

314

314

Nonlinear World

ISSN 2070-0970

НЕЛИНЕЙНЫЙ



№ 3, т.13, 2015

МИР

$$\frac{d^a}{d x^a}, \alpha = \frac{m}{n}$$



тел./факс: (495) 625-9241
e-mail: info@radiotec.ru

ПОДПИСНОЙ ИНДЕКС 82651 В КАТАЛОГЕ АГЕНТСТВА "РОСПЕЧАТЬ": ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ

Совместная оценка параметров подстилающего фона и изображения пространственно протяженного объекта с неизвестной площадью

© Авторы, 2015

© ЗАО «Издательство «Радиотехника», 2015

А.П. Трифонов – д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Радиофизика», засл. деятель науки РФ, Воронежский государственный университет (ВГУ)

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru, trirad@mail.ru

Ю.Н. Прибытков – к.ф.-м.н., доцент, кафедра «Радиофизика», Воронежский государственный университет (ВГУ)

E-mail: ypribytkov@gmail.com

Найдены характеристики квазиправдоподобных и максимально правдоподобных оценок регулярных составляющих и интенсивностей стохастических изображения и фона, полученных при наблюдении пространственно протяженного объекта. Проведен анализ влияния априорного незнания площади изображения на точность оценок параметров изображения и фона.

Ключевые слова: случайное изображение, фон, неизвестная площадь, оценки регулярной составляющей и интенсивности.

Characteristics of quasi likelihood and maximum likelihood estimates of regular component and intensity of stochastic image and background were obtained when a spatially extended object was observed. Analysis of influence of the a priori ignorance of the image area on the accuracy of the parameter estimates and the background image was carry out.

Keywords: stochastic image, background, unknown area, estimates of regular component and intensity.

ВВЕДЕНИЕ

При обработке данных дистанционного наблюдения пространственно протяженных объектов нередко возникает задача оценки параметров изображения и подстилающей поверхности. Для количественной оценки эффективности практически применимых алгоритмов обработки изображений требуется анализ их потенциальных характеристик. Такие характеристике могут быть получены для соответствующих моделей изображения и фона. Одной из моделей, пригодной для описания изображений со стохастической текстурой, является модель в виде реализации гауссовского случайного поля [1–3], которая широко используется для синтеза алгоритмов обнаружения и фильтрации изображений [2]. Эта модель позволяет описать текстуры изображения и фона путем задания функций их пространственных корреляций. Кроме того, она является частным случаем обобщенной гауссовской модели [4], описывающей широкий класс реальных изображений. На основе гауссовской модели могут быть синтезированы алгоритмы оценки, оптимальные в смысле теории статистических решений.

Одними из основных параметров, оценка которых необходима, в рамках гауссовской модели является величина регулярной составляющей и интенсивности изображения. Свойства оценок интенсивности подробно изучены в серии работ [5–7] для гауссовских случайных процессов с неизвестными параметрами при наличии помех с неизвестными параметрами. Тем не менее прямое обобщение результатов этих работ на изображения пространственно протяженных объектов может оказаться некорректным. Это связано с тем что, при обработке изображений пространственно протяженных объектов необходимо учитывать эффекты затенения фона объектом. Поэтому необходимо использовать аппликативную модель взаимодействия полезных и мешающих случайных полей, в отличие от аддитивной модели, характерной для одномерных сигналов.

Цель работы – получение и анализ характеристик оценок регулярных составляющих и интенсивностей изображения и фона при условии, что площадь изображения может быть априори неизвестна.

МОДЕЛЬ НАБЛЮДАЕМЫХ ДАННЫХ

Предположим, что наблюдаемые данные $x(\mathbf{r})$ представляют собой реализацию случайного поля и занимают двумерную область G , площадь которой равна χ_G . Здесь $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ – радиус-вектор точки на плоскости, принадлежащей G . Поле $x(\mathbf{r})$ включает в себя полезное изображение объекта $s(\mathbf{r})$, пространственный шум $n(\mathbf{r})$ и фоновое излучение $v(\mathbf{r})$. Это излучение обусловлено рассеянием зондирующего сигнала подстилающей поверхностью, на которой находится обнаруживаемый объект. Для учета проявляющихся на практике эффектов затенения фона воспользуемся аппликативной моделью взаимодействия изображения и фона [3], согласно которой наблюдаемая реализация может быть представлена в виде

$$x(\mathbf{r}) = I_s(\mathbf{r}, \chi_0) s(\mathbf{r}) + I_v(\mathbf{r}, \chi_0) v(\mathbf{r}) + n(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Здесь χ_0 – истинное значение неизвестной площади, которое может принимать значение из интервала $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$;

$$I_s(\mathbf{r}, \chi) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \Omega_s(\chi), \\ 0, & \mathbf{r} \notin \Omega_s(\chi), \end{cases} \quad I_v(\mathbf{r}, \chi) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \Omega_v(\chi), \\ 0, & \mathbf{r} \notin \Omega_v(\chi), \end{cases}$$

$\Omega_s(\chi)$ – область, занимаемая полезным изображением с площадью χ , $\Omega_v(\chi) = G \setminus \Omega_s(\chi)$ – область, занимаемая фоном.

Далее будем предполагать, что изображение $s(\mathbf{r})$ и фон $v(\mathbf{r})$ представляют собой однородные статистически взаимно независимые гауссовские поля с регулярными составляющими (математическими ожиданиями) a_s, a_v и корреляционными функциями $B_s(\mathbf{r}), B_v(\mathbf{r})$. Также будем считать, что спектральные

плотности изображения $G_s(\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\mathbf{r}) \exp(-j\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ и фона $G_v(\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} B_v(\mathbf{r}) \exp(-j\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, постоянны в

пределах областей пространственных частот $\tilde{\omega}_s$ и $\tilde{\omega}_v$ соответственно. Вне этих областей спектральные плотности изображения и фона равны нулю, т.е. $G_s(\boldsymbol{\omega}) = g_s I(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\omega}_s)$, $G_v(\boldsymbol{\omega}) = g_v I(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\omega}_v)$, где $I(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\omega}) = 1$, при $\boldsymbol{\omega} \in \tilde{\omega}$ и $I(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\omega}) = 0$, при $\boldsymbol{\omega} \notin \tilde{\omega}$. Положим, что пространственный шум $n(\mathbf{r})$ взаимно независим с изображением и фоном и представляет собой центрированный белый гауссовский шум с односторонней спектральной плотностью N_0 . Таким образом, задача состоит в оценке регулярных составляющих a_s, a_v , а также относительных интенсивностей изображения и фона $q_s = 2g_s/N_0$, $q_v = 2g_v/N_0$.

КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫЕ ОЦЕНКИ

Для определения оптимальных оценок неизвестных параметров, в соответствии с теорией статистических решений [7], найдем функционал отношения правдоподобия (ФОР) при проверке гипотезы (1) против альтернативы $x(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r})$. Предположим, что площади изображения и фона существенно превышают площади областей их пространственной корреляции, так что выполняются неравенства

$$\mu_s = \chi_{\min} S_{\omega_s} / (2\pi)^2 \gg 1, \quad \mu_b = \chi_{\min} S_{\omega_v} / (2\pi)^2 \gg 1, \quad \mu_v = (\chi_G - \chi_{\max}) S_{\omega_v} / (2\pi)^2 \gg 1, \quad (2)$$

где S_{ω_s} и S_{ω_v} – площади областей ω_s и ω_v , соответственно. Тогда, обобщая результаты [8] на случай неизвестной площади, получим, что искомый логарифм ФОР может быть представлен в виде

$$L(a_s, q_s, a_v, q_v, \chi) = L_s(a_s, q_s, \chi) + L_v(a_v, q_v, \chi), \quad (3)$$

где

$$L_s(a_s, q_s, \chi) = \frac{1}{N_0} Y_s(\chi) - \frac{1}{N_0} \frac{1}{1+q_s} \left[Y_s(\chi) - 2a_s X_s(\chi) + a_s^2 \chi \right] - \frac{1}{2} \frac{\chi}{\chi_{\min}} \mu_s \ln(1+q_s); \quad (4)$$

$$L_v(a_v, q_v, \chi) = \frac{1}{N_0} Y_v(\chi) - \frac{1}{N_0} \frac{1}{1+q_v} \left[Y_v(\chi) - 2a_v X_v(\chi) + a_v^2 (\chi_G - \chi) \right] - \frac{1}{2} \frac{\chi_G - \chi}{\chi_G - \chi_{\max}} \mu_v \ln(1+q_v) \quad (5)$$

– логарифмы ФОП, записанные для областей, занимаемых изображением и фоном. Здесь введены следующие обозначения:

$$X_s(\chi) = \int_{\Omega_s(\chi)} x(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad X_v(\chi) = \int_{\Omega_v(\chi)} x(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad Y_s(\chi) = \int_{\Omega_s(\chi)} y_s^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad Y_v(\chi) = \int_{\Omega_v(\chi)} y_v^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r};$$

$y_s(\mathbf{r})$, $y_v(\mathbf{r})$ – сигналы на выходах линейных пространственных фильтров, передаточные функции которых должны удовлетворять условиям $|H_s(\omega)|^2 = I(\omega, \tilde{\omega}_s)$, $|H_v(\omega)|^2 = I(\omega, \tilde{\omega}_v)$ соответственно.

