

**ЭВ  
&  
ЭС**

# **ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ**

**7'2012**

[www.radiotec.ru/](http://www.radiotec.ru/)

**т. 17**

## **В НОМЕРЕ :**

*Оценка времени прихода и длительности  
сигнала с неизвестной амплитудой*

*Моделирование эффектов радиационного  
трения в динамике релятивистской лазерной плазмы*

*Пространственно-временная обработка кодированных  
сверхширокополосных сигналов*

*и др.*



Тел./факс: (495) 625-9241  
E-mail: [info@radiotec.ru](mailto:info@radiotec.ru)  
[Http://www.radiotec.ru/](http://www.radiotec.ru/)

## СОДЕРЖАНИЕ

## CONTENTS

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Оценка времени прихода  
и длительности сигнала  
с неизвестной амплитудой.

Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э.,  
Кондратович П. А.

4 (15)

Моделирование эффектов  
радиационного трения в динамике  
релятивистской лазерной плазмы.

Крамаренко В. К., Панченко А. В.,  
Михайлов А. П., Князев Н. С.,  
Переверзева А. В., Горбач С. Н.,  
Макаревич Л. А., Талецкий К. Ю.,  
Камеиц Ф. Ф., Есиркепов Т. Ж.,  
Буланов С. В.

16 (24)

Сопоставление модели градиентной теории  
упругости и классической модели сред  
с переменными свойствами.

Лурье С.А., Соляев Ю.О.,  
Тарасов С.С., Фам Т.

25 (30)

Распознавание формы руки  
на видеопоследовательности в режиме  
реального времени на основе  
SURF-дескрипторов и нейронной сети.

Нгуен Т.Т., Спицын В.Г.

31 (39)

Две трактовки потенциальной  
помехоустойчивости радиотехнических  
систем передачи информации.

Ашимов Н. М.

40 (47)

R-ФУНКЦИИ, АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ,  
ВЕЙВЛЕТЫ, ФРАКТАЛЫ И ХАОС

Компьютерное моделирование дифракции  
Фраунгофера на H-фракталах и кривых Пеано.

Арзамасцева Г. В., Евтихов М. Г.,  
Лисовский Ф. В., МансвETOва Е. Г.

48 (58)

MATHEMATICAL MODELING  
OF PHYSICAL PROCESSES

Estimations of arrival time  
and duration of a signal  
with unknown amplitude.

A. P. Trifonov, Yu. E. Korchagin,  
P. A. Kondratovich

Modeling the effects of radiation friction  
in the dynamics of relativistic  
laser-plasma.

V. K. Kramarenko, A. V. Panchenko,  
A. P. Mikhailov, N. S. Knyazev,  
A. V. Pereverzeva, S. N. Gorbach,  
L. A. Makarevich, K. Ju. Taletsky,  
F. F. Kamenets, T. Zh. Esirkepov,  
S. V. Bulanov

Comparison of strain-gradient theory  
of elasticity and the classical model  
of media with nonconstant properties.

S.A. Lurie, Y.O. Solyaev,  
S.S. Tarasov, C. Pham

Real-time video hand  
recognition using SURF  
descriptors and neural  
network.

Nguyen T.T., Spitsyn V.G.

Two variants of explanation of potential noise  
immunity of information transmitting  
radioengineering systems.

N. M. Ashimov

R-FUNCTIONS, ATOMIC FUNCTIONS,  
WAVELETS, FRACTALS, AND CHAOS

Computer simulation of Fraunhofer diffraction  
by H-fractals and Peano curves.

G.V. Arzamastseva, M.G. Evtkhov,  
F.V. Lisovsky, E.G. Mansvetova

**ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ  
И ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Пространственно-временная обработка  
кодированных сверхширокополосных сигналов.

Радченко Ю. С., Титов Р. В.

59 (67)

**DIGITAL SIGNAL  
AND IMAGE PROCESSING**

Space-time processing of the coded  
ultra wideband signals.

Yu. S. Radchenko, R. V. Titov

**ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА**

Хронографический электронно-оптический  
преобразователь для лазерного доплеровского  
измерителя скоростей.

Карпов М. А., Мельчаков В. Н.,  
Егорова Е. В., Денисевич В. Н.,  
Цуников А. Ю., Зубков А. П.

68 (72)

**LASER PHYSICS**

Chronological electron-optical  
converter for laser Doppler  
velocity meter.

M. A. Karpov, V. N. Melchakov,  
E. V. Egorova, V. N. Denisevich,  
A. U. Tsunikov, A. P. Zybkov

**Полный перечень и содержание журналов, выпускаемых ЗАО «Издательство «Радиотехника»,  
размещен на сайте <http://www.radiotec.ru>**

Зав. редакцией: И.А. Кузьмина

Учредитель ЗАО «Издательство «Радиотехника». Свидетельства о регистрации № 014558 от 10.06.1997 г.

Сдано в набор 13.06.2012. Подписано в печать 13.07.2012.

Печ. л. 9. Тираж 300 экз. Изд. № 19.

107031, Москва, К-31, Кузнецкий мост, д. 20/6. Тел. (7-495)621-48-37. Тел./факс (7-495)625-92-41.

e-mail: 1560-4128@radiotec.ru, www.radiotec.ru

Дизайн и допечатная подготовка ЗАО «САЙНС-ПРЕСС».

Тиражирование ООО «Галлея-Принт». Тел.: (495) 673-57-85; факс: (495) 777-81-28 E-mail: galleyaprint@gmail.ru Зак. №

**© ЗАО «Издательство «Радиотехника», 2012 г.**

Незаконное тиражирование и перевод статей, включенных в журнал, в электронном и любом другом виде запрещено  
и карается административной и уголовной ответственностью по закону РФ «Об авторском праве и смежных правах»

# Математическое моделирование физических процессов

УДК 391.621.01

## Оценка времени прихода и длительности сигнала с неизвестной амплитудой

© Авторы, 2012

**А. П. Трифонов** – д. т. н., профессор, зав. кафедрой «Радиофизика», Воронежский государственный университет (ВГУ)  
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

**Ю. Э. Корчагин** – к. ф.-м. н., доцент, кафедра «Радиофизика», Воронежский государственный университет (ВГУ)  
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru

**П. А. Кондратович** – аспирант, кафедра «Радиофизика», Воронежский государственный университет (ВГУ)  
E-mail: pkondr@mail.ru

Найдены асимптотические характеристики квазиправдоподобных оценок времени прихода и длительности сигнала с неизвестной амплитудой; определены потери в точности оценки времени прихода и длительности вследствие отличия истинной амплитуды принимаемого сигнала от ожидаемой амплитуды; установлена структура максимально-правдоподобного измерителя для сигнала с неизвестной амплитудой; предложена двухканальная структура квазиоптимального измерителя, упрощающая реализацию приемного устройства; найдены асимптотические характеристики предложенного алгоритма.

**Ключевые слова:** время прихода, длительность, квазиправдоподобная оценка, оценка максимального правдоподобия, квазиоптимальная оценка, плотность вероятности, смещение оценки, рассеяние оценки, коэффициент сноса, коэффициент диффузии, марковский процесс.

