УДК 621.391.16

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЫСОТЫ И ПОЛОЖЕНИЯ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА МАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ТИПА БАШЕЛЬЕ*

А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, М. Б. Беспалова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 02.10.2014 г.

Аннотация: исследованы статистические характеристики величины и положения наибольшего максимума марковского случайного процесса типа Башелье с кусочно-постоянными по времени коэффициентами сноса и диффузии. В результате решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова получены точные и асимптотические выражения для функций распределения, плотностей вероятности и моментов величины и положения наибольшего максимума марковского случайного процесса. Найдена функция распределения времени первого достижения границы случайным процессом типа Башелье. Полученные результаты могут быть использованы для анализа алгоритмов оптимальной и квазиоптимальной обработки разрывных сигналов, наблюдаемых на фоне шума, когда решающая статистика (или её приращение) обладает марковскими свойствами.

Ключевые слова: уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, распределения плотности вероятности, высота, положение абсолютного максимума.

STATISTICAL PROPERTIES OF HEIGHT AND PROVISIONS OF ABSOLUTE MAXIMUM MARKOV PROCESSES BACHELIER TYPE

A. P. Trifonov, Y. E. Korchagin, M. B. Bespalova

Abstract: the statistical characteristics of size and position of the largest maximum of Markov random process type Bachelier with piecewise constant time drift and diffusion coefficients. As a result, the solution of equation Fokker-Planck-Kolmogorov obtain exact and asymptotic expressions for the distribution functions, probability densities and the moments of and the position of the highest peak of the Markov random process. Distribution function of the first passage time of a Random Process of Bachelier. The results can be used to analyze algorithms for optimal and quazioptimal processing discontinuous signals observed on the background noise, when the decisive statistics (or its increment) has the Markov property.

Keywords: Fokker-Planck-Kolmogorov equation, the probability density distribution, elevation, the position of the absolute maximum.

Задача исследования статистических свойств высоты (величины) и положения абсолютного (наибольшего) максимума случайного процесса актуальна для многих приложений статистической радиофизики. Так, например, на основе распределения величины максимума решающей статистики можно определить вероятности ошибок алгоритмов обнаружения сигнала [1], [2]. Зная статистические характеристики положения максимума случайного процесса, можно найти статистические характеристики оценок параметров сигнала [3], [4]. Методика

* Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14–49–00079)

расчёта распределений величины и положения максимума случайного процесса, обладающего необходимым числом производных, описана, например, в [3].

В данной работе исследуются статистические свойства величины и положения наибольшего максимума марковского случайного процесса с кусочно-постоянными коэффициентами сноса и диффузии, а также времени первого достижения границы. Задачу поиска распределений величины и положения максимума удаётся свести [3] к довольно хорошо изученной задаче о достижении границ марковским случайным процессом [5]. Найдём распределения величины и положения наибольшего максимума марковского случайного процесса.

Пусть марковский случайный процесс $y(x)$, заданный на отрезке $x \in [X_1, X_2]$, обладает коэффициентом сноса

$$k_1 = \begin{cases} a_1, & X_1 \leqslant x < x_0, \\ -a_2, & x_0 \leqslant x \leqslant X_2 \end{cases}$$

и коэффициентом диффузии

$$k_2 = \begin{cases} b_1, & X_1 \leqslant x < x_0, \\ b_2, & x_0 \leqslant x \leqslant X_2. \end{cases}$$

Здесь a_i, b_i, $i = 1; 2$ — положительные константы, x_0 — внутренняя точка отрезка $[X_1, X_2]$. Однородные по координате марковские процессы коэффициенты сноса и диффузии которых зависят только от времени, называют процессами типа Башелье [5].

Обозначим

$$Y = \sup_{X_1 \leqslant x \leqslant X_2} y(x), \qquad x_m = \arg\sup_{X_1 \leqslant x \leqslant X_2} y(x) \tag{1}$$

— соответственно величина и положение наибольшего максимума случайного процесса $y(x)$ на отрезке $[X_1, X_2]$. Необходимо найти статистические характеристики случайных величин Y и x_m (1).

Введём в рассмотрение двумерную функцию распределения величины наибольшего максимума процесса $y(x)$

$$F_2(u, v, X) = P\left\{ \sup_{X_1 \leqslant x < X} y(x) < u, \sup_{X \leqslant x \leqslant X_2} y(x) < v \right\}. \tag{2}$$

Согласно [3], функции распределения случайных величин (1) можно выразить через функцию распределения (2)

$$F_Y(H) = P\{Y < H\} = F_2(H, H, T_2), \tag{3}$$

$$F_x(X) = P\{x_m < X\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\left. \frac{\partial F_2(u, v, X)}{\partial u} \right|_{v=u} \right] du.$$

Для совместной плотности вероятности величины и положения наибольшего максимума случайного процесса $y(x)$ справедливо выражение [3]

$$W(u, X) = \frac{\partial}{\partial X} \left[\left. \frac{\partial F_2(u, v, X)}{\partial u} \right|_{v=u} \right]. \tag{4}$$

