

НЕЛИНЕЙНЫЙ МИР

№ 12, т.11, 2013

$$\frac{d^a}{d x^a}, a = \frac{m}{n}$$



тел./факс: (495) 625-9241
e-mail: info@radiotec.ru

Nonlinear World

НЕЛИНЕЙНЫЙ

МИР

№ 12, т. 11, 2013

Журнал включен в Перечень ВАК

Выходит с 2003 г.

Главный редактор: д. ф.-м. н., проф. А. А. Потапов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

акад. РАН А.С. Бугаев, акад. РАН Ю.В. Гуляев, акад. РАН Н.А. Кузнецов, акад. РАН В.И. Пустовойт, акад. РАН А.С. Сигов, акад. РАН И.Б. Федоров, чл.-корр. РАН В.И. Борисов, чл.-корр. РАН С.А. Никитов, чл.-корр. РАН В.А. Черепенин, д.ф.-м.н., проф. О.В. Бецкий, проф. Вей Жанг (КНР), д.т.н., проф. А.Х. Гильмутдинов, (зам. гл. ред.) д.т.н., проф. Ю.К. Евдокимов, к.т.н. В.П. Коннов, д.ф.-м.н., проф. Д.С. Лукин, проф. Х. Милошевич (Республика Сербия), проф. Д. Петкович (Республика Сербия), д.ф.-м.н. С.Ш. Рехвиашвили, д.т.н., проф. Е.М. Сухарев, проф. Я. Фоукзон (Государство Израиль), д.ф.-м.н., проф. Л.Ф. Черногор (Украина), к.т.н. Е.П. Чигин, д.т.н., проф. Я.С. Шифрин (Украина)

Editor-in-Chief: Dr.Sc. (Phys.-Math.), Prof. A.A. Potapov

EDITORIAL BOARD:

Academician RAS A.S. Bugaev, Academician RAS I.B. Fedorov, Academician RAS Yu.V. Gulyaev, Academician RAS N.A. Kuznetsov, Academician RAS V.I. Pustovoit, Academician RAS A.S. Sigov, Corresponding Member RAS V.I. Borisov, Corresponding Member RAS V.A. Cherepenin, Corresponding Member RAS S.A. Nikitov, Dr.Sc. (Eng.), Prof. O.V. Betskii, Prof. J. Foukzon (Israel), Dr.Sc. (Eng.), Prof. A.Kh. Gilmudinov (Deputy Editor), Dr.Sc. (Phys.-Math.), Prof. D.S. Lukin, Prof. H. Miloshevic (Serbia), Prof. D. Petkovic (Serbia), Dr.Sc. (Phys.-Math.) S.Sh. Rekhviashvili, Dr.Sc. (Eng.), Prof. Ya.S. Shifrin (Ukraine), Dr.Sc. (Eng.), Prof. Ye.M. Sukharev, Prof. Vei Zhang (China), Dr.Sc. (Eng.), Prof. Yu.K. Yevdokimov, Ph.D. (Eng.) Ye.P. Chigin, Ph.D. (Eng.) V.P. Konnov

Содержание

Взрывной источник света, основанный на применении эффектов гидродинамических неустойчивостей, для оборудования баллистических трасс. <i>Сперанский А. В., Герасимов С. И., Ерофеев В. И.</i>	829
Методы и синтез аппаратных средств генерирования кодовых словарей нелинейных рекуррентных последовательностей фиксированной длительности. <i>Сныткин И. И., Сныткин Т. И.</i>	836
Оценка числа сигналов с неизвестными амплитудами. <i>Трифонов А. П., Харин А. В.</i>	853
Влияние пиридина на кинетику реакции выделения водорода на железе в кислых хлоридных средах. <i>Балыбин Д. В., Вигдорович В. И., Цыганкова Л. Е., Кузина О. Ю.</i>	867
Связь между ИК-спектрами валентных колебаний Si-H и строением $(SiH)_x$ групп, $x = 1 - 3$, в полостях гидрированного микрокристаллического кремния. <i>Ларин А. В., Рыбаков А. А.</i>	877
Нелинейные характеристики пространственно-временной группировки сейсмогенных происшествий в гражданской авиации. <i>Платонова А. Т., Поздняков Д. А.</i>	883
Нелинейная модель изменения численности населения Земли: учет исчерпания ресурсов. <i>Черногор Л. Ф.</i>	886

Contents

Explosive light source based on effects of hydrodynamic instabilities for equipping the ballistic ranges. <i>Speransky A. V., Gerasimov S. I., Erofeyev V. I.</i>	835
Methods and synthesis of hardware of nonlinear recurrent sequences code dictionaries of the fixed duration generating. <i>Snytkin I. I., Snytkin T. I.</i>	852
Estimating the number of signals with unknown amplitudes. <i>Trifonov A. P., Kharin A. V.</i>	866
Influence of pyridine on hydrogen evolution reaction kinetics on iron in acidic chloride media. <i>Balybin D. V., Vigdorovich V. I., Tsygankova L. E., Kuzina O. Yu.</i>	875
The correspondence between IR spectra of valence Si-H vibrations and structure of the (SiH) _x groups, X = 1 – 3, in the cages of microcrystalline hydrogenated silicon. <i>Larin A. V., Rybakov A. A.</i>	881
Nonlinear characteristics of spatio-temporal grouping seismogenic accidents in civil aviation. <i>Platonova A. T., Pozdnyakov D. A.</i>	885
Nonlinear model for change in the population of earth taking into account of natural resources exhaustion. <i>Chernogor L. F.</i>	893
Comparative evaluation and comparison of the formation and implementing innovation policy. <i>Kirillov V. N., Ivanova V. I.</i>	902

"Nelineinyi mir" (Nonlinear World) is a scientific and technical journal elucidating fundamental areas of physics, mathematics from the point of view of synergy and nonlinear dynamics.

Необходимую информацию Вы найдете на нашем сайте <http://www.radiotec.ru>



Учредитель ЗАО «Издательство «Радиотехника». Лицензия ЛР № 065229.
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-14779.

Сдано в набор 14.11.2013. Подписано в печать 20.12.2013. Формат 60×88¹/₈.
Печ. л. 10. Тираж 350 экз. Изд. № 48.
107031, Москва, К-31, Кузнецкий мост, д. 20/6. Тел./факс +7(495)621-48-37.
e-mail: info@radiotec.ru;
<http://www.radiotec.ru>

Дизайн и допечатная подготовка ЗАО «САЙНС-ПРЕСС».
Отпечатано в ФГУП Издательство «Известия» УД ПРФ. 127254, ул. Добролюбова, д. 6. Тел.: 650-38-80. Заказ №4611.

ISSN 2070-0970

© ЗАО «Издательство «Радиотехника», 2013 г.

Незаконное тиражирование и перевод статей, включенных в журнал, в электронном и любом другом виде запрещено и карается административной и уголовной ответственностью по закону РФ «Об авторском праве и смежных правах»

Оценка числа сигналов с неизвестными амплитудами

© Авторы, 2013

© ЗАО «Издательство «Радиотехника», 2013

А. П. Трифонов – д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Радиофизика»,
Воронежский государственный университет (ВГУ), засл. деятель науки РФ
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru, trirad@mail.ru

А. В. Харин – аспирант, кафедра «Радиофизика», Воронежский государственный университет (ВГУ)
E-mail: phys.vsu@gmail.com

Выполнены синтез, анализ и статистическое моделирование нескольких алгоритмов оценки числа сигналов с известными и неизвестными амплитудами.

Ключевые слова: оценка числа сигналов, метод максимального правдоподобия, белый гауссовский шум, неизвестные амплитуды, вероятность ошибки.

Synthesis, analysis, and statistical modeling of several algorithms for estimating the number of signals were performed for signals with known and unknown amplitudes.

Keywords: estimation of the number of signals, maximum likelihood estimation, white Gaussian noise, unknown amplitudes, probability of error.