Asymptotic characteristics of quasi-likelihood estimations of arrival time and duration of signal with unknown amplitude are found. Losses in accuracy of estimations of arrival time and duration of signal as a result of the discrepancy between real amplitude of received signal and amplitude of the expected signal are determined. Structure of maximal-likelihood gauge for measuring the signal with unknown amplitude are determined. Double-channelled structure of the quasi-optimal gauge simplifying the realization of the gauge is proposed. Asymptotic characteristics of the proposed algorithm are found.

**Keywords:** arrival time, duration, quasi-likelihood, estimation, estimation of the maximal-likelihood, quasi-optimal estimation, probability density, shift of estimation, dispersion of the estimation, drift coefficient, diffusion coefficient, Markov process.

**Введение.** В практических приложениях теории связи, локации, навигации, радиоастрономии актуальна задача приёма сигнала с неизвестными временем прихода и длительностью. В [1] исследована совместная оценка максимального правдоподобия (ОМП) времени прихода и длительности прямоугольного импульса, а в [2] – импульса произвольной формы. Однако реальные условия генерации и распространения приводят к необходимости оценки времени прихода и длительности сигнала, мощность которого неизвестна.

В работе рассмотрена задача оценки времени прихода и длительности сигнала произвольной формы с неизвестной амплитудой, наблюдаемого на фоне гауссовского белого шума.

Пусть исследуется реализация случайного процесса

$$x(t) = s(t, \lambda_0, \tau_0, a_0) + n(t), \quad (1)$$

где  $s(t, \lambda_0, \tau_0, a_0)$  – полезный сигнал, равный

$$s(t, \lambda_0, \tau_0, a_0) = a_0 f(t) I[(t - \lambda_0)/\tau_0], \quad (2)$$

$f(t)$  – непрерывная функция, описывающая форму сигнала;  $I(x) = 1$  при  $|x| \leq 1/2$  и  $I(x) = 0$  при  $|x| > 1/2$ ;  $\lambda_0, \tau_0, a_0$  – истинные значения времени прихода, длительности и амплитуды;  $n(t)$  – белый гауссовский шум с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ .

Полагая, что функция  $f(t)$  при  $t \in [\lambda_0 - \tau_0/2, \lambda_0 + \tau_0/2]$  обращается в ноль лишь на интервалах нулевой меры, и  $\max f(t) = 1$  для  $t \in [\lambda - \tau/2, \lambda + \tau/2]$  при  $(\lambda, \tau) \in \Lambda$  (здесь  $\Lambda$  – априорная область возможных значений времени прихода и длительности, заданная неравенствами  $|\lambda| \leq \Lambda_0/2$ ;  $T_1 \leq \tau \leq T_2$ ). Кроме того, потребуем, чтобы в моменты времени появления переднего  $t = \theta_{01} = \lambda_0 - \tau_0/2$  и заднего  $t = \theta_{02} = \lambda_0 + \tau_0/2$  фронтов сигнала (2) функция  $f(t)$  не обращалась в ноль, т. е.  $f(\lambda_0 \pm \tau_0/2) \neq 0$ . Следовательно, сигнал (2) является разрывным [1–4]. Обозначим

$$L(a, \lambda, \tau) = \frac{2a}{N_0} \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} f(t) x(t) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} f^2(t) dt \quad (3)$$

как логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП), который зависит от неизвестных времени прихода, длительности и амплитуды. Одним из способов преодоления априорной параметрической неопределенности относительно амплитуды является применение квазиправдоподобного (КП) алгоритма оценивания [5].

Квазиправдоподобный приемник формирует логарифм ФОП (3) для некоторой ожидаемой амплитуды  $a^*$  и всех возможных значений времени прихода и длительности. Тогда КП оценки  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  определяются как координаты абсолютного (наибольшего) максимума случайного поля (3) при  $(\lambda, \tau) \in \Lambda$  и  $a = a^*$ . Ограничимся аналогично [1, 2] рассмотрением надежных оценок. Нетрудно убедиться [6], что аномальные ошибки отсутствуют, если

$$\Lambda_0 \leq T_1. \quad (4)$$

Действительно, подставляя в (3) реализацию наблюдаемых данных (1) и полагая  $a = a^*$ , получаем

$$L(\lambda, \tau) = S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) - \frac{1}{2} \tilde{Q}(\lambda, \tau) + N(\lambda, \tau).$$

Здесь сигнальная функция [6]

$$S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) = (1 + \delta_a) \frac{z^2}{\tau_0} \int_{\max(\lambda_0 - \tau_0/2, \lambda - \tau/2)}^{\min(\lambda_0 + \tau_0/2, \lambda + \tau/2)} f^2(t) dt, \quad |\lambda - \lambda_0| \leq (\tau + \tau_0)/2, \quad (5)$$

$$S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) = 0, \quad |\lambda - \lambda_0| > (\tau + \tau_0)/2;$$

$\tilde{Q}(\lambda, \tau) = (1 + \delta_a) S(\lambda, \lambda, \tau, \tau)$ ;  $z^2 = 2\tau_0 a_0^2 / N_0$  – отношение сигнал/шум (ОСШ) для прямоугольного импульса с длительностью  $\tau_0$  и амплитудой  $a_0$ ;  $\delta_a = (a^* - a_0) / a_0$  – величина, характеризующая относительное отклонение ожидаемой амплитуды от истинного значения, которую будем называть расстройкой КП измерителя по амплитуде;  $N(\lambda, \tau)$  – шумовая составляющая, которая является центрированным гауссовским случайным полем, обладающим корреляционной функцией  $K_N(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2) = (1 + \delta_a) S(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)$ .

Согласно (5),  $S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) \neq 0$  для всех  $(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) \in \Lambda$ , когда выполняется (4).

Будем полагать, что выходное ОСШ для принятого сигнала (2) достаточно велико:

$$z_0^2 = \frac{2a_0^2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t) dt \gg 1,$$

и все рассматриваемые оценки обладают высокой апостериорной точностью [4, 6].

**Асимптотическая совместная плотность вероятности КП оценок.** Для определения характеристик КП оценок  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\tau}$  перейдем аналогично [1, 2] к новым параметрам

$$\theta_1 = \lambda - \tau/2, \quad \theta_2 = \lambda + \tau/2, \quad (6)$$

т. е. положениям переднего и заднего фронтов сигнала (2) соответственно. Обозначим априорную область их возможных значений  $\Theta$ . Очевидно, что линейные преобразования (6) взаимно однозначны, поэтому,

определив характеристики КП оценок положений фронтов  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$ , можно затем найти характеристики КП оценок времени прихода и длительности:

$$\hat{\lambda} = (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)/2, \quad \hat{\tau} = \hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1. \quad (7)$$

Для параметров  $\theta_1, \theta_2$  логарифм ФОП (3) при  $a = a^*$  перепишем в виде [2]

$$L(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2), \quad (8)$$

где

$$L_1(\theta_1) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f(t) x(t) dt - \frac{a^{*2}}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt; \quad (9)$$

$$L_2(\theta_2) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f(t) x(t) dt - \frac{a^{*2}}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt; \quad (10)$$

$\theta$  – фиксированная точка из интервала  $[-(T_1 - \Lambda_0)/2, (T_1 - \Lambda_0)/2]$ ;  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$  – квазиправдоподобные оценки, которые определяются как координаты абсолютного (наибольшего) максимума случайного поля (8) при  $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta$ .