Интегрируя плотность вероятности $W(u, X)$ по первому аргументу в бесконечных пределах, можно получить плотность вероятности положения наибольшего максимума марковского случайного процесса $y(x)$

$$W_x(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(u, X) du = \frac{\partial}{\partial X} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\left. \frac{\partial F_2(u, v, X)}{\partial u} \right|_{v=u} \right] du. \tag{5}$$

Следовательно, для вычисления искомых распределений величины и положения наибольшего максимума марковского случайного процесса необходимо найти функцию (2). Она представляет собой вероятность недостижения марковским случайных процессом $y(x)$ границ $-\infty$ и u на отрезке $x \in [X_1, X]$ и границ $-\infty$ и v на отрезке $x \in [X, X_2]$.

Введём вспомогательный случайный процесс

$$z(x) = \begin{cases} u - y(x), & X_1 \leqslant x < X, \\ v - y(x), & X \leqslant x \leqslant X_2 \end{cases} \tag{6}$$

и перепишем выражение (2) в виде

$$F_2(u, v, X) = P\left\{ \sup_{X_1 \leqslant x \leqslant X_2} z(x) > 0 \right\}. \tag{7}$$

Эта функция представляет собой вероятность недостижения процессом $z(x)$ границ $z = 0$ и $z = \infty$. Согласно (6) случайный процесс $z(x)$ является марковским с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_{1z} = \begin{cases} -a_1, & X_1 \leqslant x < x_0, \\ a_2, & x_0 \leqslant x \leqslant X_2, \end{cases} \qquad k_{2z} = \begin{cases} b_1, & X_1 \leqslant x < x_0, \\ b_2, & x_0 \leqslant x \leqslant X_2. \end{cases} \tag{8}$$

Следовательно, вычисление вероятности (7) сводится к задаче вычисления вероятности недостижении границ $z = 0$ и $z = \infty$ марковским случайным процессом $z(x)$ на отрезке $x \in [X_1, X_2]$ [5], [6]. Согласно [5] для вероятности (7) можно записать

$$F_2(u, v, X) = \int_0^\infty W(z, X_2) dz, \tag{9}$$

где $W(z, x)$ — одномерная плотность вероятности реализаций случайного процесса $z(x)$, ни разу не достигших границ $z = 0$ и $z = \infty$. Функция $W(z, x)$ является решением уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) [5], [6]

$$\frac{\partial W(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}[k_{1z} W(z, x)] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}[k_{2z} W(z, x)] = 0 \tag{10}$$

при начальном условии

$$W(z, x) = W(z, X_1)$$

и граничных условиях

$$W(z = 0, x) = W(z = \infty, x) = 0.$$

Здесь $W(z, X_1)$ — плотность вероятности случайной величины $z(T_1) = u - y(T_1)$. Обозначим $W_0(y)$ — плотность вероятности случайной величины $y(T_1)$. Тогда $W(z, X_1) = W_0(u - z)$.

Поскольку коэффициенты сноса и диффузии (8) изменяются скачком при $x = x_0$, решение уравнения (10) будем искать отдельно для $X < x_0$ и $X > x_0$. Пусть сначала $X < x_0$. Найдём решения последовательно на отрезках $[X_1, X]$, $[X, x_0]$, $[x_0, X_2]$. Выполним замену переменных

$$W(z, x) = U(z, x) \exp\left(\frac{k_{1z}}{k_{2z}} z - \frac{k_{1z}^2}{2k_{2z}} x \right), \tag{11}$$

$$U(z, x) = W(z, x) \exp\left(-\frac{k_{1z}}{k_{2z}} z + \frac{k_{1z}^2}{2k_{2z}} x \right), \tag{12}$$

которая при постоянных коэффициентах сноса и диффузии приводит уравнение (10) к каноническому виду [7]

$$\frac{\partial U(z,x)}{\partial x} = \frac{k_{1z}}{2} \cdot \frac{\partial^2 U(z,x)}{\partial z^2}. \tag{13}$$

Согласно (11), начальные и граничные условия для уравнения (13) запишем как

$$U(z,X_1) = W(z,X_1)\exp\left(-\frac{k_{1z}}{k_{2z}}z + \frac{k_{1z}^2}{2k_{2z}}X_1\right), \tag{14}$$

$$U(z=0,x) = U(z=\infty,x) = 0.$$

В работах [7], [8] найдено решение уравнения (13)

$$U(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_{2z}(x-X_1)}}\int\limits_0^\infty U(\xi,X_1)\chi\left[z,\xi,k_{2z}(x-X_1)\right]d\xi, \tag{15}$$

где обозначено

$$\chi(x_1,x_2,x_3) = \exp\left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{2x_3}\right) - \exp\left(-\frac{(x_1+x_2)^2}{2x_3}\right).$$