Необходимость в оценке числа принимаемых сигналов возникает при решении ряда задач радиолокации и связи. Так, при использовании многолучевого радиоканала [1, 2] число лучей часто априори неизвестно и его требуется определить. При радиолокационном и акустолокационном (активном или пассивном) наблюдении достаточно распространена ситуация, когда число источников сигналов, поступающих на антенную решётку неизвестно [3–7]. Однако задача оценки числа сигналов на сегодняшний день решена лишь частично. Возникают трудности в определении структуры алгоритма оценки. Практически отсутствуют результаты теоретического анализа качества функционирования алгоритмов оценки числа сигналов. Более того, нет достаточно общепризнанной и корректной количественной характеристики алгоритма. Без введения количественных характеристик алгоритмов оценки числа сигналов сложно сравнивать алгоритмы и выбирать наиболее эффективный.

Ниже рассмотрено несколько алгоритмов оценки числа сигналов с известными и неизвестными амплитудами. В качестве характеристики эффективности алгоритмов используется вероятность ошибки оценки числа сигналов.

Предположим, что наблюдается сумма из ν сигналов $s_i(a_i, t) = a_i f_i(t)$, так что принимается суммарный сигнал

$$s(t, \nu, \mathbf{a}_\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} s_i(a_i, t) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i f_i(t), \quad (1)$$

где $\nu = \overline{1, \nu_{\max}}$, $\forall i: a_i \in R^1$, $f_i(t) \in L_2(T_1, T_2)$ и $\mathbf{a}_\nu = \|a_i\|_{i=1}^{\nu}$.

Пусть сигнал (1) наблюдается на интервале времени $[T_1, T_2]$, на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Следовательно, обработке доступна реализация

$$x(t) = n(t) + \sum_{i=1}^{\nu_0} a_{0i} f_i(t), \quad (2)$$

где ν_0 – истинное число сигналов, а множество $\{a_{0i}\}_{i=1}^{\nu_{\max}}$ содержит истинные значения соответствующих амплитуд сигналов.

Предположим вначале, что вектор амплитуд $\mathbf{a} = \|a_i\|_{i=1}^{\nu_{\max}}$ априори известен (т. е. $\forall i = \overline{1, \nu_{\max}}: a_i = a_{0i}$), и оценке подлежит только параметр ν .

Используем для оценки числа сигналов ν_0 метод максимального правдоподобия. В [8] приведена формула для логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОР), когда помехой является аддитивный белый гауссовский шум

$$L(l) = \frac{2}{N_0} \int_{T_1}^{T_2} x(t)s(t,l)dt - \frac{1}{N_0} \int_{T_1}^{T_2} s^2(t,l)dt. \quad (3)$$

Здесь l – совокупность неизвестных параметров сигнала $s(t,l)$.

После подстановки в (3) сигнала (1) имеем

$$L(\nu, \mathbf{a}_\nu) = \frac{2}{N_0} \sum_{m=1}^{\nu} a_m \int_{T_1}^{T_2} x(t)f_m(t)dt - \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} a_i a_j K_{ij}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{K}_\nu = (K_{ij})_{i=1, j=1}^{\nu}, \quad K_{ij} = \int_{T_1}^{T_2} f_i(t)f_j(t)dt, \quad (5)$$

это корреляционные матрицы для множества функций $\{f_i(t)\}_{i=1}^{\nu_{\max}}$, причём, в общем случае, $K_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$.

Теперь можно записать алгоритм оценки числа сигналов в (1):

$$\hat{\nu} = \arg \sup_{\nu} L(\nu, \mathbf{a}_{0\nu}), \quad \nu = \overline{1, \nu_{\max}}. \quad (6)$$

Рассмотрим свойства логарифма ФОР (4). Для этого подставим в логарифм ФОР (4) реализацию наблюдаемых данных (2):

$$L(\nu) = \sum_{j=1}^{\nu} z_j \sum_{i=1}^{\nu_0} z_i \rho_{ij} + \sum_{j=1}^{\nu} z_j \xi_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} z_i z_j \rho_{ij}. \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения: $L(\nu, \mathbf{a}_{0\nu}) = L(\nu)$; $z_i = a_{0i} \sqrt{\frac{2K_{ii}}{N_0}}$; $\xi_i = \sqrt{\frac{2}{N_0 K_{ii}}} \int_{T_1}^{T_2} n(t)f_i(t)dt$;

$\rho_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sqrt{K_{ii}K_{jj}}}$; $\mathbf{p}_\nu = \|\rho_{ij}\|_{i=1, j=1}^{\nu}$; z_i^2 – отношение сигнал/шум (ОСШ) для i -го сигнала.

Используя (7), нетрудно получить вспомогательные соотношения:

$$\begin{aligned} L(\nu_0) - L(\nu_0 + m) &= - \sum_{i=\nu_0+1}^{\nu_0+m} z_i \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=\nu_0+1}^{\nu_0+m} \sum_{j=\nu_0+1}^{\nu_0+m} z_i z_j \rho_{ij}, \\ L(\nu_0) - L(\nu_0 - m) &= \sum_{i=\nu_0-m+1}^{\nu_0} z_i \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=\nu_0-m+1}^{\nu_0} \sum_{j=\nu_0-m+1}^{\nu_0} z_i z_j \rho_{ij}. \end{aligned} \quad (8)$$

Представим (7) в виде суммы сигнальной и шумовой составляющих

$$L(\nu) = S(\nu) + N(\nu),$$

где

$$S(\nu) = \langle L(\nu) \rangle = \sum_{j=1}^{\nu} z_j \sum_{i=1}^{\nu_0} z_i \rho_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} z_i z_j \rho_{ij}; \quad N(\nu) = L(\nu) - \langle L(\nu) \rangle. \quad (9)$$

Из (9) и (8) имеем

$$S(\nu_0) - S(\nu_0 + m) = \frac{1}{2} \sum_{i=\nu_0+1}^{\nu_0+m} \sum_{j=\nu_0+1}^{\nu_0+m} z_i z_j \rho_{ij}, \quad S(\nu_0) - S(\nu_0 - m) = \frac{1}{2} \sum_{i=\nu_0-m+1}^{\nu_0} \sum_{j=\nu_0-m+1}^{\nu_0} z_i z_j \rho_{ij}.$$

Учитывая неотрицательную определённую матрицу ρ_v , можно заключить, что $\arg \sup_v S(v) = v_0$.

Таким образом, оценка, вырабатываемая алгоритмом (6) оказывается состоятельной [8].

Эффективность алгоритма оценки числа сигналов можно характеризовать величиной полной вероятности ошибки $p_e = p(\hat{v} \neq v_0)$. Однако расчёт этой вероятности требует существенных вычислительных ресурсов. Для получения упрощённой приближённой формулы заметим, что любой алгоритм $\mathfrak{R}$ оценки числа сигналов можно представить в виде

$$\hat{v} = \arg \sup_v R(v; x(t)),$$

где $R(v, x(t))$ – функционал, определяемый структурой алгоритма $\mathfrak{R}$ и зависящий от числа сигналов и реализации наблюдаемых данных.

С помощью данного представления можно записать полную вероятность ошибки для алгоритма $\mathfrak{R}$:

$$p_e = 1 - p(R(v_0; x(t)) > R(i; x(t)), i \neq v_0, i = \overline{1, v_{\max}}).$$

Теперь, в качестве приближения к полной вероятности ошибки введём в рассмотрение укороченную вероятность ошибки алгоритма $\mathfrak{R}$, определяемую как

$$p_t = 1 - p(R(v_0; x(t)) > R(v_0 + 1; x(t)), R(v_0; x(t)) > R(v_0 - 1; x(t))). \quad (10)$$

Из (10) следует, что укороченная вероятность ошибки является нижней границей для полной вероятности ошибки, т.е. $p_e \geq p_t$.

