

НЕЛИНЕЙНЫЙ МИР

№ 3, т.11, 2013

$$\frac{d^{\alpha}}{d x^{\alpha}}, \alpha = \frac{m}{n}$$



тел./факс: (495) 625-9241
e-mail: info@radiotec.ru

ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС 82651 В КАТАЛОГЕ АГЕНТСТВА "РОСПЕЧАТЬ": ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ

Характеристики оценок амплитуды сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения

© Авторы, 2013

А. П. Трифонов – д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Радиофизика», Воронежский государственный университет (ВГУ), засл. деятель науки РФ
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru, trirad@mail.ru

Ю. Э. Корчагин – к.ф.-м.н., доцент, кафедра «Радиофизика», Воронежский государственный университет (ВГУ)
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru

П. А. Кондратович – аспирант, кафедра «Радиофизика», Воронежский государственный университет (ВГУ)
E-mail: pkondr@mail.ru

М. В. Трифонов – студент, кафедра «Радиофизика», Воронежский государственный университет (ВГУ)

К. А. Зимовец – к.ф.-м.н., доцент, кафедра «Радиофизика», Воронежский государственный университет (ВГУ)
E-mail: zim_ka@mail.ru

Синтезированы квазиправдоподобный, квазиоптимальный и максимально правдоподобный алгоритмы оценки амплитуды сигнала произвольной формы с неизвестными моментами появления и исчезновения. Найдены характеристики синтезированных алгоритмов.

Ключевые слова: оценка максимального правдоподобия, моменты появления и исчезновения, амплитуда, смещение, рассеяние.

Quazilikelihood, quasioptimal and maximum likelihood algorithms for estimating the signal amplitude of arbitrary waveform with an unknown appearance and disappearance moments are synthesized. Characteristics of the synthesized algorithms are found.

Keywords: maximum likelihood estimation, appearance and disappearance moments, amplitude, estimation characteristics

ВВЕДЕНИЕ

Задача оценки амплитуды сигнала, наблюдаемого на фоне шума, актуальна для многих практических приложений теории связи, локации, сейсмологии. В [1] исследован алгоритм оценки амплитуды сигнала на фоне гауссовского шума при условии, что остальные параметры сигнала априори известны. Однако в практических приложениях часто оказываются неизвестными моменты появления и исчезновения принимаемого сигнала. Поэтому целесообразно рассмотреть алгоритмы оценки амплитуды сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения. В работе выполнены синтез и анализ квазиправдоподобного (КП), максимально правдоподобного (МП) и квазиоптимального (КО) алгоритмов оценки амплитуды квазидетерминированного сигнала произвольной формы с неизвестными моментами появления и исчезновения.

Пусть на интервале времени $[0, T]$ доступна наблюдению реализация

$$\xi(t) = s(t, a_0, \theta_{01}, \theta_{02}) + n(t) \quad (1)$$

аддитивной смеси полезного сигнала

$$s(t, a_0, \theta_{01}, \theta_{02}) = \begin{cases} a_0 f(t), & \theta_{01} \leq t \leq \theta_{02}; \\ 0, & t < \theta_{01}, t > \theta_{02} \end{cases} \quad (2)$$

и гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь a_0 , θ_{01} и θ_{02} – неизвестные амплитуда и моменты появления и исчезновения принимаемого сигнала соответственно; $f(t)$ – априори известная непрерывная ограниченная функция, описывающая форму сигнала.

Положим, что моменты появления и исчезновения принимают значения из априорных интервалов $\theta_i \in [\theta_{i\min}, \theta_{i\max}]$, $i = 1, 2$.

Чтобы сигнал не мог исчезнуть раньше, чем он появляется, положим, что $\theta_{1\max} < \theta_{2\min}$. Будем считать, что функция, описывающая форму сигнала, удовлетворяет условию $f(\theta_{0i}) \neq 0$, $i = 1, 2$ и обращается в нуль только на интервалах нулевой меры. Располагая реализацией $\xi(t)$, приемник должен сформировать оценку амплитуды a_0 полезного сигнала (2).

КВАЗИПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА

Для синтеза алгоритма оценки амплитуды воспользуемся методом максимального правдоподобия (МП) [1–3], согласно которому оценка амплитуды совпадает с положением абсолютного (наибольшего) максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОР). Однако при неизвестных как моментах появления и исчезновения, так и амплитуде, логарифм ФОР зависит от трех неизвестных параметров [1, 2]:

$$L(a, \theta_1, \theta_2) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t) f(t) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt. \quad (3)$$

Максимизацию логарифма ФОР $L(a, \theta_1, \theta_2)$ по амплитуде при фиксированных θ_1, θ_2 выполним аналитически. Для этого приравняем нулю производную функции (3) по переменной a и решим полученное уравнение относительно a :

$$\frac{dL(a, \theta_1, \theta_2)}{da} = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t) f(t) dt - \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt = 0; \quad (4)$$

$$a = a(\theta_1, \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t) f(t) dt \bigg/ \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt.$$

Оценка амплитуды (4) зависит от неизвестных априори моментов появления и исчезновения. Таким образом, имеется априорная параметрическая неопределенность относительно моментов появления и исчезновения. Одним из способов преодоления этой неопределенности является применение КП-алгоритма оценивания [4]. Приемник формирует КП-оценку амплитуды (4) для некоторых ожидаемых моментов появления и исчезновения θ_1^*, θ_2^* :

$$a^* = a(\theta_1^*, \theta_2^*) = \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} \xi(t) f(t) dt \bigg/ \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f^2(t) dt. \quad (5)$$

Выражение (5) определяет структуру приемного устройства. На рис. 1 изображена блок-схема КП-измерителя амплитуды: 1 – интеграторы, включенные на интервале времени $t \in [\theta_1^*, \theta_2^*]$.

