

295
P6434

T.55, № 6

295
ISSN 0021-3462

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОФИЗИКА

2012

ТОМ 55

6

ИЗДАНИЕ НИЖЕГОРОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 621.321

ОЦЕНКА МОМЕНТОВ ПОЯВЛЕНИЯ И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ АМПЛИТУДОЙ

А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, П. А. Кондратович

Воронежский госуниверситет, г. Воронеж, Россия

Синтезированы квазиправдоподобный, максимально правдоподобный и квазиоптимальный алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения сигнала произвольной формы с неизвестной амплитудой. Найдены асимптотические характеристики оценок. Выполнено статистическое моделирование синтезированных алгоритмов на ЭВМ.

ВВЕДЕНИЕ

Задача оценки моментов появления и исчезновения сигнала, наблюдаемого на фоне шума, актуальна для многих практических приложений статистической радиофизики, локации, сейсмологии [1–5]. В [2] рассмотрена задача оценки моментов скачкообразного изменения сигнала. Однако, алгоритмы [2] требуют решения сложных нелинейных стохастических дифференциальных уравнений и используют большой объём априорной информации. В работе [3] исследованы алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса, а в работах [4, 5] — детерминированного сигнала произвольной формы с неизвестными (или случайными) моментами появления и исчезновения, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума при непрерывном времени наблюдения. Однако в практических приложениях зачастую оказывается неизвестной мощность принимаемого сигнала, поэтому целесообразно рассмотреть алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения сигнала с неизвестной амплитудой. В данной работе на основе метода максимального правдоподобия синтезированы алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения детерминированного сигнала произвольной формы с неизвестной амплитудой. Для синтезированных алгоритмов найдены характеристики эффективности их функционирования, точность которых увеличивается с ростом отношения сигнал/шум (ОСШ).

Сигнал с неизвестными амплитудой и моментами появления и исчезновения можно записать в виде

$$s(t, a, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} af(t), & \theta_1 \leq t \leq \theta_2; \\ 0, & t < \theta_1, t > \theta_2, \end{cases} \quad (1)$$

где $f(t)$ — априори известная непрерывная функция, описывающая форму сигнала, a — амплитуда, θ_1 и θ_2 — неизвестные моменты появления и исчезновения соответственно, которые принимают значения из априорных интервалов

$$\theta_i \in [\theta_{i\min}, \theta_{i\max}], \quad i = 1, 2.$$

Для того, чтобы сигнал не мог исчезнуть раньше, чем он появляется, положим, что $\theta_{1\max} < \theta_{2\min}$. Будем считать, что функция, описывающая форму сигнала, удовлетворяет условию $f(\theta_i) \neq 0$.

Наблюдаемый на интервале времени $[0, T]$ случайный процесс

$$\xi(t) = s(t, a_0, \theta_{01}, \theta_{02}) + n(t)$$

представляет собой аддитивную смесь полезного сигнала $s(a_0, \theta_{01}, \theta_{02})$ и гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь $a_0, \theta_{01}, \theta_{02}$ — истинные значения амплитуды и моментов появления и исчезновения соответственно, неизвестные на приёмной стороне. На основе наблюдаемого процесса $\xi(t)$, приёмник должен сформировать оценки моментов появления и исчезновения полезного сигнала (1).

Если амплитуда полезного сигнала (1) априори известна, можно применить основанный на методе максимального правдоподобия алгоритм оценивания, синтезированный в [4]. Согласно этому алгоритму оценки моментов появления и исчезновения совпадают с координатами положения максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОР) [6]

$$L(\theta_1, \theta_2) = \frac{2a_0}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t)f(t) dt - \frac{a_0^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt.$$

Первое слагаемое здесь и далее представляет собой стохастический интеграл в смысле Ито. В работе [5] найдены характеристики совместных максимально правдоподобных оценок моментов появления и исчезновения — плотности вероятности, смещения и рассеяния. Однако при неизвестных как моментах появления и исчезновения, так и амплитуде, логарифм ФОР зависит от трёх неизвестных параметров [6]:

$$L(a, \theta_1, \theta_2) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t)f(t) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt. \quad (2)$$

При подстановке в (2) вместо неизвестной амплитуды a некоторых её значений можно получить ряд алгоритмов оценивания моментов появления и исчезновения (возможно неоптимальных). Эти значения амплитуды могут быть фиксированными или могут определяться по реализации наблюдаемых данных. Получаемые в результате алгоритмы оценивания, рассмотренные ниже, отличаются своей эффективностью и степенью простоты аппаратной или программной реализации.

1. КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ

Одним из способов преодоления априорной параметрической неопределённости относительно амплитуды является применение квазиправдоподобного алгоритма оценки [7]. Квазиправдоподобный приёмник формирует логарифм ФОР (2) для некоторой ожидаемой амплитуды a^* и всех возможных значений моментов появления и исчезновения:

$$L^*(\theta_1, \theta_2) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t)f(t) dt - \frac{a^{*2}}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad (3)$$

и находит квазиправдоподобные оценки моментов появления и исчезновения как положения абсолютного (наибольшего) максимума решающей статистики (3)

$$(\theta_1^*, \theta_2^*) = \arg \sup L^*(\theta_1, \theta_2). \quad (4)$$

Согласно (4), приёмник должен формировать двумерное случайное поле (3) для всех возможных значений неизвестных моментов появления и исчезновения. Поэтому его аппаратная

реализация оказывается в общем случае довольно сложной. Действительно, нахождение величин (4) предполагает построение структуры, многоканальной по обоим неизвестным параметрам. Однако трудностей аппаратной реализации квазиправдоподобного алгоритма оценивания (4) частично удаётся избежать, если представить аналогично [4] случайное поле (3) в виде суммы $L^*(\theta_1, \theta_2) = L_1^*(\theta_1) + L_2^*(\theta_2)$ двух случайных процессов. Первый из них зависит только от момента появления θ_1 , а второй — только от момента исчезновения θ_2 :

$$L_1^*(\theta_1) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t)f(t) dt - \frac{a^{*2}}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt, \quad (5)$$

$$L_2^*(\theta_2) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t)f(t) dt - \frac{a^{*2}}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad (6)$$

где θ — произвольная точка, принадлежащая интервалу $(\theta_{1\max}, \theta_{2\min})$.

Согласно выражениям (5) и (6) случайные процессы $L_1^*(\theta_1)$ и $L_2^*(\theta_2)$ статистически независимы, т. к. представляют собой интегралы от белого шума на неперекрывающихся интервалах. Следовательно, положение максимума случайного поля $L^*(\theta_1, \theta_2)$ по переменной θ_1 совпадает с положением максимума случайного процесса $L_1^*(\theta_1)$, а по переменной θ_2 — с положением максимума $L_2^*(\theta_2)$. В результате для квазиправдоподобных оценок моментов появления и исчезновения можно записать

$$\theta_j^* = \arg \sup L_j^*(\theta_j), \quad \theta_j \in [\theta_{j\min}, \theta_{j\max}],$$

где $j = 1, 2$. Блок-схема квазиправдоподобного измерителя моментов появления и исчезновения совпадает с блок-схемой максимально правдоподобного измерителя, представленной в работе [4] (см. в [4] рис. 1, обведённая пунктиром часть), где вместо функции $f(t)$ необходимо использовать произведение $a^*f(t)$.