Поскольку выражения (9) и (10) содержат интегралы от гауссовского белого шума на неперекрывающихся интервалах, то  $L_1(\theta_1)$  и  $L_2(\theta_2)$  – статистически независимые гауссовские случайные процессы. Следовательно, положение максимума случайного поля  $L(\theta_1, \theta_2)$  по переменным  $\theta_1$  и  $\theta_2$  можно искать раздельно как положение максимумов случайных процессов (9) и (10) соответственно:  $\hat{\theta}_i = \arg \sup_{L_i(\theta_i)} L_i(\theta_i)$ ,  $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_a$ . (здесь область  $\Theta_a$  – квадрат минимальной площади со сторонами параллельными осям  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , включающий в себя область  $\Theta$  [1, 2]). Область  $\Theta_a$  задается неравенствами

$$-\beta \leq \theta_1 \leq -\alpha, \quad \alpha \leq \theta_2 \leq \beta, \quad \alpha = (T_1 - \Lambda_0)/2, \quad \beta = (T_2 + \Lambda_0)/2. \quad (11)$$

Структура КП измерителя совпадает со структурой максимально правдоподобного измерителя времени прихода и длительности сигнала при априори известной амплитуде [2, рис.1] с тем отличием, что амплитуда опорного сигнала теперь не равна истинному значению амплитуды принимаемого сигнала.

Определим аппроксимацию плотности вероятности КП оценок  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$  для области  $\Theta_a$ . Аналогично [1, 2] искомую аппроксимацию плотности вероятности представим в виде

$$W_{\theta}(\theta_1, \theta_2) = W_{1\theta}(\theta_1) W_{2\theta}(\theta_2), \quad (12)$$

где  $W_{1\theta}(\theta_1)$  и  $W_{2\theta}(\theta_2)$  – плотности вероятностей положений абсолютных максимумов реализаций случайных процессов  $L_1(\theta_1)$  (9) и  $L_2(\theta_2)$  (10) на интервалах  $[-\beta, -\alpha]$  и  $[\alpha, \beta]$  соответственно.

Рассмотрим статистические характеристики процессов  $L_1(\theta_1)$  и  $L_2(\theta_2)$ , которые, согласно (9) и (10), представляют собой линейные преобразования гауссовского случайного процесса  $x(t)$ , и, следовательно, сами являются гауссовскими. Поэтому для их полного статистического описания достаточно найти математические ожидания и корреляционные функции процессов (9) и (10). Получаем математические ожидания

$$S_1(\theta_1) = \langle L_1(\theta_1) \rangle = (1 + \delta_a) \mathcal{Q}[\max(\theta_{01}, \theta_1, \theta)] - (1 + \delta_a)^2 \mathcal{Q}(\theta, \theta)/2, \quad (13)$$

$$S_2(\theta_2) = \langle L_2(\theta_2) \rangle = (1 + \delta_a) \mathcal{Q}[\theta, \min(\theta_{02}, \theta_2)] - (1 + \delta_a)^2 \mathcal{Q}(\theta, \theta_2)/2 \quad (14)$$

и корреляционные функции

$$K_1(\theta_{11}, \theta_{21}) = \langle [L_1(\theta_{11}) - S_1(\theta_{11})][L_1(\theta_{21}) - S_1(\theta_{21})] \rangle = (1 + \delta_a)^2 \mathcal{Q}[\max(\theta_{11}, \theta_{21}), \theta],$$

$$K_2(\theta_{12}, \theta_{22}) = \langle [L_2(\theta_{12}) - S_2(\theta_{12})][L_2(\theta_{22}) - S_2(\theta_{22})] \rangle = (1 + \delta_a)^2 \mathcal{Q}[\theta, \min(\theta_{12}, \theta_{22})],$$

где  $\mathcal{Q}(\theta_1, \theta_2) = \frac{2a_0^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt$  – ОСШ для сигнала с моментом появления  $\theta_1$  и моментом исчезновения  $\theta_2$ .

Поскольку функция  $f(t)$  (2) обращается в ноль лишь на интервалах нулевой меры, то  $Q(\theta, \theta)$  – монотонно убывающая функция аргумента  $\theta_1$ , а  $Q(\theta, \theta_2)$  – монотонно возрастающая функция аргумента  $\theta_2$ . Следовательно справедливы соотношения

$$Q(x, \theta) = -Q(\theta, x), \quad Q[\max(x, y), \theta] = \min[Q(x, \theta), Q(y, \theta)],$$

$$\mathcal{U}[b; \min(x, y)] = \min[\mathcal{U}(b; x), \mathcal{U}(b; y)].$$

Нетрудно убедиться, что при  $|\delta_a| < 1$  математические ожидания (13), (14) достигают максимумов в точках, которые совпадают с истинными значениями  $\theta_{01}$ ,  $\theta_{02}$  неизвестных моментов появления и исчезновения.

Перейдем в выражениях (9) и (10) от переменных  $\theta_1$  и  $\theta_2$  к новым переменным:

$$\xi_j = (-1)^j Q(\theta, \theta_j), \quad \xi_j \in [\xi_{j \min}, \xi_{j \max}], \quad j = 1, 2, \quad \xi_{1 \min} = Q[\theta_{1 \max}, \theta], \quad \xi_{1 \max} = Q[\theta_{1 \min}, \theta],$$

$$\xi_{2 \min} = Q[\theta, \theta_{2 \min}], \quad \xi_{2 \max} = Q[\theta, \theta_{2 \max}].$$

Тогда, используя свойства функции  $Q(\theta_1, \theta_2)$ , для (9), (10) имеем

$$L_j(\theta_j) = L_j(\theta_j, \xi_j) = \mu_j(\xi_j) = (1 + \delta_a) \min(\xi_j, \xi_{0j}) - (1 + \delta_a)^2 \xi_j / 2 + \nu_j(\xi_j), \quad (15)$$

где  $\xi_{01} = Q(\theta_{01}, \theta)$ ,  $\xi_{02} = Q(\theta, \theta_{02})$ ,  $\nu_j(\xi_j)$  – статистически независимые гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями

$$K_j(\xi_{1j}, \xi_{2j}) = (1 + \delta_a)^2 \min(\xi_{1j}, \xi_{2j}); \quad (16)$$

$\theta_j(\xi_j)$  – решение уравнения  $(-1)^j Q(\theta, \theta_j) = \xi_j$  относительно  $\theta_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Согласно (15) и (16),  $\mu_j(\xi_j)$  являются статистически независимыми гауссовскими марковскими случайными процессами [7] с коэффициентами сноса и диффузии:

$$\kappa_{1j}(\xi_{1j}, \xi_{2j}) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1 - \delta_a^2, & \xi_{j \min} \leq \xi_j \leq \xi_{0j}, \\ -(1 + \delta_a)^2, & \xi_{0j} < \xi_j \leq \xi_{j \max}, \end{cases} \quad \kappa_{2j} = (1 + \delta_a)^2. \quad (17)$$