Применительно к алгоритму (6) формулу (10) можно переписать так:

$$p_{t0} = 1 - p(L(v_0) > L(v_0 + 1), L(v_0) > L(v_0 - 1)). \quad (11)$$

Из (8) и (11) для алгоритма (6) получим

$$p_{t0} = 1 - p(\xi_{v_0} > -z_{v_0}/2, \xi_{v_0+1} < z_{v_0+1}/2). \quad (12)$$

Учитывая, что ξ_{v_0} и ξ_{v_0+1} – гауссовские случайные величины с параметрами (0,1), а также обозначая коэффициент корреляции между этими случайными величинами $\rho_{v_0, (v_0+1)} = \langle \xi_{v_0} \xi_{v_0+1} \rangle$, запишем формулу для вычисления укороченной вероятности ошибки алгоритма (6):

$$p_{t0} = 1 - \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{v_0, v_0+1}^2}} \int_{-\infty}^{\frac{z_{v_0+1}}{2}} \int_{\frac{z_{v_0}}{2}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_{v_0, v_0+1}^2)}(x^2 - 2xy\rho_{v_0, v_0+1} + y^2)\right) dx dy. \quad (13)$$

Проводя замену переменных, перепишем (13):

$$p_{t0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{z_{v_0+1}}{2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{z_{v_0}/2 + \rho_{v_0, v_0+1}y}{\sqrt{1-\rho_{v_0, v_0+1}^2}}\right) dy, \quad (14)$$

здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ – интеграл вероятности.

Для расчётов по формуле (14) необходимо применять численные методы. Однако, если ОСШ z_{v_0+1} и z_{v_0} не слишком малы, то, используя (14), можно получить приближённую формулу для вычисления укороченной вероятности ошибки

$$p_{at0} = 1 - \Phi\left(\frac{z_{v_0+1}}{2}\right) + \frac{2(1-\rho_{v_0,v_0+1}^2)}{z_{v_0}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z_{v_0}^2}{8}\right) \Phi\left(\frac{z_{v_0+1} + \rho_{v_0,v_0+1}z_{v_0}}{2\sqrt{1-\rho_{v_0,v_0+1}^2}}\right). \quad (15)$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением $\min(z_{v_0+1}, z_{v_0})$.

Рассмотрим частный случай, когда сигналы в (1) ортогональны. При этом $\rho_{v_0,v_0+1} = 0$, а укороченная вероятность ошибки (13) запишется как

$$p_{t0} = 1 - \Phi(z_{v_0}/2) \Phi(z_{v_0+1}/2). \quad (16)$$

Если положить $z_{v_0+1}^2 = z_{v_0}^2 = z^2$, то при достаточно большом значении величины z^2 вместо (16) можно пользоваться следующей асимптотической формулой:

$$p_{t0} = \frac{2}{z} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{8}\right). \quad (17)$$

Исследуем ситуацию, когда $\rho_{v_0,v_0+1} \rightarrow 1$. Тогда формула (14) переписывается в виде

$$p_{t0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_{v_0}/2}^{z_{v_0+1}/2} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = 2 - \Phi\left(\frac{z_{v_0+1}}{2}\right) - \Phi\left(\frac{z_{v_0}}{2}\right). \quad (18)$$

Если снова положить $z_{v_0+1}^2 = z_{v_0}^2 = z^2$ и считать, что значение z^2 достаточно велико, то для (18) получим асимптотическое выражение, совпадающее с (17). Следовательно, при достаточно больших значениях ОСШ z^2 укороченные вероятности ошибки для случаев

$\rho_{v_0,v_0+1} \rightarrow 0$ и $\rho_{v_0,v_0+1} \rightarrow 1$ совпадают. Последний результат объясняется тем, что в случае, когда амплитуды сигналов известны и ОСШ достаточно велико, ситуации наличия разного числа сигналов (даже одинаковых по форме) будут существенно отличаться с энергетической точки зрения.

Для проверки работоспособности алгоритма (6) и установления границ применимости формулы (14) было проведено статистическое моделирование алгоритма оценки числа сигналов (6). В целях большей наглядности результатов моделирования в дальнейшем полагалось, что все амплитуды и энергии сигналов в (1) равны, при этом для всех сигналов в (1) $z^2 = z_i^2$, $i \in \overline{1, v_{\max}}$. Результаты моделирования показаны на рис. 1.

На рис. 1 построены теоретические зависимости укороченной вероятности ошибки (14) от ОСШ при $z_{v_0} = z_{v_0+1} = z$ и различных значениях ρ_{v_0,v_0+1} : жирной сплошной линией для $\rho_{v_0,v_0+1} = 0$, сплошной линией для $\rho_{v_0,v_0+1} = 0,1$, пунктирной линией для $\rho_{v_0,v_0+1} = 0,5$, штриховой линией для случая $\rho_{v_0,v_0+1} = 0,9$. Кроме этого, на рис. 1 кружками нанесена зависимость вероятности ошибки определения значения v алгоритмом (6) от ОСШ, полученная при помощи статистического моделирования в случае, когда $v_0 = 2$, $v_{\max} = 3$, $\rho_{v_0,v_0+1} = 0,9$. Квадратами на рис. 1 нанесена зависимость вероятности ошибки определения значения v алгоритмом (6) от ОСШ, полученная при помощи статистического моделирования для $v_0 = 11$, $v_{\max} = 21$, $\rho_{v_0,v_0+1} = 0,9$.

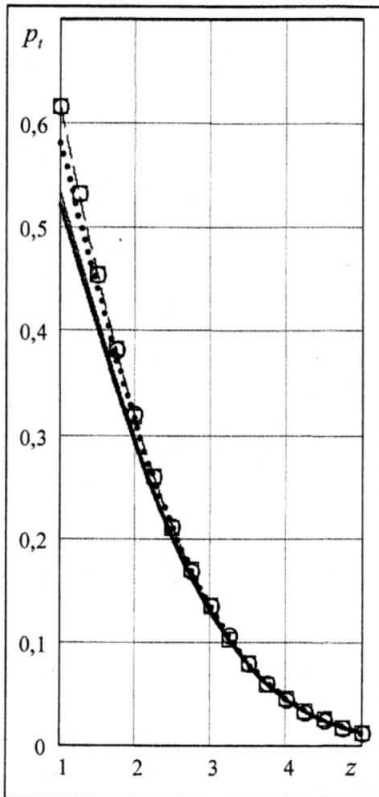


Рис. 1. Графики вероятности ошибки при известных амплитудах

По результатам вычислений, часть которых отражена на рис. 1 можно заключить, что при ОСШ ($z > 3$), формулу (14) можно использовать для расчета полной вероятности ошибки алгоритма (6). Кроме того, при ОСШ ($z > 3$) и любых значениях $\rho < 0,999$ для расчёта укороченной вероятности ошибки вместо формулы (14) можно использовать формулу (16).

При ОСШ ($z < 3$) неортогональность сигналов незначительно сказывается на качестве функционирования алгоритма (6), например при $z = 1,5$ увеличение коэффициента корреляции сигналов от 0 до 0,9 приводит к увеличению укороченной вероятности ошибки от 0,4 до 0,45.

При ОСШ ($z > 3$) неортогональность сигналов не влияет на качество функционирования алгоритма (6).

Рассмотрим ситуацию, когда амплитуды сигналов априори не известны. Найдем вначале оценку максимального правдоподобия компонент вектора амплитуд для произвольного значения параметра ν . Для этого перепишем полученное выражение для логарифма ФОП (4) в векторно-матричной форме:

$$L(\nu, \mathbf{a}_\nu) = \frac{2}{N_0} \mathbf{a}_\nu^+ \mathbf{X}_\nu - \frac{1}{N_0} \mathbf{a}_\nu^+ \mathbf{K}_\nu \mathbf{a}_\nu. \quad (19)$$

Здесь

$$\mathbf{X}_\nu = \|\mathbf{X}_i\|_{i=1}^\nu, \quad \mathbf{X}_i = \int_{T_1}^{T_2} x(t) f_i(t) dt. \quad (20)$$

Используя (19), вычислим оценку максимального правдоподобия вектора амплитуд:

$$\hat{\mathbf{a}}_\nu = \mathbf{K}_\nu^{-1} \mathbf{X}_\nu.$$

Подставляя $\hat{\mathbf{a}}_\nu$ в (19), получим выражение для максимизированного по амплитудам логарифма ФОП:

$$L_m(\nu) = \frac{1}{N_0} \mathbf{X}_\nu^+ \mathbf{K}_\nu^{-1} \mathbf{X}_\nu. \quad (21)$$

В итоге алгоритм максимально правдоподобной оценки числа сигналов запишется как

$$\hat{\nu} = \arg \sup_{\nu} L_m(\nu), \quad \nu = \overline{1, \nu_{\max}}. \quad (22)$$

Далее будет показано, что функция (21) не убывает с ростом ν , поэтому непосредственное применение метода максимального правдоподобия для оценки числа неортогональных сигналов с неизвестными амплитудами невозможно. Следовательно вместо алгоритма максимального правдоподобия (22) будем пользоваться его модификациями.