Представление решающей статистики в виде суммы двух статистически независимых случайных процессов позволяет не только предложить достаточно простую аппаратную реализацию квазиправдоподобного измерителя, но и выполнить анализ квазиправдоподобного алгоритма оценивания согласно методике [5]. Для полного статистического описания решающей статистики достаточно найти математические ожидания и корреляционные функции гауссовских независимых случайных процессов (5) и (6). Выполняя усреднение, получаем математические ожидания

$$\begin{aligned} S_1^*(\theta_1) &= \langle L_1^*(\theta_1) \rangle = (1 + \delta_a) Q[\max(\theta_{01}, \theta_1), \theta] - (1 + \delta_a)^2 Q(\theta_1, \theta)/2, \\ S_2^*(\theta_2) &= \langle L_2^*(\theta_2) \rangle = (1 + \delta_a) Q[\theta, \min(\theta_{02}, \theta_2)] - (1 + \delta_a)^2 Q(\theta, \theta_2)/2 \end{aligned}$$

и корреляционные функции

$$\begin{aligned} B_1^*(\theta_{11}, \theta_{21}) &= \langle [L_1^*(\theta_{11}) - S_1^*(\theta_{11})] [L_1^*(\theta_{21}) - S_1^*(\theta_{21})] \rangle = (1 + \delta_a)^2 Q[\max(\theta_{11}, \theta_{21}), \theta], \\ B_2^*(\theta_{12}, \theta_{22}) &= \langle [L_2^*(\theta_{12}) - S_2^*(\theta_{12})] [L_2^*(\theta_{22}) - S_2^*(\theta_{22})] \rangle = (1 + \delta_a)^2 Q[\theta, \min(\theta_{12}, \theta_{22})], \end{aligned}$$

где $\delta_a = (a^* - a_0)/a_0$ — величина, характеризующая относительное отклонение ожидаемой амплитуды a^* от её истинного значения a_0 . Величину δ_a в дальнейшем будем называть расстройкой квазиправдоподобного измерителя по амплитуде, величину

$$Q(\theta_1, \theta_2) = \frac{2a_0^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt \quad (7)$$

— отношением сигнал/шум (ОСШ) на выходе приёмника максимального правдоподобия для принимаемого сигнала с моментом появления θ_1 и моментом исчезновения θ_2 .

Пусть $f(t)$ может обращаться в нуль только на части интервала $[\theta_{1\min}, \theta_{2\max}]$, имеющей нулевую меру. Тогда $Q(\theta_1, \theta)$ — монотонно убывающая функция аргумента θ_1 , а $Q(\theta, \theta_2)$ — монотонно возрастающая функция θ_2 , и имеют место равенства $Q(x, \theta) = -Q(\theta, x)$, $Q[\max(x, y), \theta] = \min[Q(x, \theta), Q(y, \theta)]$, $Q[\theta, \min(x, y)] = \min[Q(\theta, x), Q(\theta, y)]$. Использование свойств функции (7) позволяет переписать математические ожидания и корреляционные функции процессов (5) и (6) в виде

$$\begin{aligned} S_j^*(\theta_j) &= (1 + \delta_a) \min[(-1)^j Q(\theta, \theta_{0j}), (-1)^j Q(\theta, \theta_j)] - (1 + \delta_a)^2 (-1)^j Q(\theta, \theta_j)/2, \\ B_j^*(\theta_{1j}, \theta_{2j}) &= (1 + \delta_a)^2 \min[(-1)^j Q(\theta, \theta_{1j}), (-1)^j Q(\theta, \theta_{2j})]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее будем считать $j = 1, 2$. Нетрудно убедиться, что при $|\delta_a| < 1$ математические ожидания (8) достигают максимумов в точках, которые совпадают с истинными значениями θ_{0j} неизвестных моментов появления и исчезновения.

Перейдём в выражениях (5) и (6) от переменных θ_1, θ_2 к новым переменным $\lambda_j = (-1)^j Q(\theta, \theta_j)$, $\lambda_j \in [\lambda_{j\min}, \lambda_{j\max}]$, $\lambda_{1\min} = Q(\theta_{1\max}, \theta)$, $\lambda_{1\max} = Q(\theta_{1\min}, \theta)$, $\lambda_{2\min} = Q(\theta, \theta_{2\min})$, $\lambda_{2\max} = Q(\theta, \theta_{2\max})$. Тогда для случайных процессов (5) и (6) можем записать

$$L_j^*(\theta_j) = L_j^*[g_j(\lambda_j)] = \mu_j^*(\lambda_j) = (1 + \delta_a) \min(\lambda_j, \lambda_{0j}) - (1 + \delta_a)^2 \lambda_j/2 + \nu_j(\lambda_j), \quad (9)$$

где $\lambda_{01} = Q(\theta_{01}, \theta)$, $\lambda_{02} = Q(\theta, \theta_{02})$, $\nu_j(\lambda_j)$ — статистически независимые гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями

$$B_j^*(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}) = (1 + \delta_a)^2 \min(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}), \quad (10)$$

а $g_j(\lambda_j)$ — решения уравнений $(-1)^j Q(\theta, \theta_j) = \lambda_j$ относительно θ_j . Согласно свойствам функции (7), положения максимумов случайных процессов (9)

$$\lambda_j^* = \arg \sup \mu_j(\lambda_j) \quad (11)$$

связаны с оценками моментов появления и исчезновения взаимно-однозначными преобразованиями. Следовательно, условные плотности вероятностей $W_{\theta_j}^*(\theta_j | \theta_{0j})$ квазиравдоподобных оценок моментов появления и исчезновения можно выразить через плотности вероятностей $W_{\lambda_j}^*(\lambda_j | \lambda_{0j})$ случайных величин (11)

$$W_{\theta_j}^*(\theta_j | \theta_{0j}) = W_{\lambda_j}^* \left[(-1)^j Q(\theta, \theta_j) \mid (-1)^j Q(\theta, \theta_{0j}) \right] \left| \frac{\partial Q(\theta, \theta_j)}{\partial \theta_j} \right|. \quad (12)$$

Плотности вероятности $W_{\lambda_j}^*(\lambda_j | \lambda_{0j})$ аналогично [5, 8] представим в виде

$$W_{\lambda_j}^*(\lambda_j | \lambda_{0j}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[\frac{\partial F_{2j}(u, v, \lambda_j)}{\partial u} \right]_{u=v} du, \quad (13)$$

где

$$F_{2j}(u, v, x) = P \left[\sup_{\lambda_{j\min} \leq \lambda_j < x} \mu_j^*(\lambda_j) < u, \sup_{x \leq \lambda_j \leq \lambda_{j\max}} \mu_j^*(\lambda_j) < v \right] \quad (14)$$

— двумерные функции распределения величин абсолютных максимумов случайных процессов $\mu_j^*(\lambda_j)$. Согласно (9) и (10), $\mu_j^*(\lambda_j)$ являются статистически независимыми гауссовскими марковскими случайными процессами [9] с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_{1j}(\gamma_0) = \frac{1}{2} \times \begin{cases} 1 - \delta_a^2, & \lambda_{j \min} \leq \lambda_j \leq \lambda_{0j}; \\ -(1 + \delta_a)^2, & \lambda_{0j} < \lambda_j \leq \lambda_{j \max}, \end{cases} \quad k_{2j} = (1 + \delta_a)^2. \quad (15)$$

Поэтому аналогично [8] для функции (14) можем записать

$$F_{2j}(u, v, x) = \int_{-\infty}^v W_j(y, \lambda_{j \max}) dy, \quad (16)$$

где $W_j(y, \lambda_j)$ — решения уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК) [9]

$$\frac{\partial W_j(y, \lambda_j)}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial}{\partial y} [k_{1j} W_j(y, \lambda_j)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_{2j} W_j(y, \lambda_j)] = 0 \quad (17)$$

с коэффициентами сноса и диффузии (15) при начальных условиях

$$W_j(y, \lambda_j = \lambda_{j \min}) = \exp\{-[y + \lambda_{j \min} \delta_a (1 + \delta_a)]^2 / [2(1 + \delta_a)^2 \lambda_{j \min}]\} / [(1 + \delta_a) \sqrt{2\pi \lambda_{j \min}}]$$

и граничных условиях $W_j(y = u, \lambda_j) = W_j(y = -\infty, \lambda_j) = 0$ при $\lambda_j \in [\lambda_{j \min}, x]$ и $W_j(y = v, \lambda_j) = W_j(y = -\infty, \lambda_j) = 0$ при $\lambda_j \in [x, \lambda_{j \max}]$.