Согласно методу максимального правдоподобия оценки параметров a_s, q_s, a_v, q_v при априори известной площади χ_0 изображения представляют собой положение абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП (3)

$$\hat{a}_s(\chi_0), \hat{q}_s(\chi_0), \hat{a}_v(\chi_0), \hat{q}_v(\chi_0) = \arg \max_{a_s, q_s, a_v, q_v} L(a_s, q_s, a_v, q_v, \chi_0). \quad (6)$$

Если значение площади χ_0 изображения неизвестно, то можно воспользоваться квазиравдоподобными оценками [10]. Для этого заменим неизвестное значение площади изображения в (3) на некоторое предполагаемое значение χ^* , в общем случае, отличное от истинного значения его площади χ_0 . При этом оценки неизвестных регулярных составляющих и интенсивностей изображения и фона являются положением абсолютного максимума $L(a_s, q_s, a_v, q_v, \chi^*)$ (3):

$$\hat{a}_s(\chi^*), \hat{q}_s(\chi^*), \hat{a}_v(\chi^*), \hat{q}_v(\chi^*) = \arg \max_{a_s, q_s, a_v, q_v} L(a_s, q_s, a_v, q_v, \chi^*).$$

Производя соответствующую максимизацию в (4) и (5), найдем явный вид оценок:

$$\hat{a}_s(\chi^*) = \frac{X_s(\chi^*)}{\chi^*}, \quad \hat{q}_s(\chi^*) = \frac{2}{N_0} \frac{\chi_{\min}}{\tilde{\chi}} \frac{[Y_s(\chi^*) - X_s^2(\chi^*)/\chi^*]}{\mu_s} - 1, \quad (7)$$

$$\hat{a}_v(\chi^*) = \frac{X_v(\chi^*)}{\chi_G - \chi^*}, \quad \hat{q}_v(\chi^*) = \frac{2}{N_0} \frac{(\chi_G - \chi_{\max})}{(\chi_G - \chi^*)} \frac{[Y_v(\chi^*) - X_v^2(\chi^*)/(\chi_G - \chi^*)]}{\mu_v} - 1. \quad (8)$$

Из этих выражений видно, что оценки неизвестных параметров изображения и фона получены с использованием реализации наблюдаемых данных в неперекрывающихся областях. Поэтому при выполнении условий (2) оценки регулярной составляющей и интенсивности изображения являются статистически независимыми от оценок регулярной составляющей и интенсивности фона.

Найдем математические ожидания и дисперсии полученных оценок с учетом отличия предполагаемого значения площади χ^* от истинного χ_0 . Выполняя соответствующие усреднения и учитывая (2), получим следующие характеристики оценок параметров изображения:

математическое ожидание оценки регулярной составляющей изображения

$$m_{\hat{a}_s}(\chi^*) = a_{s0} \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} + a_{v0} \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} \right], \quad (9)$$

дисперсия оценки регулярной составляющей изображения

$$\sigma_{\hat{a}_s}^2(\chi^*) = \frac{N_0}{\chi^*} \left[\frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} (1 + q_{s0}) + \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} \right] (1 + q_{v0}) \right], \quad (10)$$

где a_{s0} , a_{v0} , q_{s0} , q_{v0} , – истинные значения регулярных составляющих и интенсивностей изображения и фона.

Математическое ожидание оценки интенсивности изображения имеет вид

$$m_{\hat{q}_s}(\chi^*) = \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} (1 + q_{s0}) - 1 + \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} \right] \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi q_{v0} \right) + o(\mu_s^{-1}), \quad (11)$$

где $\varphi = S_{osv} / \sqrt{S_{os} S_{ov}}$ – коэффициент, определяющий степень перекрытия областей, занимаемых спектральными плотностями полезного изображения и фона, S_{osv} – площадь области перекрытия этих областей.

Дисперсия оценки интенсивности изображения имеет вид

$$\sigma_{\hat{q}_s}^2(\chi^*) = \frac{2}{\mu_s} \frac{\chi_{\min}}{\chi^*} \left(\frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} (1 + q_{s0})^2 + \frac{\chi_{\min}}{\chi^*} \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} \right] \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi \left[(1 + q_{v0})^2 - 1 \right] \right) \right) + o(\mu_s^{-1}). \quad (12)$$

Коэффициент взаимной корреляции оценок регулярной составляющей и интенсивности изображения

$$R(\chi^*) = \frac{1}{\sigma_{\hat{q}_s}(\chi^*) \sigma_{\hat{a}_s}(\chi^*)} \left\langle \left[\hat{q}_s(\chi^*) - m_{\hat{q}_s}(\chi^*) \right]^2 \right\rangle = \\ = \frac{1}{\mu_s} \frac{\chi_{\min}}{\chi^*} \frac{1}{\sigma_{\hat{q}_s}(\chi^*) \sigma_{\hat{a}_s}(\chi^*)} (a_{s0} - a_{v0})(q_{s0} - q_{v0}) \frac{\min(\chi^*, \chi_0)}{\chi^*} \left(1 - \frac{\min(\chi^*, \chi_0)}{\chi^*} \right). \quad (13)$$

В числителе последнего выражения опущены слагаемые, имеющие порядок малости μ_s^{-1} и менее. Выражение (13) показывает, что оценки регулярной составляющей и интенсивности некоррелированы, если предполагаемое значение χ^* не превышает истинного значения площади χ_0 .

Рассмотрим смещения $b_{\hat{a}_s}(\chi^*)$ и $b_{\hat{q}_s}(\chi^*)$ оценок регулярной составляющей и интенсивности изображения. Используя (9) и (11), получим

$$b_{\hat{a}_s}(\chi^*) = (a_{v0} - a_{s0}) \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} \right], \quad b_{\hat{q}_s}(\chi^*) = \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} \right] \left(\sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi q_{v0} - q_{s0} \right). \quad (14)$$

Эти выражения показывают, что квазиравдоподобные оценки регулярной составляющей и интенсивности изображения являются несмещенными и состоятельными, если $\chi^* \leq \chi_0$. При $\chi^* > \chi_0$ эти квазиравдоподобные оценки являются смещенными, причем абсолютная величина смещения растет с увеличением разности $\chi^* - \chi_0$. Тем не менее из (14) следует, что абсолютные величины смещений ограничены:

$$\left| b_{\hat{a}_s}(\chi^*) \right| < |a_{v0} - a_{s0}|, \quad \left| b_{\hat{q}_s}(\chi^*) \right| < \left| \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi q_{v0} - q_{s0} \right|.$$

Таким образом, квазиравдоподобные оценки регулярной составляющей и интенсивности изображения не смещены и состоятельны при $\chi^* \leq \chi_0$ и являются несостоятельными при $\chi^* > \chi_0$.