Используя марковские свойства [7] процесса (15), аналогично [2] получаем асимптотическую плотность вероятности случайных величин  $\xi_j = (-1)^j Q(\theta, \theta_j)$ :

$$W_{j\xi}(\xi_j) = \begin{cases} (1 - \delta_a^2) \Psi \left[ (1 - \delta_a^2)(\xi_{0j} - \xi_j), (1 - \delta_a^2)(\xi_{0j} - \xi_{j \min}), (1 + \delta_a)^2(\xi_{j \max} - \xi_{0j}), \frac{(1 + \delta_a)}{(1 - \delta_a)} \right], & \xi_j \leq \xi_{0j}, \\ (1 + \delta_a^2) \Psi \left[ (1 + \delta_a)^2(\xi_j - \xi_{0j}), (1 + \delta_a)^2(\xi_{j \max} - \xi_{0j}), (1 - \delta_a^2)(\xi_{0j} - \xi_{j \min}), \frac{(1 - \delta_a)}{(1 + \delta_a)} \right], & \xi_j > \xi_{0j}, \end{cases} \quad (18)$$

а также

$$\Psi(y, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|y|^{3/2}} \left[ \Phi \left( \sqrt{\frac{y_1 - y}{4}} \right) + \exp \left( -\frac{y_1 - y}{8} \right) / \sqrt{\frac{\pi(y_1 - y)}{2}} \right] \times \\ \times \int_0^\infty x \exp \left[ -\frac{(x + y/2)^2}{2y} \right] \left[ \Phi \left( \frac{y_3 x + y_2/2}{\sqrt{y_2}} \right) - \exp(-y_3 \xi) \Phi \left( \frac{-y_3 x + y_2/2}{\sqrt{y_2}} \right) \right] dx,$$

где  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$  – интеграл вероятности,  $j = 1, 2$ . Заметим, что плотность вероятности (18) не зависит от выбора значения  $\theta$  в (9), (10).

На основе выражения (18), учитывая правила замены переменных в плотности вероятности, запишем плотности вероятностей КП оценок соответственно моментов появления и исчезновения:

$$W_{1\theta}(\theta_1) = W_{1\zeta}(\zeta(\theta_1, \theta)) \left| \frac{\partial \zeta(\theta_1, \theta)}{\partial \theta_1} \right|, \quad W_{2\theta}(\theta_2) = W_{2\zeta}(\zeta(\theta, \theta_2)) \left| \frac{\partial \zeta(\theta, \theta_2)}{\partial \theta_2} \right|,$$

а также смещения и рассеяния КП оценок моментов появления и исчезновения:

$$\begin{aligned} B(\hat{\theta}_j | \theta_{0j}) &= \int_{\theta_{j\min}}^{\theta_{j\max}} (\theta_j - \theta_{0j}) W_{j\zeta} [(-1)^j \zeta(\theta, \theta_j)] \frac{\partial \zeta(\theta, \theta_j)(-1)^j}{\partial \theta_j} d\theta_j, \\ V(\hat{\theta}_j | \theta_{0j}) &= \int_{\theta_{j\min}}^{\theta_{j\max}} (\theta_j - \theta_{0j})^2 W_{j\zeta} [(-1)^j \zeta(\theta, \theta_j)] \frac{\partial \zeta(\theta, \theta_j)(-1)^j}{\partial \theta_j} d\theta_j. \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно (7) и (12), совместная плотность вероятности КП оценок времени прихода  $\hat{\lambda}$  и длительно-сти  $\hat{\tau}$  при  $(\lambda, \tau) \in \Lambda_a$  имеет вид

$$W_a(\lambda, \tau) = W_\theta(\lambda - \tau/2, \lambda + \tau/2),$$

где  $W_\theta(\theta_1, \theta_2)$  – совместная плотность вероятности (12) оценок моментов появления и исчезновения:

$$W_\theta(\theta_1, \theta_2) = W_{1\zeta}(\zeta(\theta_1, \theta)) W_{2\zeta}(\zeta(\theta, \theta_2)) \left| \frac{\partial \zeta(\theta_1, \theta)}{\partial \theta_1} \frac{\partial \zeta(\theta, \theta_2)}{\partial \theta_2} \right|.$$

Область  $\Lambda_a$  соответствует  $\Theta_a$  (11). Она отличается от действительной области возможных значений оцениваемых параметров  $\Lambda$ , однако, как показано в [1, 2], включает в себя все точки области  $\Lambda$ .

**Асимптотические характеристики КП оценок.** Рассмотрим асимптотическое поведение плотностей вероятностей (18), смещений и рассеяний (19) КП оценок. Введем нормированные переменные:

$$\kappa_j = \begin{cases} (1 - \delta_a^2)(\xi_j - \xi_{0j}), & \xi_j \leq \xi_{0j}, \\ (1 + \delta_a)^2(\xi_j - \xi_{0j}), & \xi_j > \xi_{0j}, \end{cases} \quad (20)$$

$$\kappa_j \in [-K_{j\min}, K_{j\max}], \quad K_{j\min} = (1 - \delta_a^2)(\xi_{0j} - \xi_{j\min}), \quad K_{j\max} = (1 + \delta_a)^2(\xi_{j\max} - \xi_{0j}).$$

Плотности вероятностей случайных величин (20) имеют вид

$$W_j(\kappa_j) = \begin{cases} \Psi[-\kappa_j, K_{j\min}, K_{j\max}, (1 + \delta_a)/(1 - \delta_a)], & \kappa_j \leq 0, \\ \Psi[\kappa_j, K_{j\max}, K_{j\min}, (1 - \delta_a)/(1 + \delta_a)], & \kappa_j > 0. \end{cases}$$

Положим, что  $K_{j\min} \rightarrow \infty$ ,  $K_{j\max} \rightarrow \infty$ . Это в частности имеет место при  $\xi_{0j} = (-1)^j \zeta(\theta, \theta_{0j}) \rightarrow \infty$  и фиксированных значениях  $\theta_{j\min}$ ,  $\theta_{j\max}$ . Учитывая (18), находим предельную плотность вероятности нормированных переменных (20):

$$W_j(\kappa_j) = \begin{cases} W_0(-\kappa_j, (1 + \delta_a)/(1 - \delta_a)), & \kappa_j \leq 0, \\ W_0(\kappa_j, (1 - \delta_a)/(1 + \delta_a)), & \kappa_j > 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$W_0(x, y) = \Psi(x, \infty, \infty, y) = \Phi\left\{\sqrt{|x|/4}\right\} + (2y + 1) \exp\{y(y + 1)|x|/2\} \left[1 - \Phi\left\{(2y + 1)\sqrt{|x|/4}\right\}\right] - 1.$$

Известно [3, 4], что по мере роста ОСШ  $\xi_{0j}$  КП оценки сходятся в среднеквадратическом смысле к положениям максимумов математических ожиданий решающих статистик (9), (10), которые при  $|\delta_a| < 1$  совпадают с истинными значениями  $\theta_{0j}$  моментов появления и исчезновения. Разлагая  $\xi_j = (-1)^j \zeta(\theta, \theta_j)$



в ряд Тейлора по переменной  $\theta_j$  в окрестности  $\theta_{0j}$  и ограничиваясь в разложении членами первого порядка, получим

$$(-1)^j \mathcal{Q}(\theta, \theta_j) \equiv (-1)^j \mathcal{Q}(\theta, \theta_{0j}) + (-1)^j \rho_j^2 (\theta_j - \theta_{0j}) / T_{\max},$$

где  $\theta_{01} = \lambda_0 - \tau_0 / 2$ ,  $\theta_{02} = \lambda_0 + \tau_0 / 2$  – истинные значения моментов появления и исчезновения  $\rho_j^2 = 2a_0^2 f^2(\theta_{0j}) T_{\max} / N_0$ ;  $T_{\max} = 2\beta$  – максимально возможная длительности сигнала.