Рассмотрим следующие алгоритмы.

Алгоритм с линейной штрафной функцией:

$$L_D(\nu; \mathbf{X}, \kappa) = L_m(\nu) - \kappa \nu, \quad \kappa > 0, \\ \hat{\nu} = \arg \sup_{\nu} L_D(\nu; \mathbf{X}, \kappa), \quad \nu = \overline{1, \nu_{\max}}. \quad (23)$$

Частным случаем алгоритма (23) при $\kappa = 2$ является алгоритм оценки числа сигналов по критерию AIC [7].

Алгоритм со случайной штрафной функцией [2]:

$$L_{D1}(\nu; \mathbf{X}, \kappa_1) = L_m(\nu) - \kappa_1 \nu \max_{i \in \overline{1, \nu_{\max}}} \frac{X_i^2}{N_0 K_{ii}}, \quad \kappa_1 > 0, \\ \hat{\nu} = \arg \sup_{\nu} L_{D1}(\nu; \mathbf{X}, \kappa_1), \quad \nu = \overline{1, \nu_{\max}}. \quad (24)$$

Алгоритм с инвариантной случайной штрафной функцией (предложенный авторами):

$$L_{D2}(\nu; \mathbf{X}_\nu, \kappa_2) = L_m(\nu) - \kappa_2 \nu \max_{i \in \overline{1, \nu_{\max}}} (L_m(i) - L_m(i-1)), \quad \kappa_2 > 0,$$

$$\hat{\nu} = \arg \sup_{\nu} L_{D2}(\nu), \quad \nu = \overline{1, \nu_{\max}}. \quad (25)$$

В случае, когда сигналы ортогональны, алгоритм (25) сводится к алгоритму со случайной штрафной функцией (24).

Алгоритм с обратной штрафной функцией (предложенный авторами):

$$L_B(\nu; \mathbf{X}_\nu, n) = \frac{L_m^n(\nu)}{\nu}, \quad n > 1,$$

$$\hat{\nu} = \arg \sup_{\nu} L_B(\nu; \mathbf{X}, n), \quad \nu = \overline{1, \nu_{\max}}. \quad (26)$$

Отметим, что все приведённые выше алгоритмы зависят от некоторых параметров: κ , κ_1 , κ_2 , n , которым необходимо придать конкретные значения при использовании алгоритмов. В дальнейшем, при анализе алгоритмов (23)–(26), будут найдены их укороченные вероятности ошибки (аналитически и с помощью статистического моделирования). Исследование укороченных вероятностей ошибок, как функций κ , κ_1 , κ_2 , n , позволяет определить оптимальные значения этих параметров в смысле минимума укороченной вероятности ошибки. Однако ясно, что алгоритм (26) будет состоятелен при любых значениях параметра $n > 1$, в то же время алгоритмы (23)–(25) могут оказаться не состоятельными при определённых значениях κ , κ_1 и κ_2 соответственно.

Для анализа алгоритмов (23)–(26) в терминах укороченной вероятности ошибки исследуем выражение (21). С этой целью представим логарифм ФОП (21) в виде

$$L_m(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} l_i^2, \quad (27)$$

где $\nu = \overline{1, \nu_{\max}}$, $\{l_i\}_{i=1}^{\nu_{\max}}$ – случайные величины:

$$l_i^2 = \begin{cases} 2L_m(1), & \text{если } i = 1, \\ 2(L_m(i) - L_m(i-1)), & \text{если } i \geq 2. \end{cases}$$

Из (27) следует, что функция (21) не убывает с ростом ν .

В целях дальнейшего исследования свойств случайных величин $\{l_i\}_{i=1}^{\nu_{\max}}$, сформулируем и докажем следующее утверждение. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^N$ множество случайных величин с конечными вторыми моментами. Введём в рассмотрение векторы $\mathbf{A}_n = (A_i)_{i=1}^n$ и матрицы $\mathbf{C}_n = (C_{ij})_{i,j=1}^n$, где $C_{ij} = \text{cov}(A_i, A_j)$, $n \in \overline{1, N}$. Кроме этого, определим случайную функцию $D(n)$ натурального переменного n и случайные величины $\{B_i\}_{i=1}^N$ следующим образом:

$$D(n) = \mathbf{A}_n^+ \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{A}_n; \quad (28)$$

$$B_i^2 = \begin{cases} D(1), & \text{если } i = 1, \\ D(i) - D(i-1), & \text{если } i \geq 2. \end{cases} \quad (29)$$

Утверждение 1. Случайные величины $\{B_i\}_{i=1}^N$, удовлетворяющие выражению (28), попарно некоррелированы и имеют единичную дисперсию.

Доказательство. При $n=1$ случайная величина B_1 определяется выражением: $B_1^2 = A_1^2 / C_{11}$. Рассмотрим подробнее случай $n > 1$. Используя вектор $\mathbf{g}_n = (C_{in})_{i=1}^{n-1}$ и блочно-матричные обозначения, перепишем (28) в виде

$$D(n) - D(n-1) = \mathbf{A}_n^+ \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{A}_{n-1} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{n-1} & \mathbf{g}_n \\ \mathbf{g}_n^+ & C_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix} - \mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{A}_{n-1} \right]. \quad (30)$$

Применив формулу Фробениуса [9], проведём обращение блочной матрицы в (30):

$$D(n) - D(n-1) = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{n-1}^{-1} + \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n H^{-1} \mathbf{g}_n^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} & -\mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n H^{-1} \\ -H^{-1} \mathbf{g}_n^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix} - \mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{A}_{n-1} \right], \quad (31)$$

здесь $H = C_{nn} - \mathbf{g}_n^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n$ дополнение Шура.

В [9] показано, что если матрицы $\mathbf{C}_n$ и $\mathbf{C}_{n-1}$ невырождены, то $H \neq 0$, кроме того $H^{-1} > 0$, если $\mathbf{C}_{n-1}$ положительно определена [10]. Далее, выполняя тождественные преобразования в (31), получим

$$D(n) - D(n-1) = (A_n - \mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n)^2 / H. \quad (32)$$

Тогда случайные величины $\{B_i\}_{i=1}^N$, удовлетворяющие (32), запишутся в виде

$$B_n = \gamma_n (A_n - \mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n) / \sqrt{H} \quad (\text{при } n > 1), \quad B_1 = \gamma_1 A_1 / \sqrt{C_{11}}, \quad (33)$$

где $\forall n \in \{i\}_{i=1}^N: \gamma_n \in \{-1, 1\}$ – произвольный множитель.

Пусть $\beta, \alpha \in \{i\}_{i=1}^N$, положим для определенности $\beta > \alpha$. Покажем, что ковариация случайных величин B_α и B_β равна нулю.