Используя (9)–(13), найдем выражения для рассеяния $V_{\hat{q}_s}(\chi^*)$ и $V_{\hat{a}_s}(\chi^*)$ квазиравдоподобных оценок регулярной составляющей изображения и его интенсивности:

$$V_{\hat{a}_s}(\chi^*) = \frac{N_0}{\chi^*} \left[(1 + q_{s0}) + \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} \right] (q_{v0} - q_{s0}) \right] + (a_{v0} - a_{s0})^2 \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} \right]^2, \quad (15)$$

$$V_{\hat{q}_s}(\chi^*) = \frac{2}{\mu_s} \frac{\chi_{\min}}{\chi^*} \left((1+q_{s0})^2 + \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} \right] \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi \left[(1+q_{v0})^2 - 1 \right] - (1+q_{s0})^2 \right) \right) + \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} \right]^2 \left(\sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi q_{v0} - q_{s0} \right)^2. \quad (16)$$

Рассмотрим характеристики квазиравдоподобных оценок регулярной составляющей и интенсивности фона. Для математического ожидания $m_{\hat{a}_v}(\chi^*)$ и дисперсии $\sigma_{\hat{a}_v}^2(\chi^*)$ оценки регулярной составляющей фона могут быть получены следующие выражения:

$$m_{\hat{a}_v}(\chi^*) = a_{s0} \left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right] + a_{v0} \left[\frac{\chi_G - \max(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right], \quad (17)$$

$$\sigma_{\hat{a}_v}^2(\chi^*) = \frac{N_0}{\chi_G - \chi^*} \left[\left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right] (1+q_{s0}) + \left[\frac{\chi_G - \max(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right] (1+q_{v0}) \right]. \quad (18)$$

Аналогично, для математического ожидания $m_{\hat{q}_v}(\chi^*)$ и дисперсии $\sigma_{\hat{q}_v}^2(\chi^*)$ оценки интенсивности фона, получим

$$m_{\hat{q}_v}(\chi^*) = \left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right] \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi q_{s0} \right) + \left[\frac{\chi_G - \max(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right] (1+q_{v0}) - 1 + O(\mu_v^{-1}), \quad (19)$$

$$\sigma_{\hat{q}_v}^2(\chi^*) = \frac{2}{\mu_v} \frac{\chi_G - \chi_{\max}}{\chi_G - \chi^*} \left(\left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right] \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_b}} \varphi \left[(1+q_{s0})^2 - 1 \right] \right) + \left[\frac{\chi_G - \max(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right] (1+q_v)^2 \right) + o(\mu_v^{-1}). \quad (20)$$

Коэффициент корреляции оценок регулярной составляющей и интенсивности фона имеет вид

$$R_{\hat{a}_v \hat{q}_v}(\chi^*) = \frac{1}{\sigma_{\hat{a}_v}(\chi^*) \sigma_{\hat{q}_v}(\chi^*)} \left(\left[\hat{q}_v(\chi^*) - m_{\hat{q}_v}(\chi^*) \right]^2 \right) = \frac{1}{\sigma_{\hat{a}_v}(\chi^*) \sigma_{\hat{q}_v}(\chi^*)} \frac{1}{\mu_v} \frac{\chi_G - \chi^*}{\chi_G - \chi} (a_{s0} - a_{v0}) (q_{s0} - q_{v0}) \left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right] \left[\frac{\chi_G - \max(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right]. \quad (21)$$

Из этого выражения видно, что коэффициент корреляции отличен от нуля, только если $\chi^* < \chi_0$.

Рассмотрим смещения $b_{\hat{a}_v}(\chi^*)$ и $b_{\hat{q}_v}(\chi^*)$ оценок регулярной составляющей и интенсивности изображения. Используя (17) и (19), получим

$$b_{\hat{a}_v}(\chi^*) = (a_{s0} - a_{v0}) \left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right], \quad b_{\hat{q}_v}(\chi^*) = \left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right] \left(\sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_b}} \varphi q_{s0} - q_{v0} \right). \quad (22)$$

Эти выражения показывают, что квазиравдоподобные оценки регулярной составляющей и интенсивности фона являются несмещенными и состоятельными при $\chi^* \geq \chi_0$. При $\chi^* < \chi_0$ эти квазиравдоподобные оценки являются смещенными, причем абсолютная величина смещения растет с увеличением разности $\chi_0 - \chi^*$. Из (22) следует, что абсолютные величины смещений ограничены:

$$|b_{\hat{a}_v}(\chi^*)| < |a_{s0} - a_{v0}| \frac{\chi_0}{\chi_G}, \quad |b_{\hat{q}_v}(\chi^*)| < \frac{\chi_0}{\chi_G} \sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_b} \varphi q_{s0} - q_{v0}}.$$

Таким образом, квазиравдоподобные оценки регулярной составляющей и интенсивности фона не смещены и состоятельны при $\chi^* \geq \chi_0$ и являются несостоятельными при $\chi^* < \chi_0$.

Используя (17)–(20), найдем выражения для рассеяния $V_{\hat{q}_v}(\chi^*)$ и $V_{\hat{a}_v}(\chi^*)$ квазиравдоподобных оценок регулярной составляющей фона и его интенсивности

$$V_{\hat{a}_v}(\chi^*) = \frac{N_0}{\chi_G - \chi^*} \left[(1 + q_{v0}) + \left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right] (q_{s0} - q_{v0}) \right] + (a_{s0} - a_{v0})^2 \left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right]^2, \quad (23)$$

$$V_{\hat{q}_v}(\chi^*) = \frac{2}{\mu_v} \frac{\chi_G - \chi_{\max}}{\chi_G - \chi^*} \left((1 + q_v)^2 + \left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right] \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_b}} \varphi \left[(1 + q_{s0})^2 - 1 \right] - (1 + q_v)^2 \right) \right) + \left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi^*)}{\chi_G - \chi^*} \right]^2 \left(\sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_b}} \varphi q_{s0} - q_{v0} \right)^2. \quad (24)$$

Положив в выражениях (9)–(13), (15), (16) и (17)–(21), (23), (24) $\chi^* = \chi_0$ получим характеристики оценки максимального правдоподобия параметров изображения и фона при априори известной площади:

$$m_{\hat{a}_s}(\chi_0) = a_{s0}, \quad \sigma_{\hat{a}_s}^2(\chi_0) = \frac{N_0(1 + q_{s0})}{\chi_0}, \quad b_{\hat{a}_s}(\chi_0) = 0, \quad V_{\hat{a}_s}(\chi_0) = \sigma_{\hat{a}_s}^2(\chi_0), \quad (25)$$

$$m_{\hat{q}_s}(\chi_0) = q_{s0}, \quad \sigma_{\hat{q}_s}^2(\chi_0) = \frac{2}{\mu_s} \frac{\chi_{\min}}{\chi_0} (1 + q_{s0})^2, \quad b_{\hat{q}_s}(\chi_0) = 0, \quad V_{\hat{q}_s}(\chi_0) = \sigma_{\hat{q}_s}^2(\chi_0), \quad (26)$$

$$m_{\hat{a}_v}(\chi_0) = a_{v0}, \quad \sigma_{\hat{a}_v}^2(\chi_0) = \frac{N_0(1 + q_{v0})}{\chi_G - \chi_0}, \quad b_{\hat{a}_v}(\chi_0) = 0, \quad V_{\hat{a}_v}(\chi_0) = \sigma_{\hat{a}_v}^2(\chi_0), \quad (27)$$

$$m_{\hat{q}_v}(\chi_0) = q_{v0}, \quad \sigma_{\hat{q}_v}^2(\chi_0) = \frac{2}{\mu_v} \frac{\chi_G - \chi_{\max}}{\chi_G - \chi_0} (1 + q_v)^2, \quad b_{\hat{q}_v}(\chi_0) = 0, \quad V_{\hat{q}_v}(\chi_0) = \sigma_{\hat{q}_v}^2(\chi_0), \quad (28)$$

$$R_{\hat{a}_s \hat{q}_s}(\chi_0) = 0, \quad R_{\hat{a}_v \hat{q}_v}(\chi_0) = 0.$$

При известной площади изображения оценки его регулярной составляющей и интенсивности некоррелированы, также некоррелированы оценки регулярной составляющей и интенсивности фона.

Полученные характеристики позволяют провести численный анализ влияния априорного незнания площади на точность квазиравдоподобных оценок регулярных составляющих и интенсивностей изображения и фона.

На рис. 1 построены проигрыши $Z_{\hat{a}_s}(\chi^*) = V_{\hat{a}_s}(\chi^*)/V_{\hat{a}_s}(\chi_0)$ и $Z_{\hat{a}_v}(\chi^*) = V_{\hat{a}_v}(\chi^*)/V_{\hat{a}_v}(\chi_0)$ в рассеянии квазиравдоподобных оценок регулярных составляющих интенсивности в зависимости от относительной ошибки в предполагаемом значении площади $\delta = (\chi^* - \chi_0)/\chi_0$. При построении этих кривых значение $z_s = \sqrt{2a_{s0}^2 \chi_0 / N_0}$, характеризующее отношение сигнал/шум для регулярной составляющей сигнала, принималось равным $10^{1/2}$, а интенсивности изображения и фона выбирались равными $q_{s0} = q_{v0} = 1$. Кривые с номером 1 соответствуют значению $z_v = \sqrt{2a_{v0}^2 \chi_0 / N_0} = 10^{3/2}$, кривые с номером 2 – значению $z_v = 5 \cdot 10^{1/2}$, кривые с номером 3 – значению $z_v = 3 \cdot 10^{1/2}$.

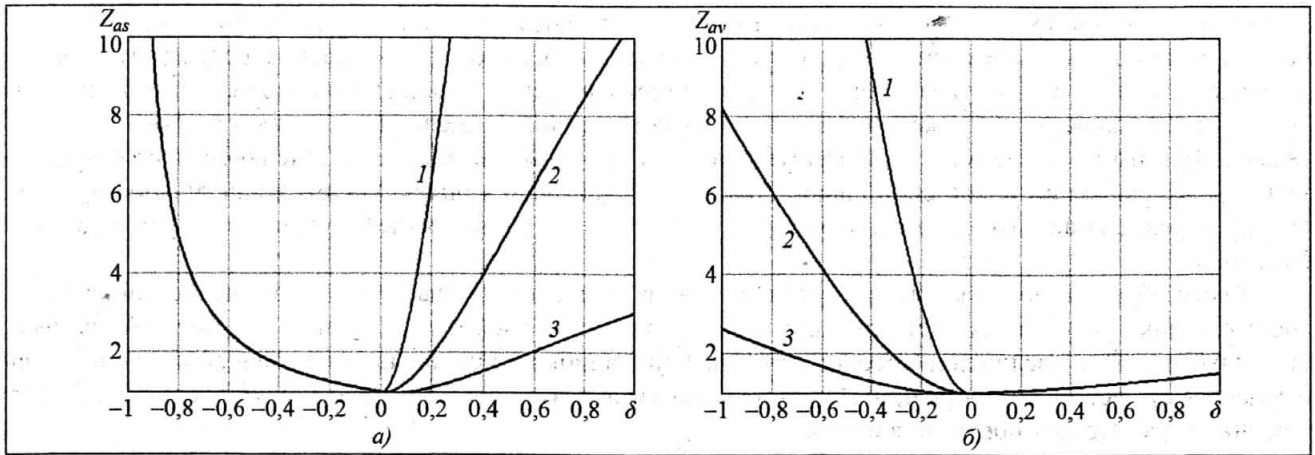


Рис. 1. Проигрыш в рассеянии квазиравдоподобной оценки регулярных составляющих изображения (а) и фона (б)

Из рис. 1 видно, что зависимости проигрыша в точности оценки имеют различный характер при положительных и отрицательных ошибках в предполагаемом значении площади. Например, если предполагаемое значение площади меньше истинного, то проигрыш в рассеянии квазиравдоподобной оценки регулярной составляющей изображения (рис. 1,а) не зависит от параметров (регулярной составляющей и интенсивности) фона. При увеличении предполагаемого значения площади больше истинного значения может наблюдаться резкий рост проигрыша, который зависит, в частности, от регулярной составляющей фона. При этом проигрыш увеличивается с ростом разности между регулярными составляющими изображения и фона. Для проигрыша в точности квазиравдоподобной оценке регулярной составляющей фона характерна обратная ситуация (рис. 1,б) – параметры изображения не влияют на проигрыш, если предполагаемое значение площади больше истинного. Кроме того, любые отличные от нуля значения ошибки предполагаемого значения площади приводят к несостоятельности одной из оценок регулярных составляющих изображения и фона.

На рис. 2 приведены зависимости проигрышей $Z_{q_s}(\chi^*) = V_{q_s}(\chi^*)/V_{q_s}(\chi_0)$ и $Z_{q_v}(\chi^*) = V_{q_v}(\chi^*)/V_{q_v}(\chi_0)$ в рассеянии квазиравдоподобных оценок интенсивностей изображения и фона.

При построении этих кривых регулярные составляющие изображения и фона считались равными: $a_{s0} = a_{v0}$, $\mu_s = \mu_b = 200$, $\varphi = 0,5$, $\chi_{\max}/\chi_{\min} = 10$, $\chi_0/\chi_{\min} = 5$, $\chi_G/\chi_{\max} = 2$. На рис. 2,а кривая 1 построена для $q_{s0} = 1$, $q_{v0} = 10$, кривая 2 – для $q_{s0} = 10$, $q_{v0} = 1$, кривая 3 – для $q_{s0} = 2$, $q_{v0} = 1$, кривая 4 – для $q_{s0} = 1$, $q_{v0} = 3$. На рис. 2,б кривая 1 построена для $q_{s0} = 1$, $q_{v0} = 10$, кривая 2 – для $q_{s0} = 10$, $q_{v0} = 1$, кривая 3 – для $q_{s0} = 1$, $q_{v0} = 3$, кривая 4 – для $q_{s0} = 3$, $q_{v0} = 1$. Анализ кривых на рис. 2 показывает, что ошиб-

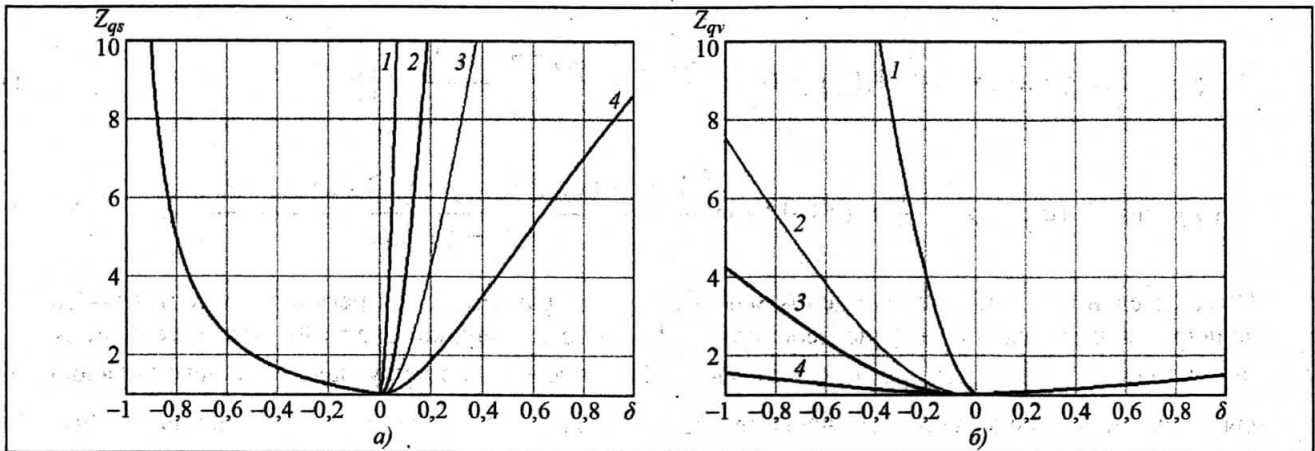


Рис. 2. Проигрыш в рассеянии квазиравдоподобной оценки интенсивностей изображения (а) и фона (б)

ки разных знаков в предполагаемом значении площади влияют на точность квазиравдоподобных оценок интенсивностей изображения и фона по-разному, аналогично случаю оценок регулярных составляющих. В частности, при увеличении предполагаемого значения площади больше истинного значения оценка интенсивности изображения становится несостоятельна, а оценка интенсивности фона – состоятельна. При этом в зависимости от параметров фона проигрыш в оценке интенсивности изображения может резко расти при увеличении ошибки площади. Проигрыш в оценке интенсивности фона при увеличении предполагаемого значения площади истинного значения перестает зависеть от параметров изображения.

Таким образом, при отклонении предполагаемого значения площади от истинного квазиравдоподобные оценки регулярных составляющих и интенсивностей изображения или фона могут быть несостоятельными. При увеличении абсолютного значения ошибки в предполагаемом значении площади наблюдается существенный рост проигрыша в точности оценки, причем скорость роста зависит от соотношения параметров изображения и фона.

ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Для того чтобы уменьшить проигрыш в точности оценки регулярных составляющих и интенсивностей изображения и фона, используем вместо предполагаемого значения площади χ^* оценку максимального правдоподобия $\hat{\chi}$ неизвестного значения площади χ_0 . Хотя площадь – неинформативный параметр, ее оценка нужна для улучшения точности оценок параметров a_s, q_s, a_v, q_v . В этом случае совместные оценки максимального правдоподобия неизвестных параметров получаются по следующему правилу:

$$\hat{a}_s, \hat{q}_s, \hat{a}_v, \hat{q}_v = \underset{a_s, q_s, a_v, q_v, \chi}{\operatorname{argsup}} L(a_s, q_s, a_v, q_v, \chi) = \underset{a_s, q_s, a_v, q_v}{\operatorname{argsup}} L(a_s, q_s, a_v, q_v, \hat{\chi}),$$

где $\hat{\chi}$ – оценка максимального правдоподобия площади изображения.

Оценка максимального правдоподобия неизвестной площади при неизвестных a_s, q_s, a_v, q_v может быть записана в виде

$$\hat{\chi} = \underset{\chi}{\operatorname{argsup}} L(\chi), \quad (29)$$

где $L(\chi) = \max_{a_s, q_s, a_v, q_v} L(a_s, q_s, a_v, q_v, \chi)$.

Максимизируем логарифм ФОП (3) по неизвестным регулярным составляющим и интенсивностям изображения и фона. С учетом (4) и (5) получим для (29)

$$L(\chi) = L_s(\chi) + L_v(\chi), \quad (30)$$

где

$$L_s(\chi) = \max_{a_s, q_s} L_s(a_s, q_s, \chi) = \frac{1}{N_0} Y_s(\chi) - \left(1 + \ln \left[\frac{2\chi_{\min} [Y_s(\chi) - X_s^2(\chi)/\chi]}{N_0 \chi \mu_s} \right] \right); \quad (31)$$

$$L_v(\chi) = \max_{a_v, q_v} L_v(a_v, q_v, \chi) = \frac{1}{N_0} Y_v(\chi) - \left(1 + \ln \left[\frac{2(\chi_G - \chi_{\max}) [Y_v(\chi) - X_v^2(\chi)/(\chi_G - \chi)]}{(\chi_G - \chi) N_0 \mu_v} \right] \right). \quad (32)$$

Следовательно, для получения оценок максимального правдоподобия регулярных составляющих и интенсивностей изображения и фона необходимо формировать функционал (30) для всех возможных значений площади $\chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]$. Затем, согласно (29), определять оценку максимального правдоподобия для площади $\hat{\chi}$ и подставлять ее значение вместо χ^* в (7) и (8). Обычно для получения $\hat{\chi}$ (29) придется использовать многоканальную структуру, которая формирует функционал $L(\chi)$ (30) в отдельных

точках интервала возможных значений неизвестной площади $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$. Поэтому реализация оценки максимального правдоподобия регулярных составляющих и интенсивностей изображения и фона оказывается существенно более сложной, чем реализация квазиправдоподобных оценок.

Рассмотрим статистические характеристики $L_s(\chi)$ (31) и $L_v(\chi)$ (32). Нетрудно показать, что максимизированные логарифмы ФОП (31) и (32) с учетом (7) и (8) могут быть представлены в виде

$$L_s(\chi) = \frac{\chi}{N_0} \hat{a}_s^2(\chi) + \frac{1}{2} \frac{\chi}{\chi_{\min}} \mu_s [\hat{q}_s(\chi) - \ln(1 + \hat{q}_s(\chi))], \quad (33)$$

$$L_v(\chi) = \frac{(\chi_G - \chi)}{N_0} \hat{a}_v^2(\chi) + \frac{1}{2} \frac{(\chi_G - \chi)}{(\chi_G - \chi_{\max})} \mu_v [\hat{q}_v(\chi) - \ln(1 + \hat{q}_v(\chi))]. \quad (34)$$

Из выражений (11) и (12) следует, что при неограниченном увеличении числа степеней свободы $\mu_s \rightarrow \infty$ отношение $\sigma_{\hat{q}_s}(\chi) / (m_{\hat{q}_s}(\chi) + 1) \rightarrow 0$. Поэтому при выполнении (2) случайная величина, которой пропорционально последнее слагаемое в (33), приближенно может быть представлена в виде

$$\hat{q}_s(\chi) - \ln(1 + \hat{q}_s(\chi)) \approx m_{\hat{q}_s}(\chi) \frac{1 + \hat{q}_s(\chi)}{1 + m_{\hat{q}_s}(\chi)} - \ln(1 + m_{\hat{q}_s}(\chi)).$$

Тогда логарифм ФОП (33) может быть записан как

$$L_s(\chi) \approx \frac{\chi}{N_0} \hat{a}_s^2(\chi) + \frac{1}{2} \frac{\chi}{\chi_{\min}} \mu_s \left[m_{\hat{q}_s}(\chi) \frac{1 + \hat{q}_s(\chi)}{1 + m_{\hat{q}_s}(\chi)} - \ln(1 + m_{\hat{q}_s}(\chi)) \right]. \quad (35)$$

Введем в рассмотрение нормированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией

$$\xi_{qs}(\chi) = (\hat{q}_s(\chi) - m_{\hat{q}_s}(\chi)) / \sigma_{\hat{q}_s}(\chi), \quad \xi_{as}(\chi) = (\hat{a}_s(\chi) - m_{\hat{a}_s}(\chi)) / \sigma_{\hat{a}_s}(\chi).$$

Тогда (33) может быть представлена в виде

$$L_s(\chi) \approx \frac{\chi}{N_0} \sigma_{\hat{a}_s}^2(\chi) \xi_{as}^2(\chi) + \frac{1}{2} \mu_s \frac{\chi}{\chi_{\min}} \frac{\sigma_{\hat{q}_s}(\chi)}{1 + m_{\hat{q}_s}(\chi)} \xi_{qs}(\chi) + \frac{2\chi}{N_0} m_{\hat{a}_s}(\chi) \sigma_{\hat{a}_s}(\chi) \xi_{as} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\chi}{\chi_{\min}} \mu_s [m_{\hat{q}_s}(\chi) - \ln(1 + m_{\hat{q}_s}(\chi))] + \frac{\chi}{N_0} m_{\hat{a}_s}^2(\chi).$$

Рассмотрим в полученном выражении поведение множителей перед случайными величинами $\xi_{as}^2(\chi)$, $\xi_{qs}(\chi)$, ξ_{as} при $\mu_s \rightarrow \infty$. Нетрудно показать, что при увеличении числа степеней свободы множитель

$\frac{1}{2} \mu_s \frac{\chi}{\chi_{\min}} \frac{\sigma_{\hat{q}_s}(\chi)}{1 + m_{\hat{q}_s}(\chi)}$, стоящий перед случайной величиной $\xi_{qs}(\chi)$, неограниченно увеличивается, в то

время как произведения $\frac{2\chi}{N_0} m_{\hat{a}_s}(\chi) \sigma_{\hat{a}_s}(\chi)$, стоящее перед ξ_{as} , и $\frac{\chi}{N_0} \sigma_{\hat{a}_s}^2(\chi)$, стоящее перед случайной

величиной $\xi_{as}^2(\chi)$, не зависят от μ_s и имеют конечные значения. Поэтому при выполнении условия (2)

заменяем случайную величину $\xi_{as}^2(\chi)$ на ее математическое ожидание и получим следующее приближение для логарифма ФОП (33)

$$L_s(\chi) \approx \frac{1}{2} \mu_s \frac{\chi}{\chi_{\min}} \frac{1 + \hat{q}_s(\chi)}{1 + m_{\hat{q}_s}(\chi)} + \frac{1}{2} \frac{\chi}{\chi_{\min}} \mu_s \left[m_{\hat{q}_s}(\chi) - 1 - \ln(1 + m_{\hat{q}_s}(\chi)) \right] + \frac{\chi}{N_0} (m_{\hat{a}_s}^2(\chi) + \sigma_{\hat{a}_s}^2(\chi)). \quad (36)$$

Проводя аналогичные преобразования для логарифма ФОП (34), получим

$$L_v(\chi) \approx \frac{1}{2} \mu_v \frac{(\chi_G - \chi)}{(\chi_G - \chi_{\max})} \frac{1 + \hat{q}_v(\chi)}{1 + m_{\hat{q}_v}(\chi)} + \frac{1}{2} \frac{(\chi_G - \chi)}{(\chi_G - \chi_{\max})} \mu_v \left[m_{\hat{q}_v}(\chi) - 1 - \ln(1 + m_{\hat{q}_v}(\chi)) \right] + \frac{(\chi_G - \chi)}{N_0} (m_{\hat{a}_v}^2(\chi) + \sigma_{\hat{a}_v}^2(\chi)). \quad (37)$$

Из найденных выражений следует, что при выполнении условия (2) статистические характеристики случайных составляющих логарифмов ФОП $L_s(\chi)$ и $L_v(\chi)$ определяются случайной составляющей оценки соответствующей интенсивности. Поэтому рассмотрим структуру оценок интенсивности изображения и фона при некотором фиксированном значении площади χ . Из выражений (7) и (8) следует, что каждая из оценок включает два слагаемых, которые, в частности для $\hat{q}_s(\chi^*)$, имеют вид

$$\tilde{Y}_s(\chi^*) = \frac{2}{N_0} \frac{\chi_{\min}}{\chi^*} \frac{[Y_s(\chi^*)]}{\mu_s} - 1 - \text{асимптотически гауссовская случайная величина при выполнении (2) [8],}$$

и $Z(\chi^*) = -\frac{2}{N_0} \frac{\chi_{\min}}{\chi^{*2}} X_s^2(\chi^*) = -\frac{2\chi_{\min}\hat{a}_s^2(\chi^*)}{\mu_s N_0}$ – негауссовская составляющая оценки, подчиняющаяся гамма-распределению.

Из выражений (9) и (10) следует, что распределение случайной величины $\hat{a}_s^2(\chi^*)$ асимптотически не зависит от числа степеней свободы μ_s . Поэтому математическое ожидание и дисперсия величины $Z(\chi^*)$ пропорциональны μ_s^{-1} и μ_s^{-2} соответственно. Вычисляя математическое ожидание и дисперсию величины $\tilde{Y}_s(\chi^*)$, получим

$$m_{\tilde{Y}_s} \approx \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} (1 + q_{s0}) + \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} \right] \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi q_{v0} \right) - 1 + O(\mu_s^{-1}), \quad (38)$$

$$\sigma_{\tilde{Y}_s}^2 = \frac{2}{\mu_s} \frac{\chi_{\min}}{\chi^*} \left(\frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} (1 + q_{s0})^2 + \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi^*)}{\chi^*} \right] \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi [(1 + q_v)^2 - 1] \right) \right) + o(\mu_s^{-1}). \quad (39)$$

Из выражений (38) и (39) следует, что математическое ожидание и дисперсия величины $\tilde{Y}_s(\chi^*)$ имеют порядок малости μ_s^0 и μ_s^{-1} соответственно. При выполнении условия (2) математическое ожидание и дисперсия случайной величины $Z(\chi^*)$ существенно меньше, чем соответствующие характеристики $\tilde{Y}_s(\chi^*)$. Поэтому при выполнении условия $\mu_s \rightarrow \infty$ можно пренебречь вкладом негауссовской случайной величины $Z(\chi^*)$ в оценку интенсивности $\hat{q}_s(\chi^*)$, а саму оценку интенсивности изображения считать асимптотически гауссовской случайной величиной. Из сравнения (38) и (39) с (11) и (12) следует, что математическое ожидание и дисперсия оценки интенсивности изображения асимптотически совпадают с математическим ожиданием и дисперсией случайной величины $\tilde{Y}_s(\chi^*)$ при $\mu_s \rightarrow \infty$.

Таким образом, показано, что при выполнении условия (2) оценку интенсивности изображения $\hat{q}_s(\chi)$ и, следовательно, логарифм ФОП $L_s(\chi)$ можно считать гауссовскими случайными процессами. Аналогично можно показать, что оценка интенсивности фона $\hat{q}_v(\chi)$ и логарифм ФОП $L_v(\chi)$ также являются гауссовскими случайными процессами. Следовательно, логарифм ФОП $L(\chi)$ (30) можно считать асимптотически гауссовским случайным процессом.

Используя представление (36) и (37), выразим математические ожидания $m_{L_s}(\chi)$, $m_{L_v}(\chi)$ и корреляционные функции $B_{L_s}(\chi_1, \chi_2)$, $B_{L_v}(\chi_1, \chi_2)$ логарифмов ФОП $L_s(\chi)$ и $L_v(\chi)$ через соответствующие характеристики оценок интенсивности изображения и фона. Получим

$$m_{L_s}(\chi) \approx \frac{1}{2} \frac{\chi}{\chi_{\min}} \mu_s \left[m_{q_s}(\chi) - \ln(1 + m_{q_s}(\chi)) \right] + \frac{\chi}{N_0} \left(m_{a_s}^2(\chi) + \sigma_{a_s}^2(\chi) \right), \quad (40)$$

$$m_{L_v}(\chi) \approx \frac{1}{2} \frac{(\chi_G - \chi)}{(\chi_G - \chi_{\max})} \mu_v \left[m_{q_v}(\chi) - \ln(1 + m_{q_v}(\chi)) \right] + \frac{(\chi_G - \chi)}{N_0} \left(m_{a_v}^2(\chi) + \sigma_{a_v}^2(\chi) \right), \quad (41)$$

$$B_{L_s}(\chi_1, \chi_2) \approx \frac{1}{4} \mu_s^2 \frac{\chi_1 \chi_2}{\chi_{\min}^2} \frac{B_{q_s}(\chi_1, \chi_2)}{(1 + m_{q_s}(\chi_1))(1 + m_{q_s}(\chi_2))}, \quad (42)$$

$$B_{L_v}(\chi_1, \chi_2) \approx \frac{1}{4} \mu_v^2 \frac{(\chi_G - \chi_1)(\chi_G - \chi_2)}{(\chi_G - \chi_{\max})^2} \frac{B_{q_v}(\chi_1, \chi_2)}{(1 + m_{q_v}(\chi_1))(1 + m_{q_v}(\chi_2))}, \quad (43)$$

где

$$B_{q_s}(\chi_1, \chi_2) = \frac{\chi_{\min}}{\chi_1 \chi_2} \frac{2}{\mu_s} \left(\min(\chi_0, \chi_1, \chi_2)(1 + q_{s0})^2 + [\min(\chi_1, \chi_2) - \min(\chi_0, \chi_1, \chi_2)] \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi \left[(1 + q_v)^2 - 1 \right] \right) \right) + o(\mu_s^{-1}) \quad (44)$$

– корреляционная функция оценки интенсивности изображения;

$$B_{q_v}(\chi_1, \chi_2) = \frac{\chi_G - \chi_{\max}}{(\chi_G - \chi_1)(\chi_G - \chi_2)} \frac{2}{\mu_v} \left(\min(\chi_G - \chi_0, \chi_G - \chi_1, \chi_G - \chi_2)(1 + q_v)^2 + \right. \\ \left. + [\min(\chi_G - \chi_1, \chi_G - \chi_2) - \min(\chi_G - \chi_0, \chi_G - \chi_1, \chi_G - \chi_2)] \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_v}} \varphi \left[(1 + q_s)^2 - 1 \right] \right) \right) + o(\mu_v^{-1}) \quad (45)$$

– корреляционная функция оценки интенсивности фона.

Подставляя (9)–(11) в (40) и (17)–(19) в (41) можно получить явный вид математических ожиданий логарифмов ФОП (40) и (41):

$$m_{L_s}(\chi) \approx \frac{1}{2} \frac{\chi}{\chi_{\min}} \mu_s \left[\frac{\min(\chi_0, \chi)}{\chi} q_{s0} + \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi)}{\chi} \right] q_{v0} - \ln \left(1 + \frac{\min(\chi_0, \chi)}{\chi} q_{s0} + \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi)}{\chi} \right] q_{v0} \right) \right] + \\ + \frac{\chi}{N_0} \left(\left(a_{s0} \frac{\min(\chi_0, \chi)}{\chi} + a_{v0} \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi)}{\chi} \right] \right)^2 + \left(\frac{N_0}{\chi} \left[\frac{\min(\chi_0, \chi)}{\chi} (1 + q_{s0}) + \left[1 - \frac{\min(\chi_0, \chi)}{\chi} \right] (1 + q_{v0}) \right] \right) \right),$$

$$m_{L_v}(\chi) \approx \frac{1}{2} \frac{(\chi_G - \chi)}{(\chi_G - \chi_{\max})} \mu_v \left(\sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_v}} \varphi \left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi)}{\chi_G - \chi} \right] q_{s0} + \left[\frac{\chi_G - \max(\chi_0, \chi)}{\chi_G - \chi} \right] q_{v0} - \right. \\ \left. - \ln \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_v}} \varphi \left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi)}{\chi_G - \chi} \right] q_{s0} + \left[\frac{\chi_G - \max(\chi_0, \chi)}{\chi_G - \chi} \right] q_{v0} \right) \right) + \frac{(\chi_G - \chi)}{N_0} \times \\ \times \left(\left(a_{s0} \left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi)}{\chi_G - \chi} \right] + a_{v0} \left[\frac{\chi_G - \max(\chi_0, \chi)}{\chi_G - \chi} \right] \right)^2 + \frac{N_0}{\chi_G - \chi} \left[\left[\frac{\chi_0 - \min(\chi_0, \chi)}{\chi_G - \chi} \right] (1 + q_{s0}) + \left[\frac{\chi_G - \max(\chi_0, \chi)}{\chi_G - \chi} \right] (1 + q_{v0}) \right] \right).$$

Подставляя (44) и (11) в (42), соответственно можно получить явный вид корреляционной функции $B_{L_s}(\chi_1, \chi_2)$ логарифма ФОП (36):

$$B_{L_s}(\chi_1, \chi_2) \approx \frac{1}{2} \mu_s \frac{1}{\chi_{\min}} \left(\left[\min(\chi_1, \chi_2) - \min(\chi_0, \chi_1, \chi_2) \right] \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi \left[(1 + q_v)^2 - 1 \right] \right)}{(1 + q_{s0})^2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \mu_s \frac{1}{\chi_{\min}} \min(\chi_0, \chi_1, \chi_2) \times \left(1 - \left[2 - \frac{\min(\chi_0, \chi_1)}{\chi_1} - \frac{\min(\chi_0, \chi_2)}{\chi_2} \right] \frac{\left(\sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi q_{v0} - q_{s0} \right)}{1 + q_{s0}} \right).$$

Аналогично, подставляя (45) и (19) в (43), получим выражение для корреляционной функции $B_{L_v}(\chi_1, \chi_2)$ логарифма ФОП (37):

$$B_{L_v}(\chi_1, \chi_2) \approx \frac{1}{2} \mu_v \frac{1}{\chi_G - \chi_{\max}} \times$$

$$\times \left(\left[\min(\chi_G - \chi_1, \chi_G - \chi_2) - \min(\chi_G - \chi_0, \chi_G - \chi_1, \chi_G - \chi_2) \right] \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_b}} \varphi \left[(1 + q_{s0})^2 - 1 \right] \right)}{(1 + q_{v0})^2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \mu_v \frac{1}{\chi_G - \chi_{\max}} \min(\chi_G - \chi_0, \chi_G - \chi_1, \chi_G - \chi_2) \times$$

$$\times \left(1 - \left[2 - \frac{\min(\chi_G - \chi_0, \chi_G - \chi_1)}{\chi_G - \chi_1} - \frac{\min(\chi_G - \chi_0, \chi_G - \chi_2)}{\chi_G - \chi_2} \right] \frac{\left(\sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_b}} \varphi q_{s0} - q_{v0} \right)}{1 + q_{v0}} \right).$$

Поскольку оценки $\hat{q}_s(\chi)$ и $\hat{q}_v(\chi)$ получены путем интегрирования профильтрованных данных на неперекрывающихся областях, то при выполнении условия (2) их можно приближенно считать статистически независимыми. Поэтому приближенно статистически независимы логарифмы ФОП $L_s(\chi)$ и $L_v(\chi)$. Тогда корреляционная функция логарифма ФОП (30) $B_L(\chi_1, \chi_2)$ может быть представлена в виде $B_L(\chi_1, \chi_2) = B_{L_s}(\chi_1, \chi_2) + B_{L_v}(\chi_1, \chi_2)$.

Полученные выражения показывают, что асимптотически гауссовский случайный процесс $L(\chi)$ обладает кусочно-дифференцируемыми моментами в окрестности истинного значения неизвестной площади. Поэтому, как показано в [8], такой процесс может быть аппроксимирован гауссовским марковским случайным процессом. Для расчета характеристик оценки неизвестной площади при неизвестных параметрах изображения и фона воспользуемся методом локально-марковской аппроксимации, развитым в работах [8, 9]. Используя методику, предложенную в [8], найдем коэффициенты сноса $K_1(\chi)$ и диффузии процесса $K_2(\chi)$:

$$K_1(\chi) = \frac{1}{\chi_{\min}} \begin{cases} k_1, & \chi < \chi_0, \\ -k_2, & \chi > \chi_0, \end{cases} \quad K_2(\chi) = \frac{1}{\chi_{\min}} \begin{cases} d_1, & \chi < \chi_0, \\ d_2, & \chi > \chi_0, \end{cases}$$

где

$$k_1 = \frac{1}{2} \mu_s [q_{s0} - \ln(1 + q_{s0})] + \frac{1}{2} \frac{\chi_{\min}}{(\chi_G - \chi_{\max})} \mu_v \left[\ln(1 + q_{v0}) - q_{v0} + \frac{q_{v0}}{1 + q_{v0}} \left(q_{v0} - \sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_b}} \varphi q_{s0} \right) \right]; \quad (46)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \mu_s \left[\ln(1 + q_{s0}) - q_{s0} + \frac{q_{s0}}{1 + q_{s0}} \left(q_{s0} - \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi q_{v0} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\chi_{\min}}{(\chi_G - \chi_{\max})} \mu_v [q_{v0} - \ln(1 + q_{v0})]; \quad (47)$$

$$d_1 = \frac{1}{2} \left(\mu_s + \mu_v \frac{\chi_{\min}}{\chi_G - \chi_{\max}} \left(\frac{\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_b}} \varphi \left[(1 + q_{s0})^2 - 1 \right] \right)}{(1 + q_{v0})^2} \right) \right); \quad (48)$$

$$d_2 = \frac{1}{2} \left(\mu_s \left(\frac{\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \varphi \left[(1 + q_{v0})^2 - 1 \right] \right)}{(1 + q_{s0})^2} \right) + \mu_v \frac{\chi_{\min}}{\chi_G - \chi_{\max}} \right).$$

Воспользовавшись результатами применения метода локально-марковской аппроксимации [9] получим условное значение рассеяния оценки площади в виде

$$V(\hat{\chi} | \chi_0) \approx \chi_{\min}^2 \left[\frac{2 + 6R + 5R^2}{2(1+R)^3} \frac{1}{z_2^4} + \frac{R(5 + 6R + 2R^2)}{2(1+R)^3} \frac{1}{z_1^4} \right], \quad (49)$$

где $R = f_1$, $f_1 = k_2 d_1 / k_1 d_2$; $z_1 = k_1 / \sqrt{d_1}$; $z_2 = k_2 / \sqrt{d_2}$.

Подставляя (46)–(48) в (49), легко убедиться, что среднеквадратическое отклонение ошибки оценки площади пропорционально величине μ^{-1} , где $\mu = \max(\mu_s, \mu_v)$. Тогда, подставляя $\chi^* = \hat{\chi} = \chi_0 + O(\mu^{-1})$ в (9)–(12) и (17)–(20), нетрудно убедиться, что при использовании оценки максимального правдоподобия площади, характеристики оценок регулярных составляющих и интенсивностей изображения и фона асимптотически при $\mu_s \rightarrow \infty$, $\mu_v \rightarrow \infty$ совпадают с соответствующими характеристиками оценок, полученных при априори известной площади (25)–(28). Иными словами, при выполнении условий (2) можно положить

$$m_{\hat{a}_s}(\hat{\chi}) \approx m_{a_s}(\chi_0), \quad m_{\hat{a}_v}(\hat{\chi}) \approx m_{a_v}(\chi_0), \quad m_{\hat{q}_s}(\hat{\chi}) \approx m_{q_s}(\chi_0), \quad m_{\hat{q}_v}(\hat{\chi}) \approx m_{q_v}(\chi_0), \\ \sigma_{\hat{a}_s}^2(\hat{\chi}) \approx \sigma_{a_s}^2(\chi_0), \quad \sigma_{\hat{a}_v}^2(\hat{\chi}) \approx \sigma_{a_v}^2(\chi_0), \quad \sigma_{\hat{q}_s}^2(\hat{\chi}) \approx \sigma_{q_s}^2(\chi_0), \quad \sigma_{\hat{q}_v}^2(\hat{\chi}) \approx \sigma_{q_v}^2(\chi_0).$$

Таким образом, точность оценки регулярных составляющих и интенсивностей изображения и фона при использовании оценки максимального правдоподобия неизвестной площади изображения такие же, как и при априори известной площади. То есть в отличие от квазиправдоподобных оценок, которые приводят к несостоятельным оценкам, оценка максимального правдоподобия площади обеспечивает состоятельность оценок регулярных составляющих и интенсивностей изображения и фона. Кроме того, использование оценки максимального правдоподобия может приводить к существенному выигрышу в точности оценок параметров фона и изображения, по сравнению со случаем использования квазиправдоподобных оценок. Для оценки проигрыша в точности квазиправдоподобной оценки по сравнению со случаем использования оценки максимального правдоподобия можно пользоваться характеристиками, приведенными на рис. 1 и 2.

