Q[\max(\theta_{01}, \theta_1), \theta], \quad S_2(\theta_2) = \langle M_2(\theta_2) \rangle = a_0 \gamma_0 Q[\theta, \min(\theta_{02}, \theta_2)]$$

и корреляционными функциями

$$B_1(\theta_{11}, \theta_{21}) = \langle [M_1(\theta_{11}) - S_1(\theta_{11})][M_1(\theta_{21}) - S_1(\theta_{21})] \rangle = N_0 Q[\max(\theta_{11}, \theta_{21}), \theta]/2, \\ B_2(\theta_{12}, \theta_{22}) = \langle [M_2(\theta_{12}) - S_2(\theta_{12})][M_2(\theta_{22}) - S_2(\theta_{22})] \rangle = N_0 Q[\theta, \min(\theta_{12}, \theta_{22})]/2,$$

$$\text{где } Q(\theta_1, \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t)dt. \quad (14)$$

Поскольку функция  $f(t)$  может обращаться в ноль только на части интервала  $[\theta_{1\min}, \theta_{1\max}]$ , имеющей нулевую меру, то  $Q(\theta, \theta)$  – монотонно убывающая функция аргумента  $\theta_1$ , а  $Q(\theta, \theta_2)$  – монотонно возрастающая функция  $\theta_2$ . В этом случае имеют место равенства

$$Q(x, \theta) = -Q(\theta, x), \quad Q[\max(x, y), \theta] = \min[Q(x, \theta), Q(y, \theta)], \quad Q[\theta, \min(x, y)] = \min[Q(\theta, x), Q(\theta, y)].$$

Использование свойств функции (14) позволяет переписать математические ожидания и корреляционные функции процессов (13) в виде

$$S_i(\theta_i) = a_0 \gamma_0 \min \left[ (-1)^i Q(\theta, \theta_{0i}), (-1)^i Q(\theta, \theta_i) \right],$$

$$B_i(\theta_{1i}, \theta_{2i}) = N_0 \min \left[ (-1)^i Q(\theta, \theta_{1i}), (-1)^i Q(\theta, \theta_{2i}) \right] / 2.$$

Перейдем в выражениях (13) от переменных  $\theta_1, \theta_2$  к новым переменным  $r_i = (-1)^i Q(\theta, \theta_i)$ ,  $r_i \in [R_{i\min}, R_{i\max}]$ ,  $R_{i\min} = Q(\theta_{1\max}, \theta)$ ,  $R_{i\max} = Q(\theta_{1\min}, \theta)$ ,  $R_{2\min} = Q(\theta, \theta_{2\min})$ ,  $R_{2\max} = Q(\theta, \theta_{2\max})$ . Тогда для случайных процессов (9) и (10) можем записать выражение

$$L_{ia}(\theta_i) = (-1)^i M_i^2(\theta_i) / [N_0 Q(\theta, \theta_i)] = L_{ia}(r_i) = \chi_i^2(r_i) / (N_0 r_i).$$

Здесь  $\chi_i(r_i)$  – статистически независимые гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями  $S_i(r_i) = a_0 \gamma_0 \min(r_i, r_{0i})$ ,  $r_{0i} = (-1)^i Q(\theta, \theta_{0i})$  и корреляционными функциями  $B_i(r_{1i}, r_{2i}) = N_0 \min(r_{1i}, r_{2i})$ .

Следовательно, для решающих статистик (9) и (10) справедливо выражение

$$L_{ia}(l_i) = (\gamma_0 x_{0i}^2 \min(l_i, 1) + \omega_i(l_i))^2 / (2l_i), \quad (15)$$

где  $l_i = r_i / r_{0i}$ ;  $l_i \in [L_{i\min}, L_{i\max}]$ ,  $L_{i\min} = R_{i\min} / r_{0i}$ ,  $L_{i\max} = R_{i\max} / r_{0i}$ ;  $\omega_i(l_i)$  – статистически независимые стандартные винеровские процессы.

