Том 57, № 2 (620)
февраль 2014

ISSN 0021-3470

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

ИЗДАНИЕ НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА УКРАИНЫ «КИЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

УДК 621.391

ОБНАРУЖЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ФОНА*

ТРИФОНОВ А. П., ПРИБЫТКОВ Ю. Н.

Воронежский государственный университет,
Россия, Воронеж, 394006, Университетская пл., д. 1

Аннотация. Рассмотрен случай, когда изображение имеет неизвестные площадь, регулярную составляющую, а также интенсивность случайной составляющей. Синтезирован алгоритм максимального правдоподобия обнаружения стохастического изображения с неизвестными параметрами. Получены характеристики алгоритма и проведен анализ влияния характеристик изображения и аппликативного фона на эффективность обнаружения

Ключевые слова: гауссовское изображение; фон; пространственный шум; неизвестная площадь; неизвестная интенсивность; аппликативная модель; эффективность обнаружения

Активно развивающиеся в настоящее время системы автоматического анализа изображений основаны на многоэтапных процедурах, которые могут включать такие стадии как сегментация и классификация участков изображения, обнаружение и различение изображений объектов, оценка параметров. Так в ряде задач дистанционного зондирования одним из этапов обработки часто является обнаружение объектов по их изображениям, часть или все параметры которых априори неизвестны.

Во многих случаях изображения, полученные в результате дистанционного зондирования, имеют стохастическую структуру и могут быть описаны моделью случайного гауссовского поля [1, 2]. В отличие от хорошо изученных задач обнаружения одномерных случайных сигналов, при обработке изображений необходимо учитывать не только аддитивный шум, но и фон, обусловленный подстилающей поверхностью. Наличие фона может существенно повлиять как на характеристики обнаружения изображения [3], так и на характеристики оценки его параметров, таких как площадь [4].

В [3] рассмотрена задача обнаружения изображения с неизвестной площадью при наличии аппликативного фона и пространственного шума, однако регулярная составляющая и интенсивность случайной составляющей предполагались известными. В ряде задач дистанционного зондирования, таких как обнаружение неоднородностей, неизвестными являются не только площадь, но и интенсивность изображения неоднородности и его регулярная составляющая.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 13-01-97504 и № 13-08-00735).

Электронный вариант статьи: http://radio.kpi.ua/article/view/S0021347014020046
© Трифонов А. П., Прибытков Ю. Н., 2014

Авторами рассмотрена задача обнаружения гауссовского стохастического изображения с неизвестными математическим ожиданием, интенсивностью и площадью, наблюдаемого на гауссовском фоне в непрерывном пространстве с учетом эффекта затенения фона. Выполнен синтез нового алгоритма обнаружения и найдены асимптотические выражения для его характеристик.

Пусть в результате дистанционного зондирования в двумерной области G доступна наблюдению реализация случайного поля $x(\mathbf{r})$. Здесь $\mathbf{r}=(r_1,r_2)$ — радиус-вектор точки на плоскости, принадлежащей G. Поле $x(\mathbf{r})$ может включать в себя полезное изображение объекта $s(\mathbf{r})$, пространственный шум $n(\mathbf{r})$ и фоновое излучение $\nu(\mathbf{r})$. Это излучение обусловлено рассеянием зондирующего сигнала подстилающей поверхностью, на которой находится обнаруживаемый объект [1]. Будем считать, что изображение занимает область Ω_s, площадь которой равна χ_0 и неизвестна, т.е. $\Omega_s \equiv \Omega(\chi_0)$, где функция $\Omega(\chi)$ описывает форму изображения с площадью χ и может быть представлена с помощью индикатора

$$I(\mathbf{r},\chi)=\begin{cases}1, & \mathbf{r}\in\Omega_s,\\ 0, & \mathbf{r}\,\overline{\in}\,\Omega_s.\end{cases}$$

Для учета проявляющихся на практике эффектов затенения фона воспользуемся аппликативной моделью взаимодействия изображения и фона [1], согласно которой наблюдаемая реализация при наличии изображения (гипотеза H_1) может быть представлена в виде

$$H_1: x(\mathbf{r})=I(\mathbf{r},\chi_0)s(\mathbf{r})+\left[1-I(\mathbf{r},\chi_0)\right]\nu(\mathbf{r})+n(\mathbf{r}),$$

где χ_0 — истинное значение неизвестной площади полезного изображения χ, которое принимает значение из интервала $[\chi_{\min},\chi_{\max}]$. При отсутствии изображения (гипотеза H_0) наблюдаемая реализация содержит только фон и пространственный шум

$$H_0: x(\mathbf{r})=\nu(\mathbf{r})+n(\mathbf{r}).$$

Далее предполагаем, что изображение $s(\mathbf{r})$ и фон $\nu(\mathbf{r})$ представляют собой однородные статистически взаимно независимые гауссовские поля с математическими ожиданиями a_s, a_ν и корреляционными функциями $B_s(\mathbf{r})$, $B_\nu(\mathbf{r})$. Также будем считать, что спектральные плотности изображения

$$G_s(\boldsymbol{\omega})=\int_{-\infty}^{\infty}B_s(\mathbf{r})\exp(-\mathrm{j}\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$$

и фона

$$G_\nu(\boldsymbol{\omega})=\int_{-\infty}^{\infty}B_\nu(\mathbf{r})\exp(-\mathrm{j}\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r},$$

постоянны в пределах областей пространственных частот ω_s и ω_ν, соответственно. Вне этих областей спектральные плотности изображения и фона равны нулю, т.е.

$$G_s(\boldsymbol{\omega})=g_s I(\boldsymbol{\omega},\omega_s),$$

$$G_\nu(\boldsymbol{\omega})=g_\nu I(\boldsymbol{\omega},\omega_\nu),$$

где $I(\boldsymbol{\omega},\omega)=1$, при $\boldsymbol{\omega}\in\omega$ и $I(\boldsymbol{\omega},\omega)=0$, при $\boldsymbol{\omega}\,\overline{\in}\,\omega$.