Подставляя (14) в решение (15), а затем (15) в (11), находим решение уравнения ФПК на отрезке $x \in [X_1, X]$

$$W(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_{2z}(x-X_1)}}\exp\left(-\frac{k_{1z}^2}{2k_{2z}}(x-X_1)\right)\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty W(\xi,X_1)\exp\left(-\frac{k_{1z}}{k_{2z}}(\xi-z)\right)\chi\left[z,\xi,k_{2z}(x-X_1)\right]d\xi.$$

Учитывая (8), перепишем последнее выражение в виде

$$W(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1(x-X_1)}}\exp\left(-\frac{a_1^2}{2b_1}(x-X_1)\right)\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty W(\xi,X_1)\exp\left(\frac{a_1}{b_1}(\xi-z)\right)\chi\left[z,\xi,b_1(x-X_1)\right]d\xi. \tag{16}$$

Плотность вероятности (16) при $x = X$ представляет собой начальное условие для следующего отрезка $x \in [X, x_0]$. Согласно (6) случайный процесс $z(x)$ при $x = X$ претерпевает скачок величиной $v - u$. Следовательно, $W(z, x+0) = W(z+u-v, x-0)$, и начальное условие для отрезка $x \in [X, x_0]$ имеет вид

$$W(z,X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1(X-X_1)}}\exp\left(-\frac{a_1^2}{2b_1}(X-X_1)\right)\times \tag{17}$$
$$\times\int\limits_0^\infty W(\xi,X_1)\exp\left(\frac{a_1}{b_1}(\xi-z+v-u)\right)\chi\left[z+u-v,\xi,b_1(X-X_1)\right]d\xi.$$

С помощью замены переменных (12) приводим уравнение ФПК к каноническому виду и записываем его решение аналогично (15)

$$U(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1(x-X)}}\int\limits_0^\infty W(\xi_1,X)\exp\left(\frac{a_1}{b_1}\xi_1 + \frac{a_1^2}{2b_1}X\right)\chi\left[z,\xi_1,b_1(x-X)\right]d\xi_1. \tag{18}$$

Подставляя (17) в (18) и возвращаясь к плотности вероятности $W(z,x)$, получаем решение уравнения ФПК на отрезке $x \in [X, x_0]$

$$W(z,x) = \frac{1}{2\pi b_1 \sqrt{(x-X)(X-X_1)}} \exp\left(-\frac{a_1^2}{2b_1}(x-X_1) - \frac{a_1}{b_1}(z+u-v)\right) \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty W(\xi, X_1) \exp\left(\frac{a_1}{b_1}\xi\right) \chi\left[\xi_1 + u - v, \xi, b_1(X-X_1)\right] \chi\left[z, \xi_1, b_1(x-X)\right] d\xi d\xi_1.$$

Положив в выражении (18) $x = x_0$, имеем начальное условие для следующего отрезка $[x_0, X_2]$. Решение уравнения (13) запишем аналогично (18) с учётом изменения коэффициентов сноса и диффузии (8)

$$U(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2(x-x_0)}} \int\limits_0^\infty W(\xi_2, x_0) \exp\left(-\frac{a_2}{b_2}\xi_2 + \frac{a_2^2}{2b_2}x_0\right) \chi\left[z, \xi_2, b_2(x-x_0)\right] d\xi_2.$$

Возвращаясь к плотности вероятности $W(z,x)$, получаем решение уравнения ФПК на отрезке $x \in [x_0, X_2]$

$$W(z,x) = \frac{\exp(-a_1(u-v)/b_1 + a_2 z/b_2)}{2\pi b_1 \sqrt{2\pi b_2(x-x_0)(x_0-X)(X-X_1)}} \exp\left(-\frac{a_1^2}{2b_1}(x_0-X_1) - \frac{a_2^2}{2b_2}(x-x_0)\right) \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty W(\xi, X_1) \exp\left(\frac{a_1}{b_1}\xi - \left[\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\right]\xi_2\right) \chi\left[\xi_1 + u - v, \xi, b_1(X-X_1)\right] \times \quad (19)$$
$$\times \chi\left[\xi_2, \xi_1, b_1(x_0-X)\right] \chi\left[z, \xi_2, b_2(x-x_0)\right] d\xi d\xi_1 d\xi_2.$$

Найдём теперь решение уравнения (10) при $X > x_0$ последовательно на отрезках $[X_1, x_0]$, $[x_0, X]$, $[X, X_2]$. Решение на первом отрезке $[X_1, x_0]$ совпадает с (16). Положив в (16) $x = x_0$, получим начальное условие для отрезка $[x_0, X]$

$$W(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1(x_0-X_1)}} \exp\left(-\frac{a_1^2}{2b_1}(x_0-X_1)\right) \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty W(\xi, X_1) \exp\left(\frac{a_1}{b_1}(\xi - z)\right) \chi\left[z, \xi, b_1(x_0-X_1)\right] d\xi. \quad (20)$$