Вначале, рассмотрим случай, когда $\beta, \alpha > 1$

$$\begin{aligned} \text{cov}(A_\alpha - \mathbf{A}_{\alpha-1}^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_\alpha, A_\beta - \mathbf{A}_{\beta-1}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta) &= \\ &= \text{cov}(\mathbf{A}_{\alpha-1}^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_\alpha, \mathbf{A}_{\beta-1}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta) - \text{cov}(A_\alpha, \mathbf{A}_{\beta-1}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta) - \text{cov}(\mathbf{A}_{\alpha-1}^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_\alpha, A_\beta) + \text{cov}(A_\alpha, A_\beta) = \\ &= \text{cov}(\mathbf{g}_{\alpha; \beta-1}^+ \mathbf{C}_{\alpha-1; \beta-1}^{-1} \mathbf{A}_{\beta-1}, \mathbf{g}_\beta^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{A}_{\beta-1}) - \mathbf{g}_{\alpha; \beta-1}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta - \mathbf{g}_\alpha^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_{\beta; \alpha-1} + C_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (34)$$

В (34) учтено, что $\text{cov}(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_n) = \mathbf{C}_n$ и введены следующие обозначения

$$\mathbf{g}_\alpha = (C_{i\alpha})_{i=1}^{\alpha-1}, \quad \mathbf{g}_{\alpha; \beta-1} = (C_{\alpha i})_{i=1}^{\beta-1}, \quad \mathbf{g}_\beta = (C_{i\beta})_{i=1}^{\beta-1}, \quad \mathbf{g}_{\beta; \alpha-1} = (C_{i\beta})_{i=1}^{\alpha-1}, \quad \mathbf{C}_{\alpha-1; \beta-1}^{-1} = (V_{ij})_{i=1}^{\beta-1} j=1, \quad (35)$$

где $V_{ij} = \begin{cases} (\mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1})_{ij}, & \text{если } i \leq \alpha-1, j \leq \alpha-1; \\ 0, & \text{если } \alpha-1 < i \leq \beta-1, \alpha-1 < j \leq \beta-1. \end{cases}$

Известно, что для любых детерминированных векторов $\mathbf{Q}, \mathbf{U}$ и случайного вектора $\mathbf{Y}$ с корреляционной матрицей $\mathbf{R}$ справедливо соотношение $\text{cov}(\mathbf{Q}^+ \mathbf{Y}, \mathbf{U}^+ \mathbf{Y}) = \mathbf{Q}^+ \mathbf{R} \mathbf{U}$. Вычисляя (34) с помощью этого соотношения и обозначений (35) получим

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{g}_{\alpha; \beta-1}^+ \mathbf{C}_{\alpha-1; \beta-1}^{-1} \mathbf{A}_{\beta-1}, \mathbf{g}_\beta^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{A}_{\beta-1}) - \mathbf{g}_{\alpha; \beta-1}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta - \mathbf{g}_\alpha^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_{\beta; \alpha-1} + C_{\alpha\beta} &= \\ = \mathbf{g}_\alpha^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_{\beta; \alpha-1} - \mathbf{g}_\alpha^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_{\beta; \alpha-1} - \mathbf{g}_{\alpha; \beta-1}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta + C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} - \mathbf{g}_{\alpha; \beta-1}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta = C_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha = 1$ и вычислим ковариацию для случайных величин B_1 и B_β

$$\text{cov}(A_1 / \sqrt{C_{11}}, A_\beta - \mathbf{A}_{\beta-1}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta) = C_{1\beta} - \mathbf{g}_{1; \beta-1}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta = 0. \quad (37)$$

Из (36) и (37) следует, что случайные величины B_α и B_β некоррелированы для любых $\beta \neq \alpha$. Таким образом, случайные величины $\{B_i\}_{i=1}^N$, удовлетворяющие выражению (28), попарно некоррелированы.

Для дальнейшего доказательства Утверждения 1 вычислим дисперсию случайных величин из множества $\{B_n\}_{n=1}^N$, очевидно, что $D(B_1) = 1$, при $n > 1$ имеем

$$D\left(\gamma_n \left(A_n - \mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n\right) / \sqrt{H}\right) = \left(D\left(\mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n\right) + D(A_n) - 2 \operatorname{cov}\left(\mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n, A_n\right)\right) / \sqrt{H} = 1. \quad (38)$$

Таким образом, случайные величины из множества $\{B_n\}_{n=1}^N$ обладают единичной дисперсией. Доказательство Утверждения 1 завершено.

Следствие Утверждения 1. Будем интерпретировать случайные величины $\{A_i\}_{i=1}^N$ как векторы в линейном векторном пространстве, а ковариацию как скалярное произведение векторов в этом пространстве. Тогда векторы $\{B_i\}_{i=1}^N$ (33) задают процедуру ортогонализации, аналогичную процедуре Грамма–Шмидта.

Утверждение 2. Величины $\{l_i\}_{i=1}^{V_{\max}}$ – гауссовские, независимы в совокупности, имеют единичную дисперсию и математическое ожидание случайных величин из множества $\{l_i\}_{i=v_0+1}^{V_{\max}}$ равно нулю.

Доказательство. Используя Утверждение 1, можно записать $\{l_i\}_{i=1}^{V_{\max}}$ как

$$l_v = \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{X_v - \mathbf{X}_{v-1}^+ \mathbf{K}_{v-1}^{-1} \mathbf{g}_v}{\sqrt{K_{vv} - \mathbf{g}_v^+ \mathbf{K}_{v-1}^{-1} \mathbf{g}_v}}, \quad l_1 = \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{X_1}{\sqrt{K_{11}}}. \quad (39)$$

Из (39) следует, что $\{l_i\}_{i=1}^{V_{\max}}$ распределены по закону Гаусса, так как каждая из величин в $\{l_i\}_{i=1}^{V_{\max}}$ является линейной комбинацией гауссовских случайных величин $\{X_i\}_{i=1}^{V_{\max}}$. Снова используя Утверждение 1, получим, что величины $\{l_i\}_{i=1}^{V_{\max}}$ независимы в совокупности, имеют единичную дисперсию. Теперь докажем, что математическое ожидание случайных величин из множества $\{l_i\}_{i=v_0+1}^{V_{\max}}$ равно нулю. Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{a}'_{v_0}$, элементы которого задаются выражением $(\mathbf{a}'_{v_0})_i = \begin{cases} a_{0i} & \text{если } i \leq v_0, \\ 0 & \text{если } v-1 > i > v_0. \end{cases}$ Используя вектор $\mathbf{a}'_{v_0}$, проводим следующие тождественные преобразования:

$$\begin{aligned} \left\langle \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{\mathbf{X}_{v-1}^+ \mathbf{K}_{v-1}^{-1} \mathbf{g}_v - X_v}{\sqrt{K_{vv} - \mathbf{g}_v^+ \mathbf{K}_{v-1}^{-1} \mathbf{g}_v}} \right\rangle &= \frac{\sqrt{2/N_0}}{\sqrt{K_{vv} - \mathbf{g}_v^+ \mathbf{K}_{v-1}^{-1} \mathbf{g}_v}} \left(\langle \mathbf{X}_{v-1}^+ \mathbf{K}_{v-1}^{-1} \mathbf{g}_v \rangle - \langle X_v \rangle \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2/N_0}}{\sqrt{K_{vv} - \mathbf{g}_v^+ \mathbf{K}_{v-1}^{-1} \mathbf{g}_v}} \left(\sqrt{\frac{2}{N_0}} \mathbf{a}'_{v_0}{}^+ \mathbf{K}_{v-1} \mathbf{K}_{v-1}^{-1} \mathbf{g}_v - \sqrt{\frac{2}{N_0}} \sum_{i=1}^{v_0} a_{0i} K_{iv} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2/N_0}}{\sqrt{K_{vv} - \mathbf{g}_v^+ \mathbf{K}_{v-1}^{-1} \mathbf{g}_v}} \left(\sqrt{\frac{2}{N_0}} \sum_{i=1}^{v_0} a_{0i} K_{iv} - \sqrt{\frac{2}{N_0}} \sum_{i=1}^{v_0} a_{0i} K_{iv} \right) = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

таким образом математическое ожидание случайных величин $\{l_i\}_{i=v_0+1}^{V_{\max}}$ равно нулю.

Доказательство Утверждения 2 завершено.

Проведём анализ алгоритмов (23)–(26) в терминах укороченной вероятности ошибки. Для этого подставим в выражение для максимизированного модифицированного логарифма ФОП (21) явный вид реализации принимаемых данных (2). Исходя из (27) и Утверждения 1, выражение для максимизированного логарифма ФОП (21) можно переписать как

$$L_m(\nu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu_0} (d_i + \xi_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=\nu_0+1}^{\nu} \xi_i^2, & \text{если } \nu > \nu_0, \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} (d_i + \xi_i)^2, & \text{если } \nu \leq \nu_0, \end{cases} \quad (41)$$

где d_i – математическое ожидание случайной величины l_i ; $(\xi_i)_{i=1}^{\nu_{\max}}$ – независимые в совокупности гауссовские случайные величины с параметрами $(0,1)$.