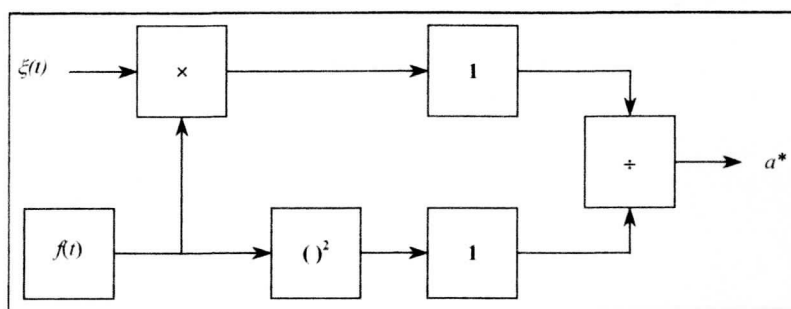


Рис. 1. Схема КП-измерителя

Найдем характеристики КП-оценки амплитуды (5). КП-оценка a^* является гауссовской случайной величиной, поскольку представляет собой линейное преобразование гауссовского случайного процесса $\xi(t)$. Подставив в формулу (5) выражение для наблюдаемой реализации (1) и выполнив усред-

нение, находим условные смещение, дисперсию и рассеяние КП-оценки a^* :

$$b(a^*|a_0) = \langle a^* - a_0 \rangle = a_0 (\Delta_1 + \Delta_2), \quad (6)$$

$$D(a^*|a_0) = \langle (a^* - \langle a^* \rangle)^2 \rangle = \frac{a_0^2}{Q(\theta_1^*, \theta_2^*)}, \quad (7)$$

$$V(a^*|a_0) = \langle (a^* - a_0)^2 \rangle = [a_0 (\Delta_1 + \Delta_2)]^2 + \frac{a_0^2}{Q(\theta_1^*, \theta_2^*)},$$

где обозначено: $Q(x, y)$ – отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе приемника МП для сигнала с моментом появления x и моментом исчезновения y :

$$Q(x, y) = \frac{2a_0^2}{N_0} \int_x^y f^2(t) dt; \quad (8)$$

$$\Delta_1 = \frac{Q(\max(\theta_1^*, \theta_{01}), \theta_1^*)}{Q(\theta_1^*, \theta_2^*)}; \quad \Delta_2 = \frac{Q(\theta_2^*, \min(\theta_2^*, \theta_{02}))}{Q(\theta_1^*, \theta_2^*)}. \quad (9)$$

Если ожидаемые моменты появления и исчезновения совпадают с их истинными значениями $\theta_1^* = \theta_{01}$, $\theta_2^* = \theta_{02}$, то КП-оценка амплитуды (5) совпадает с МП оценкой амплитуды при известных моментах появления и исчезновения:

$$a_{0m} = a(\theta_{01}, \theta_{02}) = \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} \xi(t) f(t) dt \Big/ \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t) dt. \quad (10)$$

Смещение и рассеяние оценки (10) найдены в [1]:

$$b(a_{0m}|a_0) = \langle a_{0m} - a_0 \rangle = 0, \quad V(a_{0m}|a_0) = \langle (a_{0m} - a_0)^2 \rangle = \frac{a_0^2}{Q(\theta_{01}, \theta_{02})}, \quad (11)$$

что совпадает с (6) и (7) при $\theta_1^* = \theta_{01}$ и $\theta_2^* = \theta_{02}$.

При отклонении ожидаемых моментов появления и исчезновения от своих истинных значений КП оценка может оказаться смещенной. Величины Δ_1, Δ_2 (9) можно интерпретировать как обобщенные расстройки КП-алгоритма оценки по моментам появления и исчезновения соответственно. Согласно (6), (9) КП-оценка амплитуды является несмещенной, если длительность опорного сигнала меньше длительности принимаемого сигнала, т.е. $\theta_1^* \geq \theta_{01}$ и $\theta_2^* \leq \theta_{02}$.

Введем в рассмотрение величину

$$\chi = V(a^*|a_0) / V(a_{0m}|a_0), \quad (12)$$

характеризующую увеличение рассеяния КП-оценки амплитуды в случае неизвестных моментов появления и исчезновения по сравнению с рассеянием МП-оценки амплитуды при известных моментах появления и исчезновения сигнала. Подставив в (12) выражения (7) и (11), получим

$$\chi = Q(\theta_{01}, \theta_{02}) \left(\frac{Q(\max(\theta_1^*, \theta_{01}), \theta_1^*)}{Q(\theta_1^*, \theta_2^*)} + \frac{Q(\theta_2^*, \min(\theta_2^*, \theta_{02}))}{Q(\theta_1^*, \theta_2^*)} \right)^2 + \frac{Q(\theta_{01}, \theta_{02})}{Q(\theta_1^*, \theta_2^*)}.$$

В качестве примера рассмотрим оценку амплитуды прямоугольного импульса со скошенной вершиной [5]:

$$f(t) = \left(1 + 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{t - \theta}{T_{\max}} \right) \Big/ \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^2}, \quad (13)$$

где $T_{\max} = \theta_{2\max} - \theta_{1\min}$ – максимально возможная длительность сигнала, $\theta = (\theta_{2\min} + \theta_{1\max})/2$ – середина отрезка $[\theta_{1\max}, \theta_{2\min}]$, $\gamma = f(\theta_{2\max})/f(\theta_{1\min})$ – параметр, характеризующий наклон скошенной вершины импульса. Множитель $\{1 + (\gamma - 1)^2 / 3(\gamma + 1)^2\}^{-1/2}$ введен в выражение (13) для того, чтобы энергия сигнала максимальной длительности $T_{\max}$ не зависела от наклона скошенной вершины импульса, что дает возможность сравнивать точность оценивания амплитуды сигналов с разным наклоном вершины, но одинаковой энергией. Будем считать, что $\theta_{1\min}$ и $\theta_{2\max}$, а также $\theta_{1\max}$ и $\theta_{2\min}$ расположены симметрично относительно точки θ и априорные интервалы возможных значений моментов появления и исчезновения имеют одинаковую длину. Функция (8) применительно к сигналу (13) принимает вид

$$Q(\theta_1, \theta_2) = z_{0r}^2 \left\{ x_2 + x_1 + 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (x_2^2 - x_1^2) + \frac{4}{3} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^2 (x_2^3 + x_1^3) \right\},$$

где $x_1 = (\theta - \theta_1)/T_{\max}$, $x_2 = (\theta_2 - \theta)/T_{\max}$, $x_{1,2} \in \left[\frac{1}{2k}, \frac{1}{2} \right]$, $k = T_{\max}/T_{\min}$, $T_{\min} = \theta_{2\min} - \theta_{1\max}$, $z_{0r}^2 = 2a_0^2 T_{\max}/N_0$ – ОСШ на выходе приемника МП для сигнала прямоугольной формы максимальной длительности $T_{\max}$.