Величина  $z_{01}^2 = 2a_0^2 r_{01} / N_0 = 2a_0^2 Q(\theta_{01}, \theta) / N_0 = 2a_0^2 \int_{\theta_{02}}^{\theta} f^2(t) dt / N_0$  – отношение сигнал/шум (ОСШ)

для сигнала с амплитудой  $a_0$ , моментами появления  $\theta_{01}$  и исчезновения  $\theta$ ,  $z_{02}^2 = 2a_0^2 r_{02} / N_0 = 2a_0^2 Q(\theta, \theta_{02}) / N_0 = 2a_0^2 \int_{\theta}^{\theta_{02}} f^2(t) dt / N_0$  – ОСШ для сигнала с амплитудой  $a_0$ , моментами появления  $\theta$  и исчезновения  $\theta_{02}$ . Обозначим также ОСШ для принятого сигнала:

$$z_0^2 = z_{01}^2 + z_{02}^2 = 2a_0^2 \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t) dt / N_0. \quad (16)$$

## ВЕРОЯТНОСТЬ ЛОЖНОЙ ТРЕВОГИ

Перейдем к определению характеристик КО алгоритма обнаружения. Основными характеристиками обнаружения являются вероятность ложной тревоги и вероятность пропуска сигнала [6]. Вероятность ложной тревоги согласно (12) равна

$$\alpha(h) = P[\gamma_m = 1 | \gamma_0 = 0] = P[L_{ia} > h | \gamma_0 = 0] = 1 - P_{0q}(h), \quad (17)$$

где  $P_{0q}(h)$  – функция распределения величины  $\lambda_i \geq \lambda_{0i}$  (11), суммы абсолютных максимумов процессов  $L_{1a}(\theta_1)$  (9) и  $L_{2a}(\theta_2)$  (10) в случае отсутствия сигнала в принимаемой реализации  $x(t)$  (2), ( $\gamma_0 = 0$ ).

Таким образом, получим

$$P_{0q}(h) = P[L_{ia} < h | \gamma_0 = 0] = P[\sup L_{1a}(\theta_1) + \sup L_{2a}(\theta_2) < h], \quad (18)$$

где  $L_{i0}(\theta_i) = L_{ia}(\theta_i | \gamma_0 = 0)$ ,  $i = 1, 2$ .

Следовательно, для нахождения вероятности ложной тревоги обнаружителя необходимо определить функции распределения абсолютных максимумов случайных процессов  $L_{10}(l_i) = \omega^2(l_i)/2l_i$ ,  $i = 1, 2$ , которые имеют математические ожидания  $\langle L_{10}(l_i) \rangle = 1/2$ , коэффициенты корреляций  $R_i(l_{1i}, l_{2i}) = \min^2(l_{1i}, l_{2i})/l_{1i}l_{2i}$  и одномерные плотности вероятности  $W_0(x) = \exp(-x)/\sqrt{\pi x}$ . Перепишем выражения (15) в виде

$$L_{10}(l_i) = X_i^2(l_i)/2, \quad (19)$$

где  $X_i(l_i) = \omega(l_i)/\sqrt{l_i}$  – гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и коэффициентами корреляции  $R_{X_i}(l_{1i}, l_{2i}) = \min(l_{1i}, l_{2i})/\sqrt{l_{1i}l_{2i}}$ ,  $i = 1, 2$ .

В соответствии с КО алгоритмом обнаружения (12) найдем функцию распределения  $P_{0q}(h)$  (18) суммы независимых случайных величин  $\sup L_{10}(l_1)$  и  $\sup L_{02}(l_2)$ , для чего необходимо найти функции распределения каждого слагаемого. Выполним в выражении (19) замену переменных  $\Theta_i = \ln[2a_0^2 l_i / (N_0 z_{0i}^2)]$ ,  $\Theta_i \in [\Theta_{\min}, \Theta_{\max}]$ ,  $\Theta_{\min} = \ln[2a_0^2 \Lambda_{1i} / (N_0 z_{0i}^2)]$ ,  $\Theta_{\max} = \ln[2a_0^2 \Lambda_{12} / (N_0 z_{0i}^2)]$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда решающие статистики  $L_{10}(l_i)$  (19) как функции переменных  $\Theta_i$  могут быть представлены в виде

$$L_{10}(\Theta_i) = X^2(\Theta_i)/2, \quad (20)$$

где  $X(\Theta_i)$  – стационарные гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и коэффициентами корреляции  $R_{X_i}(\Theta_{1i}, \Theta_{12}) = \exp(-|\Theta_{1i} - \Theta_{12}|/2)$ ,  $i = 1, 2$ .