С помощью (41) модифицированный максимизированный логарифм ФОП с линейной штрафной функцией (23) можно переписать в виде

$$L_D(\nu; \kappa, \mathbf{d}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu_0} (d_i + \xi_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=\nu_0+1}^{\nu} \xi_i^2 - \kappa \nu, & \text{если } \nu > \nu_0, \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} (d_i + \xi_i)^2 - \kappa \nu, & \text{если } \nu \leq \nu_0. \end{cases} \quad (42)$$

Теперь, используя (42), можно вычислить укороченную вероятность ошибки (10) для алгоритма с линейной штрафной функцией (23):

$$p_{11}(\kappa, d_{\nu_0}) = 1 - [2 - \Phi(\sqrt{2\kappa} - d_{\nu_0}) - \Phi(\sqrt{2\kappa} + d_{\nu_0})][2\Phi(\sqrt{2\kappa}) - 1]. \quad (43)$$

При неограниченном увеличении d_{ν_0} из (43) имеем

$$p_{11} \rightarrow 2[1 - \Phi(\sqrt{2\kappa})], \quad (44)$$

т.е. укороченная вероятность ошибки стремится к постоянной величине.

Предельное значение вероятности ошибки (44) можно использовать для приближенного выбора значения κ в (23). Действительно, можно рекомендовать выбор κ по значению допустимой вероятности ошибки p_{11} .

Как уже было отмечено выше, укороченная вероятность ошибки является нижней границей полной вероятности ошибки. Поэтому из (44) следует, что с ростом ОСШ, полная вероятность ошибки не стремится к нулю. Это является серьёзным недостатком алгоритма (23).

Теперь проанализируем алгоритм с инвариантной случайной штрафной функцией (25). Для этого снова воспользуемся формулой (41), чтобы представить модифицированный максимизированный логарифм ФОП с инвариантной случайной штрафной функцией (25) в виде

$$L_{D1}(\nu; \kappa_1, \mathbf{d}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu_0} (d_i + \xi_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=\nu_0+1}^{\nu} \xi_i^2 - \kappa_1 \nu \max_{i \in 1, \nu_{\max}} Q_i, & \text{если } \nu > \nu_0, \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} (d_i + \xi_i)^2 - \kappa_1 \nu \max_{i \in 1, \nu_{\max}} Q_i, & \text{если } \nu \leq \nu_0, \end{cases} \quad (45)$$

где $Q_i = \begin{cases} (d_i + \xi_i)^2 / 2, & \text{если } i \leq \nu_0, \\ \xi_i^2 / 2, & \text{если } i > \nu_0, \end{cases}$ и ξ_i – независимые в совокупности гауссовские случайные величины с параметрами $(0,1)$.

Вычислим укороченную вероятность ошибки (10):

$$p_{i2}(d_{v_0}, \kappa_1) = 1 - p((d_{v_0} + \xi_{v_0})^2 > 2\kappa_1 \max_{i \in 1, v_{\max}} Q_i, \xi_{v_0+1}^2 < 2\kappa_1 \max_{i \in 1, v_{\max}} Q_i). \quad (46)$$

Для дальнейшего вычисления p_{i2} сформулируем вспомогательное утверждение.

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^M$ попарно независимые случайные величины, $k = \overline{1, M}$, $h \in [0, 1]$,

$B = \max_{\substack{i \in 1, M, \\ i \neq k, i \neq k+1}} A_i$, тогда

$$\begin{aligned} p(A_k > h \max_{i \in 1, M} A_i, A_{k+1} < h \max_{i \in 1, M} A_i) &= p(A_k > hA_{k+1}, A_k > hB) - \\ &- p(A_k > A_{k+1}, A_{k+1} > hA_k, A_{k+1} > hB) - p(A_{k+1} > A_k, A_k > hA_{k+1}, A_k > hB) \end{aligned} \quad (47)$$

Используя (46) и (47) можно записать окончательную формулу для укороченной вероятности ошибки алгоритма с инвариантной штрафной функцией

$$\begin{aligned} p_{i2} &= 1 - \int_0^\infty W_{Q_{v_0}}(x) F_{Q_{v_0+1}}\left(\frac{x}{\kappa_1}\right) F_{Q_{\max}}\left(\frac{x}{\kappa_1}\right) dx + \int_0^\infty W_{Q_{v_0+1}}(x) F_{Q_{\max}}\left(\frac{x}{\kappa_1}\right) \left(F_{Q_{v_0}}\left(\frac{x}{\kappa_1}\right) - F_{Q_{v_0}}(x)\right) dx + \\ &+ \int_0^\infty W_{Q_{v_0}}(x) F_{Q_{\max}}\left(\frac{x}{\kappa_1}\right) \left(F_{Q_{v_0+1}}\left(\frac{x}{\kappa_1}\right) - F_{Q_{v_0+1}}(x)\right) dx. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь $W_{Q_i}(x)$, $F_{Q_i}(x)$, $W_{Q_{\max}}(x)$, $F_{Q_{\max}}(x)$ – плотности вероятности и функции распределения, указанных в индексах случайных величин Q_i , $Q_{\max} = \max_{\substack{i \in 1, v_{\max}, \\ i \neq v_0, i \neq v_0+1}} Q_i$.

Функция распределения

$$F_{Q_{\max}}(x) = \prod_{\substack{i=1, i \neq v_0 \\ i \neq v_0+1}}^{v_{\max}} F_{Q_i}(x).$$

При $i \leq v_0$, $W_{Q_i}(x)$, $F_{Q_i}(x)$ это функция плотности вероятности и функция распределения нецентрального хи-квадрат распределения с одной степенью свободы и параметром нецентральности d_i^2 [11], а при $i > v_0$, $W_{Q_i}(x)$ и $F_{Q_i}(x)$ являются соответственно функцией плотности вероятности и функцией распределения центрального хи-квадрат распределения с одной степенью свободы [11].

Применяя формулу (41), перепишем модифицированный максимизированный логарифм ФОП с обратной штрафной функцией (26) в виде

$$L_B(v; n, \mathbf{d}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{v_0} (d_i + \xi_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=v_0+1}^v \xi_i^2 \right)^n / v, & \text{если } v > v_0, \\ \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^v (d_i + \xi_i)^2 \right)^n / v, & \text{если } v \leq v_0, \end{cases} \quad (49)$$

где ξ_i – независимые в совокупности гауссовские случайные величины с параметрами (0,1). Используя выражение (49) можно вычислить укороченную вероятность ошибки (10) для алгоритма с обратной штрафной функцией:

$$p_{i3} = 1 - \int_0^\infty W_+(y) \int_0^\infty W_-(x) \left[F_0\left(\frac{x}{A}, v_0 - 1, \lambda\right) - F_0\left(\frac{y}{B} - x, v_0 - 1, \lambda\right) \right] dx dy. \quad (50)$$

Здесь $B = \sqrt{\frac{\nu_0 + 1}{\nu_0}} - 1$, $A = \sqrt{\frac{\nu_0}{\nu_0 - 1}} - 1$, $F_0(y, \nu_0 - 1, \lambda) = 1 - \int_y^\infty x \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \right)^{\frac{\nu_0 - 3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2 + \lambda}{2}\right) I_{\frac{\nu_0 - 3}{2}}(\sqrt{\lambda}x) dx$, $I_m(x)$ –

функция Бесселя мнимого аргумента и порядка m [11], $\lambda = \sum_{i=1}^{\nu_0-1} d_i^2$, $W_+(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\frac{y}{2})}{\sqrt{y}}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0; \end{cases}$

$$W_-(y) = \begin{cases} \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\sqrt{y} - d_{\nu_0})^2)}{\sqrt{8\pi y}} + \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\sqrt{y} + d_{\nu_0})^2)}{\sqrt{8\pi y}}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