Применяя метод отражения с переменной знака [9], находим решение уравнения (17) с коэффициентами (15) отдельно для случаев $\lambda_j \in [\lambda_{j \min}, \lambda_{0j}]$ и $\lambda_j \in [\lambda_{0j}, \lambda_{j \max}]$. Подставляя найденные решения в выражение (16), а затем (16) в (13), аналогично [5], получаем выражения для плотности вероятности случайной величины (11)

$$W_{\lambda_j}^*(\lambda_j | \lambda_{0j}) = \begin{cases} (1 - \delta_a^2) \Psi[(1 - \delta_a^2)(\lambda_{0j} - \lambda_j), (1 - \delta_a^2)(\lambda_{0j} - \lambda_{j \min}), \\ (1 + \delta_a)^2(\lambda_{j \max} - \lambda_{0j}), (1 + \delta_a)/(1 - \delta_a)], & \lambda_j \leq \lambda_{0j}; \\ (1 + \delta_a)^2 \Psi[(1 + \delta_a)^2(\lambda_j - \lambda_{0j}), (1 + \delta_a)^2(\lambda_{j \max} - \lambda_{0j}), \\ (1 - \delta_a^2)(\lambda_{0j} - \lambda_{j \min}), (1 - \delta_a)/(1 + \delta_a)], & \lambda_j > \lambda_{0j}, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\Psi(y, y_1, y_2, y_3) = \left[\Phi\left(\sqrt{\frac{y_1 - y}{4}}\right) + \exp\left(-\frac{y_1 - y}{8}\right) / \sqrt{\frac{\pi(y_1 - y)}{2}} \right] \frac{1}{|y|^{3/2} \sqrt{2\pi}} \times \\ \times \int_0^\infty x \exp\left[-\frac{(x + y/2)^2}{2y}\right] \left[\Phi\left(\frac{y_3 x + y_2/2}{\sqrt{y_2}}\right) - \exp(-y_3 x) \Phi\left(\frac{-y_3 x + y_2/2}{\sqrt{y_2}}\right) \right] dx. \quad (19)$$

При этом плотность вероятности (18) не зависит от выбора значения θ в (5), (6). На основе выражений (12) и (18) запишем выражения для условных смещений и рассеяний оценок моментов появления и исчезновения (4)

$$B(\theta_j^* | \theta_{0j}) = \int_{\theta_{j \min}}^{\theta_{j \max}} (\theta_j - \theta_{0j}) W_{\lambda_j}^* [(-1)^j Q(\theta, \theta_j) | (-1)^j Q(\theta, \theta_{0j})] \left| \frac{\partial Q(\theta, \theta_j)}{\partial \theta_j} \right| d\theta_j, \quad (20)$$

$$V(\theta_j^* | \theta_{0j}) = \int_{\theta_{j\min}}^{\theta_{j\max}} (\theta_j - \theta_{0j})^2 W_{\lambda_j}^* [(-1)^j Q(\theta, \theta_j) | (-1)^j Q(\theta, \theta_{0j})] \left| \frac{\partial Q(\theta, \theta_j)}{\partial \theta_j} \right| d\theta_j. \quad (21)$$

Полагая в (18) $\delta_a = 0$ и соответственно в (19) $y_3 = 1$, получаем, что (18), (20), (21) переходят в точные формулы для характеристик максимально правдоподобной оценки моментов появления и исчезновения сигнала с априори известной амплитудой, найденные в [5].

Асимптотическое поведение плотностей вероятностей (18), смещения (20) и рассеяния (21) с увеличением ОСШ при $\delta_a = 0$ исследовано в [5]. Выполняя аналогичные преобразования, для нормированных переменных (или обобщённых квазиравдоподобных оценок моментов появления и исчезновения)

$$\kappa_j = \begin{cases} (1 - \delta_a^2)(\lambda_j - \lambda_{0j}), & \lambda_j \leq \lambda_{0j}; \\ (1 + \delta_a^2)(\lambda_j - \lambda_{0j}), & \lambda_j > \lambda_{0j}, \end{cases} \quad (22)$$

получаем предельную с ростом ОСШ плотность вероятности в виде

$$W_j(\kappa_j) = \begin{cases} W_0[-\kappa_j, (1 + \delta_a)/(1 - \delta_a)], & \kappa_j \leq 0; \\ W_0[\kappa_j, (1 - \delta_a)/(1 + \delta_a)], & \kappa_j > 0, \end{cases} \quad (23)$$

$$W_0(x, y) = \Psi(x, \infty, \infty, y) = (2y + 1) \exp[y(y + 1)|x|] \{1 - \Phi[(2y + 1)\sqrt{|x|/4}]\} + \Phi[\sqrt{|x|/4}] - 1.$$

Известно [6, 8], что по мере роста ОСШ λ_{0j} квазиравдоподобные оценки сходятся в средне-квадратическом смысле к положениям максимумов математических ожиданий репаяющих статистик (5), (6), которые при $|\delta_a| < 1$ совпадают с истинными значениями θ_{0j} моментов появления и исчезновения. Разложим $(-1)^j Q(\theta, \theta_j)$ в ряд Тейлора по переменной θ_j в окрестности θ_{0j} и ограничимся в разложении членами первого порядка

$$(-1)^j Q(\theta, \theta_j) \approx (-1)^j Q(\theta_j, \theta_{0j}) + (-1)^j \rho_j^2 (\theta_j - \theta_{0j})/T_{\max},$$

где $\rho_j^2 = 2a_0^2 f^2(\theta_{0j}) T_{\max}/N_0$, $T_{\max} = \theta_{2\max} - \theta_{1\min}$ — максимальная возможная длительность сигнала. Отсюда имеем

$$\lambda_j - \lambda_{0j} \approx (-1)^j \rho_j^2 (\theta_j - \theta_{0j})/T_{\max}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (22), получаем

$$\kappa_j = (-1)^j \times \begin{cases} (1 - \delta_a^2) \rho_j^2 (\theta_j - \theta_{0j})/T_{\max}, & \theta_j \leq \theta_{0j}; \\ (1 + \delta_a^2) \rho_j^2 (\theta_j - \theta_{0j})/T_{\max}, & \theta_j > \theta_{0j}. \end{cases} \quad (25)$$

Используя (23) и (25), находим асимптотические значения смещения и рассеяния квазиравдоподобных оценок моментов появления и исчезновения

$$B_a(\theta_j^* | \theta_{0j}) = - \frac{(-1)^j 8 T_{\max} \delta_a}{\rho_j^2 (\delta_a - 1)^2 (\delta_a + 1)^2}; \quad (26)$$

$$V_a(\theta_j^* | \theta_{0j}) = \frac{2 T_{\max}^2 (13 + 101 \delta_a^2 + 15 \delta_a^4 - \delta_a^6)}{\rho_j^4 (\delta_a - 1)^4 (\delta_a + 1)^4}. \quad (27)$$