Положим, что пространственный шум $n(\mathbf{r})$ взаимно независим с изображением и фоном и представляет собой реализацию центрированного белого гауссовского шума с нулевым средним и односторонней спектральной плотностью N_0.

Задача состоит в обнаружении изображения с неизвестными площадью χ, математическим ожиданием a_s и нормированной интенсивностью $q_s=2g_s/N_0$.

Рассмотрим алгоритм обнаружения изображения с неизвестными параметрами a_s, q_s и χ, основанный на методе максимального правдоподобия. Согласно этому методу, как известно [6], неизвестные значения параметров заменяются на их оценки максимального правдоподобия (ОМП). Поскольку ОМП являются

соответствующими аргументами наибольшего значения логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОП), то алгоритм обнаружения сводится к сравнению с порогом h логарифма ФОП $L(\chi, a_s, q_s)$, максимизированного по набору неизвестных параметров:

$$L = \sup_{\chi, a_s, q_s} L(\chi, a_s, q_s) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} h, \quad \chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}].$$

Явный вид логарифма ФОП $L(\chi, a_s, q_s)$ для проверки гипотезы H_1 против альтернативы H_0 при известных параметрах изображения получен в [5]. Обобщая этот результат на случай неизвестной площади, получим

$$L(\chi, a_s, q_s) = \frac{1}{N_0}\left\{\frac{q_s}{1+q_s} Y_{1s}(\chi) - \frac{q_\nu}{1+q_\nu} Y_{2s}(\chi) + \right.$$

$$\left. +2\left[\frac{a_s}{1+q_s} - \frac{a_\nu}{1+q_\nu}\right] X_s(\chi) - \chi\left[\frac{a_s^2}{1+q_s} - \frac{a_\nu^2}{1+q_\nu}\right]\right\} -$$

$$-\frac{\chi}{\chi_{\min}}\mu_s \ln[1+q_s] + \frac{\chi}{\chi_{\min}}\mu_\nu \ln[1+q_\nu], \quad (1)$$

где

$$X_s(\chi) = \int_{\Omega(\chi)} x(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}, \quad Y_{is}(\chi) = \int_{\Omega(\chi)} y_i^2(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r},$$

$$i = 1, 2,$$

$y_i(\mathbf{r})$ — сигналы на выходах пространственных фильтров с передаточными функциями $|H_1(\boldsymbol{\omega})|^2 = I(\boldsymbol{\omega}, \omega_s)$, $|H_2(\boldsymbol{\omega})|^2 = I(\boldsymbol{\omega}, \omega_\nu)$, $q_\nu = 2g_\nu / N_0$ — нормированная интенсивность фона, $\mu_s = \chi_{\min} S_{\omega_s} / 4\pi^2$ — число степеней свободы изображения, $\mu_\nu = \chi_{\min} S_{\omega_\nu} / 4\pi^2$ — число степеней свободы фона, S_{ω_s} и S_{ω_ν} площади областей ω_s и ω_ν на плоскости частот, занимаемые, соответственно, спектральными плотностями полезного изображения $G_s(\boldsymbol{\omega})$ и фона $G_\nu(\boldsymbol{\omega})$.

Максимизируя (1) по неизвестным значениям a_s, q_s, получаем:

$$L(\chi) = \sup_{a_s, q_s} L(\chi, a_s, q_s) = \frac{1}{N_0} \times$$

$$\times\left[Y_{1s}(\chi) - \frac{q_\nu}{1+q_\nu} Y_{2s}(\chi)\right] - \frac{2}{N_0}\frac{a_\nu}{1+q_\nu} X_s(\chi) -$$

$$-\frac{\chi}{2\chi_{\min}}\mu_s\left[1 + \ln\left[\frac{2}{N_0}\frac{\chi_{\min}}{\chi}\frac{1}{\mu_s}\left(Y_{1s}(\chi) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -\frac{X_s^2(\chi)}{\chi}\right)\right]\right] + \frac{\chi}{N_0}\frac{a_\nu^2}{1+q_\nu} + \frac{\chi}{2\chi_{\min}}\mu_\nu \ln[1+q_\nu].$$

(2)

Тогда алгоритм обнаружения сводится к поиску абсолютного (наибольшего) максимума функционала (2) и сравнению его с порогом

$$L = \sup_{\chi} L(\chi) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} h, \quad \chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}].$$

Таким образом, для реализации алгоритма требуется формирование трех функций $Y_{1s}(\chi)$, $Y_{2s}(\chi)$ и $X_s(\chi)$, зависящих от реализации наблюдаемых данных в пределах области $\Omega(\chi)$, предположительно занимаемой изображением с площадью χ.

Обычно эффективность алгоритма обнаружения характеризуют величинами вероятностей ошибки ложной тревоги α и ошибки пропуска сигнала β [6, 7]. Согласно определению [6, 7], возможно записать

$$\alpha = P[H_1 | H_0] = P[\sup_{\chi} L(\chi) > h | H_0] = P[L > h | H_0],$$

$$\beta = P[H_0 | H_1] = P[\sup_{\chi} L(\chi) < h | H_1] = P[L < h | H_1],$$

где через $P[H_i | H_j]$, $i, j = 0, 1$ обозначена вероятность принятия решения о справедливости гипотезы H_i тогда как верна гипотеза H_j. Таким образом, для нахождения α и β необходимо опреде-

лить вероятности превышения максимумом логарифма ФОП (2) порога h и не превышения, соответственно. Для этого необходимо располагать законом распределения случайной величины $L = \sup_\chi L(\chi)$ при обеих гипотезах H_i, $i = 0, 1$.