Из приведенных расчётов видно, что вероятности ошибок исследуемых алгоритмов зависят от величин из множества $\{d_\nu\}_{\nu=1}^{\nu_0}$. С помощью вектора $\mathbf{r} = \left(\sum_{i=\nu}^{\nu_0} a_{0i} K_{ij} \right)_{j=1}^{\nu-1}$ математическое ожидание d_ν случайной величины l_ν из множества $\{l_i\}_{i=1}^{\nu_0}$ может быть записано в виде

$$d_\nu = \left\langle \sqrt{\frac{2}{N_0}} \frac{\mathbf{X}_{\nu-1}^+ \mathbf{K}_{\nu-1}^{-1} \mathbf{g}_\nu - X_\nu}{\sqrt{K_{\nu\nu} - \mathbf{g}_\nu^+ \mathbf{K}_{\nu-1}^{-1} \mathbf{g}_\nu}} \right\rangle = \frac{2/N_0}{\sqrt{K_{\nu\nu} - \mathbf{g}_\nu^+ \mathbf{K}_{\nu-1}^{-1} \mathbf{g}_\nu}} (\mathbf{r}^+ \mathbf{K}_{\nu-1}^{-1} \mathbf{g}_\nu - (\mathbf{r})_\nu). \quad (51)$$

Исследуем зависимость укороченной вероятности ошибки алгоритмов (23)–(26) от ОСШ. С целью большей наглядности результатов вычислений положим амплитуды отдельных сигналов в (1) и диагональные элементы матрицы (5) одинаковыми, так что $\forall i: z_i = a_{0i} \sqrt{2K_{ii}/N_0} = z$ и выразим (51) через ОСШ. Для этого введем новые векторы и матрицы $\mathbf{p}_\nu = (K_{ij}/\sqrt{K_{ii}K_{jj}})_{i=1, j=\nu}^\nu$, $\mathbf{q}_\nu = (K_{i\nu}/\sqrt{K_{ii}K_{\nu\nu}})_{i=1}^{\nu-1}$,

$$\mathbf{b} = \left(\sum_{i=\nu}^{\nu_0} K_{ij} / \sqrt{K_{ii}K_{jj}} \right)_{j=1}^{\nu-1}, \quad \nu \in \overline{1, \nu_{\max}}$$
 и в итоге получим

$$d_\nu = \frac{z}{\sqrt{1 - \mathbf{q}_\nu^+ \mathbf{p}_{\nu-1}^{-1} \mathbf{q}_\nu}} (\mathbf{b}^+ \mathbf{p}_{\nu-1}^{-1} \mathbf{q}_\nu - (\mathbf{b})_\nu),$$

где $(\mathbf{b})_\nu$ – ν -я компонента вектора $\mathbf{b}$.

На рис. 2 приведены результаты вычисления укороченной вероятности ошибки алгоритмов (24)–(26) с использованием формул (48), (50), а также при помощи статистического моделирования. При этом недиагональные элементы матриц из множества $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^{\nu_{\max}}$ были равны 0,1.

На рис. 3 приведены аналогичные результаты для матриц из множества $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^{\nu_{\max}}$, все недиагональные элементы которых равны 0,5.

Параметры алгоритмов выбирались оптимальными, в смысле минимума укороченной вероятности ошибки. При выборе оптимальных значений параметров алгоритма корреляция между сигналами в (1) полагалась равной нулю. В случае, когда слагаемые в (1) ортогональны, имеют место соотношения $d_{\nu_0} = d_{\nu_0-1} = z$. Поэтому, чтобы найти оптимальные в указанном выше смысле параметры алгоритмов, достаточно подставить в (48) и (50) некоторые конкретные значения ОСШ z , а затем найти минимумы

укороченных вероятностей ошибок p_{i2} , p_{i3} , как функций от соответствующего параметра ($p_{i2}(\kappa_1)$ для (48) и $p_{i3}(n)$ для (50)). Оптимальные значения параметров исследуемых алгоритмов при этих условиях равны: $\kappa_1^{\text{opt}} = 0,12$, $n^{\text{opt}} = 10/3$, $\kappa_2^{\text{opt}} = 0,12$. Необходимо отметить, что данная процедура оптимизации имеет смысл, только если оптимальное значение параметра алгоритма слабо зависит от ОСШ.

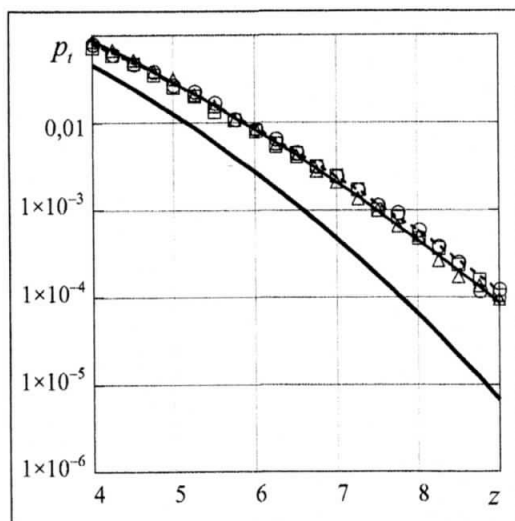


Рис. 2. Графики вероятности ошибки при неизвестных амплитудах (коэффициент корреляции между сигналами равен 0,1)

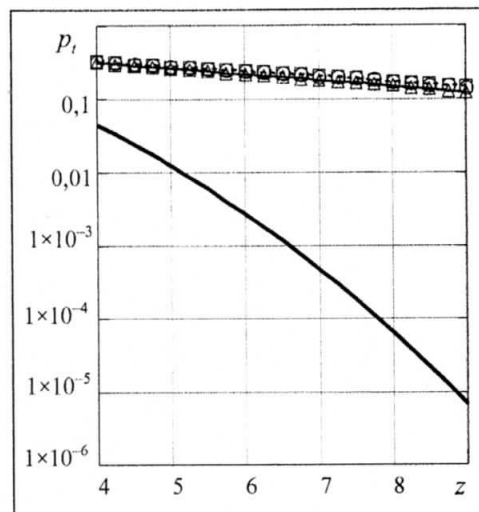


Рис. 3. Графики вероятности ошибки при неизвестных амплитудах (коэффициент корреляции между сигналами равен 0,5)

Оптимальные значения параметров κ_1 и κ_2 в алгоритмах (23) и (24) существенно зависят только от максимально возможного числа сигналов $\nu_{\max}$ (при условии ортогональности сигналов). В то же время оптимальные значения параметра n в (25) практически одинаковы для всех значений ОСШ и $\nu_{\max} \leq 21$. Однако оптимальное значение параметра κ для алгоритма с линейной штрафной функцией (23) существенно зависит от ОСШ, поэтому данный алгоритм не представлен на рис. 2 и 3. Заметим также, что все результаты, показанные на рисунках, получены для ситуации, когда $\nu_0 = 2$, $\nu_{\max} = 3$.

На рис. 2 и 3 жирной сплошной линией показана зависимость вероятности ошибки определения числа сигналов ν с известными амплитудами алгоритмом (6) от ОСШ (формула (14)) для случаев $\rho = 0,1$ (рис. 2); $\rho = 0,5$ (рис. 3); штриховой линией – теоретическая зависимость вероятности ошибки определения значения ν_0 алгоритмом (25) от ОСШ (формула (48)); сплошной линией – теоретическая зависимость вероятности ошибки определения значения ν алгоритмом (26) от ОСШ (формула (50)); квадратами, кружками и треугольниками построены зависимости вероятности ошибки определения значения ν_0 алгоритмами (24), (25) и (26) соответственно от ОСШ, эти зависимости получены с помощью статистического моделирования.

Результаты расчётов по найденным для укороченных вероятностей ошибок формулам удовлетворительно согласуются с данными статистического моделирования алгоритмов оценки числа сигналов. Это позволяет сделать обоснованный выбор алгоритма оценки числа сигналов в зависимости от требований, предъявляемых к эффективности оценки.