С помощью замены переменных (12) приводим уравнение ФПК к каноническому виду и записываем его решение аналогично (15)

$$U(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2(x-x_0)}} \int\limits_0^\infty W(\xi_1, x_0) \exp\left(-\frac{a_2}{b_2}\xi_1 + \frac{a_2^2}{2b_2}x_0\right) \chi\left[z, \xi_1, b_2(x-x_0)\right] d\xi_1. \quad (21)$$

Подставляя (20) в (21) и возвращаясь к плотности вероятности $W(z,x)$, получаем решение уравнения ФПК на отрезке $x \in [x_0, X]$

$$W(z,x) = \frac{1}{2\pi \sqrt{b_1(x_0-X_1) b_2(x-x_0)}} \exp\left(-\frac{a_1^2}{2b_1}(x_0-X_1)\frac{a_2^2}{2b_2}(x-x_0)\right) \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty W(\xi, X_1) \exp\left(\frac{a_1}{b_1}\xi - \left[\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\right]\xi_1 + \frac{a_2}{b_2}z\right) \times$$
$$\times \chi\left[\xi_1, \xi, b_1(x_0-X_1)\right] \chi\left[z, \xi_1, b_2(x-x_0)\right] d\xi d\xi_1. \quad (22)$$

Плотность вероятности (22) при $x = X$ представляет собой начальное условие для следующего отрезка $x \in [X, X_2]$. Согласно (6) случайный процесс $z(x)$ при $x = X$ претерпевает скачок величиной $v - u$. Следовательно, $W(z, x+0) = W(z+u-v, x-0)$, и начальное условие для отрезка $[X, X_2]$ имеет вид $W(z, x) = W(z + u - v, X)$. Решение уравнения (13) запишем аналогично (21)

$$U(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_2(x-X)}} \int\limits_0^\infty W(\xi_2 + u - v, X) \exp\left(-\frac{a_2}{b_2}\xi_2 + \frac{a_2^2}{2b_2}X\right) \times \\ \times \chi\left[z, \xi_2, b_2(x-X)\right] d\xi_2. \tag{23}$$

Подставляя (22) в (23) и возвращаясь к плотности вероятности $W(z, x)$, получаем решение уравнения ФПК на отрезке $[X, X_2]$

$$W(z,x) = \frac{\exp(a_2(z+u-v)/b_2)}{2\pi b_2\sqrt{2\pi b_1(x_0 - X_1)(X - x_0)(x - X)}} \exp\left(-\frac{a_1^2}{2b_1}(x_0 - X_1) - \frac{a_2^2}{2b_2}(x - x_0)\right) \times \\ \times \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty W(\xi, X_1) \exp\left(\frac{a_1}{b_1}\xi - \left[\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\right]\xi_1\right) \chi\left[\xi_1, \xi, b_1(x_0 - X_1)\right] \times \\ \times \chi\left[\xi_2 + u - v, \xi_1, b_2(X - x_0)\right] \chi\left[z, \xi_2, b_2(x - X)\right] d\xi d\xi_1 d\xi_2. \tag{24}$$

Подставив найденные решения уравнения ФПК (19) и (24) в выражение (9), получим искомую функцию распределения (2)

$$F_2(u,v,X) = \frac{\exp(-a_1(u-v)/b_1 - a_1^2(x_0 - X_1)/2b_1)}{2\pi b_1\sqrt{(x_0 - X)(X - X_1)}} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty W_0(u - \xi) \exp\big(-a_1(\xi_2 - \xi)/b_1\big) \times \\ \times \varphi\big(2a_2/\sqrt{b_2}, X_2 - x_0, 2a_2\xi_2/b_2\big) \chi\big(\xi_1 + u - v, \xi, b_1(X - X_1)\big) \times \\ \times \chi\big(\xi_2, \xi_1, b_1(x_0 - X)\big) d\xi d\xi_1 d\xi_2, \quad X < x_0, \tag{25}$$

$$F_2(u,v,X) = \frac{\exp(a_2(u-v)/b_2 - a_1^2(x_0 - X_1)/2b_1)}{2\pi\sqrt{b_1 b_2 (X - x_0)(x_0 - X_1)}} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty W_0(u - \xi) \times \\ \times \exp\big(a_1\xi/b_1 + a_2\xi_2/b_2 - (a_1/b_1 + a_2/b_2)\xi_1 - a_2^2(X - x_0)/2b_2\big) \times \\ \times \chi\big(\xi_2 + u - v, \xi_1, b_2(X_2 - x_0)\big) \chi\big(\xi_1, \xi, b_1(x_0 - X_1)\big) \times \\ \times \varphi\big(2a_2/\sqrt{b_2}, X_2 - X, 2a_2\xi_2/b_2\big) d\xi d\xi_1 d\xi_2, \quad X > x_0, \tag{26}$$

где обозначено

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = \Phi\left(\frac{y_1}{2}\sqrt{y_2} + \frac{y_3}{y_1\sqrt{y_2}}\right) - \exp(-y_3)\Phi\left(\frac{y_1}{2}\sqrt{y_2} - \frac{y_3}{y_1\sqrt{y_2}}\right),$$