Известно [7], что  $X(\Theta_i)$  являются марковскими случайными процессами и удовлетворяют стохастическим дифференциальным уравнениям

$$dX(\Theta_i) = -X(\Theta_i) d\Theta_i/2 + d\omega(\Theta_i), \quad (21)$$

записанными в симметризованной форме. Умножим правую и левую части уравнений (21) на  $X(\Theta_i)$  и учитывая, что  $dL_{10}(\Theta_i) = X(\Theta_i) dX(\Theta_i)$  и  $X(\Theta_i) = \sqrt{2L_{10}(\Theta_i)}$ , получим нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение для решающей статистики  $L_{10}(\Theta_i)$ :

$$dL_{10}(\Theta_i) = -dL_{10}(\Theta_i) d\Theta_i + \sqrt{2L_{10}(\Theta_i)} d\omega(\Theta_i), \quad i = 1, 2$$

В [5, 8] показано, что с увеличением порога  $h$  и длин априорных интервалов  $[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}]$  вероятности недостижения порога случайными процессами  $L_{10}(\Theta_i)$  (20) имеют предельные значения:

$$P[\sup L_{10}(\Theta_i) < h] \approx \exp\left[-(\Theta_{\max} - \Theta_{\min})\sqrt{\frac{h}{\pi}} \exp(-h)\right] H(h - 1/2), \quad i = 1, 2 \quad (22)$$

где  $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$  – функция Хевисайда.

Возвращаясь в (22) к переменным  $l_i = (N_0 z_{0i}^2/2) \exp(\Theta_i)$  для больших значений порога  $h$  и отношений  $\Lambda_{12}/\Lambda_{11}$ , получаем

$$P_i(h) = P[\sup L_{10}(l_i) < h] \approx a_i^{-\sqrt{h/\pi} \exp(-h)} H(h - 1/2) \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

Здесь введено обозначение  $a_i = \Lambda_{12}/\Lambda_{11}$ :  $a_1 = \Lambda_{12}/\Lambda_{11} = \int_{\Theta_{\min}}^{\Theta} f^2(t) dt / \int_{\Theta_{\min}}^{\Theta_{\max}} f^2(t) dt$ ,

$$a_2 = \Lambda_{22}/\Lambda_{21} = \int_{\Theta}^{\Theta_{\max}} f^2(t) dt / \int_{\Theta}^{\Theta_{\min}} f^2(t) dt.$$

Для функции распределения  $P_{0q}(h)$  (18) суммы независимых случайных величин  $\sup L_{10}(l_1)$  и  $\sup L_{20}(l_2)$  с функциями распределения  $P_1(h)$  и  $P_2(h)$  (23), имеем [9]

$$P_{0q}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} P_2(h-y) dP_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(h-y) dP_2(y). \quad (24)$$

Подставляя в (24) функции распределения (23), получаем вероятность недостижения порога суммой независимых случайных величин  $\sup L_{10}(l_1)$  и  $\sup L_{20}(l_2)$  (11):

$$P(h) = P[\sup L_{q0} < h | \gamma_0 = 0] = \left[ a_1^{-\sqrt{2\pi} \exp(-1/2)} a_2^{-\sqrt{(h-1/2)/\pi} \exp(-(h-1/2))} + \right. \\ \left. + \frac{\ln a_1}{\sqrt{\pi}} \int_{1/2}^{h-1/2} \left( \frac{2y-1}{2\sqrt{y}} \right) a_1^{-\sqrt{y/\pi} \exp(-y)} a_2^{-\sqrt{(h-y)/\pi} \exp(-(h-y))} e^{-y} dy \right] H(h-1).$$

Тогда вероятность ложной тревоги (17)

$$\alpha(h) = P[\sup L_{q0} > h] = 1 - P[\sup L_{q0} < h] = 1 - \left[ a_1^{-\sqrt{2\pi} \exp(-1/2)} a_2^{-\sqrt{(h-1/2)/\pi} \exp(-(h-1/2))} + \right. \\ \left. + \frac{\ln a_1}{\sqrt{\pi}} \int_{1/2}^{h-1/2} \left( \frac{2y-1}{2\sqrt{y}} \right) a_1^{-\sqrt{y/\pi} \exp(-y)} a_2^{-\sqrt{(h-y)/\pi} \exp(-(h-y))} e^{-y} dy \right] H(h-1). \quad (25)$$

Полученная формула для вероятности ложной тревоги (25) является приближенной, однако ее точность увеличивается с ростом значений порога  $h$  и параметров  $a_1, a_2$ .