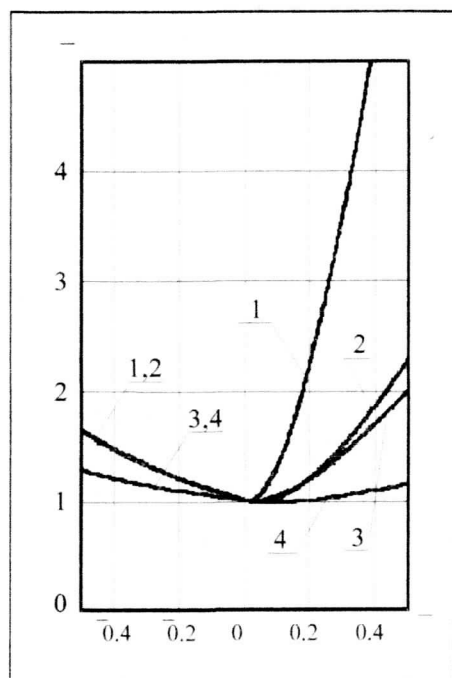


Рис. 2. Графики зависимости проигрышей в точности КП оценки от относительных расстройок δ_i при $k=4$

Введем в рассмотрение величины $\delta_i = (-1)^i (\theta_i^* - \theta_{0i}) \div (\theta_{i\max} - \theta_{i\min})$, $i=1,2$, характеризующие относительное отклонение ожидаемых моментов появления и исчезновения от их истинных значений, которые можно назвать относительными расстройками КП алгоритма по моментам появления и исчезновения. Если истинные значения моментов появления и исчезновения располагаются посередине априорных интервалов, то $\delta_i \in [-0.5; 0.5]$. На рис. 2 показаны зависимости проигрышей (12) в точности КП оценки амплитуды от относительных расстройок δ_i при $k=4$. Кривые 1 и 3 построены при ОСШ $z_{0r}^2 = 5$, а кривые 2 и 4 – при $z_{0r}^2 = 10$. Для импульса с линейно нарастающей вершиной $\gamma=2$ кривые 1 и 2 показывают зависимости проигрыша (12) от расстройки по моменту исчезновения δ_2 при отсутствии расстройки по моменту появления $\delta_1 = 0$. Кривые 3 и 4 иллюстрируют зависимости проигрыша (12) от расстройки по моменту появления δ_1 при отсутствии расстройки по моменту исчезновения $\delta_2 = 0$. В левой части рисунка (при $\delta < 0$) кривая 1 совпадает с кривой 2, а кривая 3 – с кривой 4. Следовательно, если длительность ожидаемого сигнала меньше длительности принятого сигнала, то проигрыш в точности оценки амплитуды слабо зависит от

ОСШ. Для импульса с линейно убывающей вершиной $\gamma=1/2$ кривая 1 меняется местами с кривой 3, а кривая 2 – с кривой 4.

Как видно из рис. 2, наличие отклонения ожидаемого значения момента появления или исчезновения от своего истинного значения может приводить к заметному снижению точности оценки амплитуды.

МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА

Для повышения точности оценки амплитуды можно использовать МП-алгоритм, основанный на поиске абсолютного максимума логарифма ФОП:

$$a_m = \arg \sup L(a) = a(\theta_{1m}, \theta_{2m}), \quad (14)$$

где $L(a) = L(a, \theta_{1m}, \theta_{2m}) = \sup_{\theta_1, \theta_2} L(a, \theta_1, \theta_2)$ – логарифм ФОП (3), в котором вместо неизвестных моментов появления и исчезновения используются их оценки максимального правдоподобия:

$$(\theta_{1m}, \theta_{2m}) = \arg \sup L(\theta_1, \theta_2), \quad (15)$$

$$L(\theta_1, \theta_2) = \sup_a L(a, \theta_1, \theta_2). \quad (16)$$

Подставляя (4) в (3), получим решающую статистику (16), зависящую только от моментов появления и исчезновения:

$$L(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_0} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t) f(t) dt \right)^2 / \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt. \quad (17)$$

Выражения (15), (17) определяют структуру приемного устройства, формирующего оценки моментов появления и исчезновения. Его удастся реализовать лишь в многоканальном варианте. Формируются значения решающей статистики (17) $L_{kj} = L(\theta_{1\min} + k\Delta\theta_1, \theta_{2\min} + j\Delta\theta_2)$, $k = \overline{1, n_1}$, $j = \overline{1, n_2}$ для дискретного набора значений моментов появления и исчезновения. Тогда измеритель должен состоять из $n_1 n_2$ каналов. Блок-схема одного канала изображена на рис. 3, где I – интеграторы, включенные на интервале времени $[\theta_{1\min} + k\Delta\theta_1, \theta_{2\min} + j\Delta\theta_2]$. Оценки МП-моментов появления θ_{1m} и исчезновения θ_{2m} определяются по номерам канала с максимальным выходным сигналом. Чтобы получить МП-оценку амплитуды найденные оценки моментов появления и исчезновения, согласно (14), необходимо подставить в выражение (4). Следовательно, можно воспользоваться схемой, изображенной на рис. 1, где интеграторы I для формирования МП-оценки амплитуды включаются на интервале времени $t \in [\theta_{1m}, \theta_{2m}]$.

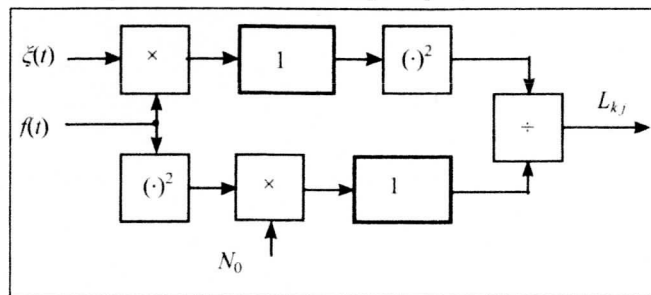


Рис. 3. Схема одного канала МП-измерителя

Для анализа МП-алгоритма оценивания амплитуды (14) воспользуемся результатами работы [6], в которой показано, что наличие у сигнала неизвестных моментов появления и исчезновения асимптотически с увеличением ОСШ не влияет на точность МП-оценки непрерывных параметров сигнала. Согласно [1], амплитуда является непрерывным параметром, а ее МП-оценка (14) при достаточно больших ОСШ обладает смещением и рассеянием (11). Следовательно, величина χ (12), зависимости которой показаны на рис. 2, характеризует не только проигрыш в точности КП-оценки амплитуды вследствие незнания моментов появления и исчезновения, но и выигрыш в точности МП-оценки амплитуды (14) по сравнению с КП-оценкой (6).

КВАЗИОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА

Упрощения аппаратной и программной реализации МП-алгоритма оценивания амплитуды можно достичь использованием КО-амплитуды. Для этого представим логарифм ФОП (3) в виде суммы $L(a, \theta_1, \theta_2) = L_1(a, \theta_1) + L_2(a, \theta_2)$ двух слагаемых:

$$L_1(a, \theta_1) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t) f(t) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt, \quad (18)$$

$$L_2(a, \theta_2) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t) f(t) dt - \frac{a^2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad (19)$$

где θ – произвольная точка, принадлежащая интервалу $(\theta_{1\max}, \theta_{2\min})$.

Обозначим $L_{aj}(\theta_j) = \max_a L_j(a, \theta_j)$ и введем в рассмотрение оценки моментов появления и исчезновения

$$\theta_{mj}^* = \arg \sup_{\theta_j} L_{aj}(\theta_j). \quad (20)$$

Оценки (20) не являются оценками МП, но как будет показано ниже, их точность асимптотически при увеличении ОСШ, совпадает с точностью МП-оценок моментов появления и исчезновения сигнала с априори известной амплитудой. Будем называть оценки (20) квазиоптимальными. На основании КО-оценок (20) аналогично (4), (14) сформируем КО-оценку амплитуды:

$$a_m^* = a(\theta_{m1}^*, \theta_{m2}^*). \quad (21)$$

Выполняя аналогично (4) максимизацию функций (18), (19) по переменной a , получим

$$L_{a1}(\theta_1) = \frac{1}{N_0} \left(\left(\int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t) f(t) dt \right)^2 / \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt \right), \quad (22)$$

$$L_{a2}(\theta_2) = \frac{1}{N_0} \left(\left(\int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t) f(t) dt \right)^2 / \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt \right). \quad (23)$$

На рис. 4 показана схема устройства формирования КО-оценки амплитуды (21) сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения, построенная на основе выражений (21)–(23): 1, 1' – интеграторы на интервалах времени $[\theta, t]$, $t \in [\theta, \theta_{2\max}]$ и $[\theta_{1\min}, t]$, $t \in [\theta_{1\min}, \theta]$ соответственно; 2 – линия задержки на время $\Delta t = \theta - \theta_{1\min}$; 3 и 3' – решающие устройства, осуществляющие поиск положения абсолютного максимума сигнала на интервалах времени $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$ и $[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$ соответственно; 4 и 4' – стробирующие устройства, осуществляющие выборку и удержание значений поступающих на вход сигналов в моменты времени θ_{m1}^* и θ_{m2}^* соответственно.

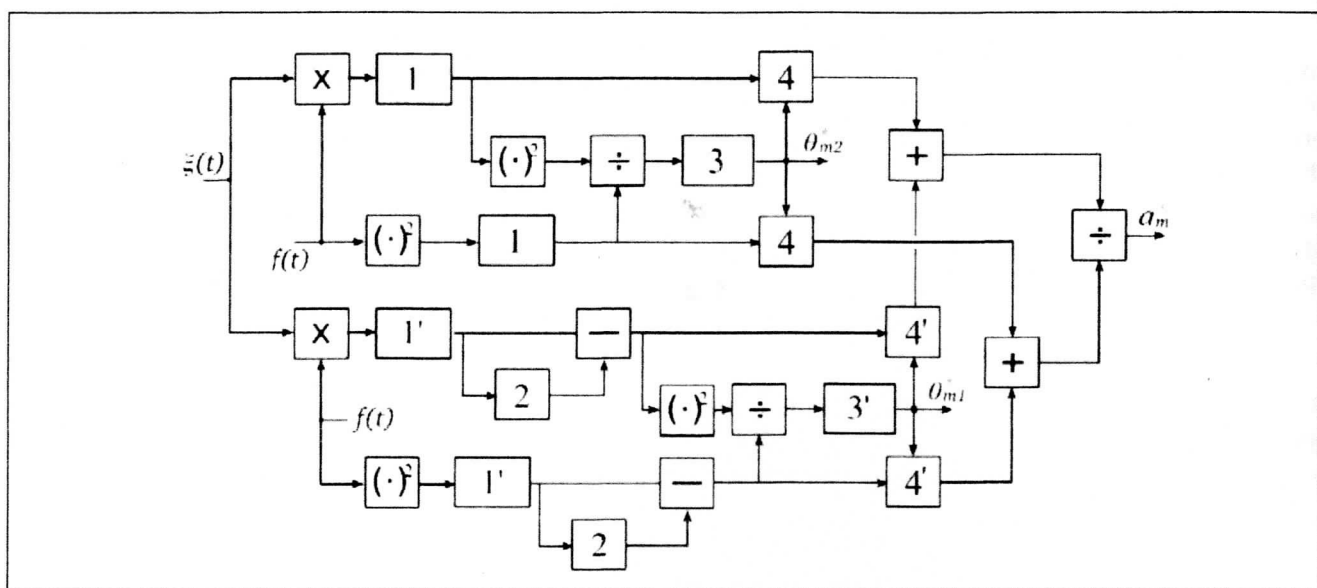


Рис. 4. Схема КО-измерителя

Таким образом на выходах блоков 4 формируются интегралы $\int_{\theta}^{\theta_{m2}^*} \xi(t) f(t) dt$ и $\int_{\theta}^{\theta_{m2}^*} f^2(t) dt$ как функции текущего времени, а выходах блоков 4' – интегралы $\int_{\theta_{m1}}^{\theta} \xi(t) f(t) dt$ и $\int_{\theta_{m1}}^{\theta} f^2(t) dt$. Выходы с блоков 4 и 4' соединены с сумматорами, в результате на выходах сумматоров формируются интегралы $\int_{\theta_{m1}}^{\theta_{m2}^*} \xi(t) f(t) dt$ и $\int_{\theta_{m1}}^{\theta_{m2}^*} f^2(t) dt$, которые поступают на делитель. На выходе делителя формируется оценка амплитуды a_m^* (21). Использование оценки (21) позволяет существенно упростить техническую реализацию приемника. Действительно, для реализации МП-алгоритма оценивания (14) требуется построение многоканального приемного устройства по моментам появления и исчезновения. Для поиска оценок (21) достаточно двухканальной схемы.