а $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)dt \Big/ \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности. Положив в выражении (26) $u = v = H$, $X = X_2$, находим функцию распределения (3) величины наибольшего максимума марковского случайного процесса

$$F_Y(H) = \frac{\exp(-a_1^2(x_0 - X_1)/2b_1)}{\sqrt{2\pi b_1(x_0 - X_1)}} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty W_0(H - \xi) \exp\big(a_1(\xi - \xi_1)/b_1\big) \times \\ \times \chi\big(\xi_1, \xi, b_1(x_0 - X_1)\big) \varphi\big(2a_2/\sqrt{b_2}, X_2 - x_0, 2a_2\xi_1/b_2\big) d\xi d\xi_1.$$

Подставляя функцию распределения (25), (26) в формулу (4), находим совместную плотность вероятности величины и положения наибольшего максимума марковского случайного процесса при $X \leqslant x_0$

$$W(u,X) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{W_0(u-\xi)\varphi\big(2a_2/\sqrt{b_2}, X_2-x_0, 2a_2\xi_1/b_2\big)}{\pi b_1^2 (X-X_1)^{3/2}(x_0-X)^{3/2}} \times \tag{27}$$
$$\times \xi\xi_1 \exp\left[-\frac{a_1^2}{2b_1}(x_0-X_1) - \frac{\xi^2}{2b_1(X-X_1)} - \frac{\xi_1^2}{2b_1(x_0-X)} + \frac{a_1}{b_1}(\xi-\xi_1)\right] d\xi d\xi_1$$

и при $X > x_0$

$$W(u,X) = \frac{1}{\pi\sqrt{b_2}(X-x_0)^{3/2}\sqrt{x_0-X_1}} \int_0^\infty\int_0^\infty \xi_1 W_0(u-\xi)\times \tag{28}$$
$$\times\left\{\frac{\exp\left[-a_2^2(X_2-X)/2b_2\right]}{\sqrt{2\pi b_2(X_2-X)}} + \frac{a_2}{b_2}\Phi\left(\sqrt{\frac{a_2^2}{b_2}(X_2-X)}\right)\right\}\times$$
$$\times \exp\left[\frac{a_1}{b_1}\xi - \left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}\right)\xi_1 - \frac{\xi_1^2}{2b_2(X-x_0)}\right]\chi\big(\xi,\xi_1,b_1(x_0-X_1)\big)d\xi d\xi_1.$$

Подставляя выражения (27) и (28) в (5), находим плотность вероятности положения наибольшего максимума марковского случайного процесса

$$W(X) = \frac{1}{\Delta}\begin{cases} z_1^2\Psi\left(z_1^2\dfrac{x_0-X}{\Delta}, z_1^2\dfrac{x_0-X_1}{\Delta}, z_2^2\dfrac{X_2-x_0}{\Delta}, \dfrac{1}{R}\right), & X \leqslant x_0,\\ z_2^2\Psi\left(z_2^2\dfrac{X-x_0}{\Delta}, z_2^2\dfrac{X_2-x_0}{\Delta}, z_1^2\dfrac{x_0-X_1}{\Delta}, R\right), & X > x_0. \end{cases} \tag{29}$$

где обозначено: $\Delta = X_2 - X_1$, $z_1^2 = 2a_1^2\Delta/b_1$, $z_2^2 = 2a_2^2\Delta/b_2$, $R = a_1b_2/a_2b_1$,

$$\Psi(y,y_1,y_2,y_3) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}|y|^{3/2}}\left\{\Phi\left(\sqrt{\frac{y_1-y}{2}}\right) + \frac{\exp\left[-(y_1-y)/4\right]}{\sqrt{\pi(y_1-y)}}\right\}\times$$
$$\times\int_0^\infty \xi\exp\left[-\frac{(\xi+y)^2}{4y}\right]\left[\Phi\left(\frac{y_3\xi+y_2}{\sqrt{2y_2}}\right) - \exp(-y_3\xi)\Phi\left(\frac{-y_3\xi+y_2}{\sqrt{2y_2}}\right)\right]d\xi. \tag{30}$$

Положение наибольшего максимума случайного процесса x_m часто играет роль оценки параметра сигнала. Поэтому рассмотрим свойства плотности вероятности (29). Найдём математическое ожидание случайной величины $x_m - x_0$, которое характеризует среднее отклонение положения максимума марковского процесса от величины x_0

$$b = \langle x_m - x_0\rangle = \int_{X_1}^{X_2}(x-x_0)W(x)dx = \tag{31}$$
$$= \frac{\Delta}{z_2^2}F_b\left(z_2^2\frac{X_2-x_0}{\Delta}, z_1^2\frac{x_0-X_1}{\Delta}, R\right) - \frac{\Delta}{z_1^2}F_b\left(z_1^2\frac{x_0-X_1}{\Delta}, z_2^2\frac{X_2-x_0}{\Delta}, \frac{1}{R}\right).$$