Величину  $\rho_j^2$  можно интерпретировать, как ОСШ для прямоугольного импульса с максимально возможной длительностью  $T_{\max}$  и амплитудой  $a_0 f(\theta_{0j})$ . Из предыдущего равенства, учитывая, что  $\xi_j = (-1)^j \mathcal{Q}(\theta, \theta_j)$ , получаем выражение

$$\xi_j - \xi_{0j} \equiv (-1)^j \rho_j^2 (\theta_j - \theta_{0j}) / T_{\max}$$

Подставляя его в (20), находим выражение для  $\kappa_j$ :

$$\kappa_j = (-1)^j \begin{cases} (1 - \delta_a^2)(\theta_j - \theta_{0j}) \rho_j^2 / T_{\max}, & \theta_j \leq \theta_{0j}, \\ (1 + \delta_a^2)(\theta_j - \theta_{0j}) \rho_j^2 / T_{\max}, & \theta_j > \theta_{0j}. \end{cases} \quad (22)$$

На основании формул (19), (21) и (22) найдем асимптотические выражения для характеристик КП оценок моментов появления и исчезновения (19), справедливые при больших ОСШ:

$$\begin{aligned} B_a(\hat{\theta}_j | \theta_{0j}) &= \langle \hat{\theta}_j - \theta_{0j} \rangle = \frac{(-1)^{j+1} 8 T_{\max} \delta_a}{\rho_j^2 (\delta_a - 1)^2 (\delta_a + 1)^2}, \\ V_a(\hat{\theta}_j | \theta_{0j}) &= \langle (\hat{\theta}_j - \theta_{0j})^2 \rangle = \frac{2 T_{\max}^2 (13 + 101 \delta_a^2 + 15 \delta_a^4 - \delta_a^6)}{\rho_j^4 (\delta_a - 1)^4 (\delta_a + 1)^4}. \end{aligned} \quad (23)$$

Используя (23), можем на основе (7) рассчитать асимптотические значения смещений и рассеяний КП оценок времени прихода  $\hat{\lambda}$ :

$$\begin{aligned} B_{a\lambda} &= \langle \hat{\lambda} - \lambda_0 \rangle = \langle (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2) / 2 - (\theta_{01} + \theta_{02}) / 2 \rangle = \frac{1}{2} \langle (\hat{\theta}_1 - \theta_{01}) / 2 \rangle + \langle (\hat{\theta}_2 - \theta_{02}) / 2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle B_a(\hat{\theta}_1 | \theta_{01}) + B_a(\hat{\theta}_2 | \theta_{02}) \rangle = \frac{4 T_{\max} \delta_a}{(\delta_a - 1)^2 (\delta_a + 1)^2} \left( \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right), \\ V_{a\lambda} &= \langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle = \langle ((\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_1) / 2 - (\theta_{20} + \theta_{10}) / 2)^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{4} \langle (\hat{\theta}_2 - \theta_{02})^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle (\hat{\theta}_1 - \theta_{01})(\hat{\theta}_2 - \theta_{02}) \rangle + \frac{1}{4} \langle (\hat{\theta}_1 - \theta_{01})^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{4} [V_a(\hat{\theta}_1 | \theta_{01}) + V_a(\hat{\theta}_2 | \theta_{02})] + \frac{1}{2} B_a(\hat{\theta}_1 | \theta_{01}) B_a(\hat{\theta}_2 | \theta_{02}) = \\ &= T_{\max}^2 \frac{(\rho_2^4 + \rho_1^4)(13 + 101 \delta_a^2 + 15 \delta_a^4 - \delta_a^6) - 64 \delta_a^6 \rho_1^2 \rho_2^2}{2 \rho_1^4 \rho_2^4 (\delta_a - 1)^4 (\delta_a + 1)^4}, \end{aligned} \quad (24)$$

а также длительности  $\hat{\tau}$ :

$$\begin{aligned} B_{\sigma\tau} &= \langle \hat{\tau} - \tau_0 \rangle = \langle (\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1 - (\theta_{02} - \theta_{01})) \rangle = \langle (\hat{\theta}_2 - \theta_{02}) \rangle - \langle (\hat{\theta}_1 - \theta_{01}) \rangle = \\ &= B_a(\hat{\theta}_2 | \theta_{02}) - B_a(\hat{\theta}_1 | \theta_{01}) = \frac{-8 T_{\max} \delta_a}{(\delta_a - 1)^2 (\delta_a + 1)^2} \left( \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_1^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{ar} &= \langle (\hat{t} - \tau_0)^2 \rangle = \langle (\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1 - (\theta_{02} - \theta_{01}))^2 \rangle = \\
&= \langle (\hat{\theta}_2 - \theta_{02})^2 \rangle - 2 \langle (\hat{\theta}_1 - \theta_{01})(\hat{\theta}_2 - \theta_{02}) \rangle + \langle (\hat{\theta}_1 - \theta_{01})^2 \rangle = \\
&= V_a(\hat{\theta}_1 | \theta_{01}) + V_a(\hat{\theta}_2 | \theta_{02}) - 2B_a(\hat{\theta}_1 | \theta_{01})B_a(\hat{\theta}_2 | \theta_{02}) = \\
&= 2T_{\max}^2 \frac{(\rho_2^4 + \rho_1^4)(13 + 101\delta_a^2 + 15\delta_a^4 - \delta_a^6) + 64\delta_a^6 \rho_1^2 \rho_2^2}{\rho_1^4 \rho_2^4 (\delta_a - 1)^4 (\delta_a + 1)^4}.
\end{aligned} \quad (25)$$

При  $\delta_a = 0$  выражения (24)–(25) определяют смещение и рассеяние ОМП времени прихода и длительности сигнала с априори известной амплитудой [2]:

$$B_{0\lambda} = B_{0r} = 0, \quad V_{0\lambda} = \frac{13\tau_0^2}{z^2}, \quad V_{0r} = 4V_{0\lambda} = \frac{52\tau_0^2}{z^2}, \quad (26)$$

где  $z^2 = z_1^2 z_2^2 \sqrt{2/(z_1^4 + z_2^4)}$ ,  $z_j^2 = \bar{z}^2 f^2(\theta_{0j}) = \rho_j^2 \tau_0 / T_{\max}$ ; величину  $z_j^2$  можно интерпретировать как ОСШ для прямоугольного импульса длительностью  $\tau_0$  с амплитудой  $a_0 f(\theta_{0j})$ .