При $\delta_a = 0$ величины (26) и (27) совпадают со смещением и рассеянием оценки максимального правдоподобия моментов появления и исчезновения сигнала с априори известной амплитудой, найденными в [4], а именно

$$B_{0j} = 0, \quad V_{0j} = 26 T_{\max}^2 / \rho_j^4. \quad (28)$$

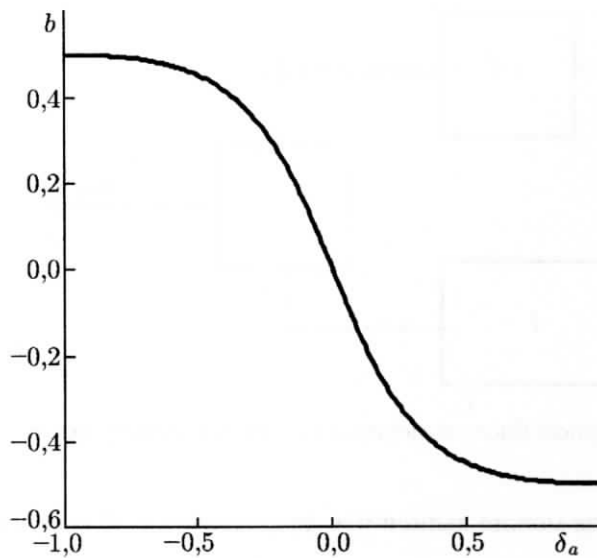


Рис. 1. Нормированное смещение оценок моментов появления и исчезновения

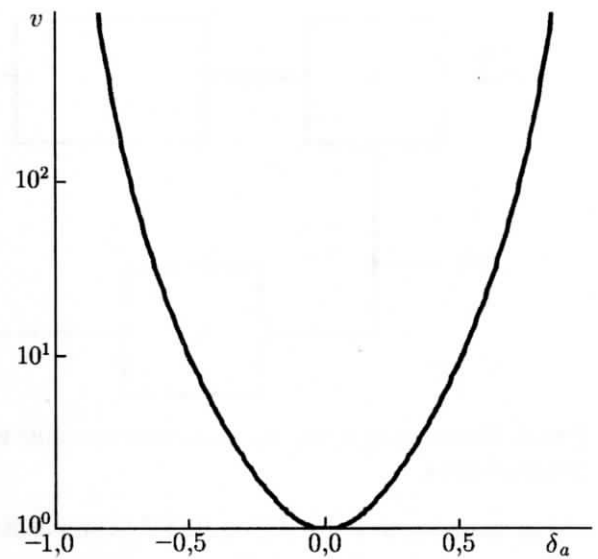


Рис. 2. Нормированное рассеяние оценок моментов появления и исчезновения

Влияние априорного незнания амплитуды на точность квазиправдоподобных оценок моментов появления и исчезновения можно охарактеризовать нормированным смещением $b(\delta_a) = B_a(\theta_j^* | \theta_{0j}) / \sqrt{V_a(\theta_j^* | \theta_{0j})}$ и рассеянием $v(\delta_a) = V_a(\theta_j^* | \theta_{0j}) / V_{0j}$. Эти величины одинаковы для квазиправдоподобных оценок моментов появления и исчезновения и могут служить характеристикой проигрыша в точности квазиправдоподобных оценок по сравнению с точностью оценок максимального правдоподобия моментов появления и исчезновения сигнала с известной амплитудой. На рис. 1 представлены зависимости от δ_a нормированного смещения $b(\delta_a)$, а на рис. 2 — нормированного рассеяния $v(\delta_a)$. Как видно из рис. 1, 2, при известной амплитуде ($\delta_a = 0$) квазиправдоподобные оценки моментов появления и исчезновения обладают нулевым смещением, а их рассеяние совпадает с рассеянием оценок максимального правдоподобия. Наличие расстройки по амплитуде приводит к существенному ухудшению качества оценивания. Так, при $|\delta_a| = 0,5$ рассеяние квазиправдоподобной оценки в 10 раз больше рассеяния максимального правдоподобия оценки при априори известной амплитуде.

2. МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ

С целью улучшения точности оценивания моментов появления и исчезновения можно применить алгоритм максимального правдоподобия, согласно которому неизвестную амплитуду в выражении (2) необходимо заменить на её оценку a_m , что равносильно максимизации логарифма ФОП (2) по амплитуде:

$$L(\theta_1, \theta_2) = L(a_m, \theta_1, \theta_2) = \max_a L(a, \theta_1, \theta_2). \quad (29)$$

Оценки максимально правдоподобных моментов появления и исчезновения определяются как положения максимума решающей статистики (29):

$$(\theta_{m1}, \theta_{m2}) = \arg \sup L(\theta_1, \theta_2). \quad (30)$$

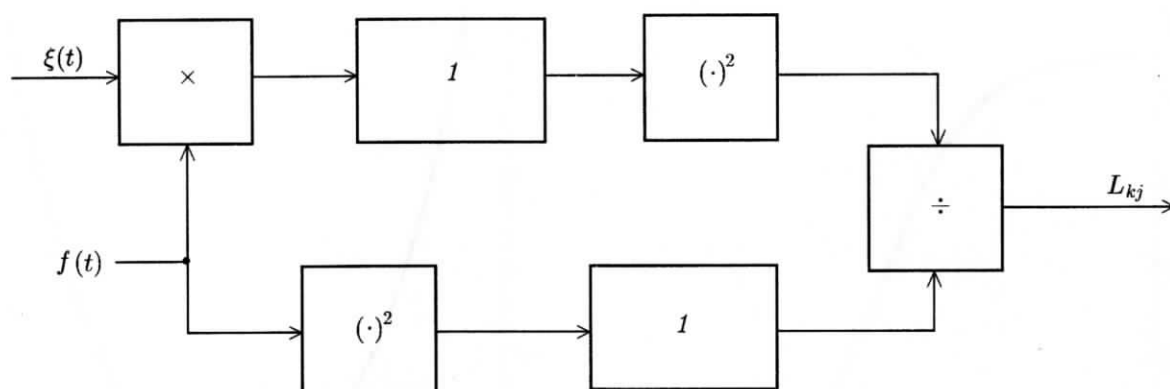


Рис. 3. Блок-схема одного канала максимально правдоподобного измерителя моментов появления и исчезновения

Максимизацию логарифма ФОП (2) по амплитуде можно выполнить аналитически. Для этого приравняем производную функции (2) по a нулю

$$\left. \frac{dL(a, \theta_1, \theta_2)}{da} \right|_{a_m} = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t) f(t) dt - \frac{2a_m}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt = 0$$

и решим полученное уравнение правдоподобия относительно a_m :

$$a_m = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t) f(t) dt \bigg/ \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt. \quad (31)$$

Подставляя решение (31) в выражение (29), получим

$$L(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_0} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t) f(t) dt \right)^2 \bigg/ \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt. \quad (32)$$

Выражение (32) определяет структуру приёмного устройства, которое удаётся реализовать лишь в многоканальном варианте. Формируются значения решающей статистики (32) $L_{kj} = L(\theta_{1\min} + k\Delta\theta_1, \theta_{2\min} + j\Delta\theta_2)$, $k = 1, 2, \dots, n_1$, $j = 1, 2, \dots, n_2$ для дискретного набора значений моментов появления и исчезновения. Тогда измеритель должен состоять из $n_1 n_2$ каналов. Блок-схема одного канала изображена на рис. 3, где 1 — интеграторы, включённые на интервале времени $[\theta_{1\min} + k\Delta\theta_1, \theta_{2\min} + j\Delta\theta_2]$. Оценки максимально правдоподобных моментов появления и исчезновения определяются по номерам канала с максимальным выходным сигналом.

Необходимо отметить, что помимо сложностей реализации максимально правдоподобного алгоритма (30), вызванных его многоканальностью, возникают трудности в определении характеристик оценок по положению абсолютного максимума логарифма ФОП (32).

3. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ

Для упрощения аппаратной и программной реализации максимально правдоподобного измерителя и нахождения его характеристик можно воспользоваться квазиоптимальными оценками. Для этого представим логарифм ФОП (2) в виде суммы $L(a, \theta_1, \theta_2) = L_1(a, \theta_1) + L_2(a, \theta_2)$

двух слагаемых

$$L_1(a, \theta_1) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t)f(t) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt; \quad (33)$$

$$L_2(a, \theta_2) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t)f(t) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad (34)$$

где θ — произвольная точка, принадлежащая интервалу $(\theta_{1\max}, \theta_{2\min})$. Обозначим $L_{aj}(\theta_j) = \max_a L_j(a, \theta_j)$ и введём в рассмотрение оценки

$$\theta_{mj}^* = \arg \sup L_{aj}(\theta_j). \quad (35)$$

Квазиоптимальные оценки (35) не являются оценками максимального правдоподобия, но как будет показано ниже, их эффективность асимптотически, при увеличении ОСШ, совпадает с эффективностью оценок максимального правдоподобия моментов появления и исчезновения сигнала с априори известной амплитудой. Выполняя аналогично (31), (32) максимизацию функций (33), (34) по переменной a , получаем

$$L_{a1}(\theta_1) = \frac{1}{N_0} \left(\int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t)f(t) dt \right)^2 / \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt; \quad (36)$$

$$L_{a2}(\theta_2) = \frac{1}{N_0} \left(\int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t)f(t) dt \right)^2 / \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt. \quad (37)$$

На рис. 4 показана блок-схема устройства формирования квазиоптимальных оценок (35) моментов появления и исчезновения, построенная на основе выражений (36), (37). На рис. 4 обозначено: 1, 1' — интеграторы на интервалах времени $[\theta, t]$, $t \in [\theta, \theta_{2\max}]$ и $[\theta_{1\min}, t]$, $t \in [\theta_{1\min}, \theta]$ соответственно, 2 — линия задержки на время $\Delta t = \theta - \theta_{1\min}$, 3 и 3' — решающие устройства, осуществляющие поиск положения максимума сигнала на интервалах времени $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$ и $[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$ соответственно. Таким образом, использование оценок (35) позволяет существенно упростить техническую реализацию приёмника. Действительно, для реализации максимально правдоподобного алгоритма оценивания (29) требуется построение многоканального приёмного устройства по моментам появления и исчезновения. Для нахождения оценок (35) достаточно двухканальной схемы.

Выполним теперь анализ алгоритма оценивания (35). Рассмотрим случайные процессы

$$M_1(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t)f(t) dt, \quad M_2(\theta_2) = \int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t)f(t) dt, \quad (38)$$

расположенные под квадратами в выражениях (36) и (37). Они представляют собой гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями

$$S_1(\theta_1) = \langle M_1(\theta_1) \rangle = a_0 q [\max(\theta_{01}, \theta_1), \theta], \quad S_2(\theta_2) = \langle M_2(\theta_2) \rangle = a_0 q [\theta, \min(\theta_{02}, \theta_2)]$$

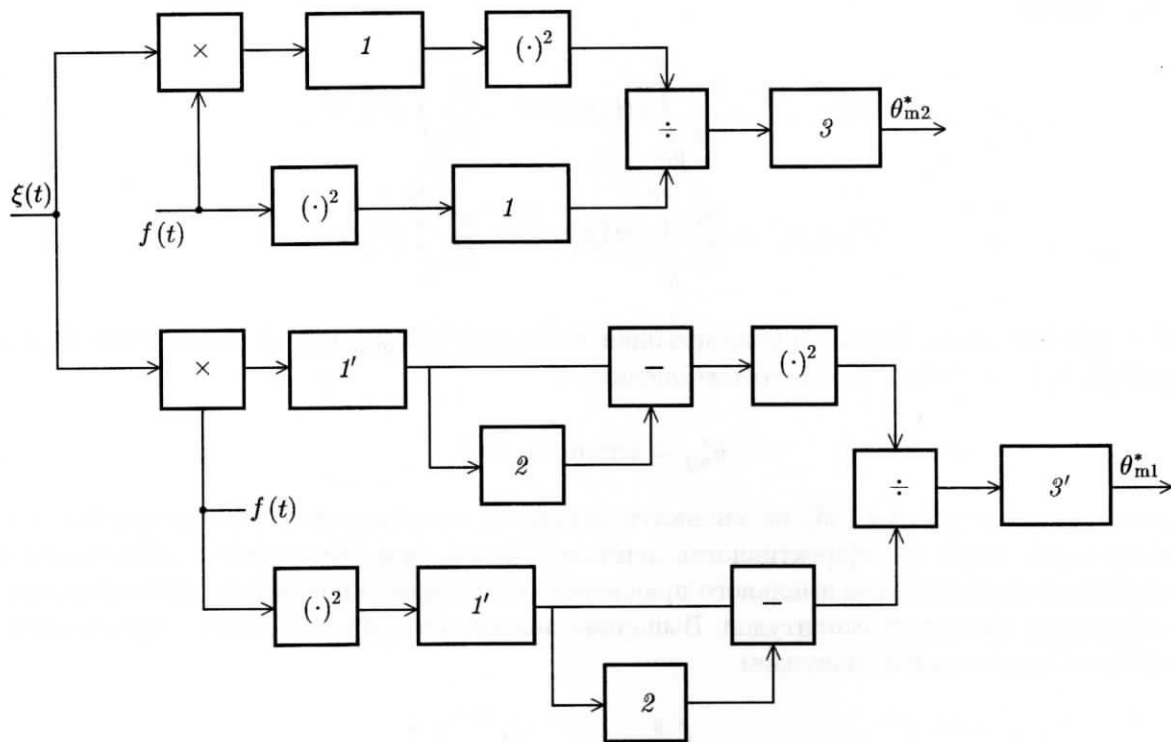


Рис. 4. Блок-схема квазиоптимального измерителя моментов появления и исчезновения

и корреляционными функциями

$$B_1(\theta_{11}, \theta_{21}) = \langle [M_1(\theta_{11}) - S_1(\theta_{11})][M_1(\theta_{21}) - S_1(\theta_{21})] \rangle = N_0 q[\max(\theta_{11}, \theta_{21}), \theta]/2,$$

$$B_2(\theta_{12}, \theta_{22}) = \langle [M_2(\theta_{12}) - S_2(\theta_{12})][M_2(\theta_{22}) - S_2(\theta_{22})] \rangle = N_0 q[\theta, \min(\theta_{12}, \theta_{22})]/2,$$

где

$$q(\theta_1, \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt. \quad (39)$$

Поскольку функция $f(t)$ может обращаться в нуль только на части интервала $[\theta_{1\min}, \theta_{2\max}]$, имеющей нулевую меру, $q(\theta_1, \theta)$ — монотонно убывающая функция аргумента θ_1 , а $q(\theta, \theta_2)$ — монотонно возрастающая функция θ_2 и имеют место равенства $q(x, \theta) = -q(\theta, x)$,

$$q[\max(x, y), \theta] = \min[q(x, \theta), q(y, \theta)], \quad q[\theta, \min(x, y)] = \min[q(\theta, x), q(\theta, y)].$$

Использование свойств функции (39) позволяет переписать математические ожидания и корреляционные функции процессов (38) в виде

$$S_j(\theta_j) = a_0 \min[(-1)^j q(\theta, \theta_{0j}), (-1)^j q(\theta, \theta_j)],$$

$$B_j(\theta_{1j}, \theta_{2j}) = N_0 \min[(-1)^j q(\theta, \theta_{1j}), (-1)^j q(\theta, \theta_{2j})]/2.$$