Здесь

$$F_b(y_1, y_2, y_3) = \int\limits_0^{y_1} x\Psi(x, y_1, y_2, y_3)dx =$$

$$= \int\limits_0^{y_1} \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \left\{ \Phi\left(\sqrt{\frac{y_1 - x}{2}}\right) + \frac{\exp\left[-(y_1 - x)/4\right]}{\sqrt{\pi(y_1 - x)}} \right\} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\infty} \xi \exp\left[-\frac{(\xi + x)^2}{4y}\right] \left[\Phi\left(\frac{y_3\xi + y_2}{\sqrt{2y_2}}\right) - \exp(-y_3\xi)\Phi\left(\frac{-y_3\xi + y_2}{\sqrt{2y_2}}\right)\right] d\xi dx.$$

Квадрат отклонения положения наибольшего максимума марковского случайного процесса $y(x)$ от точки x_0 характеризуется величиной

$$V = \left\langle (x_m - x_0)^2 \right\rangle = \int\limits_{X_1}^{X_2} (x - x_0)^2 W(x)dx = \tag{32}$$

$$= \frac{\Delta^2}{z_2^4} F_V\left(z_2^2 \frac{X_2 - x_0}{\Delta}, z_1^2 \frac{x_0 - X_1}{\Delta}, R\right) + \frac{\Delta^2}{z_1^4} F_V\left(z_1^2 \frac{x_0 - X_1}{\Delta}, z_2^2 \frac{X_2 - x_0}{\Delta}, \frac{1}{R}\right).$$

Здесь

$$F_V(y_1, y_2, y_3) = \int\limits_0^{y_1} x^2\Psi(x, y_1, y_2, y_3)dx =$$

$$= \int\limits_0^{y_1} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \Phi\left(\sqrt{\frac{y_1 - x}{2}}\right) + \frac{\exp\left[-(y_1 - x)/4\right]}{\sqrt{\pi(y_1 - x)}} \right\} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\infty} \xi \exp\left[-\frac{(\xi + x)^2}{4y}\right] \left[\Phi\left(\frac{y_3\xi + y_2}{\sqrt{2y_2}}\right) - \exp(-y_3\xi)\Phi\left(\frac{-y_3\xi + y_2}{\sqrt{2y_2}}\right)\right] d\xi dx.$$

Для исследования асимптотического поведения плотности вероятности (29) и моментов (31) и (32) выполним замену переменных

$$\mu_m = \begin{cases} z_1^2(x_m - x_0)/\Delta, & x_m \leqslant x_0, \\ z_2^2(x_m - x_0)/\Delta, & x_m > x_0. \end{cases} \tag{33}$$

Плотность вероятности случайной величины μ_m имеет вид

$$W(\mu) = \begin{cases} \Psi\left(-\mu, z_1^2(x_0 - X_1)/\Delta, z_2^2(X_2 - x_0)/\Delta, 1/R\right), & \mu \leqslant 0, \\ \Psi\left(\mu, z_2^2(X_2 - x_0)/\Delta, z_1^2(x_0 - X_1)/\Delta, R\right), & \mu > 0. \end{cases} \tag{34}$$

Как известно [5], коэффициент сноса характеризует скорость изменения регулярной составляющей случайного процесса, а коэффициент диффузии — мощность случайной составляющей. Поэтому можно считать, что безразмерные величины z_i характеризуют отношение сигнал/шум. При $a_1 \gg b_1$ и $a_2 \gg b_2$, что равносильно $z_i \to \infty$, $i = 1;2$, второй и третий аргументы функции (34) стремятся к бесконечности. Устремив к бесконечности второй и третий аргументы функции (30), получим

$$\Psi(x,\infty,\infty,y) \equiv W_a(x,y) = \tag{35}$$
$$= (2y+1)\Phi\big\{-(2y+1)\sqrt{|x|/2}\big\}\exp\big\{y(y+1)|x|\big\} - \Phi\big\{-\sqrt{|x|/2}\big\} =$$
$$= -1 + \Phi\big\{\sqrt{|x|/2}\big\} + (2y+1)\exp\big\{y(y+1)|x|\big\}\Big[1-\Phi\big\{(2y+1)\sqrt{|x|/2}\big\}\Big].$$

Используя выражение (35), запишем асимптотическое представление плотности вероятности (34)

$$W(\mu) = \begin{cases} W_a(-\mu, 1/R), & \mu \leqslant 0, \\ W_a(\mu, R), & \mu > 0. \end{cases} \tag{36}$$

При $y=1$, распределение (35) принимает вид

$$W_a(x,1) = 3\Phi\big\{-3\sqrt{|x|/2}\big\}\exp\big\{2|x|\big\} - \Phi\big\{-\sqrt{|x|/2}\big\} =$$
$$= 3\exp\big(2|x|\big)\Big[1-\Phi\big\{3\sqrt{|x|/2}\big\}\Big] + \Phi\big\{\sqrt{|x|/2}\big\} - 1. \tag{37}$$

Свойства этой плотности вероятности подробно изучены в [9], [3]. Случайные величины, описываемые плотностью (37), имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию 13/2. Коэффициенты асимметрии и эксцесса плотности вероятности (37) равны соответственно нулю и $1779/169 \approx 10{,}53$.