В качестве примера рассмотрим сигнал прямоугольной формы. Для этого в выражении для  $s(t, a, \theta_1, \theta_2)$  (1) положим  $f(t) = 1$ , так что принимаемый сигнал имеет вид

$$s(t, a, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} a, & \theta_1 \leq t \leq \theta_2, \\ 0, & t < \theta_1, t > \theta_2. \end{cases} \quad (26)$$

Введем безразмерные величины  $\delta_i = (\theta_{i\max} - \theta_{i\min})/T_{\min}$ ,  $i = 1, 2$  характеризующие относительные длины априорных интервалов моментов появления и исчезновения, и величину  $\nu = (\theta - \theta_{1\max})/T_{\min}$  характеризующую положение точки  $\theta$  на интервале  $[\theta_{1\max}, \theta_{2\min}]$ , где  $T_{\min} = \theta_{2\min} - \theta_{1\max}$  – минимальная длительность сигнала. Положим, что истинные значения моментов появления  $\theta_{01}$  и исчезновения  $\theta_{02}$  расположены в серединах априорных интервалов, так что

$\theta_{0i} = (\theta_{i\max} + \theta_{i\min})/2$ ,  $i = 1, 2$ , а точка  $\theta$  – в середине интервала  $[\theta_{1\max}, \theta_{2\min}]$ , так что  $\theta = (\theta_{1\max} + \theta_{2\min})/2$  и  $\nu = 1/2$ . Тогда в новых обозначениях

$$a_1 = 1 + \delta_1/\nu, \quad a_2 = 1 + \delta_2/(1-\nu).$$

На рис. 3 изображены зависимости от порога  $h$  вероятности ложной тревоги (25) для КО алгоритма (12) обнаружения прямоугольного импульса (26). Сплошной линией показана кривая соответствующая  $\delta_1 = \delta_2 = 2$ , штриховой –  $\delta_1 = \delta_2 = 5$ , штрих-пунктирной –  $\delta_1 = \delta_2 = 10$ , пунктирной –  $\delta_1 = \delta_2 = 20$ .

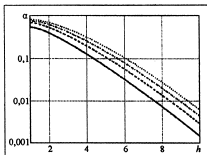


Рис. 3. Графическое представление вероятности ложной тревоги

Из анализа зависимостей рис. 3 следует, что с увеличением относительной длины априорных интервалов возможных значений моментов появления и исчезновения вероятности ложной тревоги возрастает. В результате анализа зависимости вероятности ложной тревоги (25) от параметра  $\nu$  было выяснено, что в случае близких значений длин априорных интервалов моментов появления  $\theta_1$  и исчезновения  $\theta_2$  вероятность ложной тревоги принимает минимальное значение при  $\nu = 1/2$ . Это соответствует случаю, когда точка  $\theta$  расположена в середине априорного интервала  $[\theta_{1\max}, \theta_{2\min}]$ .

### ВЕРЯТНОСТЬ ПРОПУСКА СИГНАЛА

Вероятность пропуска сигнала согласно (12) равна

$$P(\theta_{01}, \theta_{02}) = P[\gamma_m = 0 | \gamma_0 = 1] = P[L_{q0} < h | \gamma_0 = 1] = P_q(h), \quad (27)$$

где  $P_q(h)$  – функция распределения величины  $L_{q0}$  (11), суммы абсолютных максимумов процессов  $L_{10}(\theta_1)$  (9) и  $L_{20}(\theta_2)$  (10) в случае присутствия сигнала в принимаемой реализации  $x(t)$  (2), ( $\gamma_0 = 1$ ):

$$P_q(h) = P[L_{q0} < h | \gamma_0 = 1] = P[\sup L_{11}(\theta_1) + \sup L_{21}(\theta_2) < h]. \quad (28)$$

Здесь  $L_{i1}(\theta_i) = L_{in}(\theta_i | \gamma_0 = 1)$ ,  $i = 1, 2$ .

При наличии сигнала в наблюдаемой реализации, когда  $\gamma_0 = 1$ , согласно (15) получим

$$L_{i1}(t_i) = z_{0i}^2 \frac{\min^2(1, t_i)}{2l_i} + z_{0i} \frac{\min(1, t_i)}{l_i} \omega(t_i) + \frac{\omega^2(t_i)}{2l_i}. \quad (29)$$

Для больших ОСШ  $z_0^2$  (16), таких, что  $z_{01}^2 \gg 1$  и  $z_{02}^2 \gg 1$  последним слагаемым в (29) можно пренебречь и приближённо записать

$$L_{i1}(t_i) \approx z_{0i}^2 \frac{\min^2[1, t_i]}{2l_i} + z_{0i} \frac{\min[1, t_i]}{l_i} \omega(t_i), \quad i = 1, 2. \quad (30)$$