Согласно [6–8], при $\mu_s \to \infty$, $\mu_\nu \to \infty$ распределение $Y_{1s}(\chi)$, $Y_{2s}(\chi)$ и логарифма ФОП (1) при фиксированном неизвестном параметре χ сходится к гауссовскому. Тем не менее, логарифм ФОП (2) содержит логарифмическое слагаемое от функций наблюдаемых данных и прямое обобщение результатов [6–8] на рассматриваемый случай может оказаться некорректным.

Рассмотрим статистические свойства этого слагаемого при условии, что минимальная площадь изображения $\chi_{\min}$ велика настолько, что

$$\mu_s >> 1, \quad \mu_\nu >> 1. \tag{3}$$

Обозначим

$$A(\chi) = \frac{2}{N_0}\frac{\chi_{\min}}{\chi}\frac{1}{\mu_s}(Y_{1s}(\chi) - X_s^2(\chi)/\chi). \tag{4}$$

Представим это выражение в виде

$$A(\chi) = m_A(\chi)\left[1 + \frac{\sigma_A(\chi)}{m_A(\chi)}\xi_A(\chi)\right],$$

при $m_A(\chi) \neq 0$, где $\xi_A(\chi)$ — центрированный случайный процесс с единичной дисперсией, $m_A(\chi)$ и $\sigma_A^2(\chi)$ — математическое ожидание и дисперсия $A(\chi)$. Вычисляя $m_A(\chi)$, $\sigma_A^2(\chi)$ в точке истинного значения площади при отсутствии и наличии изображения, получаем (5) (см. внизу 46).

В (5) $\varphi = S_{\omega_{s\nu}} / \sqrt{S_{\omega_s} S_{\omega_\nu}}$ — коэффициент, определяющий степень перекрытия областей, занимаемых спектральными плотностями полезного изображения и фона, $S_{\omega_{s\nu}}$ — площадь области перекрытия этих областей.

Из (5) следует, что при $\mu_s \to \infty$ отношение $\sigma_A(\chi_0)/m_A(\chi_0) \to 0$ при обеих гипотезах. Путем более громоздких вычислений аналогичный результат может быть получен для любого $\chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]$. Тогда при выполнении условия (3), аналогично [7], возможно использовать приближенное равенство

$$\ln A(\chi) \approx \ln m_A(\chi) + \frac{\sigma_A(\chi)}{m_A(\chi)}\xi_A(\chi) =$$

$$= \ln m_A(\chi) + \frac{A(\chi)}{m_A(\chi)} - 1. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (2) с учетом (4), получим

$$L(\chi) \approx \frac{1}{N_0}\left[\frac{m_A(\chi)-1}{m_A(\chi)}Y_{1s}(\chi) - \frac{q_\nu}{1+q_\nu}Y_{2s}(\chi)\right] -$$

$$-\frac{2}{N_0}\frac{a_\nu}{1+q_\nu}X_s(\chi) + \frac{1}{N_0}\frac{X_s^2(\chi)}{\chi m_A(\chi)} + \frac{\chi}{N_0}\frac{a_\nu^2}{1+q_\nu} -$$

$$-\frac{\chi}{2\chi_{\min}}\mu_s \ln m_A(\chi) + \frac{\chi}{2\chi_{\min}}\mu_\nu \ln[1+q_\nu]. \tag{7}$$

$$\frac{\sigma_A(\chi_0|H_0)}{m_A(\chi_0|H_0)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_s}}\frac{\sqrt{2\frac{\chi_{\min}}{\chi_0}\left[(1+q_{\nu 0})^2\left(\sqrt{\frac{\mu_\nu}{\mu_s}}\varphi - \frac{\chi_{\min}}{\chi_0\mu_s}\right) + 1 - \sqrt{\frac{\mu_\nu}{\mu_s}}\varphi\right]}}{\left[(1+q_{\nu 0})\left(\sqrt{\frac{\mu_\nu}{\mu_s}}\varphi - \frac{\chi_{\min}}{\chi_0\mu_s}\right) + 1 - \sqrt{\frac{\mu_\nu}{\mu_s}}\varphi\right]},$$

$$\frac{\sigma_A(\chi_0|H_1)}{m_A(\chi_0|H_1)} = \sqrt{\frac{2}{\mu_s\frac{\chi_0}{\chi_{\min}} - 1}}, \tag{5}$$

Обозначим через $m_{Xs}(\chi)$ и $\sigma^2_{Xs}(\chi)$ математическое ожидание и дисперсию гауссовского процесса $X_s(\chi)$. Тогда, подставляя выражение $X_s(\chi)=m_{Xs}(\chi)+\sigma_{Xs}(\chi)\xi_{Xs}(\chi)$ в (7), получаем

$$L(\chi)\approx L_G(\chi)+D(\chi)\xi^2_{Xs}(\chi)$$

где

$$L_G(\chi)=\frac{1}{N_0}\left[\frac{m_A(\chi)-1}{m_A(\chi)}Y_{1s}(\chi)-\frac{q_\nu}{1+q_\nu}Y_{2s}(\chi)\right]+$$

$$+2X_s(\chi)\frac{1}{N_0}\left(\frac{1}{\chi}\frac{m_{Xs}(\chi)}{m_A(\chi)}-\frac{a_\nu}{1+q_\nu}\right)-$$

$$-\frac{\chi}{N_0}\left(\frac{1}{\chi}\frac{m^2_{Xs}(\chi)}{m_A(\chi)}-\frac{a^2_\nu}{1+q_\nu}\right)-\frac{\chi}{2\chi_{\min}}\mu_s\ln m_A(\chi)+$$

$$+\frac{\chi}{2\chi_{\min}}\mu_\nu\ln\left[1+q_\nu\right] \qquad (8)$$

— асимтотически гауссовская при $\mu_s\to\infty$, $\mu_\nu\to\infty$ составляющая логарифма ФОП, $\xi_{Xs}(\chi)$ — гауссовский случайный процесс с нулевым средним и единичной дисперсией,

$$D(\chi)=\sigma^2_{Xs}(\chi)/[\chi N_0 m_A(\chi)].$$

Таким образом логарифм ФОП (2) при выполнении условий (3) приближенно может быть представлен в виде суммы гауссовского процесса $L_G(\chi)$ и процесса $D(\chi)\xi^2_{Xs}(\chi)$, значения которого подчиняются гамма распределению. Рассмотрим первые два момента обоих слагаемых.