Влияние априорного незнания амплитуды на точность КП оценки времени прихода и длительности можно охарактеризовать нормированными смещением  $b_\lambda = B_{a\lambda} / \sqrt{V_{a\lambda}}$ ,  $b_r = B_{ar} / \sqrt{V_{ar}}$  и рассеянием  $v_\lambda = V_{a\lambda} / V_{0\lambda}$ ,  $v_r = V_{ar} / V_{0r}$  КП оценок (7).

Из (24)–(26) получаем нормированные смещения оценок времени прихода

$$b_\lambda = \frac{4\sqrt{2}\delta_a(1-q^2)}{\sqrt{(1+q^4)(13+101\delta_a^2+15\delta_a^4-\delta_a^6)-64\delta_a^6q^2}} \quad (27)$$

и длительности

$$b_r = \frac{-4\sqrt{2}\delta_a(1+q^2)}{\sqrt{(1+q^4)(13+101\delta_a^2+15\delta_a^4-\delta_a^6)+64\delta_a^6q^2}}, \quad (28)$$

а также нормированные рассеяния оценок времени прихода и длительности соответственно:

$$v_\lambda = \frac{(13+101\delta_a^2+15\delta_a^4-\delta_a^6)(1+q^4)-64\delta_a^6q^2}{13(\delta_a-1)^4(\delta_a+1)^4(1+q^4)}, \quad (29)$$

$$v_{ar} = \frac{(13+101\delta_a^2+15\delta_a^4-\delta_a^6)(1+q^4)+64\delta_a^6q^2}{13(\delta_a-1)^4(\delta_a+1)^4(1+q^4)}, \quad (30)$$

где  $q^2 = \rho_1^2 / \rho_2^2 = f^2(\lambda_0 - \tau_0/2) / f^2(\lambda_0 + \tau_0/2)$ ; величина  $q$  характеризует отличие формы импульса от прямоугольной, при которой  $q = 1$ .

На рис. 1 показаны зависимости нормированных смещений КП оценок длительности  $b_r$  (28) от расстройки по амплитуде  $\delta_a$  для различных значений параметра  $q$ . Кривая 1 соответствует  $q = 0,1$  и  $q = 10$ , кривая 2 –  $q = 0,5$  и  $q = 2$ , кривая 3 –  $q = 0,8$  и  $q = 1,25$ .

На рис. 2 представлены зависимости нормированных смещений КП оценок времени прихода  $b_\lambda$  (27) от расстройки по амплитуде  $\delta_a$  для различных значений параметра  $q$ . Кривая 1 соответствует значению  $q = 0,1$ , кривая 2 –  $q = 0,5$ , кривая 3 –  $q = 0,8$ , кривая 4 –  $q = 1,25$ , кривая 5 –  $q = 2$  и кривая 6 –  $q = 10$ .

На рис. 3 приведены зависимости нормированных рассеяний КП оценок времени прихода  $v_\lambda$  (29) (сплошная линия) и длительности  $v_r$  (30) (штриховая линия) от расстройки по амплитуде  $\delta_a$  для значений параметра  $q = 1$ . По мере отклонения значения  $q$  от единицы кривые сближаются и практически совпадают.

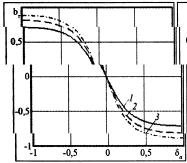


Рис. 1. Графики нормированных смещений КП оценки длительности

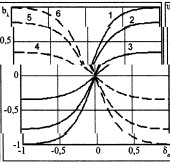


Рис. 2. Графики нормированных смещений КП оценки времени прихода

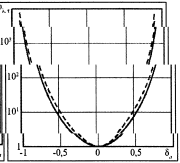


Рис. 3. Графики нормированных рассеяний КП оценок времени прихода и длительности

Из рис. 1 и 2 видно, что смещения оценок времени прихода  $b_\lambda$  и длительности  $b_\tau$  существенно зависят от значения параметра  $q$ . Согласно рис. 3 рассеяние КП оценки времени прихода и длительности может заметно превосходить рассеяние ОМП при известной амплитуде. Однако при отсутствии расстройки по амплитуде, т. е. когда  $\delta_a = 0$ , КП оценки времени прихода и длительности обладают нулевыми смещениями, а их рассеяние совпадает с рассеянием ОМП (26).

Кривые, представленные на рис. 1 – 3, не зависят от ОСШ и характеризуют проигрыш в точности КП оценок по сравнению с точностью ОМП времени прихода и длительности сигнала с априори известной амплитудой [2]. Наличие расстройки по амплитуде может привести к существенному ухудшению качества оценивания.

**Оценки максимального правдоподобия времени прихода и длительности.** С целью улучшения точности оценки времени прихода и длительности можно применить максимально правдоподобный (МП) алгоритм, основанный на поиске положения абсолютного максимума логарифма ФОП:  $(\lambda_m, \tau_m) = \arg \sup L(\lambda, \tau)$ . Здесь  $L(\lambda, \tau) = L(a_m, \lambda, \tau) = \sup_a L(a, \lambda, \tau)$  – логарифм ФОП (3), в котором вместо неизвестной амплитуды  $a$  используется её ОМП  $a_m$ , что равносильно максимизации выражения (3) по амплитуде. Максимизацию логарифма ФОП (3) по амплитуде можно выполнить аналитически, для этого приравняем производную функции (3) по  $a$  нулю, т. е.

$$\left. \frac{dL(a, \lambda, \tau)}{da} \right|_{a_m} = \frac{2}{N_0} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} \xi(t) f(t) dt - \frac{2a_m}{N_0} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} f^2(t) dt = 0,$$

и решим полученное уравнение правдоподобия относительно  $a_m$ :

$$a_m = \frac{\int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} \xi(t) f(t) dt}{\int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} f^2(t) dt}.$$

Заменяя в (3) априори неизвестную амплитуду  $a$  на её ОМП  $a_m$ , получаем

$$L(\lambda, \tau) = \frac{1}{N_0} \left( \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} \xi(t) f(t) dt \right)^2 \bigg/ \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} f^2(t) dt. \quad (31)$$

Выражение (31) определяет структуру приемного устройства. Получить функцию (31) как непрерывную функцию времени прихода  $\lambda$  и длительности  $\tau$  не представляется возможным. Приёмник должен формировать случайное поле (31) для каждого дискретного значения времени прихода и длительности  $L(\lambda_i, \tau_j) = L(i\Delta\lambda, j\Delta\tau)$  и находить положение абсолютного максимума  $L(i\Delta\lambda, j\Delta\tau)$ , где  $\Delta\lambda, \Delta\tau$  – шаги квантования времени прихода и длительности,  $i = 1, 2, \dots, n_1$  и  $j = 1, 2, \dots, n_2$  – целые числа. Причем, чем точнее необходимо оценить время прихода и длительности, тем меньшими нужно выбирать значения  $\Delta\lambda$  и  $\Delta\tau$ .

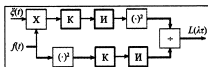


Рис. 4. Блок-схема одного канала МП измерителя времени прихода и длительности

ванных значений  $\lambda$  и  $\tau$ . Здесь обозначено:  $K$  – ключи, замкнутые на интервале времени  $\{\lambda - \tau/2, \lambda + \tau/2\}$ ;  $И$  – интегризаторы.

Необходимо отметить, что помимо сложностей реализации МП алгоритма, вызванных его многоканальностью, возникают трудности в определении характеристик оценок по положению абсолютного максимума логарифма ФОП (31).