Выполним в (30) замену переменных  $\lambda_i = z_{0i}^2 l_i$ , причем  $\lambda_i \in [\Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}]$ ,  $\Lambda_{i1} = 2\alpha_0^2 (-1)^i Q(\theta, \theta_{i\min})/N_0$ ,  $\Lambda_{i2} = 2\alpha_0^2 (-1)^i Q(\theta, \theta_{i\max})/N_0$ ,  $\lambda_{0i} = z_{0i}^2$ ,  $Q(\theta_1, \theta_2)$  – введенная ранее функция (14). Тогда можно переписать (30) как функции переменных  $\lambda_i$ :

$$\mu_{i1}(\lambda_i) = L_{i1}(l_i(\lambda_i)) = \frac{\min^2[\lambda_0, \lambda_i]}{2\lambda_i} + \frac{\min[\lambda_0, \lambda_i]}{\lambda_i} \omega(\lambda_i). \quad (31)$$

Эти функции представляют собой гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями

$$S_{i1}(\lambda_i) = \frac{\min^2[\lambda_0, \lambda_i]}{2\lambda_i}, \quad (32)$$

и корреляционными функциями  $K_{i1}(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}) = \frac{\min(\lambda_{i1}, \lambda_0) \min(\lambda_{i2}, \lambda_0)}{2\lambda_i} \min(\lambda_{i1}, \lambda_{i2})$ . Коэффициенты корреляций решающих статистик (31) имеют вид  $R_i(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}) = \min(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}) / \sqrt{\lambda_{i1} \lambda_{i2}}$ ,

и удовлетворяют условию [7, 10]  $R_i(x, y) = R_i(x, t) R_i(t, y)$ ,  $x > t > y$ . Следовательно, случайные процессы (31) являются марковскими с коэффициентами сноса и диффузии [7]:

$$k_{i1}(\lambda_i) = \begin{cases} 1, & \lambda_i < \lambda_{0i}, \\ -\lambda_{0i}^2 / \lambda_i^2, & \lambda_i \geq \lambda_{0i}, \end{cases} \quad k_{2i}(\lambda_i) = \begin{cases} 1, & \lambda_i < \lambda_{0i}, \\ \lambda_{0i}^2 / \lambda_i^2, & \lambda_i \geq \lambda_{0i}. \end{cases}$$

При больших ОСШ положения максимумов решающих статистик (30) располагаются в малой окрестности положения максимумов их математических ожиданий [8]. Математические ожидания (32) достигают максимальных значений при  $\lambda_i = \lambda_{0i}$ . Введем величины  $\varepsilon_i = (\lambda_i - \lambda_{0i})/\lambda_{0i}$ , абсолютные значения которые уменьшаются с ростом ОСШ  $z_0^2$  (16), и перепишем коэффициенты сноса и диффузии в виде

$$k_{1i}(\lambda_i) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & \lambda_i < \lambda_{0i}, \\ -(1 + \varepsilon_i)^{-2}, & \lambda_i \geq \lambda_{0i}, \end{cases} \quad k_{2i}(\lambda_i) = \begin{cases} 1, & \lambda_i < \lambda_{0i}, \\ (1 + \varepsilon_i)^{-2}, & \lambda_i \geq \lambda_{0i}. \end{cases}$$

Поскольку  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  в среднеквадратическом [8] при  $z_0^2 \rightarrow \infty$ , то при больших ОСШ решающие статистики (30) в окрестности точек  $\lambda_i = \lambda_{0i}$  можно аппроксимировать гауссовскими марковскими случайными процессами с коэффициентами сноса и диффузии:

$$k_{1i}(\lambda_i) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & \lambda_i < \lambda_{0i}, \\ -1, & \lambda_i > \lambda_{0i}, \end{cases} \quad k_{2i}(\lambda_i) = 1. \quad (33)$$

Будем использовать эту аппроксимацию на всем интервале возможных значений параметра  $\lambda_i \in [\Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}]$ .