Вычислив дисперсию $\sigma^2_{Xs}(\chi)$ и математическое ожидание $m_A(\chi)$ при обеих гипотезах, получим следующие выражения для $D(\chi)$:

$$D(\chi\,|\,H_1)=$$

$$=\left[\frac{\min(\chi_0,\chi)}{\chi}(1+q_{s0})+\left[1-\frac{\min(\chi_0,\chi)}{\chi}\right](1+q_\nu)\right]$$

$$\times\left[1+\frac{\min(\chi_0,\chi)}{\chi}q_{s0}-\sqrt{\frac{\mu_\nu}{\mu_s}}\varphi\left[1-\frac{\min(\chi_0,\chi)}{\chi}\right]q_\nu\right.$$

$$-\frac{\chi_{\min}}{\chi}\frac{1}{\mu_s}\left[\left(\frac{\min(\chi_0,\chi)}{\chi}(1+q_{s0})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[1-\frac{\min(\chi_0,\chi)}{\chi}\right](1+q_\nu)\right)+a^2_{s0}\frac{2}{N_0}\min(\chi_0,\chi)+\right.$$

$$+a^2_\nu\frac{2}{N_0}\left[\chi-\min(\chi_0,\chi)\right]-\frac{1}{\chi}\frac{2}{N_0}\times$$

$$\left.\left.\times\left(a_{s0}\min(\chi_0,\chi)+a_\nu\left[\chi-\min(\chi_0,\chi)\right]\right)^2\right]\right]^{-1},$$

$$D(\chi|H_0)=(1+q_{\nu0})\times$$

$$\times\left[1+\sqrt{\mu_\nu/\mu_s}\varphi q_{\nu0}-\chi_{\min}(1+q_\nu)/(\chi\mu_s)\right]^{-1}.$$

Используя приближение (3), находим выражения для математических ожиданий m_{L_G} и корреляционных функций B_{L_G} логарифма ФОП $L_G(\chi)$ (7):

при гипотезе H_1

$$m_{L_G}(\chi|H_1)=\left(\min(\chi,\chi_0)k_1+\right.$$

$$\left.+\left[\chi-\min(\chi,\chi_0)\right]k_2\right)/\chi_0,$$

$$B_{L_G}(\chi_1,\chi_2|H_1)=\left(\min(\chi_0,\chi_1,\chi_2)d_1+\right.$$

$$\left.+\left[\min(\chi_1,\chi_2)-\min(\chi_0,\chi_1,\chi_2)\right]d_2\right)/\chi_0-$$

$$-c_2\left(\max(\chi_1,\chi_0)+\max(\chi_2,\chi_0)-2\chi_0\right)/\chi_0,$$

при гипотезе H_0

$$m_{L_G}(\chi|H_0)=k\chi/\chi_0,$$

$$B_{L_G}(\chi_1,\chi_2|H_0)=c_1\min(\chi_1,\chi_2)/\chi_0.$$

Здесь приняты сокращения (9) (см. внизу с 48).

Сравнивая данные характеристики, с характеристиками логарифма ФОП (1), полученными в [3], возможно показать, что при наличии изображения

$$m_{L_G}(\chi|H_1) \approx m_L(\chi|H_1),$$

$$B_{L_G}(\chi_1,\chi_2|H_1) \approx B_L(\chi_1,\chi_2|H_1) -$$

$$-c_2(\max(\chi_1,\chi_0)+\max(\chi_2,\chi_0)-2\chi_0)/\chi_0,$$

где $m_L(\chi|H_1)$, $B_L(\chi_1,\chi_2|H_1)$ — математическое ожидание и корреляционная функция логарифма ФОП (1), полученного при априори известных значениях a_s и q_s.

На основе полученных выражений сравним поведение дисперсии гауссовской составляющей $D_{L_G}(\chi_0|H_i)=B_{L_G}(\chi_0,\chi_0|H_i)$, $i=0,$ и величины $D(\chi_0)$ при $\mu_s \to \infty$ и $\chi=\chi_0$. При наличии изображения в принятой реализации наблюдаемых данных дисперсия гауссовской составляющей логарифма ФОП имеет вид

$$D_{L_G}(\chi_0|H_1)=\chi d_1/\chi_0.$$

$$k_1=\frac{1}{2}\frac{\chi_0}{\chi_{\min}}\left[\mu_s q_{s0}-\mu_\nu\frac{q_\nu}{1+q_\nu}-\sqrt{\mu_s\mu_\nu}\varphi q_{s0}\frac{q_\nu}{1+q_\nu}+\frac{2}{N_0}\chi_0\frac{[a_{s0}-a_\nu]^2}{1+q_\nu}+\mu_\nu\ln[1+q_\nu]-\mu_s\ln[1+q_{s0}]\right],$$

$$k_2=\frac{1}{2}\frac{\chi_0}{\chi_{\min}}\left[\mu_s\frac{q_{s0}}{1+q_{s0}}-\mu_\nu q_\nu-\sqrt{\mu_s\mu_\nu}\varphi q_\nu\frac{q_{s0}}{1+q_{s0}}-\frac{2}{N_0}\chi_0\frac{[a_{s0}-a_\nu]^2}{1+q_{s0}}+\mu_\nu\ln[1+q_\nu]-\mu_s\ln[1+q_{s0}]\right],$$

$$k=\frac{1}{2}\frac{\chi_0}{\chi_{\min}}\left\{\mu_s\frac{\sqrt{\frac{\mu_\nu}{\mu_s}}\varphi q_\nu}{1+\sqrt{\frac{\mu_\nu}{\mu_s}}\varphi q_\nu}-\mu_\nu q_\nu-\sqrt{\mu_s\mu_\nu}\varphi q_\nu\frac{\sqrt{\frac{\mu_\nu}{\mu_s}}\varphi q_\nu}{1+\sqrt{\frac{\mu_\nu}{\mu_s}}\varphi q_\nu}+\mu_\nu\ln\left[1+q_\nu\right]-\mu_s\ln\left[1+\sqrt{\frac{\mu_\nu}{\mu_s}}\varphi q_\nu\right]\right\},$$

$$d_1=\frac{1}{2}\frac{\chi_0}{\chi_{\min}}\left\{\mu_s q_{s0}^2+\mu_\nu\left[\frac{q_\nu}{1+q_\nu}\right]^2+\sqrt{\mu_s\mu_\nu}\varphi\left(\left[\frac{q_{s0}-q_\nu}{1+q_\nu}\right]^2-\left[\frac{q_\nu}{1+q_\nu}\right]^2-q_{s0}^2\right)+\frac{4\chi_{\min}}{N_0}(a_{s0}-a_\nu)^2\frac{1+q_{s0}}{(1+q_\nu)^2}\right\},$$

$$d_2=\frac{1}{2}\frac{\chi_0}{\chi_{\min}}\left\{\mu_s\left(\frac{q_{s0}}{1+q_{s0}}\right)^2+\mu_\nu q_\nu^2+\sqrt{\mu_s\mu_\nu}\varphi\left(\left(\frac{q_{s0}-q_\nu}{1+q_{s0}}\right)^2-\left(\frac{q_{s0}}{1+q_{s0}}\right)^2-q_\nu^2\right)+\frac{4\chi_{\min}}{N_0}(a_{s0}-a_\nu)^2\frac{1+q_\nu}{(1+q_{s0})^2}\right\},$$

$$c_1=\frac{1}{2}\frac{\chi_0 q_\nu^2}{\chi_{\min}(1+\sqrt{\mu_\nu/\mu_s}\varphi q_\nu)^2}\left\{\mu_s\left(\sqrt{\mu_\nu/\mu_s}\varphi\right)^2+\mu_\nu q_\nu^2+\sqrt{\mu_s\mu_\nu}\varphi q_\nu^2\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left(1-\sqrt{\mu_\nu/\mu_s}\varphi\right)^2-\left(\sqrt{\mu_\nu/\mu_s}\varphi\right)^2-1\right)+\frac{2\chi_{\min}}{N_0}\frac{\left(1-\sqrt{\mu_\nu/\mu_s}\varphi\right)^2}{[1+q_\nu]}(a_{s0}-a_\nu)^2\right\},$$

$$c_2=\frac{1}{2}\frac{\chi_0}{\chi_{\min}}\left\{\left(\mu_s\frac{q_{s0}}{1+q_{s0}}-\sqrt{\mu_s\mu_\nu}\varphi\frac{q_\nu}{1+q_\nu}\right)\left(q_{s0}+\sqrt{\frac{\mu_\nu}{\mu_s}}\varphi q_\nu\right)+\frac{2}{N_0}\chi_{\min}\frac{1+q_\nu}{(1+q_{s0})^2}(a_{s0}-a_\nu)^2\right\} \quad (9)$$

Из (9) следует, что при неограниченном увеличении числа степеней свободы изображения и фона $d_1 \to \infty$, если интенсивности случайных составляющих изображения q_{s0} и фона q_ν отличны от нуля. Параметр

$$D(\chi_0|H_1) = [1 - \chi_{\min} / \chi_0 \mu_s]^{-1} \to 1$$

при $\mu_s \to \infty$. Отсюда следует, что при гипотезе H_1 вклад негауссовской составляющей логарифма ФОП уменьшается с увеличением числа степеней свободы μ_s и μ_ν.

Аналогичный вывод можно сделать и при отсутствии изображения, поскольку

$$D_{L_G}(\chi_0|H_0) = c_1 \to \infty,$$

при $\mu_\nu \to \infty$ и $q_\nu \neq 0$, тогда как параметр $D(\chi_0|H_0)$ стремится к конечной величине

$$D(\chi_0|H_0) \to (1+q_\nu)[1+\sqrt{\mu_\nu/\mu_s}\varphi q_\nu]^{-1} \le (1+q_\nu)$$

при $\mu_\nu \to \infty, \mu_s \to \infty$.

Поэтому при $q_{s0} > 0$, $q_\nu > 0$ и выполнении условия (3) негауссовской составляющей логарифма ФОП возможно пренебречь, положив $L(\chi) \approx L_G(\chi)$. Это позволяет найти характеристики алгоритма обнаружения в гауссовском приближении.