**Квазиоптимальная оценка времени прихода и длительности.** Для упрощения технической реализации МП измерителя и нахождения его характеристик можно воспользоваться квазиоптимальными оценками (КО). Для этого перейдем в (3) к новым переменным (6)

$$L(a, \theta_1, \theta_2) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(t) x(t) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt \quad (32)$$

и представим логарифм ФОП (32) в виде суммы  $L(a, \theta_1, \theta_2) = L_1(a, \theta_1) + L_2(a, \theta_2)$  двух слагаемых:

$$L_1(a, \theta_1) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f(t) x(t) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt, \quad (33)$$

$$L_2(a, \theta_2) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f(t) x(t) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad (34)$$

где  $\theta$  – фиксированная точка из интервала  $[-(T_1 - \Lambda_0)/2, (T_1 - \Lambda_0)/2]$ .

Обозначим  $L_{\theta_j}(\theta_j) = \max_a L_j(a, \theta_j)$  и введём в рассмотрение оценки

$$\theta_{mj}^* = \arg \sup L_{\theta_j}(\theta_j). \quad (35)$$

Оценки (35) не являются оценками МП, но их использование позволяет существенно упростить техническую реализацию измерителя. Выполняя аналогично (31) максимизацию функций (33) и (34) по переменной  $a$ , получаем

$$L_{a1}(\theta_1) = \frac{1}{N_0} \left( \int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t) f(t) dt \right)^2 / \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt. \quad (36)$$

$$L_{a2}(\theta_1) = \frac{1}{N_0} \left( \int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t) f(t) dt \right)^2 / \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt. \quad (37)$$

Располагая оценками (35), можно получить КО оценки времени прихода и длительности сигнала:

$$\lambda_m^* = (\theta_{m2}^* + \theta_{m1}^*)/2, \quad \tau_m^* = \theta_{m2}^* - \theta_{m1}^*. \quad (38)$$

На рис. 5 показана блок-схема устройства формирования КО оценок (38), построенная на основе выражений (36), (37). Здесь обозначено:  $K1$  и  $K2$  – ключи, замкнутые на интервалах времени  $[-\beta, \theta]$  и  $[\theta, \beta]$ ,  $И$  – интеграторы;  $ЛЗ$  – линии задержки на время  $\theta + \beta$ ,  $Э1$  и  $Э2$  – экстрематоры, определяющие положения абсолютных максимумов сигналов на отрезках времени  $[\theta, \theta + \beta - \alpha]$  и  $[\alpha, \beta]$  соответственно;  $A$  – аттенуатор с коэффициентом передачи  $1/2$ .

Таким образом, использование оценок (38) позволяет существенно упростить техническую реализацию приёмного устройства. Действительно, для реализации МП алгоритма оценивания (31) требуется построение многоканального приёмного устройства по времени прихода и длительности. Для реализации оценок (38) достаточно двухканальной схемы (рис. 5).

Выполним теперь анализ алгоритма оценивания (38). Рассмотрим случайные процессы

$$M_1(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t) f(t) dt, \quad M_2(\theta_2) = \int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t) f(t) dt,$$

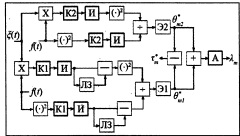


Рис. 5. Блок-схема устройства формирования КО

расположенные под квадратами в выражениях (36) и (37). Они представляют собой независимые гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями

$$S_1(\theta_1) = \langle M_1(\theta_1) \rangle = a_0 g[\max(\theta_{01}, \theta_1), \theta], \quad S_2(\theta_2) = \langle M_2(\theta_2) \rangle = a_0 g[\theta, \min(\theta_{02}, \theta_2)]$$

и корреляционными функциями

$$B_1(\theta_{11}, \theta_{21}) = \langle [M_1(\theta_{11}) - S_1(\theta_{11})][M_1(\theta_{21}) - S_1(\theta_{21})] \rangle = N_0 g[\max(\theta_{11}, \theta_{21}), \theta]/2,$$

$$B_2(\theta_{12}, \theta_{22}) = \langle [M_2(\theta_{12}) - S_2(\theta_{12})][M_2(\theta_{22}) - S_2(\theta_{22})] \rangle = N_0 g[\theta, \min(\theta_{12}, \theta_{22})]/2,$$

где  $g(\theta_1, \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt.$

Тогда для случайных процессов (36), (37) можем записать

$$L_{\omega j}(\theta_j) = (-1)^j M_j^2(\theta_j) / [N_0 g(\theta_j)]. \quad (39)$$

Поскольку функция  $f(t)$  может обращаться в ноль только на частях интервала  $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ , имеющих нулевую меру,  $g(\theta, \theta)$  — монотонно убывающая функция аргумента  $\theta_1$ , а  $g(\theta, \theta_2)$  — монотонно возрастающая функция аргумента  $\theta_2$ . Следовательно справедливы выражения

$$g(x, \theta) = -g(\theta, x), \quad g[\max(x, y), \theta] = \min[g(x, \theta), g(y, \theta)],$$

$$g[\theta, \min(x, y)] = \min[g(\theta, x), g(\theta, y)].$$

Используя (39), для решающих статистик (36) и (37) получаем выражение

$$L_{\omega j}(l_j) = z_{0j}^2 \min^2(l_j) / (2l_j) + z_{0j} \min(l_j) \omega_j(l_j) / l_j + \omega_j^2(l_j) / (2l_j), \quad (40)$$

где  $l_j = g(\theta, \theta_j) / g(\theta, \theta_{0j})$ ;  $l_j \in [L_{j\min}, L_{j\max}]$ ;

$$L_{1\min} = \frac{g(\theta_{1\max}, \theta)}{g(\theta_{01}, \theta)}; \quad L_{1\max} = \frac{g(\theta_{1\min}, \theta)}{g(\theta_{01}, \theta)}; \quad L_{2\min} = \frac{g(\theta, \theta_{2\min})}{g(\theta, \theta_{02})}; \quad L_{2\max} = \frac{g(\theta, \theta_{2\max})}{g(\theta, \theta_{02})};$$

$$l_{0j} = 1; \quad z_{0j}^2 = 2a_0^2 (-1)^j g(\theta, \theta_{0j}) / N_0;$$

$\omega_j(l_j)$  — статистически независимые стандартные винеровские процессы.