Следует отметить, что получение оценки максимального правдоподобия площади требует существенного дополнительного усложнения аппаратуры при практической реализации алгоритмов оценки. К

сожалению, оценка максимального правдоподобия площади не может быть вычислена аналитически в явном виде. Это приводит к необходимости реализовывать сложные многоканальные алгоритмы оценки.

Относительно простые с точки зрения аппаратной реализации квазиправдоподобные оценки параметров подстилающего фона и изображения могут быть несостоятельными и существенно проигрывать в точности оценкам максимального правдоподобия при априори известной площади изображения. Характеристики совместных оценок максимального правдоподобия параметров изображения, подстилающего фона и неизвестной площади изображения асимптотически с ростом отношения сигнал/шум инвариантны к отсутствию априорной информации о площади изображения. Однако, в отличие от квазиправдоподобных оценок, оценки максимального правдоподобия удастся реализовать лишь с помощью многоканального по неизвестной площади изображения измерителя.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №13-01-97504 и №13-08-00735) и Российского научного фонда (проекты №14-29-00208 и №14-49-00079).

Литература

1. Перетягин Г.И. Представление изображений гауссовскими случайными полями // Автометрия. 1984. № 6. С. 42–48.
2. Kashyap R., Chellappa R. Estimation and choice of neighbors in spatial-interaction models of images // IEEE Trans. on Information Theory. 1983. V. 29. № 1. P. 60–72.
3. Бычков А.А., Понькин В.А. Обнаружение изображений пространственно протяженных затеняющих фон объектов // Автометрия. 1992. № 4. С. 33–40.
4. Voigtman C., Sauer K. A Generalized Gaussian Image Model for Edge-Preserving MAP Estimation // IEEE Trans. on Image Proc. 1993. V. 2. № 3. P. 296–310.
5. Трифонов А.П., Захаров А.В., Чернояров О.В. Оценка дисперсии случайного импульса с неизвестным временем прихода // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41. № 10. С. 1207.
6. Трифонов А.П., Глазнев А.А. Оценка дисперсии случайного сигнала с неизвестной полосой частот // Изв. высш. учеб. заведений. Радиотехника. 1999. Т. 42. № 2. С. 10–21.
7. Трифонов А.П., Глазнев А.А. Оценка параметров случайного сигнала при наличии помехи с неизвестными параметрами // Изв. высш. учеб. заведений. Радиотехника. 2002. Т. 45. № 10. С. 3–18.
8. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио. 1978. 296 с.
9. Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / Под ред. А.П. Трифонова. Воронеж: ВГУ. 1991. 246 с.
10. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь. 1986. 264 с.
11. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки. М.: Радио и связь. 1983. 304 с.

Joint estimation of parameters of the underlying background image and a spatially extended object with an unknown area

© Authors, 2015

© Radiotekhnika, 2015

A.P. Trifonov – Dr.Sc. (Eng.), Professor, Head of Radiophysics Department, Honored Scientist of the Russian Federation, Voronezh State University

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru, trirad@mail.ru

Yu.N. Pribytkov – Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Assistant of Radiophysics Department, Voronezh State University

E-mail: ypribytkov@gmail.com

The paper considers the problem of joint parameter estimation of image and background, and the influence of an unknown area of the image on the accuracy of these estimates also analyzed. To describe the image of a spatially extended object and the background models of homogeneous Gaussian random fields were selected. Intensity and regular components of these fields are informational parameters to be estimated. Unknown non-information parameter in the model is the image area. To analyze the influence of unknown space on the accuracy of estimates and regular components of image and background intensities two approaches to the

resolution of a priori uncertainty about the area were considered.

At the first approach quasi likelihood algorithm is used, in which an unknown area is replaced by the intended value. Asymptotically exact expressions for the dispersion of quasi likelihood estimations are obtained. The analysis showed that the use of quasi likelihood approach may lead to inconsistent estimates of informational parameter.

At the second approach a joint maximum likelihood estimate of the unknown parameters and area information is considered. Asymptotically exact expressions for the dispersion of the joint maximum likelihood estimates are obtained. It is shown that the accuracy of the maximum likelihood estimates may significantly exceed the accuracy quasi likelihood estimates. Also it is found that the characteristics of the joint maximum likelihood estimates of the parameters of the image, the underlying background and an unknown image area asymptotically with increasing signal-to-noise ratio are invariant to the absence of a priori information about the image area. However, unlike quasi likelihood estimates maximum likelihood estimation can be realized only through a multi-channel image for an unknown area.

REFERENCES

1. Peretyagin G.I. Predstavlenie izobrazhenij gaussovskimi sluchajny'mi polyami // Avtometriya. 1984. № 6. S. 42–48.
2. Kashyap R., Chellappa R. Estimation and choice of neighbors in spatial-interaction models of images // IEEE Trans. on Information Theory. 1983. V. 29. № 1. P. 60–72.
3. By'chkov A.A., Pon'kin V.A. Obnaruzhenie izobrazhenij prostranstvenno protyazhenny'x zatenyayushhix fon ob'ektov // Avtometriya. 1992. № 4. S. 33–40.
4. Bouman C., Sauer K. A Generalized Gaussian Image Model for Edge-Preserving MAP Estimation // IEEE Trans. on Image Proc. 1993. V. 2. № 3. P. 296–310.
5. Trifonov A.P., Zaxarov A.V., Chernoyarov O.V. Ocenka dispersii sluchajnogo impul'sa s neizvestny'm vremenem prixoda // Radiotekhnika i e'lektronika. 1996. T. 41. № 10. S. 1207.
6. Trifonov A.P., Glaznev A.A. Ocenka dispersii sluchajnogo signala s neizvestnoj polosoj chastot // Izv. vy'ssh. ucheb. zavedenij. Radioe'lektronika. 1999. T. 42. № 2. S. 10–21.
7. Trifonov A.P., Glaznev A.A. Ocenka parametrov sluchajnogo signala pri nalichii pomexi s neizvestny'mi parametrami // Izv. vy'ssh. ucheb. zavedenij. Radioe'lektronika. 2002. T. 45. № 10. S. 3–18.
8. Kullikov E.I., Trifonov A.P. Oczhenka parametrov signalov na fone pomex. M.: Sov. radio. 1978. 296 s.
9. Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I. Obnaruzhenie stoxasticheskix signalov s neizvestny'mi parametrami / Pod. red. A.P. Trifonova. Voronezh: VGU. 1991. 246 s.
10. Trifonov A.P., Shinakov Ju.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i ocenka ix parametrov na fone pomex. M.: Radio i svyaz'. 1986. 264 s.
11. Mudrov V.I., Kushko V.L. Metody' obrabotki izmerenij. Kvazipravdopodobny'e ocenki, M.: Radio i svyaz'. 1983. 304 s.

Уважаемый читатель!

Продолжается подписка на наш журнал на 2015 г.

Подписку можно оформить в любом почтовом отделении
или в Издательстве по адресу:

107031 г. Москва, Кузнецкий мост, 20/6.

Тел./факс: (495) 625-92-41, тел: 625-78-72, 621-48-37

<http://www.radiotec.ru> e-mail: info@radiotec.ru