Сравнивая логарифмы ФОП $L_G(\chi)$ (8) и $L(\chi, a_s, q_s)$ (1) возможно сделать вывод, что эти выражения имеют одинаковую структуру и отличаются только детерминированными слагаемыми, а также коэффициентами при случайных функциях $Y_{1s}(\chi)$, $Y_{2s}(\chi)$ и $X_s(\chi)$. В [3] показано, что в окрестности истинного значения параметра χ_0 логарифм ФОП $L(\chi, a_s, q_s)$ (1) может быть аппроксимирован гауссовским марковским процессом. Поэтому $L(\chi) \approx L_G(\chi)$ также приближенно возможно считать гауссовским марковским процессом в окрестности истинного значения площади χ_0. Следовательно, для полного в статистическом смысле описания логарифма ФОП $L(\chi)$ необходимо найти начальную плотность вероятности и вероятность перехода [8].

В рассматриваемом случае начальной плотностью вероятности будет одномерная плотность вероятности логарифма ФОП при $\chi = \chi_{\min}$. Поскольку $L(\chi)$ является асимптотически гауссовским процессом при выполнении (3) то начальная плотность вероятности имеет вид

$$W(L, \chi_{\min}|H_i) = \frac{1}{\sigma_{L_G}(\chi_{\min}|H_i)\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\left(L - m_{L_G}(\chi_{\min}|H_i)\right)^2}{2\sigma^2_{L_G}(\chi_{\min}|H_i)}\right\}, \qquad (10)$$

где $\sigma^2_{L_G}(\chi_{\min}|H_i) = B_{L_G}(\chi_{\min}, \chi_{\min}|H_i)$, $i = 0, 1$.

Для вычисления вероятности перехода, найдем коэффициенты сноса

$$M_1(\chi) =$$

$$= \lim_{\Delta\chi \to 0+} \langle [L_{1G}(\chi + \Delta\chi) - L_{1G}(\chi)] | L_{1G}(\chi) \rangle / \Delta\chi$$

и диффузии логарифма ФОП $L(\chi)$

$$M_2(\chi) =$$

$$= \lim_{\Delta\chi \to 0+} \langle [L_{1G}(\chi + \Delta\chi) - L_{1G}(\chi)]^2 | L_{1G}(\chi) \rangle / \Delta\chi$$

в окрестности истинного значения площади, где $|\chi - \chi_0|/\chi_0 << 1$. Возможно показать, что если интенсивность изображения отлична от нуля, а площадь χ_0 велика настолько, что наряду с (3) выполняются условия

$$\mu_s >> \max\Big(\{1 + 1/q_{s0}\},\ \{|q_{s0} - q_\nu|\},$$

$$\{2\chi_0(a_{s0} - a_\nu)^2 / [\min(1, q_{s0})N_0]\}\Big)\chi_{\min} / \chi_0,$$

тогда искомые коэффициенты имеют вид:

при гипотезе H_1

$$M_1(\chi|H_1) = \frac{1}{\chi_{\min}} \begin{cases} k_1, & \chi_{\min} \le \chi \le \chi_0, \\ -k_2, & \chi_0 < \chi \le \chi_{\max}, \end{cases}$$

$$M_2(\chi \mid H_1) = \frac{1}{\chi_{\min}} \begin{cases} d_1, & \chi_{\min} \le \chi \le \chi_0, \\ d_2, & \chi_0 < \chi \le \chi_{\max}, \end{cases} \quad (11)$$

при гипотезе H_0

$$M_1(L|H_0) = -k / \chi_{\min},$$

$$M_2(L|H_0) = c_1 / \chi_{\min}. \quad (12)$$

Решая уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова с коэффициентами (11) и (12) при начальных (10) и соответствующих граничных условиях, аналогично [7] находим вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала:

$$\alpha(h) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\left(x - h_1 - \hat{z}_N\right)^2}{2}\right] \times$$

$$\times \left\{ \Phi\left(\hat{z}_N \sqrt{\frac{\chi_{\max} - \chi_{\min}}{\chi_{\min}}} + x \sqrt{\frac{\chi_{\min}}{\chi_{\max} - \chi_{\min}}} \right) - \right.$$

$$-\exp(-2x\hat{z}_N) \times \quad (13)$$

$$\left. \times \Phi\left(\hat{z}_N \sqrt{\frac{\chi_{\max} - \chi_{\min}}{\chi_{\min}}} - x \sqrt{\frac{\chi_{\min}}{\chi_{\max} - \chi_{\min}}} \right) \right\} dx,$$

$$\beta(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x + z_1)^2 + h_2^2 - 2h_2 z_1}{2}\right] \times$$

$$\times \left\{ \Phi\left(z_N \sqrt{\frac{\chi_{\max} - \chi_0}{\chi_{\min}}} + xC \sqrt{\frac{\chi_0}{\chi_{\max} - \chi_0}} \right) - \right.$$

$$-\exp\left(-2xCz_N \sqrt{\frac{\chi_0}{\chi_{\min}}} \right) \times$$

$$\left. \times \Phi\left(z_N \sqrt{\frac{\chi_{\max} - \chi_0}{\chi_{\min}}} - xC \sqrt{\frac{\chi_0}{\chi_{\max} - \chi_0}} \right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \exp(xh_2) \Phi\left(h_2 \sqrt{\frac{\chi_0 - \chi_{\min}}{\chi_{\min}}} + x \sqrt{\frac{\chi_{\min}}{\chi_0 - \chi_{\min}}} \right) - \right.$$

$$-\exp(-xh_2) \times$$

$$\left. \times \Phi\left(h_2 \sqrt{\frac{\chi_0 - \chi_{\min}}{\chi_{\min}}} - x \sqrt{\frac{\chi_{\min}}{\chi_0 - \chi_{\min}}} \right) \right\} dx, \quad (14)$$

где использованы обозначения

$$h_1 = h / \sqrt{d_2}, \qquad \hat{z}_N^2 = k^2 / c_1,$$

$$z_1^2 = k_1^2 \chi_0 / d_1 \chi_{\min}, \qquad h_2 = h \sqrt{\chi_{\min} / d_1 \chi_0},$$

$$C^2 = d_1 / d_2,$$

$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \exp(-x^2/2) dx \Big/ \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности.