Для больших ОСШ  $z_{0j}$  последним слагаемым в (40) можно пренебречь и записать приближённо выражение

$$L_{\omega j}(l_j) \approx z_{0j}^2 \min^2(l_j) / (2l_j) + z_{0j} \min(l_j) \omega_j(l_j) / l_j. \quad (41)$$

Выполним в (41) еще одну замену переменных  $r_j = z_{0j}^2 l_j$ , причем  $r_j \in [\Lambda_{1j}, \Lambda_{2j}]$ ,  $\Lambda_{1j} = z_{0j}^2 l_{j \min}$ ,  $\Lambda_{2j} = z_{0j}^2 l_{j \max}$ ,  $r_{0j} = z_{0j}^2$ . Тогда можно переписать решающие статистики (41) как функцию переменных  $r_j$ :

$$L_{qj}[l_j(r_j)] = \mu_j^*(r_j) = \min^2(r_{0j}, r_j) / (2r_j) + \min(r_{0j}, r_j) \omega_j(r_j) / r_j. \quad (42)$$

Процессы  $\mu_j^*(r_j)$  являются статистически независимыми гауссовскими случайными процессами с математическими ожиданиями

$$S_{qj}(r_j) = \min^2(r_{0j}, r_j) / (2r_j) \quad (43)$$

и корреляционными функциями

$$K_{qj}(r_{1j}, r_{2j}) = \min(r_{1j}, r_{0j}) \min(r_{2j}, r_{0j}) \min(r_{1j}, r_{2j}) / (r_{1j} r_{2j}).$$

Коэффициент корреляции  $R(r_{1j}, r_{2j}) = \min(r_{1j}, r_{2j}) / \sqrt{r_{1j} r_{2j}}$  решающей статистики (42) удовлетворяет условию [8]  $R(x, y) = R(x, t)R(t, y)$ ,  $x > t > y$ . Следовательно, гауссовский случайный процесс (42) является марковским с коэффициентами сноса и диффузии [7]:

$$\kappa_1(r_j) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & r_j < r_{0j}, \\ -(1 + \varepsilon_j)^{-2}, & r_j \geq r_{0j}, \end{cases} \quad \kappa_2(r_j) = \begin{cases} 1, & r_j < r_{0j}, \\ (1 + \varepsilon_j)^{-2}, & r_j \geq r_{0j}. \end{cases}$$

где  $\varepsilon_j = (r_j - r_{0j}) / r_{0j}$ .

При больших ОСШ положение максимума решающей статистики (42) располагается в окрестности положения максимума её математического ожидания [3,4]. Математическое ожидание (43) достигает максимального значения при  $r_j = r_{0j}$ . Следовательно, с ростом ОСШ  $r_{0j} = z_{0j}^2$ ,  $\varepsilon_j \rightarrow 0$ , и можно решающую статистику (42) в окрестности точки  $r_j = r_{0j}$  аппроксимировать гауссовским марковским случайным процессом  $\mu_j^*(r_j)$  с коэффициентами сноса и диффузии:

$$\kappa_{1j} = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & r_j < r_{0j}, \\ -1, & r_j \geq r_{0j}, \end{cases} \quad \kappa_{2j} = 1. \quad (44)$$

Заметим, что коэффициенты сноса и диффузии (44) случайных процессов  $\mu_j^*(r_j)$  (42) совпадают при  $\delta_a = 0$  с коэффициентами сноса и диффузии (17) случайных процессов  $\mu_j(\xi_j)$  (15), а плотность вероятностей случайной величины  $\mu_j^*(\Lambda_{1j})$  (42) совпадает при  $\delta_a = 0$  с плотностью вероятности случайной величины  $\mu_j(\Lambda_{1j})$  (15). Следовательно, распределения положений максимумов случайных процессов  $\mu_j^*(r_j)$  можно получить, полагая в выражении (18)  $\delta_a = 0$ :

$$W_{jr}(r_j) = \begin{cases} \Psi[r_{0j} - r_j, r_{0j} - r_{j \min}, r_{j \max} - r_{0j}, 1], & r_j \leq r_{0j}, \\ \Psi[r_j - r_{0j}, r_{j \max} - r_{0j}, r_{0j} - r_{j \min}, 1], & r_j > r_{0j}. \end{cases} \quad (45)$$

Используя (45) аналогично (20), (21), находим предельную плотность вероятности для нормированных переменных  $r_j - r_{0j}$ , полагая в (21)  $\delta_a = 0$ :

$$W_{jr}(r_j | r_{0j}) = W_0 \left( \frac{r_j - r_{0j}}{2} \right) / 2, \quad W_0(x) = 3 \exp(2|x|) \left\{ 1 - \Phi \left( 3\sqrt{|x|/2} \right) \right\} + \Phi \left( \sqrt{|x|/2} \right) - 1.$$

Это выражение совпадает с предельной плотностью вероятности, полученной в [2] для МП оценок времени прихода и длительности сигнала с априори известной амплитудой. Соответственно, асимптотические выражения для смещений  $B_{q\delta}$ ,  $B_{qr}$  и рассеяний  $V_{q\delta}$ ,  $V_{qr}$  КО оценок времени прихода и длительности сигнала с неизвестной амплитудой совпадают с аналогичными выражениями (26), найденными в

[2], для смещений  $B_{0\Delta}$ ,  $B_{0\Gamma}$  и рассеяний  $V_{0\Delta}$ ,  $V_{0\Gamma}$  ОМП времени прихода и длительности при априори известной амплитуде. Таким образом, эффективность КО оценок (38) асимптотически совпадает с эффективностью ОМП при априори известной амплитуде. Это обстоятельство позволяет интерпретировать зависимость, изображённые на рис. 1 – 3 как выигрыш в точности КО оценок при неизвестной амплитуде по сравнению с КП оценками.

**Заключение.** Полученные выражения для характеристик различных алгоритмов оценок времени прихода и длительности сигнала позволяют сделать обоснованный выбор необходимого алгоритма оценки в зависимости от имеющейся априорной информации об амплитуде сигнала, а также от требований, предъявляемых к простоте реализации алгоритма и от требований к точности оценки.

#### Литература

1. Трифонов А. П., Бутейко В. К. Совместная оценка двух параметров разрывного сигнала на фоне белого шума // Радиотехника и электроника. Т. 34. 1989. № 11. С. 2323 – 2329.
2. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э. Оценка времени прихода и длительности сигнала // Электромагнитные волны и электронные системы. 2000. Т. 5. № 6. С. 33 – 42.
3. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь. 1986.
4. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука. 1979.
5. Мудров В. И., Кузико В. Л. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки. М.: Радио и связь. 1983.
6. Куликов Е. Н., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио. 1978.
7. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Радио и связь. 1977.
8. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио. 1978.

Поступила 21 июня 2011 г.

## Estimations of arrival time and duration of a signal with unknown amplitude

© Authors, 2012

A. P. Trifonov, Yu. E. Korchagin, P. A. Kondratovich

Structure of the quasi-likelihood gauge of the estimations of arrival time and duration of the signal with unknown amplitude for certain expected amplitude of the signal is considered. Asymptotic joint probability density, shift and dispersion of the estimations of the arrival time and duration of the signal for certain expected amplitude of the signal are found. Losses in accuracy of estimations of arrival time and duration of signal as a result of the discrepancy between amplitude of received signal and amplitude of the expected signal are determined.

Structure of maximal-likelihood gauge for measuring the signal with unknown amplitude is determined. Complexity of its realization as a result of its multichannel structure is considered. Double-channeled structure of the quasi-optimal gauge simplifying the realization of the gauge is proposed. Asymptotic characteristics of the proposed algorithm are found. Efficiency of the quasi-optimal estimations is proved to asymptotically coincide with a priori known amplitude. Dependences characterizing the advantage in accuracy of these estimations over the estimations in case of certain expected amplitude are found.

---

### ВНИМАНИЕ !

В журнале «Электромагнитные волны и электронные системы»  
введена новая рубрика

**НАНОТЕХНОЛОГИИ: РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ**