

ISSN 0320-7102

**Том
49**

АВТОМЕТРИЯ

OPTOELECTRONICS, INSTRUMENTATION AND DATA PROCESSING

**№ 3
2013**

УДК 621.391

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО СОВМЕСТНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ И ОЦЕНКИ ПЛОЩАДИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ОБЪЕКТОВ НА ФОНЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ШУМА*

А. П. Трифонов, К. А. Зимовец, Ю. Э. Корчагин

*Воронежский государственный университет,
394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru*

Рассмотрены байесовский и максимально правдоподобный алгоритмы. Проведён сравнительный анализ эффективности алгоритмов. Полученные результаты конкретизированы для изображения в форме эллипса с линейно изменяющейся интенсивностью.

Ключевые слова: максимально правдоподобный алгоритм, байесовский алгоритм, характеристики алгоритмов, статистическое моделирование.

Введение. В последнее время проблема оптимальной обработки изображений становится всё более актуальной. Это связано не только с расширением спектра задач обработки изображений, но и с ростом производительности вычислительных средств, которые позволяют реализовывать всё более сложные алгоритмы. При этом в большинстве задач требуется получить максимально достижимую эффективность алгоритмов. В [1–4] рассмотрены задачи обработки неоднородного изображения с неизвестной площадью в условиях неполной априорной информации о параметрах изображения. Оптимальное использование полной априорной информации позволяет улучшить характеристики алгоритмов совместного обнаружения и оценки площади изображений. Поэтому представляет интерес задача синтеза и анализа оптимальных алгоритмов обработки изображения при наличии полной априорной информации о параметрах изображения.

Положим, что в области G обработке доступна реализация случайного поля:

$$\xi(x, y) = \gamma_0 s(x, y; \chi_0) + n(x, y). \quad (1)$$

Здесь

$$s(x, y; \chi_0) = F(x, y)I(x, y; \chi_0) \quad (2)$$

— полезное изображение с интенсивностью $F(x, y)$, которое занимает область $\Omega(\chi_0)$ площадью χ_0 . Форма области, занимаемой изображением, описывается индикатором $I(x, y; \chi) = 1$ при $x, y \in \Omega$ и $I(x, y; \chi) = 0$ при $x, y \notin \Omega$. В (1) $n(x, y)$ — гауссовский пространственный белый шум с односторонней спектральной плотностью N_0 , неизвестная площадь изображения χ_0 принимает значения из априорного интервала $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$, а $\gamma_0 = 1$ или $\gamma_0 = 0$ — дискретный параметр, отражающий наличие или отсутствие полезного изображения.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-01-97504, № 13-08-00735).

Алгоритмы обработки изображений. При анализе реализации случайного поля (1) возникает необходимость синтеза различных алгоритмов обработки изображения (2). В [1] рассмотрена задача обнаружения неоднородного изображения с неизвестной площадью, при этом в процессе синтеза алгоритма обнаружения изображения (2) не учитывалась точность оценки неизвестной площади χ_0 . Работа [2] посвящена синтезу и анализу алгоритма оценки площади χ_0 неоднородного изображения при условии, что оно всегда присутствует в принятой реализации ($\gamma_0 \equiv 1$). Наиболее общий случай обработки изображения рассмотрен в [3], где приведены синтез и анализ алгоритма совместного обнаружения и оценивания площади неоднородного изображения.

В работах [1–4] были рассмотрены алгоритмы обработки изображения (2), синтезированные по методу максимального правдоподобия. В соответствии с этим методом для обработки изображения (2) необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР):

$$L(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G \xi(x, y) s(x, y; \chi) dx dy - \frac{1}{N_0} \iint_G s^2(x, y; \chi) dx dy, \quad \chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]. \quad (3)$$

Задача обнаружения изображения (2), рассмотренная в [1], заключается в формировании решения $\hat{\gamma}$ о наличии изображения в принятой реализации (1) ($\hat{\gamma} = 1$) или о его отсутствии ($\hat{\gamma} = 0$). При этом алгоритм оценки параметра γ выглядит следующим образом:

$$\sup_{\chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]} L(\chi) \underset{\hat{\gamma}=0}{\overset{\hat{\gamma}=1}{\geq}} h, \quad (4)$$

где h — заданный порог. В случае, когда изображение постоянно присутствует в принятой реализации (1) ($\gamma_0 \equiv 1$), оценка максимального правдоподобия $\hat{\chi}$ площади χ_0 полезного изображения определяется как положение абсолютного максимума $L(\chi)$ [2]:

$$\hat{\chi} = \arg \sup_{\chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]} L(\chi). \quad (5)$$

Если необходимо не только принять решение о наличии или отсутствии изображения, но и оценить его площадь, лучше использовать максимально правдоподобный алгоритм обработки изображения [3], который заключается в совместном применении двух решающих правил:

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} 1, & L(\tilde{\chi}) \geq h, \\ 0, & L(\tilde{\chi}) < h; \end{cases} \quad \hat{\chi} = \begin{cases} \tilde{\chi}, & L(\tilde{\chi}) \geq h, \\ 0, & L(\tilde{\chi}) < h, \end{cases} \quad (6)$$

где $\tilde{\chi} = \arg \sup L(\chi)$. В отличие от (5) величина $\tilde{\chi}$ определяется при произвольном значении γ_0 в (1). Используя классический метод максимального правдоподобия, порог в алгоритмах обнаружения (4) и совместного обнаружения и оценивания (6) следует выбрать равным нулю ($h = 0$).

Хорошо известен тот факт, что в классе линейных оценок алгоритм максимального правдоподобия позволяет получить эффективную оценку измеряемого параметра. В работе [5] показано, что при оценке регулярных параметров метод максимального правдоподобия является асимптотически эффективным. В рассматриваемой модели изображения (2) неизвестная площадь χ_0 является разрывным параметром. В этом случае вопрос об оптимальности метода максимального правдоподобия остаётся открытым. Поэтому представляет интерес исследование алгоритмов обработки изображения, синтезированных на основе байесовского подхода.

Если известны априорная вероятность p_1 наличия изображения в принятой реализации (1) и априорная плотность распределения вероятности $W_{pr}(\chi)$ площади изображения (2), то для синтеза алгоритмов обработки изображения (2) возможно применение байесовского подхода, который позволяет минимизировать средний риск при заданной функции потерь. Таким образом он обеспечивает строгую оптимальность в рамках заданного критерия [5].

Применительно к случаю обнаружения изображения важной характеристикой алгоритма обработки является средняя вероятность ошибки обнаружения. Использование простой функции потерь, у которой стоимости правильных решений принимаются нулевыми, а стоимости ошибок первого и второго рода — одинаковыми, для синтеза байесовского алгоритма обнаружения позволяет минимизировать среднюю вероятность ошибки обнаружения, совпадающую с величиной среднего риска. Тогда алгоритм обнаружения изображения, присутствующего с вероятностью p_1 в принятой реализации (1), с неизвестной площадью χ_0 , распределённой с априорной плотностью вероятности $W_{pr}(\chi_0)$ в области $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$, имеет вид

$$L \underset{\hat{\gamma}_B = 0}{\overset{\hat{\gamma}_B = 1}{\geq}} C, \quad (7)$$

где $L = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} W_{pr}(\chi) \exp[L(\chi)] d\chi$; $C = (1 - p_1)/p_1$. При этом решение о наличии изображения в реализации наблюдаемых данных (1) принимается, если $\hat{\gamma}_B = 1$, а решение о его отсутствии — при $\hat{\gamma}_B = 0$. Для алгоритма оценки площади изображения (2) при условии, что изображение всегда присутствует в принятой реализации (1) ($\gamma_0 \equiv 1$), одной из основных характеристик является рассеяние оценки. Применение квадратичной функции потерь

$$C(\chi, \chi_0) = (\chi - \chi_0)^2$$

для синтеза байесовского алгоритма оценки площади позволяет получить оценку с минимальным рассеянием. Также необходимо отметить, что оценка

$$\hat{\chi}_B = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \chi \exp[L(\chi)] W_{pr}(\chi) d\chi / \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \exp[L(\chi)] W_{pr}(\chi) d\chi, \quad (8)$$

полученная с использованием байесовского подхода и квадратичной функции потерь, будет, безусловно, несмещённая. В более общем случае, когда требуется не только обнаружить изображение, но и оценить его площадь, выбор функции потерь представляется достаточно сложным. Это связано с тем, что необходимо оценить сразу два параметра и сделать выбор между точностями оценки каждого. Полезным в данном случае представляется применение аддитивной функции потерь, квадратичной по оцениваемому параметру:

$$\Pi = \left\| \begin{array}{cc} 1 - C_0(1 - g_0\hat{\chi}^2) & 1 \\ 1 & 1 - C_1(1 - g_1(\hat{\chi} - \chi)^2) \end{array} \right\|, \quad (9)$$

где C_0, C_1, g_0, g_1 — некоторые константы.

Синтезированный с использованием функции потерь (9) байесовский алгоритм совместного обнаружения и оценивания площади изображения принимает вид

$$\hat{\gamma}_B = \begin{cases} 1, & d_0 \geq C, \\ 0, & d_0 < C; \end{cases} \quad \hat{\chi}_B = \begin{cases} \tilde{\chi}, & d_0 \geq C, \\ 0, & d_0 < C, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\hat{\chi} = \frac{d_1}{d_0}; \quad C = \frac{p_0 C_0}{p_1 C_1} \left(1 - \frac{g_1}{d_0} \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \left(\frac{d_1}{d_0} - \chi \right)^2 W_{pr}(\chi) \exp[L(\chi)] d\chi \right)^{-1};$$

$$d_k = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \chi^k W_{pr}(\chi) \exp[L(\chi)] d\chi.$$

Качественный анализ структуры этих алгоритмов позволяет сделать вывод о том, что алгоритмы, синтезированные на основе байесовского подхода, заметно более сложны при аппаратной или программной реализации в сравнении с алгоритмами, синтезированными с помощью метода максимального правдоподобия. Решение о необходимости применения алгоритмов (7), (8) и (10) для обработки изображений можно вынести только проанализировав количественные показатели их эффективности. Эффективность алгоритма обнаружения (4) характеризуется средней вероятностью ошибки

$$P_e = (1 - p_1)\alpha + p_1\beta, \quad (11)$$

где α — вероятность ошибки 1-го рода (ложной тревоги), а $\beta = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \beta(\chi_0) W_{pr}(\chi_0) d\chi_0$ — безусловная вероятность ошибки 2-го рода (пропуска изображения). Точные выражения для α и условной вероятности ошибки 2-го рода $\beta(\chi_0)$ получены в [1]. Основной характеристикой, описывающей точность оценки площади, полученной с использованием алгоритма (5), является безусловное рассеяние

$$V(\hat{\chi}) = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} V(\hat{\chi} | \chi) W_{pr}(\chi) d\chi. \quad (12)$$

Точное выражение для условного рассеяния $V(\hat{\chi} | \chi_0)$ получено в работе [2]. Применительно к алгоритму совместного обнаружения и оценивания необходимо учитывать точность оценки сразу двух параметров. Точность оценки параметров γ и χ характеризуется средней вероятностью ошибки (11) и безусловным рассеянием

$$V(\hat{\chi}) = p_0 V(\tilde{\chi} | 0) + p_1 \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} [V(\tilde{\chi} | \chi) + \chi^2 \beta(\chi)] W_{pr}(\chi) d\chi, \quad (13)$$

где $V(\tilde{\chi} | 0)$ — рассеяние оценки площади при отсутствии изображения, причём для отсутствующего изображения полагалось $\chi_0 \equiv 0$; $V(\tilde{\chi} | \chi_0)$ — рассеяние оценки площади при наличии изображения. Точные выражения для $V(\tilde{\chi} | 0)$, $V(\tilde{\chi} | \chi_0)$, α , $\beta(\chi_0)$ получены в [3].

Необходимо отметить, что эффективность алгоритмов (4) и (6) может быть улучшена при наличии полной априорной информации. При этом структура алгоритмов остаётся неизменной. Изменяется только порог h , который в алгоритме (4) можно выбрать из условия минимума средней вероятности ошибки:

$$h_P = \arg \inf_h P_e,$$

а в алгоритме (6) — из условия минимума рассеяния оценки:

$$h_m = \arg \inf_h V(\hat{\chi}).$$

Однако в отличие от алгоритмов (4)–(6) получить характеристики алгоритмов (7), (8), (10), синтезированных с использованием байесовского подхода, аналитически не представляется возможным. Поэтому для количественного сравнения эффективности синтезированных алгоритмов необходимо провести статистическое моделирование алгоритмов (7), (8), (10).

Результаты статистического моделирования. Для статистического моделирования алгоритмов необходимо формировать логарифм ФОП $L(\chi)$ (3). Подставим в выражение для $L(\chi)$ реализацию случайного поля (1), тогда $L(\chi)$ будет иметь вид

$$L(\chi) = \gamma_0 S(\chi, \chi_0) - Q(\chi)/2 + N(\chi). \quad (14)$$

Здесь

$$N(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G n(x, y) s(x, y; \chi) dx dy$$

— шумовая функция;

$$Q(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G s^2(x, y; \chi) dx dy$$

— отношение сигнал/шум для изображения с площадью χ ;

$$S(\chi_0, \chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G s(x, y; \chi_0) s(x, y; \chi) dx dy = \min[Q(\chi), Q(\chi_0)]$$

— сигнальная функция.

Переходя в выражении (14) к нормированной переменной $\eta = \chi/\chi_{\max}$ и учитывая, что $N(\eta)$ — гауссовский марковский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $\langle N(\eta_1) N(\eta_2) \rangle = \min[\tilde{Q}(\eta_1), \tilde{Q}(\eta_2)]$, где $\tilde{Q}(\eta) \equiv Q(\eta \chi_{\max})$, представим этот процесс в виде

$$N(\eta) = \int_0^{\tilde{Q}(\eta)} n(x) dx.$$

Здесь $n(x)$ — гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $\langle n(x_1) n(x_2) \rangle = \delta(x_1 - x_2)$. При моделировании с шагом $\Delta\eta$ вырабатывались отсчёты функции $N(\eta)$, на основе которых реализация логарифма ФОП $L(\eta)$

аппроксимировалась ступенчатой функцией с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью $\Delta = 0,02$. Согласно [6] дискретные отсчёты логарифма ФОП можно записать в виде

$$L(\eta_{\min} + i\Delta\eta) = \gamma_0 S(\eta_{\min} + i\Delta\eta, \eta_0) + \\ + \sum_{j=1}^i \sqrt{\tilde{Q}(\eta_{\min} + j\Delta\eta) - \tilde{Q}(\eta_{\min} + (j-1)\Delta\eta)} n_j + \sqrt{\tilde{Q}(\eta_{\min})n_0 - \tilde{Q}(\eta_{\min} + i\Delta\eta)}/2,$$

где n_j — гауссовские независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями; $i = \overline{0, N_{\max}}$ ($N_{\max} = \text{ent}((1 - \eta_{\min})/\Delta\eta)$, $\text{ent}(\cdot)$ — целая часть числа); $\Delta\eta = \eta_{\min}\Delta^2$.

Полученные общие результаты были конкретизированы для изображения в форме эллипса, интенсивность которого изменяется линейно вдоль оси x . Уравнение контура, ограничивающего область $\Omega(\chi)$, занимаемую изображением площадью χ , имеет вид

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = \chi. \quad (15)$$

Здесь $ab = 1/\pi$. Обозначив через $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ эксцентриситет эллипса (15), интенсивность изображения запишем как

$$F(x, y) = \frac{4F_H}{\sqrt{(1-q)^2 + 4(1+q)^2}} \left[\frac{(1-q)\sqrt{\pi}(1-\varepsilon^2)^{1/4}}{2\sqrt{\chi_{\max}}} x + \frac{1+q}{2} \right], \quad (16)$$

где параметр F_H характеризует амплитуду интенсивности, параметр $q = \frac{F(-a_{\max}, 0)}{F(a_{\max}, 0)}$ — наклон интенсивности изображения, а параметр $a_{\max}$ определяет большую полуось эллипса при максимальной площади эллипса $\chi_{\max}$. Функция (16), описывающая интенсивность изображения, нормирована так, чтобы энергия изображения с максимальной площадью $E_{\max} = \iint_{\Omega(\chi_{\max})} F^2(x, y) dx dy = F_H^2 \chi_{\max}$ не зависела от наклона интенсивности изображения.