Согласно (21) в выражение для КО-оценки амплитуды входят КО-оценки моментов появления и исчезновения. Поэтому для получения статистических характеристик КО-оценки амплитуды необходимо знать характеристики КО-оценок моментов появления и исчезновения (20). Выполним анализ КО-оценок (20). Рассмотрим случайные процессы

$$M_1(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t) f(t) dt, \quad M_2(\theta_2) = \int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t) f(t) dt, \quad (24)$$

расположенные под квадратами в выражениях (22), (23). Они представляют собой гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями

$$S_1(\theta_1) = \langle M_1(\theta_1) \rangle = a_0 q[\max(\theta_{01}, \theta_1), \theta], \quad S_2(\theta_2) = \langle M_2(\theta_2) \rangle = a_0 q[\theta, \min(\theta_{02}, \theta_2)]$$

и корреляционными функциями

$$B_1(\theta_{11}, \theta_{21}) = \langle [M_1(\theta_{11}) - S_1(\theta_{11})][M_1(\theta_{21}) - S_1(\theta_{21})] \rangle = N_0 q[\max(\theta_{11}, \theta_{21}), \theta]/2, \\ B_2(\theta_{12}, \theta_{22}) = \langle [M_2(\theta_{12}) - S_2(\theta_{12})][M_2(\theta_{22}) - S_2(\theta_{22})] \rangle = N_0 q[\theta, \min(\theta_{12}, \theta_{22})]/2,$$

где

$$q(x, y) = \int_x^y f^2(t) dt. \quad (25)$$

Поскольку функция $f(t)$ может обращаться в нуль только на части интервала $[\theta_{1\min}, \theta_{2\max}]$, имеющей нулевую меру ($q(\theta_1, \theta)$ – монотонно убывающая функция аргумента θ_1 , а $q(\theta, \theta_2)$ – монотонно возрастающая функция θ_2) и имеют место равенства $q(x, \theta) = -q(\theta, x)$, а также $q[\max(x, y), \theta] = \min[q(x, \theta), q(y, \theta)]$, $q[\theta, \max(x, y)] = \min[q(\theta, x), q(\theta, y)]$.

Использование функции (25) позволяет переписать математические ожидания и корреляционные функции процессов (24) в виде

$$S_j(\theta_j) = a_0 \min[(-1)^j q(\theta, \theta_{0j}), (-1)^j q(\theta, \theta_j)], \\ B_j(\theta_{1j}, \theta_{2j}) = N_0 \min[(-1)^j q(\theta, \theta_{1j}), (-1)^j q(\theta, \theta_{2j})]/2.$$

Перейдем в выражениях (24) от переменных θ_1, θ_2 к новым переменным $r_j = (-1)^j q(\theta, \theta_j)$, $r_j \in [R_{j\min}, R_{j\max}]$, $R_{j\min} = q(\theta_{1\max}, \theta)$, $R_{j\max} = q(\theta_{1\min}, \theta)$, $R_{2\min} = q(\theta, \theta_{2\min})$, $R_{2\max} = q(\theta, \theta_{2\max})$. Тогда для случайных процессов (22), (23) можем записать выражение

$$L_{aj}(\theta_j) = (-1)^j M_j^2(\theta_j) / N_0 q(\theta, \theta_j) = L_{aj}(r_j) = \chi_j^2(r_j) / (N_0 r_j).$$

Здесь $\chi_j(r_j)$ – статистически независимые гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями $S_j(r_j) = a_0 \min(r_j, r_{0j})$, $r_{0j} = (-1)^j q(\theta, \theta_{0j})$ и корреляционными функциями $B_j(r_{1j}, r_{2j}) = N_0 \min(r_{1j}, r_{2j}) / 2$.

Следовательно, для решающих статистик (22) и (23) справедливо выражение

$$L_{aj}(l_j) = z_{0j}^2 \left[\min(1, l_j) \right]^2 / (2l_j) + z_{0j} \min(1, l_j) \omega_j(l_j) / l_j + \omega_j^2(l_j) / (2l_j), \quad (26)$$

где $l_j = r_j / r_{0j}$, $l_j \in [L_{j\min}, L_{j\max}]$, $L_{j\min} = R_{j\min} / r_{0j}$, $L_{j\max} = R_{j\max} / r_{0j}$; $z_{0j}^2 = 2a_0^2 r_{0j} / N_0 = 2a_0^2 (-1)^j q(\theta, \theta_{0j}) / N_0$; $\omega_j(l_j)$ – статистически независимые стандартные винеровские процессы.

Для больших ОСШ z_{0j} последним слагаемым в (26) можно пренебречь и записать приближенно

$$L_{aj}(l_j) \approx z_{0j}^2 \left[\min(1, l_j) \right]^2 / (2l_j) + z_{0j} \min(1, l_j) \omega_j(l_j) / l_j. \quad (27)$$

Эти функции являются гауссовскими случайными процессами с математическими ожиданиями

$$S_{aj}(l_j) = z_{0j}^2 \left[\min(1, l_j) \right]^2 / (2l_j) \quad (28)$$

и корреляционными функциями

$$K_j(l_{1j}, l_{2j}) = z_{0j}^2 \min(l_{1j}, 1) \min(l_{2j}, 1) \min(l_{1j}, l_{2j}) / (l_{1j} l_{2j}). \quad (29)$$

При больших ОСШ z_{0j} положение максимума решающей статистики располагается в малой окрестности положения максимума ее математического ожидания [2]. Математические ожидания (28) достигают максимальных значений при $l_j = 1$. Поэтому исследуем поведение случайных процессов (27) в малых окрестностях точек $l_j = 1$. Для этого разложим функции (28) по l_j , а (29) – по l_{1j}, l_{2j} в ряды Тейлора в окрестности единицы:

$$S_{aj}(l_j) \approx z_{0j}^2 (1 - |l_j - 1|) / 2, \quad (30)$$

$$K_j(l_{1j}, l_{2j}) = z_{0j}^2 (1 - |l_{1j} - 1| / 2 - |l_{2j} - 1| / 2 - |l_{1j} - l_{2j}| / 2). \quad (31)$$