Перейдём в выражениях (38) от переменных θ_1, θ_2 к новым переменным $r_j = (-1)^j q(\theta, \theta_j)$, $r_j \in [R_{j\min}, R_{j\max}]$, $R_{1\min} = q(\theta_{1\max}, \theta)$, $R_{1\max} = q(\theta_{1\min}, \theta)$, $R_{2\min} = q(\theta, \theta_{2\min})$, $R_{2\max} = q(\theta, \theta_{2\max})$. Тогда для случайных процессов (36) и (37) можем записать

$$L_{aj}(\theta_j) = (-1)^j M_j^2(\theta_j)/[N_0 q(\theta, \theta_j)] = L_{aj}(r_j) = \chi_j^2(r_j)/(N_0 r_j).$$

Здесь $\chi_j(r_j)$ — статистически независимые гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями $S_j(r_j) = a_0 \min(r_j, r_{0j})$, $r_{0j} = (-1)^j q(\theta, \theta_{0j})$ и корреляционными функциями $B_j(r_{1j}, r_{2j}) = N_0 \min(r_{1j}, r_{2j})/2$. Следовательно, для решающих статистик (36) и (37) справедливо выражение

$$L_{aj}(l_j) = z_{0j}^2 [\min(1, l_j)]^2 / (2l_j) + z_{0j} \min(1, l_j) \omega_j(l_j) / l_j + \omega_j^2(l_j) / (2l_j), \quad (40)$$

где

$$l_j = r_j / r_{0j}, \quad l_j \in [L_{j \min}, L_{j \max}], \quad L_{j \min} = R_{j \min} / r_{0j}, \quad L_{j \max} = R_{j \max} / r_{0j}, \\ z_{0j}^2 = 2a_0^2 r_{0j} / N_0 = 2a_0^2 (-1)^j q(\theta, \theta_{0j}) / N_0,$$

$\omega_j(l_j)$ — статистически независимые стандартные винеровские процессы.

Для больших ОСШ z_{0j} последним слагаемым в (40) можно пренебречь и записать приближённо

$$L_{aj}(l_j) \approx z_{0j}^2 [\min(1, l_j)]^2 / (2l_j) + z_{0j} \min(1, l_j) \omega_j(l_j) / l_j. \quad (41)$$

Эти функции являются гауссовскими случайными процессами с математическими ожиданиями

$$S_{aj}(l_j) = z_{0j}^2 [\min(1, l_j)]^2 / (2l_j) \quad (42)$$

и корреляционными функциями

$$K_j(l_{1j}, l_{2j}) = z_{0j}^2 \min(l_{1j}, 1) \min(l_{2j}, 1) \min(l_{1j}, l_{2j}) / (l_{1j} l_{2j}). \quad (43)$$

При больших ОСШ z_{0j} положение максимума решающей статистики располагается в малой окрестности положения максимума её математического ожидания [6]. Математические ожидания (42) достигают максимальных значений при $l_j = 1$. Поэтому исследуем поведение случайных процессов (41) в малых окрестностях точек $l_j = 1$. Для этого, разложив функции (42) по l_j , а (43) — по l_{1j}, l_{2j} в ряды Тейлора в окрестности единицы, получим

$$S_{aj}(l_j) \approx z_{0j}^2 (1 - |l_j - 1|) / 2, \quad (44)$$

$$K_j(l_{1j}, l_{2j}) \approx z_{0j}^2 (1 - |l_{1j} - 1|/2 - |l_{2j} - 1|/2 - |l_{1j} - l_{2j}|/2). \quad (45)$$

Будем аппроксимировать при больших ОСШ решающую статистику (41) гауссовскими случайными процессами $Y_j(l_j)$ с математическими ожиданиями (44) и корреляционными функциями (45) на интервалах возможных значений переменных l_j . Положения максимумов случайных процессов $Y_j(l_j)$

$$l_{mj} = \arg \sup Y_j(l_j) \quad (46)$$

связаны с оценками моментов появления и исчезновения взаимно-однозначными преобразованиями. Поэтому функции распределения оценок (35) можно получить на основе функций распределения случайных величин (46)

$$F_j(x) = \{l_{mj} < x\} = P \left[\sup_{l_j \leq x} Y_j(l_j) > \sup_{l_j > x} Y_j(l_j) \right]. \quad (47)$$

Введём в рассмотрение случайные процессы

$$\eta_j(l_j) = [Y_j(l_j) - Y_j(x)] / z_{0j}, \quad x \in [L_{j \min}, L_{j \max}], \quad (48)$$

использование которых позволяет переписать выражение (47) как

$$F_j(x) = P \left[\sup_{l_j \leq x} \eta_j(l_j) > \sup_{l_j > x} \eta_j(l_j) \right]. \quad (49)$$

По определению $\eta_j(l_j)$ (48) являются статистически независимыми гауссовскими случайными процессами, обладающими математическими ожиданиями

$$S_j(l_j) = z_{0j}(|x - 1| - |l_j - 1|)/2$$

и корреляционными функциями

$$K_j(l_{1j}, l_{2j}) = \begin{cases} \min(|l_{1j} - x|, |l_{2j} - x|), & (l_{1j} - x)(l_{2j} - x) \geq 0; \\ 0, & (l_{1j} - x)(l_{2j} - x) < 0. \end{cases} \quad (50)$$

Согласно (50) отрезки реализаций случайных процессов $\eta_j(l_j)$ на интервалах $[L_{j \min}, x]$ и $(x, L_{j \max}]$ статистически независимы. Поэтому аналогично [10] можем записать для распределения (47), (49) выражение

$$F_j(x) = \int_0^\infty P_{2j}(u) dP_{1j}(u), \quad (51)$$

где

$$P_{1j}(u) = P \left[\sup_{l_j \leq x} \eta_j(l_j) < u \right], \quad P_{2j}(v) = P \left[\sup_{l_j > x} \eta_j(l_j) < v \right].$$

Случайные процессы $\eta_j(l_j)$ являются статистически независимыми гауссовскими марковскими процессами [9] с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_{1j} = z_{0j} \times \begin{cases} 1/2, & L_{j \min} \leq l_j \leq 1; \\ -1/2, & 1 < l_j \leq L_{j \max}, \end{cases} \quad k_{2j} = 1. \quad (52)$$

Следовательно, функции $P_{1j}(u)$ представляют собой вероятности недостижения границы u марковскими случайными процессами $\eta_j(l_j)$ при $L_{j \min} \leq l_j \leq 1$, а $P_{2j}(v)$ — вероятности недостижения границы v марковскими случайными процессами $\eta_j(l_j)$ при $1 < l_j \leq L_{j \max}$.

Аналогично [9], имеем

$$P_{1j}(u) = \int_0^u W_{1j}(y, L_{j \min}) dy, \quad P_{2j}(v) = \int_0^v W_{2j}(y, L_{j \max}) dy, \quad (53)$$

где $W_{2j}(y, l_j)$ — решения прямого уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (17) с коэффициентами (52) при граничных условиях $W_{2j}(y = -\infty, l_j) = W_{2j}(y = u, l_j) = 0$ и начальном условии $W_{2j}(y, l_j = x) = \delta(y - u)$, а $W_{1j}(y, l_j)$ — решения обратного уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова

$$\frac{\partial W_{1j}(y, l_j)}{\partial l_j} + k_{1j} \frac{\partial}{\partial y} [W_{1j}(y, l_j)] + \frac{k_{2j}}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [W_{1j}(y, l_j)] = 0 \quad (54)$$

с коэффициентами (52) при граничных условиях $W_{1j}(y = -\infty, l_j) = W_{1j}(y = v, l_j) = 0$ и начальном условии $W_{1j}(y, l_j = x) = \delta(y - v)$. Решая уравнения (17) и (54) методом отражения

с переменной знака [9], подставляя полученные решения в выражения (53), а затем (53) в (51), находим функцию распределения случайной величины (46):

$$F_j(x) = \begin{cases} P \left[\frac{z_{0j}^2}{4} (x - L_{j \min}), \frac{z_{0j}^2}{4} (1 - x), \frac{z_{0j}^2}{4} (L_{j \max} - 1) \right], & L_{j \min} \leq x \leq 1; \\ 1 - P \left[\frac{z_{0j}^2}{4} (L_{j \max} - 1), \frac{z_{0j}^2}{4} (x - 1), \frac{z_{0j}^2}{4} (x - L_{j \min}) \right], & 1 < x \leq L_{j \max}. \end{cases} \quad (55)$$

Здесь обозначено

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi x_2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \exp \left[-\frac{(\xi - u)^2}{8x_2} \right] - \exp \left[-\frac{(\xi + u)^2}{8x_2} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \exp(-u) \Phi \left(\frac{2x_1 - u}{2\sqrt{x_1}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi x_1}} \exp \left[-\frac{(2x_1 + u)^2}{8x_1} \right] \right\} \exp \left[-\frac{\xi - u}{2} - \frac{x_2}{2} \right] \times \\ \times \left\{ \Phi \left(\sqrt{x_3} + \frac{\xi}{2\sqrt{x_3}} \right) - \exp(-\xi) \Phi \left(\sqrt{x_3} - \frac{\xi}{2\sqrt{x_3}} \right) \right\} d\xi du.$$

Рассмотрим асимптотическое поведение функции распределения (55) при увеличении ОСШ. Предполагая, что истинные значения моментов появления и исчезновения являются внутренними точками своих априорных интервалов и устремляя $z_{0j} \rightarrow \infty$, находим предельное выражение для функции распределения (55):

$$F_{0j}(x) = \begin{cases} P_0 \left[z_{0j}^2 (1 - x)/4 \right], & L_{j \min} \leq x \leq 1, \\ 1 - P_0 \left[z_{0j}^2 (x - 1)/4 \right], & 1 < x \leq L_{j \max}. \end{cases}$$

где

$$P_0(x) = P(+\infty, x, +\infty) = \int_0^\infty \exp(-u) \left[\Phi \left(\frac{u - 2x}{2\sqrt{x}} \right) - \exp(u) \Phi \left(-\frac{u + 2x}{2\sqrt{x}} \right) - \right. \\ \left. - \exp(-u + 4x) \Phi \left(\frac{u - 6x}{2\sqrt{x}} \right) + \exp(2u + 4x) \Phi \left(-\frac{u + 6x}{2\sqrt{x}} \right) \right] du,$$

и предельную плотность вероятности случайных величин (46):

$$W_{0j}(x) = \frac{3z_{0j}^2}{2} \exp[z_{0j}^2 |x - 1|] \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{3z_{0j}}{2} \sqrt{|x - 1|} \right) \right\} - \frac{z_{0j}^2}{2} \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{z_{0j}}{2} \sqrt{|x - 1|} \right) \right\}. \quad (56)$$

Разложим выражение $(-1)^j q(\theta, \theta_j)$ в ряд Тейлора по переменной θ_j в окрестности θ_{0j} и ограничимся в разложении членами первого порядка:

$$(-1)^j q(\theta, \theta_j) \approx (-1)^j q(\theta, \theta_{0j}) + (-1)^j \frac{\rho_j^2 N_0}{2a_0^2 T_{\max}} (\theta_j - \theta_{0j}),$$

где $\rho_j^2 = 2f^2(\theta_{0j})a_0^2 T_{\max}/N_0$. Отсюда получаем

$$l_{mj} - 1 \approx (-1)^j \frac{\rho_j^2}{T_{\max} z_{0j}^2} (\theta_j - \theta_{0j}). \quad (57)$$

Используя (57) и (56), находим асимптотические значения смещения и рассеяния квазиоптимальных моментов появления и исчезновения (35):

$$B_a(\theta_{mj}^* | \theta_{0j}) = 0, \quad V_a(\theta_{mj}^* | \theta_{0j}) = \frac{26T_{\max}^2}{\rho_j^4}, \quad (58)$$

что совпадает с (28). Как видно из (58), точность квазиоптимальных моментов появления и исчезновения (35) асимптотически при увеличении ОСШ совпадает с точностью максимально правдоподобных оценок моментов появления и исчезновения сигнала с априори известной амплитудой. Следовательно, оценки (35) являются асимптотически максимально правдоподобными, а их применение позволяет существенно упростить техническую реализацию максимально правдоподобного измерителя моментов появления и исчезновения (30).

Таким образом, асимптотические значения рассеяний максимально правдоподобных оценок моментов появления и исчезновения сигнала с априори известной амплитудой (28) и асимптотическое значение рассеяний квазиоптимальных оценок (58) совпадают. Отсюда следует, что асимптотические значения рассеяний максимально правдоподобных оценок (30) моментов появления и исчезновения сигнала с априори неизвестной амплитудой также определяются формулами (28), (58). Действительно, рассеяние оценок (30) моментов появления и исчезновения сигнала с априори неизвестной амплитудой не может быть меньше, чем рассеяние (28) максимально правдоподобных оценок моментов появления и исчезновения сигнала с априори известной амплитудой. В то же время рассеяние максимально правдоподобных оценок (30) не может быть больше, чем рассеяние квазиоптимальных оценок (58).

Следовательно, зависимости, приведённые на рис. 1, 2 характеризуют выигрыш в точности максимально правдоподобных оценок (30) или квазиоптимальных оценок (35) по сравнению с квазиравдоподобными оценками (4). Так, при $|\delta_a| \geq 1/2$ рассеяние максимально правдоподобных (30) и квазиоптимальных оценок (35) более чем на порядок меньше, чем рассеяние квазиравдоподобных оценок (4).

4. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ

С целью проверки работоспособности синтезированных алгоритмов оценивания, а также установления границ применимости асимптотических выражений для характеристик их эффективности, было выполнено статистическое моделирование на ЭВМ оценок (30) и (35) на примере прямоугольного импульса со скошенной вершиной [11]. Форму сигнала опишем функцией

$$f(t) = (1 + bt/T_{\max})(1 + b + b^2/3)^{-1/2}, \quad (59)$$

где величина b характеризует наклон скошенной вершины импульса. Множитель $(1 + b + b^2/3)^{-1/2}$ введён в выражение (59) для того, чтобы энергия сигнала максимальной длительности не зависела от наклона скошенной вершины. Это даёт возможность сравнивать эффективность оценивания моментов появления и исчезновения сигналов с разным наклоном вершины, но одинаковой энергией.

Априорные области возможных значений моментов появления и исчезновения выберем так, чтобы $\theta_{1\min} = 0$, $\theta_{2\max} = T_{\max}$ были фиксированными, и максимальная длительность сигнала $T_{\max}$ оставалась неизменной. Выберем $\theta = T_{\max}/2$ — середину отрезка $[0, T_{\max}]$. Будем считать, что точки $\theta_{1\max}$ и $\theta_{2\min}$ расположены симметрично относительно θ и их положения могут изменяться лишь согласованно с изменением величины $k = T_{\max}/T_{\min}$, где $T_{\min} = \theta_{2\min} - \theta_{1\max}$ — минимальная длительности сигнала. Положим, что истинные значения моментов появления и

исчезновения расположены посередине своих априорных интервалов $\theta_{01} = T_{\max}(k-1)/(4k)$, $\theta_{02} = T_{\max}(3k+1)/(4k)$.