Для КО алгоритма обнаружения (12) согласно (28) вероятность пропуска сигнала (27) определяется выражением

$$\beta(\lambda_{01}, \lambda_{02}) = P[\sup \mu_{11}(\lambda_1) + \sup \mu_{21}(\lambda_2) < h] = P_{1q}(h), \quad (34)$$

где

$$P_{1q}(h) = P[\sup \mu_{11}(\lambda_1) + \sup \mu_{21}(\lambda_2) < h] = \int F_2(h-x) dF_1(x); \quad (35)$$

$$F_i(u) = P[\sup \mu_{i1}(\lambda_i) < u, \Lambda_{i1} \leq \lambda_i \leq \Lambda_{i2}] \quad (36)$$

– функции распределения величин абсолютных максимумов гауссовских марковских процессов  $\mu_{i1}(\lambda_i)$  (31) с коэффициентами сноса и диффузии  $k_{1i}(\lambda_i)$  и  $k_{2i}(\lambda_i)$  (33).

Функция распределения (36) представляет собой вероятность недостижения границы  $u$  марковскими процессами  $\mu_{i1}(\lambda_i)$  при  $\lambda_i \in [\Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}]$ . Используя марковские свойства случайных процессов  $\mu_{i1}(\lambda_i)$  (31), можно найти вероятность пропуска сигнала (34). Для нахождения функций распределения  $F_i(u)$  (36) воспользуемся решением уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) применительно к процессам  $\mu_{i1}(\lambda_i)$  с коэффициентами сноса и диффузии  $k_{1i}(\lambda_i)$  и  $k_{2i}(\lambda_i)$  (33).

При наличии сигнала в принятой реализации ( $\gamma_0 = 1$ ) аналогично [5, 11] для (36) можно записать

$$F_i(u) = \int_{-\infty}^u W_i(y, \Lambda_{i2}) dy, \quad (37)$$

где  $W_i(y, \Lambda_{i2}) = W_i(y, \lambda_i = \Lambda_{i2})$ ,  $W_i(y, \lambda_i)$  – решения уравнения ФПК:

$$\frac{\partial W(y, \lambda_i)}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial}{\partial \lambda_i} [k_{1i} W_i(y, \lambda_i)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_{2i} W_i(y, \lambda_i)] = 0,$$

с коэффициентами сноса и диффузии  $k_{1i}(\lambda_i)$  и  $k_{2i}(\lambda_i)$  (33) при начальном условии  $W_i(y, \Lambda_{i1}) = \exp[-(y - \Lambda_{i1}/2)^2 / (2\Lambda_{i1})] / \sqrt{2\pi\Lambda_{i1}}$ .

Задавая нулевые граничные условия  $W_i(y=u, \lambda_i) = 0$  и  $W_i(y=-\infty, \lambda_i) = 0$  при  $\lambda_i \in [\Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}]$ , решая уравнение ФПК методом отражения с переменной знака [7], при  $\lambda_i \leq \lambda_{0i}$  получаем

$$W(y, \lambda_i) = \frac{\exp[-x/2 - (\lambda_i - \Lambda_{i1})/8]}{2\pi\sqrt{\Lambda_{i1}(\lambda_i - \Lambda_{i1})}} \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(y-\xi)^2}{2(\lambda_i - \Lambda_{i1})}\right] - \exp\left[-\frac{(y+\xi)^2}{2(\lambda_i - \Lambda_{i1})}\right] \right\} \times \\ \times \exp\left[-(\xi - u + \Lambda_{i1}/2)^2 / (2\Lambda_{i1}) + \xi/2\right] d\xi,$$

При  $\lambda_i \geq \lambda_{0i}$

$$W_i(y, \lambda_i) = \frac{\exp[y/2 - (\lambda_i - \Lambda_{i1})/8]}{2\pi\sqrt{2\pi\Lambda_{i1}(\lambda_i - \lambda_{0i})(\lambda_{0i} - \Lambda_{i1})}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi_1 - \xi)^2}{2(\lambda_{0i} - \Lambda_{i1})}\right) - \\ - \exp\left(-\frac{(\xi_1 + \xi)^2}{2(\lambda_{0i} - \Lambda_{i1})}\right) \left[ \exp\left(-\frac{(y - \xi_1)^2}{2(\lambda_i - \lambda_{0i})}\right) - \exp\left(-\frac{(y + \xi)^2}{2(\lambda_i - \lambda_{0i})}\right) \right] \times \\ \times \exp\left[-(\xi - u + \Lambda_{i2}/2)^2 / (2\Lambda_{i1}) + \xi/2 - \xi_1\right] d\xi d\xi_1. \quad (38)$$