Будем аппроксимировать при больших ОСШ решающую статистику (27) гауссовскими случайными процессами $Y_j(l_j)$ с математическими ожиданиями (30) и корреляционными функциями (31) на интервалах возможных значений переменных l_j . Положения максимумов случайных процессов $Y_j(l_j)$

$$l_{mj} = \arg \sup Y_j(l_j) \quad (32)$$

связаны с оценками моментов появления и исчезновения взаимно-однозначными преобразованиями. Поэтому функции распределения оценок (20) можно получить на основе функций распределения случайных величин (32):

$$F_j(x) = P\{l_{mj} < x\} = P\left[\sup_{l_j \leq x} Y_j(l_j) > \sup_{l_j > x} Y_j(l_j)\right]. \quad (33)$$

Введем в рассмотрение случайные процессы

$$\eta_j(l_j) = [Y_j(l_j) - Y_j(x)] / z_{0j}, \quad x \in [L_{j\min}, L_{j\max}], \quad (34)$$

использование которых позволяет переписать выражение (33) как

$$F_j(x) = P \left[\sup_{l_j \leq x} \eta_j(l_j) > \sup_{l_j > x} \eta_j(l_j) \right]. \quad (35)$$

По определению $\eta_j(l_j)$ (34) являются статистически независимыми гауссовскими случайными процессами, обладающими математическими ожиданиями

$$S_j(l_j) \approx z_{0j}^2 (|x-1| - |l_j-1|) / 2$$

и корреляционными функциями

$$K_j(l_{1j}, l_{2j}) = \begin{cases} \min(|l_{1j}-x|, |l_{2j}-x|), & (l_{1j}-x)(l_{2j}-x) \geq 0, \\ 0, & (l_{1j}-x)(l_{2j}-x) < 0. \end{cases} \quad (36)$$

Согласно (36) отрезки реализаций случайных процессов $\eta_j(l_j)$ на интервалах $[L_{j\min}, x]$ и $(x, L_{j\max}]$ статистически независимы. Поэтому аналогично [7] можем записать для распределения (33), (35) выражение

$$F_j(x) = \int_0^\infty P_{2j}(u) dP_{1j}(u), \quad (37)$$

где $P_{1j}(u) = P \left[\sup_{l_j \leq x} \eta_j(l_j) < u \right]; P_{2j}(v) = P \left[\sup_{l_j > x} \eta_j(l_j) < v \right].$

Согласно (36), случайные процессы $\eta_j(l_j)$ являются статистически независимыми гауссовскими марковскими процессами [8] с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_{1j} = z_{0j} \begin{cases} 1/2, & L_{j\min} \leq l_j \leq 1, \\ -1/2, & 1 < l_j \leq L_{j\max}, \end{cases} \quad k_{2j} = 1. \quad (38)$$

Следовательно, функции $P_{1j}(u)$ представляют собой вероятности недостижения границы u марковскими случайными процессами $\eta_j(l_j)$ при $L_{j\min} \leq l_j \leq 1$, а $P_{2j}(v)$ – вероятности недостижения границы v марковскими случайными процессами $\eta_j(l_j)$ при $1 < l_j \leq L_{j\max}$.

Аналогично [8], имеем

$$P_{1j}(u) = \int_0^u W_{1j}(y, L_{j\min}) dy, \quad P_{2j}(v) = \int_0^v W_{2j}(y, L_{j\max}) dy, \quad (39)$$

где $W_{2j}(y, l_j)$ – решения прямого уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) [8]:

$$\frac{\partial W_{2j}(y, l_j)}{\partial l_j} + \frac{\partial}{\partial y} [k_{1j} W_{2j}(y, l_j)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_{2j} W_{2j}(y, l_j)] = 0 \quad (40)$$

с коэффициентами (38) при граничных условиях $W_{2j}(y = -\infty, l_j) = W_{2j}(y = u, l_j) = 0$ и начальном условии $W_{2j}(y, l_j = x) = \delta(y - u)$, а $W_{2j}(y, l_j)$ – решения обратного уравнения ФПК [8]:

$$\frac{\partial W_{1j}(y, l_j)}{\partial l_j} + k_{1j} \frac{\partial W_{1j}(y, l_j)}{\partial y} + k_{2j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_{1j}(y, l_j)}{\partial y^2} = 0 \quad (41)$$

с коэффициентами (38) при граничных условиях $W_{1j}(y = -\infty, l_j) = W_{1j}(y = v, l_j) = 0$ и начальном условии $W_{1j}(y, l_j = x) = \delta(y - v)$.

Решая уравнения (40) и (41) методом отражения с переменной знака [8], подставляя полученные решения в выражения (39), а затем (39) в (37), находим функцию распределения случайной величины (32):

$$F_j(x) = \begin{cases} P \left[\frac{z_{0j}^2}{4}(x - L_{j\min}), \frac{z_{0j}^2}{4}(1 - x), \frac{z_{0j}^2}{4}(L_{j\max} - 1) \right], & L_{j\min} \leq x \leq 1, \\ 1 - P \left[\frac{z_{0j}^2}{4}(L_{j\max} - 1), \frac{z_{0j}^2}{4}(x - 1), \frac{z_{0j}^2}{4}(x - L_{j\min}) \right], & 1 < l_j \leq L_{j\max}. \end{cases} \quad (42)$$

Здесь

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi x_2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \exp \left[-\frac{(\xi - u)^2}{8x_2} \right] - \exp \left[-\frac{(\xi + u)^2}{8x_2} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \exp(-u) \Phi \left(\frac{2x_1 - u}{2\sqrt{x_1}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi x_1}} \exp \left[-\frac{(2x_1 + u)^2}{8x_1} \right] \right\} \exp \left[-\frac{\xi - u}{2} - \frac{x_2}{2} \right] \times \\ \times \left\{ \Phi \left(\sqrt{x_3} + \frac{\xi}{2\sqrt{x_3}} \right) - \exp(-\xi) \Phi \left(\sqrt{x_3} - \frac{\xi}{2\sqrt{x_3}} \right) \right\} d\xi du.$$

Рассмотрим асимптотическое поведение функции распределения (42) при увеличении ОСШ. Предполагая, что истинные значения моментов появления и исчезновения являются внутренними точками своих априорных интервалов и устремляя $z_{0j} \rightarrow \infty$, находим предельное выражение для функции распределения (42):

$$F_{0j}(x) = \begin{cases} P_0 \left[z_{0j}^2(1 - x)/4 \right], & L_{j\min} \leq x \leq 1, \\ 1 - P_0 \left[z_{0j}^2(x - 1)/4 \right], & 1 < l_j \leq L_{j\max}, \end{cases}$$