Моделировались максимально правдоподобные и квазиоптимальные оценки. При моделировании максимально правдоподобных оценок (30) формировались дискретные отсчеты решающей статистики (32)

$$L_{ij} = \frac{\left\{ zS(\max[\xi_{1i}, \xi_{01}], \min[\xi_{2j}, \xi_{02}]) + \sum_{n=i}^j [x_n \sqrt{\Delta\xi} (1 + bn \Delta\xi)] / \sqrt{1+b+b^2/3} \right\}^2}{2S(\xi_{1i}, \xi_{2j})}, \quad (60)$$

$$S(x, y) = [y - x + b(y^2 - x^2) + b^2(y^3 - x^3)/3] / (1 + b + b^2/3),$$

где $\Delta\xi = 10^{-5}$ — шаг дискретизации нормированного времени $\xi = t/T_{\max}$, x_n — гауссовские статистически независимые случайные величины с нулевыми математическим ожиданиями и единичными дисперсиями, $\xi_{1i} = \theta_{1i}/T_{\max} = i\Delta\xi$, $\xi_{2j} = \theta_{2j}/T_{\max} = j\Delta\xi$ — узлы дискретизации моментов появления и исчезновения соответственно, $i = 0, 1, \dots, \text{ent}[(k-1)/(2k\Delta\xi)]$, $j = \text{ent}[(k+1)/(2k\Delta\xi)]$, $\dots, N-1, N$, $N = \text{ent}(1/\Delta\xi)$, $\text{ent}(x)$ — целая часть числа x , $\xi_{01} = \theta_{01}/T_{\max}$, $\xi_{02} = \theta_{02}/T_{\max}$, $z^2 = 2T_{\max}a_0^2/N_0$ — ОСШ на выходе приёмника максимального правдоподобия для прямоугольного импульса. На основе отсчётов (60) формировались оценки максимального правдоподобия моментов появления и исчезновения $\theta_{m1} = T_{\max}\Delta\xi i_m$, $\theta_{m2} = T_{\max}\Delta\xi j_m$, где i_m, j_m — номера максимального отсчёта решающей статистики.

При моделировании квазиоптимальных оценок (35) формировались дискретные отсчеты случайных процессов (33) и (34)

$$L_{1i} = \frac{\left\{ zS(\max[\xi_{1i}, \xi_{01}], 1/2) + \sum_{n=i}^{N/2} [x_n \sqrt{\Delta\xi} (1 + bn \Delta\xi)] / \sqrt{1+b+b^2/3} \right\}^2}{2S(1/2, \xi_{1i})}, \quad (61)$$

$$L_{2j} = \frac{\left\{ zS(1/2, \min[\xi_{2i}, \xi_{02}]) + \sum_{n=N/2}^j [x_n \sqrt{\Delta\xi} (1 + bn \Delta\xi)] / \sqrt{1+b+b^2/3} \right\}^2}{2S(\xi_{2i}, 1/2)}. \quad (62)$$

На основе отсчётов (61), (62) вырабатывались квазиоптимальные оценки моментов появления и исчезновения $\theta_{m1}^* = T_{\max}\Delta\xi i_m^*$, $\theta_{m2}^* = T_{\max}\Delta\xi j_m^*$, где i_m^*, j_m^* — номера максимальных отсчётов (61) и (62) соответственно.

В процессе моделирования было реализовано 10^5 циклов испытаний для каждого z . Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений рассеяний не более чем на 15% при $V(\theta_i | \theta_{0i})/T_{\max}^2 > 10^{-3}$.

На рис. 5 показаны зависимости нормированного на $T_{\max}^2$ рассеяния оценок момента исчезновения сигнала (59) от ОСШ z при $b = 0$, $k = 10$. Сплошной линией нанесена асимптотическая зависимость, рассчитанная по формулам (28), (58), кружками показаны экспериментальные значения рассеяния оценки максимального правдоподобия (30), а квадратиками — экспериментальные значения рассеяния квазиоптимальной оценки (35), полученные в процессе моделирования. Как видно из рис. 5, рассеяние оценки максимального правдоподобия несколько меньше рассеяния квазиоптимальной оценки при не слишком больших ОСШ. С ростом ОСШ различие между ними уменьшается и рассеяния максимально правдоподобной и квазиоптимальной оценок совпадают с их асимптотическим значением.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

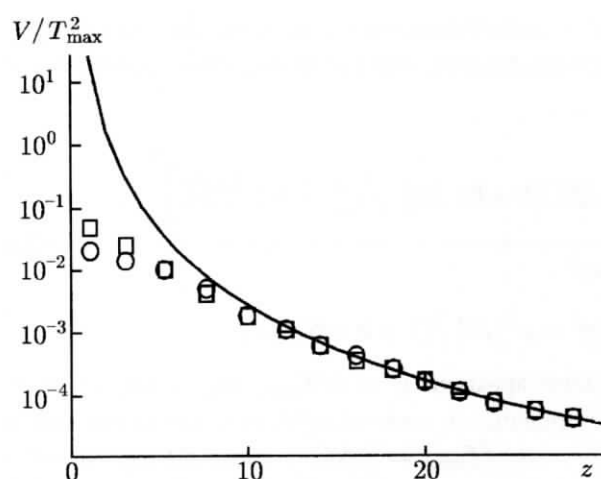


Рис. 5. Рассеяния оценок момента исчезновения

Синтезированы квазиправдоподобный, максимально правдоподобный и квазиоптимальный алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения сигнала произвольной формы с неизвестной амплитудой. Найдены асимптотические характеристики качества функционирования синтезированных алгоритмов. Наилучшей точностью оценки среди рассмотренных обладает максимально правдоподобный алгоритм, однако его техническая или программная реализация является наиболее сложной. Точность более простого квазиоптимального алгоритма оценки асимптотически совпадает с точностью максимально правдоподобного алгоритма. Показано, что отсутствие априорной информации об амплитуде сигнала при больших отношениях сиг-

нал/шум асимптотически не влияет на точность максимально правдоподобных и квазиоптимальных оценок моментов появления и исчезновения сигнала. Полученные результаты позволяют сделать обоснованный выбор алгоритма оценки в зависимости от имеющейся априорной информации об амплитуде сигнала, а также в зависимости от требований, предъявляемых к точности оценок и степени простоты реализации алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Репин В. Г. // Проблемы передачи информации. 1991. Т. 27, вып. 1. С. 61.
2. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34, № 5. С. 1024.
3. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 63, № 3. С. 271.
4. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э. // Проблемы передачи информации. 2001. Т. 37, вып. 1. С. 52.
5. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э. // Проблемы передачи информации. 2009. Т. 45, вып. 2. С. 91.
6. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978. 296 с.
7. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. М.: Радио и связь, 1983. 304 с.
8. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.
9. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977. 488 с.
10. Терентьев А. С. // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13, № 4. С. 652.
11. Грязнов М. И., Гуревич М. А., Рябинин М. А. Измерение параметров импульсов. М.: Радио и связь, 1991. 216 с.

Поступила в редакцию 27 апреля 2012 г.; принята в печать 26 июня 2012 г.

**ESTIMATION OF APPEARANCE AND DISAPPEARANCE MOMENTS
OF UNKNOWN- AMPLITUDE SIGNALS**

A. P. Trifonov, Yu. E. Korchagin, and P. A. Kondratovich

Quasi-likelihood, maximum-likelihood, and quasi-optimal algorithms for estimating appearance and disappearance moments of an arbitrary-shaped unknown-amplitude signal are synthesized. The asymptotic characteristics of the estimates are found. The synthesized algorithms are statistically simulated on a computer.