Подставив решение (38) при  $\lambda_i = \Lambda_{i2}$  в (37), запишем выражение для функции  $F_i(u)$  (36):

$$F_i(u) = \frac{\exp[-(\lambda_{0i} - \Lambda_{i1})/8]}{2\pi\sqrt{\Lambda_{i1}(\lambda_{0i} - \Lambda_{i1})}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi_1 - \xi)^2}{2(\lambda_{0i} - \Lambda_{i1})}\right) - \\ - \exp\left(-\frac{(\xi_1 + \xi)^2}{2(\lambda_{0i} - \Lambda_{i1})}\right) \left[ \exp\left[-\frac{(\xi - u + \Lambda_{i1}/2)^2}{2\Lambda_{i1}} + \frac{\xi - \xi_1}{2}\right] \varphi(1, \Lambda_{i2} - \lambda_{0i}, \xi_1) d\xi d\xi_1, \quad (39)$$

где  $\varphi(y_1, y_2, y_3) = \Phi\left[y_1\sqrt{y_2}/2 + y_3/\left(y_1\sqrt{y_2}\right)\right] - \exp(-y_3)\Phi\left[y_1\sqrt{y_2}/2 - y_3/\left(y_1\sqrt{y_2}\right)\right]$ ;

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$  – интеграл вероятности.

Подставляя далее функции (39) в формулу (35), а затем (35) в (34), получаем асимптотически точное с ростом ОСШ выражение для вероятности пропуска сигнала (27):

$$\beta(\theta_{01}, \theta_{02}) = \beta(h, z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu_4\mu_2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi_1 + \xi_3 - h + z_{\min}^2/2)^2}{2z_{\min}^2}\right) \times \\ \times \vartheta[\xi_1, \xi_2, 0, \mu_1] \vartheta[\xi_3, \xi_4, 0, \mu_2] \varphi(1, m_1, \xi_2) \varphi(1, m_2, \xi_4) \exp[-(\mu_1 + \mu_2)/8] \times \\ \times \exp\left((\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4)/2\right) (\xi_1 + \xi_3 - c + z_{\min}^2/2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 / (2\pi z_{\min}^2), \quad (40)$$

где

$$\vartheta[y_1, y_2, y_3, y_4] = \left\{ \exp\left[-(y_1 - y_2 + y_3)^2 / (2y_4)\right] - \exp\left[-(y_1 + y_2 + y_3)^2 / (2y_4)\right] \right\};$$

$$m_1 = \frac{2\alpha_0^2}{N_0} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_0} f^2(i) dt; m_2 = \frac{2\alpha_0^2}{N_0} \int_{\theta_2}^{\theta_{\max}} f^2(i) dt; \mu_1 = \frac{2\alpha_0^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_{\max}} f^2(i) dt; \mu_2 = \frac{2\alpha_0^2}{N_0} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_2} f^2(i) dt.$$

Найденное асимптотически точное выражение (40) для вероятности пропуска сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения и амплитудой совпадает с точной формулой для вероятности пропуска сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения, но с априори известной амплитудой [4]. Поэтому влияние априорного незнания амплитуды на эффективность обнаружения можно количественно охарактеризовать величиной

$$\chi = \beta(h', z_0) / \beta(h'', z_0), \quad (41)$$

представляющей собой отношение вероятности пропуска сигнала с неизвестными амплитудой, моментами появления и исчезновения при использовании КО алгоритма обнаружения к вероятности пропуска сигнала с априори известной амплитудой и неизвестными моментами появления и исчезновения при использовании МП алгоритма обнаружения [4]. В (41)  $h'$  – порог, найденный из решения уравнения  $\alpha(h') = p$ , а порог  $h''$  – из уравнения  $\alpha_0(h'') = p$ ,  $\beta(h, z_0)$  определяется (40),  $\alpha(h')$  – выражением (25);  $\alpha_0(h)$  – вероятность ложной тревоги при обнаружении сигнала с априори известной амплитудой и неизвестными моментами появления и исчезновения, заимствованная из [4]:

$$\alpha_0(h) = 1 - \frac{1}{z_{\min}^2 \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left( \frac{\xi_1 + \xi_2 - h - \frac{z_{\min}}{2}}{2} \right) \times \\ \times \exp \left( - \frac{(\xi_1 + \xi_2 - h - z_{\min}/2)^2}{2z_{\min}^2} \right) \varphi(1, \eta_1, \xi_1) \varphi(1, \eta_2, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (42)$$

Здесь  $\eta_i = \frac{2\alpha_0^2}{N_0} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} f^2(i) dt$ ,  $i = 1, 2$ ;  $p$  – заранее заданный согласно критерию Неймана–Пирсона уровень

вероятности ложной тревоги;  $z_{\min}^2 = 2\alpha_0^2 Q(\theta_{\max}, \theta_{\min}) / N_0$  – ОСШ для сигнала минимальной длительности  $T_{\min} = \theta_{\max} - \theta_{\min}$ ; для обнаружения прямоугольного импульса (26)  $z_{\min}$  можно выразить через ОСШ  $z_0$  (16) для принятого сигнала  $z_{\min} = z_0 \sqrt{2/(2 + \delta_1 + \delta_2)}$ .