Эта независимость даёт возможность сравнивать эффективность алгоритмов обработки изображений с различными наклонами интенсивности. Подставляя интенсивность (16) в выражение для $\tilde{Q}(\eta)$, находим отношение сигнал/шум:

$$\tilde{Q}(\eta) = z_H^2 \left[\frac{(1-q)^2}{16} \eta^2 + \frac{(1+q)^2}{4} \eta \right] / \left[\frac{(1-q)^2}{16} + \frac{(1+q)^2}{4} \right], \quad (17)$$

где $\eta = \chi/\chi_{\max}$ — нормированная площадь, $\eta \in [1/g; 1]$; $g = \chi_{\max}/\chi_{\min}$ — динамический диапазон изменения неизвестной площади; $z_H^2 = 2F_H^2 \chi_{\max}/N_0 = 2E_{\max}/N_0$ — отношение сигнал/шум для однородного изображения с интенсивностью F_H и площадью $\chi_{\max}$.

В процессе моделирования априорная плотность вероятности $W_{pr}(\chi)$ неизвестной площади полагалась равномерной:

$$W_{pr}(\chi) = \begin{cases} 1/(\chi_{\max} - \chi_{\min}), & \chi_{\min} \leq \chi \leq \chi_{\max}, \\ 0, & \chi < \chi_{\min}, \chi > \chi_{\max}. \end{cases}$$

Поэтому при наличии изображения ($\gamma_0 = 1$) истинное значение нормированной площади η_0 выбиралось случайным, распределённым равномерно на интервале $[1/g; 1]$. Параметр