Найденные выражения позволяют провести анализ эффективности работы алгоритма максимального правдоподобия для различных статистических характеристик полезного изображения и фона, а также определить степень влияния их различия на эффективность обнаружения.

Вероятность пропуска сигнала (14), полученная при неизвестных χ, a_s и q_s совпадает с вероятностью пропуска сигнала, полученной в [3] для неизвестной площади и априори известных значениях a_s, q_s. Поэтому возможно сделать вывод, что при выполнении условия (3) незнание математического ожидания a_s и относительной интенсивности изображения q_s асимптотически не оказывает влияния на вероятность пропуска сигнала. Таким образом, отличие в эффективности обнаружения изображения с неизвестными a_s и q_s по сравнению со случаем обнаружения изображения с известными a_s и q_s определяется увеличением вероятности ложной тревоги.

Для оценки этого отличия воспользуемся критерием Неймана–Пирсона [6], согласно которому порог h в формулах (13), (14) определяется по заданной вероятности ложной тревоги ε, т.е. является решением уравнения:

$$\alpha(h) = \varepsilon. \quad (15)$$

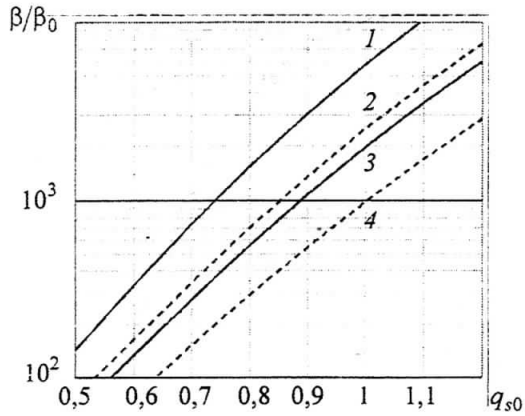

Рис. 1

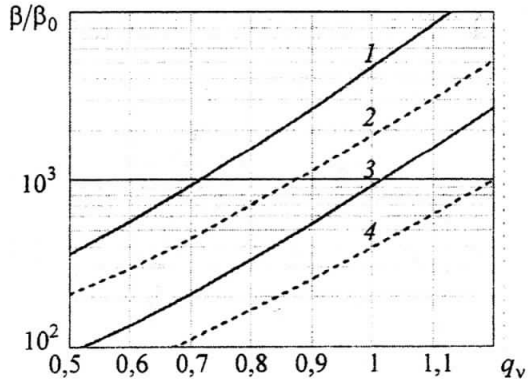

Рис. 2

Решая численно это уравнение, получим значение порога $\hat{h}$, подставив которое в (14), найдем значение вероятности пропуска сигнала $\beta = \beta(\hat{h})$ при неизвестных a_s и q_s. Для случая известных a_s и q_s подставим в (15) вместо $\alpha(h)$ (13) выражение для ложной тревоги $\alpha(h, a_s, q_s)$, полученное в [3].

Пусть $\hat{h}_0$ — порог, полученный в результате численного решения уравнения $\alpha(h, a_s, q_s) = \varepsilon$. Тогда, подставляя $\hat{h}_0$ в (14), получим соответствующее значение пропуска сигнала $\beta_0 = \beta(\hat{h}_0)$ для случая известных a_s и q_s.

На рис. 1 сплошными линиями приведены зависимости относительного увеличения вероятности пропуска сигнала β/β_0 при фиксированном значении ложной тревоги $\varepsilon = 10^{-3}$, от истинного значения относительной интенсивности изображения q_{s0} при различных значениях относительной интенсивности фона q_v. Эти кривые построены в предположении, что спектральные плотности изображения и фона не перекрываются, так что $\varphi = 0$. Кроме того, при построении зависимостей выбраны следующие параметры: $\chi_0 = 0{,}5\chi_{max}$, $\chi_{min} = 0{,}1\chi_{max}$, $a_{s0} = a_v$, $\mu_s = \mu_v = 200$. Кривые *1*, *2* рассчитаны при $q_v = 0{,}8$, кривые *3*, *4* при $q_v = 0{,}6$. Штриховые кривые на рис. 1 соответствуют вероятности ложной тревоги $\varepsilon = 10^{-4}$.

На рис. 2 при тех же условиях построены зависимости проигрыша β/β_0 от интенсивности фона q_v при различных значениях интенсивности изображения q_{s0}. Здесь сплошные кривые соответствуют вероятности ложной тревоги $\varepsilon = 10^{-3}$, а штриховые — $\varepsilon = 10^{-4}$. Кривые *1*, *2* рассчитаны при $q_{s0} = 0{,}8$, кривые *3*, *4* — при $q_{s0} = 0{,}6$.