При $y \neq 1$ математическое ожидание и второй начальный момент случайной величины μ_m найдём, используя распределение (36)

$$\langle \mu_m \rangle = \frac{R(R+2)-(2R+1)}{(R+1)^2} = \frac{R-1}{R+1},$$

$$\left\langle \mu_m^2 \right\rangle = 2\frac{R(2R^2+6R+5)+(5R^2+6R+2)}{(R+1)^3}.$$

Учитывая (33), можем записать математическое ожидание и средний квадрат отклонения положения максимума x_m случайного процесса $y(x)$ от точки x_0

$$\langle x_m - x_0 \rangle = \Delta \frac{z_1^2 R(R+2) - z_2^2(2R+1)}{z_1^2 z_2^2 (R+1)^2}, \tag{38}$$

$$\left\langle (x_m - x_0)^2 \right\rangle = 2\Delta^2 \frac{z_1^4 R(2R^2+6R+5) + z_2^4(5R^2+6R+2)}{z_1^4 z_2^4 (R+1)^3}. \tag{39}$$

При $R=1$ выражения (38) – (39) приобретают вид

$$\langle \mu_m \rangle = 0, \quad \left\langle \mu_m^2 \right\rangle = 13/2,$$
$$\langle x_m - x_0 \rangle = 0, \quad \left\langle (x_m - x_0)^2 \right\rangle = 13\Delta^2/2z_1^2 z_2^2.$$

Найдём теперь функцию распределения момента x' первого достижения границы h марковским случайным процессом $y(x)$. Если под переменной x понимать время, то x' — время первого достижения границы реализацией процесса $y(x)$. Функция распределения случайной величины x' по определению равна [6], [5]

$$F(h,X) = P\{x' < X\} = 1 - \widetilde{F}(h,X), \tag{40}$$

где

$$\widetilde{F}(h,X) = P\left\{\sup_{X_1 \leqslant x \leqslant X} y(x) < h\right\} \tag{41}$$

— вероятность недостижения процессом $y(x)$ границы h на интервале $[X_1, X]$. Используя вспомогательный случайный процесс $z(x) = h - y(x)$ можем аналогично (9) записать

$$\widetilde{F}(h, X) = P\{y(x) > 0,\ x \in [X_1, X]\} = \int\limits_0^\infty W(z, X)\,dz, \tag{42}$$

где $W(z, x)$ — одномерная плотность вероятности реализаций случайного процесса $z(x)$, ни разу не достигших границ $z = 0$ и $z = \infty$. Функция $W(z, x)$ является решением уравнения ФПК (10) [5], [6]. Найдём функцию (41) отдельно для $X < x_0$ и $X > x_0$. При $X < x_0$ воспользуемся решением уравнения ФПК (16), подставляя которое в формулу (42), а затем (42) в (40), находим

$$F(h, X) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi b_1(X - X_1)}} \exp\left(-\frac{a_1^2}{2b_1}(X - X_1)\right) \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty W(\xi, X_1) \exp\left(\frac{a_1}{b_1}(\xi - z)\right) \chi\left[z, \xi, b_1(X - X_1)\right] d\xi dz,\ X < x_0.$$

После вычисления интеграла по dz, учитывая, что $W(\xi, X_1) = W_0(h-\xi)$, получаем выражение для функции распределения времени первого достижения границы при $X < x_0$

$$F(h, X) = 1 - \int\limits_0^\infty W_0(h - \xi) \left\{\Phi\left(\frac{\sqrt{X - X_1}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{X - X_1}}\right) - \right.$$
$$\left. - \exp(-\xi)\Phi\left(\frac{\sqrt{X - X_1}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{X - X_1}}\right)\right\} d\xi.$$

При $X > x_0$ воспользуемся решением уравнения ФПК (22), подставляя которое в формулу (42), а затем (42) в (40), находим

$$F(h, X) = 1 - \frac{1}{2\pi\sqrt{b_1(X_0 - X_1)b_2(x - x_0)}} \exp\left(-\frac{a_1^2}{2b_1}(x_0 - X_1)\right) \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty W(\xi, X_1) \exp\left(\frac{a_1}{b_1}\xi - \left[\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\right]\xi_1 + \frac{a_2}{b_2}z - \frac{a_2^2}{2b_2}(X - x_0)\right) \times$$
$$\times\chi\left[\xi_1, \xi, b_1(x_0 - X_1)\right] \chi\left[z, \xi_1, b_2(X - x_0)\right] d\xi d\xi_1 dz,\ X > x_0.$$

После вычисления интеграла по dz, учитывая, что $W(\xi, X_1) = W_0(h-\xi)$, получаем выражение для функции распределения времени первого достижения границы при $X > x_0$

$$F(h, X) = 1 - \frac{\exp(-a_1^2(x_0 - X_1)/2b_1)}{\sqrt{2\pi b_1(x_0 - X_1)}} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty W_0(h - \xi) \exp\big(a_1(\xi - \xi_1)/b_1\big)\times$$
$$\times\chi\big(\xi_1, \xi, b_1(x_0 - X_1)\big)\varphi\big(2a_2/\sqrt{b_2}, X - x_0, 2a_2\xi_1/b_2\big)d\xi d\xi_1.$$

Полученные результаты могут быть использованы для анализа алгоритмов оптимальной и квазиоптимльной обработки разрывных сигналов [3], когда решающая статистика (или её приращение) обладают марковскими свойствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Теория обнаружения сигналов / П.С. Акимов, П.А. Бакут, В.А. Богданович [и др.]. — М.: Радио и связь, 1984. — 440 с.

[2] Захаров А.В. Обнаружение флуктуирующего импульса с неизвестным временем прихода и интенсивностью / А.В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2006. — № 2. — С. 62–71.

[3] Трифонов А.П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А.П. Трифонов, Ю.С. Шинаков. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.

[4] Захаров А.В. Оценка времени прихода флуктуирующего радиоимпульса с неизвестной интенсивностью / А.В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 25–40.

[5] Тихонов В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. — М.:Радио и связь, 1977. — 488 с.

[6] Тихонов В.И. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный приём сигналов / В.И. Тихонов, Н.К. Кульман. — М.: Сов. радио, 1975. — 704 с.

[7] Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. — М.: Наука, 1965. — Т. 2. — 656 с.

[8] Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1977. — 738 с.

[9] Трифонов А.П. Разрывные модели сигналов и оценка их параметров / А.П. Трифонов // Прикладная теория случайных процессов и полей. Ульяновск: УлГТУ, 1995. — С. 164–214.

REFERENCES

[1] Akimov I.S., Bakut P.A., Bogdanovich V.A. et. al. Theory of detection of signals. [Akimov I.S., Bakut P.A., Bogdanovich V.A. i dr. Teoriya obnaruzheniya signalov]. Moscow: Radio and communications, 1984, 440 p.

[2] Zacharov A. V. Detection of fluctuating pulse unknown arrival time and intensity. [Zaxarov A.V. Obnaruzhenie fluktuiruyushhego impul'sa s neizvestnym vremenem prixoda i intensivnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2006, no. 2, pp. 62–71.

[3] Trifonov A. P., Shinakov Yu. S. Joint distinction signals and estimation of their parameters in noise. [Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i ocenka ix parametrov na fone pomex]. Moscow: Radio and communications, 1986, 264 p.

[4] Zaharov A.V. Estimate of the time of arrival of the radio fluctuating unknown intensity. [Zaxarov A.V. Ocenka vremeni prixoda fluktuiruyushhego radioimpul'sa s neizvestnoj intensivnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 25–40.

[5] Tihonov V.I., Mironov M.A. Markov processes. [Tihonov V. I., Mironov M. A. Markovskie processy]. Moscow: Radio and communications, 1977, 488 p.

[6] Tihonov V.I., Kul'man N.K. Nonlinear Filtering and quasi-coherent reception of signals. [Nelinejnaya fil'traciya i kvazikogerentnyj priyom signalov]. Moscow: Sov. Radio, 1975, 704 p.

[7] Smirnov V.I. Course of Higher Mathematics. [Smirnov V.I. Kurs vysshej matematiki]. Moscow: Science, 1965, Vol. 2, 656 p.

[8] Tihonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. [Tihonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniya matematicheskoj fiziki]. Moscow: Science, 1977, 738 p.

[9] Trifonov A.P. Discontinuous models of signals and estimation of their parameters. [Trifonov A.P. Razryvnye modeli signalov i ocenka ix parametrov]. Ulyanovsk: UlGTU, 1995, pp. 164–214.

Трифонов Андрей Павлович, доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, заведующий кафедрой радиофизики ВГУ, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru
Тел.: 8(473)–220–89–16

Trifonov Andrei Pavlovich, Doctor of technical sciences, Professor, Honored Scientist of the Russian Federation, Head of the Department of Radiophysics of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru
Tel.: 8(473)–220–89–16

Корчагин Юрий Эдуардович, доктор физико-математичеких наук, доцент, доцент каф. радиофизики ВГУ, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru
Тел.: 8(473)–220–89–16

Korchagin Yurii Eduardovich, Doctor of physicomathematical sciences, Accosiate Professor of the Departament of radiophysic of Voronezh State University. Voronezh, Russian Federation
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru
Tel.: 8(473)–220–89–16

Беспалова Марина Борисовна, кандидат физико-математичеких наук, доцент, доцент каф. радиофизики ВГУ, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: bmb5@yandex.ru
Тел.: 8(473)–220–89–16

Bespalova Marina Borisovna, Candidate of physicomathematical sciences, Accosiate Professor of the Departament of radiophysic of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: bmb5@yandex.ru
Tel.: 8(473)–220–89–16