При сравнении рис. 2 и 3 видно, что величина коэффициента корреляции между сигналами существенно сказывается на точности оценки их числа. Если обратиться к приведённому выше численному примеру, то при $z = 8$ и $\rho = 0,1$ укороченная вероятность ошибки равна 0,0004, а при $\rho = 0,5$ и том же ОСШ равны 0,148, т.е. возрастает почти в 400 раз. В связи с этим предлагается искать оптимальные, в смысле минимума укороченной вероятности ошибки, параметры исследуемых алгоритмов, учитывая корреляцию между сигналами. Для этого достаточно подставить в (48) и (50) значения d_{ν_0} и d_{ν_0-1} при

любых конкретных значениях вектора ОСШ $\mathbf{z}_{v_{\max}}$, а затем найти минимумы укороченных вероятностей ошибок p_{i2} (48), p_{i3} (50), как функций от соответствующего параметра ($p_{i2}(\kappa_1)$ для (48) и $p_{i3}(n)$ для (50)). Данная процедура была проведена для одного из описанных выше случаев, т.е. полагалось, что $\forall i: z_i = a_{0i} \sqrt{2K_{ii}/N_0} = z$ и все недиагональные элементы матриц из множества $\{p_i\}_{i=1}^{v_{\max}}$ равны 0,5. Далее были вычислены значения d_{v_0} и d_{v_0-1} при ОСШ $z=8$ и $\rho=0,5$, эти значения были подставлены в формулы (48) и (50). После этого были найдены величины $\kappa_1^{\text{opt}} = \arg \inf p_{i2}(\kappa_1)$ и $n^{\text{opt}} = \arg \inf p_{i3}(n)$. Значения величин $\kappa_1^{\text{opt}} = 0,08$ и $n^{\text{opt}} = 7,5$ были приняты в качестве параметров алгоритмов (25) и (26).

На рис. 4 жирной сплошной линией построена зависимость вероятности ошибки определения числа сигналов с известными амплитудами v алгоритмом (6) от ОСШ (формула (14)) для случая $\rho=0,5$; штриховой линией – зависимость вероятности ошибки определения значения v_0 алгоритмом (25) от ОСШ (формула (48)) с параметром $\kappa_1^{\text{ort,opt}}$; пунктирной линией построена зависимость вероятности ошибки определения значения v алгоритмом (26) от ОСШ (формула (50)) с параметром $n^{\text{ort,opt}}$; тонкой сплошной линией – зависимость вероятности ошибки определения значения v алгоритмом (26) от ОСШ (формула (50)) с параметром n^{opt} ; штрих-пунктирной линией – зависимость вероятности ошибки определения значения v алгоритмом (25) от ОСШ (формула (48)) с параметром κ_1^{opt} .

Как следует из рис. 4, оптимизация параметров алгоритмов оценки числа сигналов (25) и (26), с использованием формул для укороченной вероятности ошибки при учёте коррелированности сигналов, позволяет существенно повысить эффективность этих алгоритмов. Например, при ОСШ $z=9$ вероятность ошибки для обоих рассмотренных алгоритмов, при использовании параметров κ_1^{opt} и n^{opt} , уменьшается на два порядка по сравнению с теми же алгоритмами, использующими параметры $\kappa_1^{\text{ort,opt}}$, $n^{\text{ort,opt}}$.

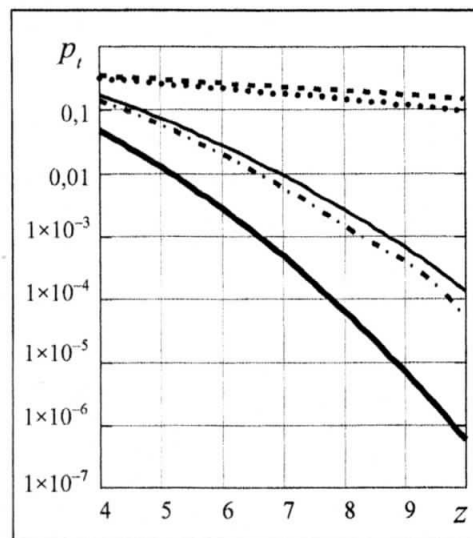


Рис. 4. Графики вероятности ошибки при оптимальных параметрах алгоритмов

Предложенная укороченная вероятность ошибки оценки числа сигналов позволяет количественно охарактеризовать эффективность различных алгоритмов оценки числа сигналов. Полученные результаты анализа нескольких алгоритмов оценки числа сигналов дают возможность сделать обоснованный выбор необходимого алгоритма оценки и оптимизировать его параметры. Показано, что при априори известных амплитудах, взаимная корреляция сигналов практически не влияет на эффективность максимально правдоподобной оценки числа сигналов. Однако при априори неизвестных амплитудах эффективность рассмотренных алгоритмов оценки числа сигналов снижается с ростом взаимной корреляции сигналов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №13-01-97504 и №13-08-00735).

Литература

1. Волков, Л.И., Немировский М.С., Шинаков Ю.С. Системы цифровой радиосвязи. М.: Эко-Трендз. 2005.
2. Манелис В.Б. Алгоритмы слежения и демодуляции сигнала мобильной связи в условиях неразрешаемой многолучевости // Радиотехника. 2007. № 4. С. 16–21.
3. El-Beheri, I.N., Macphie R.H. Maximum likelihood estimation of the number, directions and strengths of point radio sources from variable baseline interferometer data // Antennas and Propagation. IEEE Transactions on. 1978. V. 26. Issue 2. P. 294–301.

4. Трифонов, А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь. 1986.
5. Ратынский М.В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. М.: Радио и связь. 2003.
6. Kundu D. Estimating the number of signals in the presence of white noise // Journal of Statistical Planning and Inference. 2000. V. 90. № 1. P. 57–68.
7. Wax M., Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 1985. V. 33. Issue 2. P. 387–392.
8. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Советское радио. 1978.
9. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука. 1988.
10. Zhang F. The Schur Complement and Its Applications. Springer. 2005.
11. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука. 1979.

Estimating the number of signals with unknown amplitudes

© Authors, 2013

© Radiotekhnika, 2013

A. P. Trifonov – Dr. Sc. (Eng.), Professor, Honoured Scientist of the Russian Federation,
Head of Department of Radiophysics of Voronezh State University

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru, trirad@mail.ru

A. V. Kharin – Post-graduate Student of Department of Radiophysics of Voronezh State University

E-mail: phys.vsu@gmail.com

Algorithms for estimating the number of signals based on the method of maximum likelihood or its modifications were investigated. The quantitative characteristic of the quality the functioning of algorithms for estimating the number of signals was proposed, it is a truncated error probability. It is shown that in the case when the amplitudes of the individual signals are not available, estimate number of signals by maximum likelihood method is inconsistent. A few consistent algorithms for estimating the number of signals based on a modification for the method of maximum likelihood were considered. Analysis of algorithms for estimating the number of signals with known or unknown amplitudes was conducted in terms of the truncated error probability. Statistical modeling of the modified maximum likelihood algorithm was performed. Optimal probability parameters with respect to sense of minimizing the truncated error for the algorithms were found that gave an opportunity to significantly improve their performance.

REFERENCES

1. Volkov, L.I., Nemirovskij M.S., Shinakov Ju.S. Sistemy' cifrovoy radiosvyazi. M.: E'ko-Trendz. 2005.
2. Manelis V.B. Algoritmy' slezheniya i demodulyaczii signala mobil'noj svyazi v usloviyax nerazreshaemoj mnogoluchevosti // Radiotekhnika. 2007. № 4. S. 16–21.
3. El-Behery, I.N., Macphie R.H. Maximum likelihood estimation of the number, directions and strengths of point radio sources from variable baseline interferometer data // Antennas and Propagation. IEEE Transactions on. 1978. V. 26. Issue 2. R. 294–301.
4. Trifonov, A.P., Shinakov Ju.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i ocenka ix parametrov na fone pomex. M.: Radio i svyaz'. 1986.
5. Raty'nskiy M.V. Adaptaczija i sverxrazreshenie v anten'ny'x reshetkax. M.: Radio i svyaz'. 2003.
6. Kundu D. Estimating the number of signals in the presence of white noise // Journal of Statistical Planning and Inference. 2000. V. 90. № 1. R. 57–68.
7. Wax M., Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 1985. V. 33. Issue 2. R. 387–392.
8. Kulikov E.I., Trifonov A.P. Ocenka parametrov signalov na fone pomex. M.: Sovetskoe radio. 1978.
9. Gantmaxer, F.R. Teoriya matricz. M.: Nauka. 1988.
10. Zhang F. The Schur Complement and Its Applications. Springer. 2005.
11. Spravochnik po speczial'ny'm funkczijam / pod red. M. Abramovicza, I. Stigan. M.: Nauka. 1979.