где

$$P_0(x) = P(+\infty, x, +\infty) = \int_0^\infty \exp(-u) \left[\Phi \left(\frac{u - 2x}{2\sqrt{x}} \right) - \exp(u) \Phi \left(-\frac{u + 2x}{2\sqrt{x}} \right) - \right. \\ \left. - \exp(-u + 4x) \Phi \left(\frac{u - 6x}{2\sqrt{x}} \right) + \exp(2u + 4x) \Phi \left(-\frac{u + 6x}{2\sqrt{x}} \right) \right] du.$$

Получим также предельную плотность вероятности случайных величин (32):

$$W_{0j}(x) = \frac{3z_{0j}^2}{2} \exp \left[z_{0j}^2 |x - 1| \right] \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{3z_{0j}}{2} \sqrt{|x - 1|} \right) \right\} - \frac{z_{0j}^2}{2} \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{z_{0j}}{2} \sqrt{|x - 1|} \right) \right\}. \quad (43)$$

Разложим выражение $(-1)^j q(\theta, \theta_j)$ в ряд Тейлора по переменной θ_j в окрестности θ_{0j} и ограничимся в разложении членами первого порядка малости:

$$(-1)^j q(\theta, \theta_j) \approx (-1)^j q(\theta, \theta_{0j}) + (-1)^j \frac{\rho_j^2 N_0}{2a_0^2 T_{\max}} (\theta_j - \theta_{0j}),$$

где $\rho_j^2 = 2f^2(\theta_{0j})a_0^2 T_{\max}/N_0 = z_{0j}^2 f^2(\theta_{0j})$.

Отсюда

$$l_{mj} - 1 \approx (-1)^j \frac{\rho_j^2}{T_{\max} z_{0j}^2} (\theta_j - \theta_{0j}). \quad (44)$$

Используя (43) и (44), находим асимптотические значения смещения и рассеяния КО моментов появления и исчезновения (20) $B_a(\theta_{mj}^* | \theta_{0j}) = 0$, $V_a(\theta_{mj}^* | \theta_{0j}) = 26T_{\max}^2 / \rho_{0j}^4$. Следовательно, оценки (20) можно представить в виде

$$\theta_{mj}^* = \theta_{0j} + \varepsilon^2 \eta_j, \quad \varepsilon = 1/z_0, \quad z_0^2 = Q(\theta_{01}, \theta_{02}). \quad (45)$$

Здесь η_j – статистически независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями

$$\langle \eta_j^2 \rangle = 26T_{\max}^2 z_0^4 / [z_{0j}^4 f^4(\theta_{0j})] = 26q^2(\theta_{01}, \theta_{02}) / f^4(\theta_{0j}). \quad (46)$$

Отметим, что величина (46) остается ограниченной при увеличении ОСШ z_0 .

Найдем теперь характеристики КО оценки амплитуды (21). Согласно (4), $a(\theta_1, \theta_2)$ представляет собой гауссовское случайное поле. Подставляя в (4) выражение для реализации наблюдаемых данных (1), получим

$$a(\theta_1, \theta_2) = a_0 [S(\theta_1, \theta_2) + \varepsilon N(\theta_1, \theta_2)], \quad (47)$$

$$\text{где } S(\theta_1, \theta_2) = \frac{\int_{\max(\theta_1, \theta_{01})}^{\min(\theta_2, \theta_{02})} f^2(t) dt}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt}; \quad N(\theta_1, \theta_2) = \frac{z_0}{a_0} \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} n(t) f(t) dt}{\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt}.$$

Эти функции нормированы так, что $\max S(\theta_1, \theta_2) = S(\theta_{01}, \theta_{02}) = \langle N^2(\theta_{01}, \theta_{02}) \rangle = 1$. Согласно (21) в выражение для КО оценки амплитуды входят КО оценки моментов появления и исчезновения (45). При больших ОСШ величина ε мала. Исследуем поведения сигнальной $S(\theta_1, \theta_2)$ и шумовой $N(\theta_1, \theta_2)$ составляющих выражения (47) в окрестности точки $(\theta_{01}, \theta_{02})$ при увеличении ОСШ $z_0 \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$. Разложим сигнальную составляющую $S(\theta_1, \theta_2)$ в ряд Тейлора по θ_1 и θ_2 в окрестности точки $(\theta_{01}, \theta_{02})$

$$\begin{aligned} S(\theta_1, \theta_2) \approx & 1 - \frac{f^2(\theta_{02})}{q(\theta_{01}, \theta_{02})} \max(\theta_2 - \theta_{02}, 0) + \frac{f^2(\theta_{01})}{q(\theta_{01}, \theta_{02})} \min(\theta_1 - \theta_{01}, 0) - \\ & - \frac{f^4(\theta_{02})}{q^2(\theta_{01}, \theta_{02})} (\theta_2 - \theta_{02}) \min(\theta_2 - \theta_{02}, 0) + \frac{f^2(\theta_{01}) f^2(\theta_{02})}{q^2(\theta_{01}, \theta_{02})} (\theta_1 - \theta_{01}) \min(\theta_2 - \theta_{02}, 0) + \\ & + \frac{f^2(\theta_{01}) f^2(\theta_{02})}{q^2(\theta_{01}, \theta_{02})} (\theta_2 - \theta_{02}) \max(\theta_1 - \theta_{01}, 0) - \frac{f^4(\theta_{01})}{q^2(\theta_{01}, \theta_{02})} (\theta_1 - \theta_{01}) \max(\theta_1 - \theta_{01}, 0). \end{aligned} \quad (48)$$

Подставляя (45) в (48), получим

$$\begin{aligned} S(\theta_{01} + \varepsilon^2 \eta_1, \theta_{02} + \varepsilon^2 \eta_2) \approx & 1 - \varepsilon^2 \frac{f^2(\theta_{02})}{q(\theta_{01}, \theta_{02})} \max(\eta_2, 0) + \varepsilon^2 \frac{f^2(\theta_{01})}{q(\theta_{01}, \theta_{02})} \min(\eta_1, 0) - \\ & - \varepsilon^4 \frac{f^4(\theta_{02})}{q^2(\theta_{01}, \theta_{02})} \eta_2 \min(\eta_2, 0) + \varepsilon^4 \frac{f^2(\theta_{01}) f^2(\theta_{02})}{q^2(\theta_{01}, \theta_{02})} \eta_1 \min(\eta_2, 0) + \\ & + \varepsilon^4 \frac{f^2(\theta_{01}) f^2(\theta_{02})}{q^2(\theta_{01}, \theta_{02})} \eta_2 \max(\eta_1, 0) - \varepsilon^4 \frac{f^4(\theta_{01})}{q^2(\theta_{01}, \theta_{02})} \eta_1 \max(\eta_1, 0). \end{aligned}$$