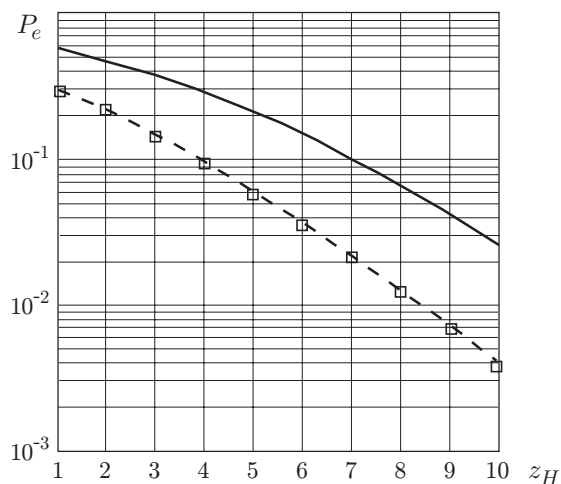


Рис. 1

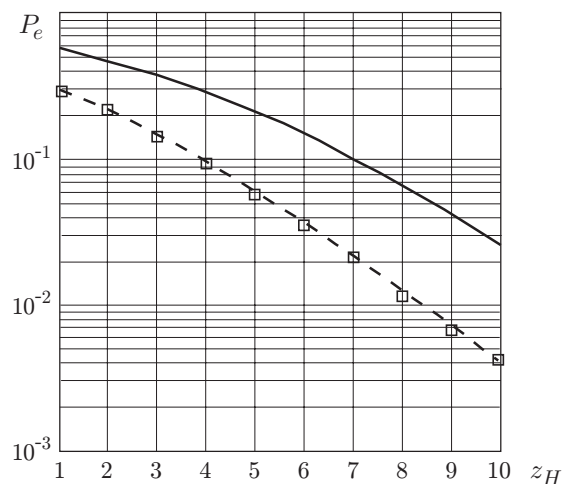


Рис. 2

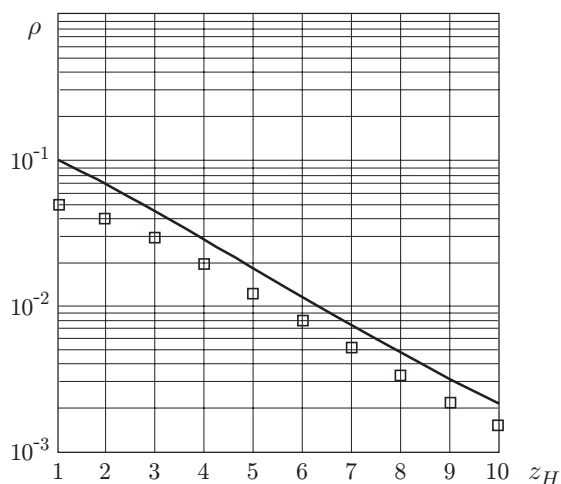


Рис. 3

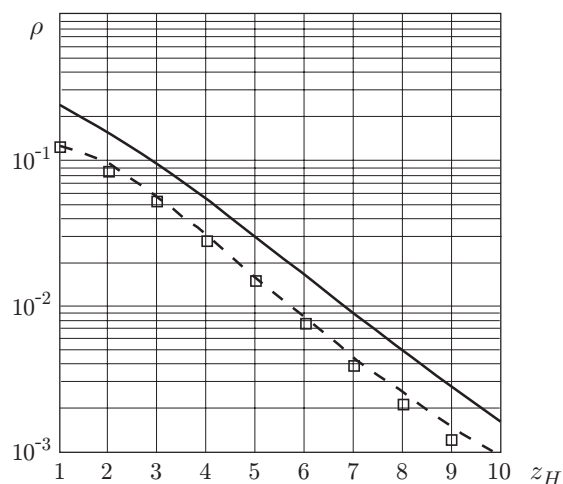


Рис. 4

γ_0 также выбирался случайным, принимающим значения 0 и 1 с вероятностями $(1 - p_1)$ и p_1 соответственно. В процессе моделирования было реализовано $5 \cdot 10^4$ циклов испытаний для каждого z_H .

На рис. 1–4 представлены характеристики эффективности алгоритмов обработки неоднородного изображения, имеющего форму эллипса (15), с линейно изменяющейся интенсивностью ($q = 10$) в зависимости от отношения сигнал/шум z_H . Динамический диапазон изменения площади выбран $g = 5$. Зависимости средней вероятности ошибки P_e (11) от отношения сигнал/шум z_H для алгоритмов обнаружения приведены на рис. 1, а для алгоритмов совместного обнаружения и оценивания — на рис. 2. Зависимости нормированного рассеяния $\rho = V(\hat{\chi})/\chi_{\max}^2$ (12) и (13) от отношения сигнал шум z_H для алгоритмов оценки показаны на рис. 3, а для алгоритмов совместного обнаружения и оценки — на рис. 4. Сплошными кривыми на рисунках представлены классические алгоритмы максимального правдоподобия ($h = 0$), штриховыми — алгоритмы максимального правдоподобия с оптимизированным порогом, а квадратами — результаты моделирования байесовских алгоритмов.

Заключение. При одинаковом объеме априорной информации и равномерном априорном распределении неизвестной площади характеристики байесовских и максимального

правдоподобных алгоритмов обнаружения и совместного обнаружения и оценивания практически совпадают. Следовательно, вместо относительно сложных байесовских алгоритмов можно использовать более простые максимально правдоподобные с оптимизированным порогом. При оценке площади неоднородного изображения, когда изображение всегда присутствует в принятой реализации, применение байесовского подхода позволяет получить выигрыш в точности оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Трифонов А. П., Зимовец К. А.** Эффективность обнаружения неоднородного изображения на фоне шума // Автометрия. 2003. **39**, № 1. С. 19–27.
2. **Трифонов А. П., Зимовец К. А.** Оценка площади неоднородного изображения на фоне пространственного шума // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. 2003. № 10. С. 3–14.
3. **Трифонов А. П., Зимовец К. А.** Совместное обнаружение неоднородного изображения и оценка его площади на фоне шума // Автометрия. 2004. **40**, № 4. С. 11–25.
4. **Юхно П. М.** Обнаружение пространственных объектов, затеняющих фон // Автометрия. 2012. **48**, № 4. С. 104–111.
5. **Трифонов А. П., Шинаков Ю. С.** Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.
6. **Быков В. В.** Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971. 326 с.

Поступила в редакцию 14 ноября 2012 г.