На рис. 4 изображены зависимости проигрыша в эффективности обнаружения  $\chi$  (41) вследствие априорного незнания амплитуды от ОСШ  $z_0$  (16) при обнаружении прямоугольного импульса (30). Кривые построены для случая  $\nu = 1/2$ , что соответствует положению точки  $\theta$  в середине интервала  $[\theta_{\max}, \theta_{\min}]$  и вероятности ложной тревоги  $p = 10^{-2}$ . Сплошной линией изображена зависимость соответствующая  $\delta_1 = \delta_2 = 2$ , штриховой –  $\delta_1 = \delta_2 = 5$ , пунктирной –  $\delta_1 = \delta_2 = 10$ .

Из анализа зависимостей на рис. 4 следует, что увеличение относительных длин априорных интервалов возможных значений моментов появления  $\delta_1$  и исчезновения  $\delta_2$  сигнала приводит к снижению проигрыша  $\chi$  в эффективности КО алгоритма обнаружения. Это связано с тем, что увеличение относительных длин априорных интервалов

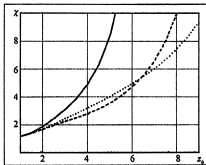


Рис. 4. Графическое представление проигрыша в эффективности обнаружения

неизвестных моментов появления и исчезновения вносит более весомый вклад в ухудшение эффективности КО и МП алгоритмов обнаружения сигнала, чем незнание амплитуды принимаемого сигнала. Из анализа проигрыша в эффективности обнаружения  $\chi$  для разных значений вероятности ложной тревоги  $p$  следует, что с уменьшением допустимого уровня ложной тревоги  $p$  проигрыш в эффективности КО алгоритма обнаружения вследствие незнания амплитуды снижается.

В результате анализа характеристик предлагаемого нелинейного квазиоптимального алгоритма обнаружения установлено, что увеличение относительных длин априорных интервалов возможных значений неизвестных моментов появления и исчезновения вносит более весомый вклад в ухудшение эффективности рассмотренных квазиоптимального и максимально правдоподобного алгоритмов обнаружения, нежели априорное незнание амплитуды принимаемого сигнала. Это приводит к снижению проигрыша в эффективности двуканальной структуры квазиоптимального алгоритма обнаружения в сравнении с многоканальной структурой максимально правдоподобного алгоритма в случае больших значений относительных длин априорных интервалов неизвестных моментов появления и исчезновения. Также показано, что с уменьшением допустимого уровня ложной тревоги относительный проигрыш в эффективности квазиоптимального алгоритма обнаружения вследствие априорного незнания амплитуды снижается.

### Литература

1. Тартаковский А. Г. Обнаружение сигналов со случайными моментами появления и исчезновения // Проблемы передачи информации. 1988. Т. 24. № 2. С. 39–50.
2. Ренн В. Г. Обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Проблемы передачи информации. 1991. Т. 27. № 1. С. 61–72.
3. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э. Оптимальный прием сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Проблемы передачи информации. 2001. Т. 37. № 1. С. 52–71.
4. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э. Точные формулы для расчета характеристик приема сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения. // Проблемы передачи информации. 2009. Т. 45. № 2. С. 91–100.
5. Трифонов А. П. Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами // Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь. 1984. С. 12–89.
6. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь. 1983.
7. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Радио и связь. 1977.
8. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
9. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио. 1966.
10. Соколик Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио. 1978.
11. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э. // Известия вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45. № 7. С. 625–637.

## Nonlinear algorithm of detection of signal with unknown amplitude and times of appearing and disappearing

© Authors, 2012

A. P. Trifonov, Yu. E. Korchagin, P. A. Kondratovich

Structure of maximal-likelihood gauge for detection a signal with unknown amplitude and times of appearing and disappearing is considered. Substantial nonlinearity of algorithm and complication of its realization due to the double-channelled structure are discussed. Double-channelled structure simplifying the realization of the gauge of the quasi-optimal gauge is proposed. Asymptotic characteristics of proposed algorithm are found.