Отбросив в последнем выражении слагаемые, содержащие ε во второй и более высоких степенях, получим

$$S(\theta_{01} + \varepsilon^2 \eta_1, \theta_{02} + \varepsilon^2 \eta_2) \approx 1 + o(\varepsilon^\rho), \quad 1 < \rho < 2. \quad (49)$$

Шумовая составляющая $N(\theta_1, \theta_2)$ является гауссовским случайным полем с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$K(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}) = \frac{q(\max(\theta_{11}, \theta_{12}), \min(\theta_{21}, \theta_{22}))q(\theta_{01}, \theta_{02})}{q(\theta_{11}, \theta_{21})q(\theta_{12}, \theta_{22})}. \quad (50)$$

Используя корреляционную функцию (50), нетрудно показать, что

$$\left\langle \left[N(\theta_{01} + \varepsilon^2 \eta_1, \theta_{02} + \varepsilon^2 \eta_2) - N(\theta_{01}, \theta_{02}) \right]^2 \right\rangle = O(\varepsilon^2).$$

Тогда, воспользовавшись следствием из теоремы Ядренко [9], при $\varepsilon \rightarrow 0$ можем записать

$$N(\theta_{01} + \varepsilon^2 \eta_1, \theta_{02} + \varepsilon^2 \eta_2) = N(\theta_{01}, \theta_{02}) + o(\varepsilon^\gamma), \quad 0 < \gamma < 1. \quad (51)$$

Подставив (49) и (51) в (47), а затем (47) в (21) получим выражение для КО оценки амплитуды, справедливое при больших ОСШ:

$$a^* = a_0 \left(1 + \varepsilon N(\theta_{01}, \theta_{02}) + o(\varepsilon^\mu) \right), \quad \mu = \min(\rho, 1 + \gamma), \quad \mu > 1.$$

Отбрасывая в последнем выражении слагаемые, содержащие ε в степенях, выше первой, получим $a^* = a_0 (1 + N(\theta_{01}, \theta_{02})/z_0)$. Выполняя усреднение, находим смещение КО оценки амплитуды

$$b(a^* | a_0) = \langle a^* - a_0 \rangle = \langle a_0 N(\theta_{01}, \theta_{02})/z_0 \rangle = 0 \quad (52)$$

и ее рассеяние

$$V(a^* | a_0) = \langle (a^* - a_0)^2 \rangle = a_0^2 \langle N^2(\theta_{01}, \theta_{02}) \rangle / z_0^2 = a_0^2 / z_0^2. \quad (53)$$

Согласно (52), (53), точность КО оценки амплитуды асимптотически с ростом ОСШ совпадает с точностью МП оценки амплитуды при априори известных моментах появления и исчезновения.

Полученные результаты синтеза и анализа алгоритмов оценки амплитуды сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения позволяют сделать обоснованный выбор необходимого алгоритма оценки в зависимости от имеющейся априорной информации о моментах появления и исчезновения сигнала, а также от требований, предъявляемых к простоте реализации алгоритма и от требований к точности оценки. Самой простой в смысле технической или программной реализации является квазиправдоподобная оценка амплитуды, но ее точность может оказаться недостаточной. Точность максимально правдоподобной и квазиоптимальной оценок асимптотически с увеличением отношения сигнал/шум совпадает с точностью максимально правдоподобной оценки амплитуды сигнала с априори известными моментами появления и исчезновения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №12-01-33040 и №13-08-00735).

Литература

1. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь. 1983.
2. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио. 1978.
3. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь. 1986.
4. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. М.: Радио и связь. 1983.
5. Грязнов М.И., Гуревич М.А., Рябинин М.А. Измерение параметров импульсов. М.: Радио и связь. 1991.
6. Трифонов А.П., Корчагин Ю.Э. Совместная оценка параметров сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2000. Т. 43. №5. С. 34–43.
7. Терентьев А.С. Распределение вероятностей временного положения абсолютного максимума на выходе согласованного фильтра // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13. №4. С. 652–657.
8. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Радио и связь. 1977.
9. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. Киев: Вища школа. 1980.

The amplitude estimation characteristics of signal with unknown the moments of occurrence and disappearance

© Authors, 2013

A. P. Trifonov, Yu. E. Korchagin, P. A. Kondratovich, M. V. Trifonov, K. A. Zimovets

Quazilikelihood, quazioptimal and maximum likelihood algorithms of amplitude estimation of a signal with arbitrary form with unknown moments of occurrence and disappearance are synthesized. Asymptotic characteristics of the synthesized algorithms are found.

ВНИМАНИЕ!

С 1 апреля 2013 г. Вы можете приобрести со скидкой следующие издания:

«Оценивание дальности и скорости в радиолокационных системах.» Ч. 2. / Под ред. **А.И. Канащенкова, В.И. Меркулова.** **100 руб.** (старая цена 200 руб.)

«Электронные приборы и техника СВЧ. Электронные устройства СВЧ.» В 2-х книгах / Под ред. **И.В. Лебедева.** **200 руб.** (старая цена 300 руб.)

«Основы эргономики и дизайна радиоэлектронных средств бытового назначения» (Учебное пособие для вузов). **Белюченко И.М.** **100 руб.** (старая цена 160 руб.)

«Цифровые интегральные схемы». Справочник. **50 руб.** (старая цена 100 руб.)

Зарубежные радиоэлектронные средства. В 4-х книгах / Под ред. **Ю.М. Перунова. :**

Комплект книг **6000 руб.** (старая цена 9000 руб.)

Две книги (одна из которых Книга 4 «Элементная база» или книга 1 «Радиолокационные системы») **4000 руб.**

По вопросам приобретения изданий обращайтесь по телефонам:

+7 (495) 625 78 72, 625 92 41, 621 48 37

e-mail: info@radiotec.ru