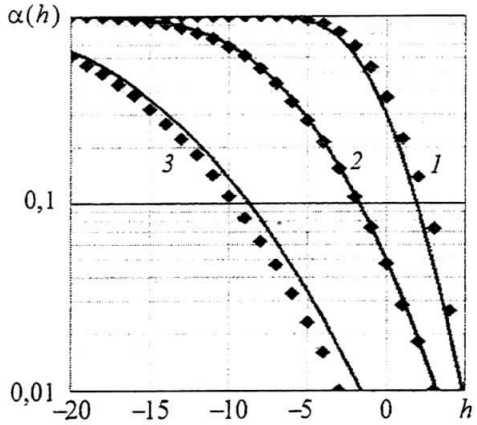

Рис. 3

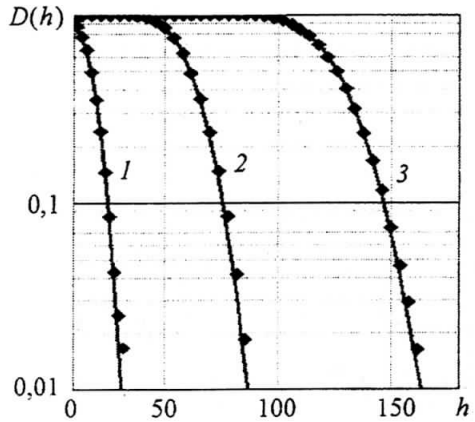

Рис. 4

Из анализа кривых (рис. 1, 2) возможно сделать вывод, что незнание истинных значений параметров изображения a_s и q_s может приводить к существенному проигрышу в эффективности обнаружения объекта по его изображению. Причем, если спектральные плотности изображения и фона занимают неперекрывающиеся области на плоскости пространственных частот, то указанный относительный проигрыш увеличивается как с ростом относительной интенсивности мешающего фона q_v, так и с ростом истинного значения относительной интенсивности полезного изображения q_{s0}. Вместе с тем, с уменьшением требуемой вероятности ложной тревоги относительный проигрыш снижается.

С целью проверки работоспособности алгоритма обнаружения и установления границ применимости полученных асимптотических аналитических выражений для характеристик обнаружения проведено статистическое моделирование. При моделировании предполагалось, что изображение представляет собой квадрат с площадью $\chi_0 = 4\chi_{\min}$, а диапазон возможных значений неизвестной площади $\chi_{\max} / \chi_{\min} = 9$. Математические ожидания и интенсивности изображения и фона выбраны одинаковыми $a_s = a_v = 0$, $q_s = q_v = q$, так, что обнаружение осуществлялось за счет различия спектральных характеристик изображения и фона. При этом формы областей, занимаемых спектральными плотностями изображения и фона, выбраны прямоугольными. Степень перекрытия этих областей характеризовалась коэффициентом $\varphi = 0{,}1$.

На рис. 3, 4 приведены зависимости вероятности ложной тревоги $\alpha(h)$ (рис. 3) и правильного обнаружения $D(h) = 1 - \beta(h)$ (рис. 4)

от порога h при $\mu_s = \mu_v = \mu = 10^3$. Сплошными линиями показаны зависимости, рассчитанные с использованием формул (13) и (14), ромбами — результаты моделирования для соответствующих параметров. Кривые *1*, *2*, *3* рассчитаны при $q = 0{,}1$, $0{,}2$, $0{,}3$, соответственно. Рис. 3 показывает удовлетворительное согласование результатов расчетов по (13) с результатами моделирования. Соответственно рис. 4 показывает, что вероятность пропуска сигнала (14) (или правильного обнаружения), полученная для случая известных параметров a_s и q_s удовлетворительно описывает синтезированный алгоритм максимального правдоподобия при неизвестных a_s, q_s и $\mu >> 1$.

Таким образом, получена структура алгоритма максимального правдоподобия обнаружения стохастического изображения с неизвестными площадью, математическим ожиданием и интенсивностью. Найдены характеристики алгоритма. Показано, что при достаточно больших величинах числа степеней свободы изображения и фона незнание интенсивности и математического ожидания изображения оказывает основное влияние на вероятность ошибок ложной тревоги, тогда как вероятности пропуска сигнала асимптотически одинаковы как при известных, так и при неизвестных параметрах изображения. Для проверки работоспособности алгоритма и подтверждения полученных результатов проведено статистическое моделирование алгоритма обнаружения.

Поступила в редакцию 08.07.2013

После переработки 17.12.2013

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бычков А. А.* Обнаружение изображений пространственно протяженных затеняющих фон объектов / А. А. Бычков, В. А. Понькин // Автометрия. — 1992. — № 4. — С. 33–40. — Режим доступа : http://www.iae.nsk.su/images/stories/5_Autometria/5_Archives/1992/4/33-40.pdf.

2. *Перетягин Г. И.* Представление изображений гауссовскими случайными полями / Г. И. Перетягин // Автометрия. — 1984. — № 6. — С. 42–48. — Режим доступа : http://www.iae.nsk.su/images/stories/5_Autometria/ 5_Archives/1984/6/42-48.pdf.

3. *Трифонов А. П.* Обнаружение объектов с неизвестной площадью при наличии фона / А. П. Трифонов, Ю. Н. Прибытков // Автометрия. — 2005. — Т. 41, № 4. — С. 24–39. — Режим доступа : http://www.iae.nsk.su/images/stories/5_Autometria/5_Archives/2005/4/24-39.pdf.

4. *Трифонов А. П.* Оценка площади стохастических объектов по изображению при наличии фона / А. П. Трифонов, Ю.Н.Прибытков // Автометрия.— 2010.— Т. 46, № 2. — С. 49–57. — Режим доступа : http://www.iae.nsk.su/images/stories/5_Autometria/5_Archives/2010/2/05.pdf.

5. *Трифонов А. П.* Обнаружение стохастического изображения с неизвестными параметрами / А. П. Трифонов, Ю. Н. Прибытков // Радиоэлектроника. — 2002. — Т. 45, № 9. — С. 10–20. — (Известия вузов).

6. Теория обнаружения сигналов / П. С. Акимов, П. А. Бакут, В. А. Богданович [и др.] ; под ред. П. А. Бакута. — М. : Радио и связь, 1984. — 440 с.

7. *Трифонов А. П.* Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / А.П.Трифонов, Е.П.Нечаев, В.И.Парфенов ; под.ред. А. П. Трифонова. — Воронеж : ВГУ, 1991. — 246 с.

8. *Тихонов В. И.* Марковские процессы / В.И.Тихонов, М.А.Миронов. — М. : Радио и связь, 1977. — 488 с.