



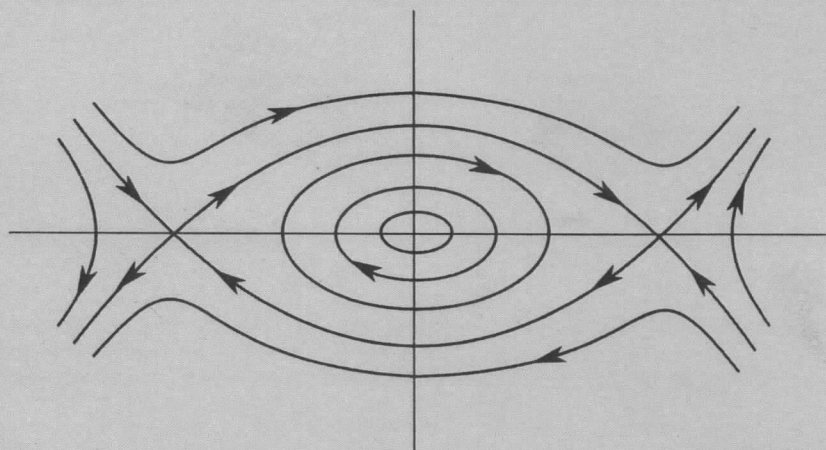
ISSN 0234-5439

ISSN 1609-0705

Основан в 1993 г.

ВЕСТНИК

Воронежского
Государственного
Университета



СЕРИЯ

Физика

Математика

№ 2 / 2015

КВАЗИПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ПРИХОДА И ДЛИТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА НЕИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ*

А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин

*Воронежский государственный университет
Национальный исследовательский университет «МЭИ»*

Поступила в редакцию 25.03.2015 г.

Аннотация: выполнены синтез и анализ квазиправдоподобных алгоритмов оценки времени прихода и длительности сигнала неизвестной формы, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. Исследованы квазиправдоподобные оценки времени прихода и длительности при использовании в приёмном устройстве прямоугольного и ступенчатого опорного сигналов. Выполнено сравнение точности оценок времени прихода и длительности при различных опорных сигналах. На примере оценок параметров прямоугольного импульса со скошенной вершиной даны рекомендации по выбору высоты ступенек опорного сигнала, обеспечивающих наибольшую точность квазиправдоподобных оценок.

Ключевые слова: время прихода, длительность, квазиправдоподобная оценка, опорный сигнал, смещение, рассеяние, отношение сигнал/шум.

QUASILIKELIHOOD DELAY AND DURATION ESTIMATION OF UNKNOWN FORM SIGNAL

A. P. Trifonov, Y. E. Korchagin

Abstract: a quasi likelihood estimation algorithms of time delay and duration of the unknown form signal are synthesized. We investigated the estimations with rectangular and graduated basic signal forms. The asymptotic estimations characteristics are found. We compare the accuracy of the estimates of time of arrival and duration at different reference signals. The loss in a precision of quasilikelihood estimations is considered in comparison with the loss of maximum likelihood estimates. Are formulated guidelines for choosing the step heights of the reference signal.

Keywords: arrival time, duration, quasi likelihood estimation, a reference signal, bias, variance, signal/noise ratio.

В работе [1] исследована совместная оценка максимального правдоподобия (ОМП) времени прихода и длительности сигнала

$$s(t, \lambda, \tau) = f(t)I[(t - \lambda)/\tau] \quad (1)$$

на фоне аддитивного гауссовского белого шума, где $f(t)$ — непрерывная функция, описывающая форму сигнала, $I(x) = 1$ при $|x| \leq 1/2$ и $I(x) = 0$ при $|x| > 1/2$. Предполагалось, что неизвестные время прихода λ и длительность τ могут принимать значения из области Λ , которая задана неравенствами $|\lambda| \leq \Lambda_0/2$; $T_1 \leq \tau \leq T_2$.

* Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №14-49-00079)

© Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э., 2015

Согласно [1], совместные ОМП $\hat{\lambda}$ и $\hat{\tau}$ определяются как координаты абсолютного (наибольшего) максимума

$$(\hat{\lambda}, \hat{\tau}) = \arg \sup L(\lambda, \tau) \quad (2)$$

логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОР)

$$L(\lambda, \tau) = \frac{2}{N_0} \int_{-T/2}^{T/2} s(t, \lambda, \tau) [x(t) - s(t, \lambda, \tau)/2] dt, \quad (3)$$

где $x(t) = s(t, \lambda_0, \tau_0) + n(t)$ — наблюдаемая на интервале $[-T/2, T/2]$ реализация смеси сигнала (1) и гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 , $s(t, \lambda, \tau)$ — опорный сигнал, который при приёме на фоне гауссовского белого шума совпадает с сигналом (1), а λ_0, τ_0 — истинные значения неизвестных времени прихода и длительности.

Предполагалось также, что в моменты появления $t = \theta_{01} = \lambda_0 - \tau_0/2$ и исчезновения $t = \theta_{02} = \lambda_0 + \tau_0/2$ функция $f(t)$ не обращается в ноль, $f(\lambda_0 \pm \tau_0/2) \neq 0$, то есть сигнал (1) является разрывным [2].

Выражения (2) и (3) определяют структуру максимально правдоподобного измерителя времени прихода и длительности. Однако, если форма сигнала $f(t)$ неизвестна на приёмной стороне или слишком сложна для аппаратной реализации приёмника, то в качестве опорного можно использовать сигнал другой формы, например прямоугольный импульс. Тогда форма принимаемого сигнала будет отличаться от формы опорного сигнала. Поэтому на выходе приёмника вместо ОМП будут сформированы квазиправдоподобные оценки (КПО) времени прихода и длительности. Форму ожидаемого сигнала как правило выбирают исходя из разумного компромисса между простотой технической реализации приёмника и точностью формируемых таким приёмником оценок.

Ниже рассмотрены квазиправдоподобные оценки времени прихода и длительности сигнала (1) при прямоугольной и ступенчатой формах опорного сигнала.

КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫЕ ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ПРИХОДА И ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЕ ОПОРНОГО СИГНАЛА

Пусть в качестве опорного сигнала в выражении (3) используется прямоугольный импульс амплитуды a^* : $s^*(t, \lambda, \tau) = a^* I[(t - \lambda)/\tau]$.

Тогда квазиправдоподобные оценки времени прихода и длительности определяются как координаты абсолютного максимума

$$(\lambda^*, \tau^*) = \arg \sup L^*(\lambda, \tau) \quad (4)$$

случайного поля

$$L^*(\lambda, \tau) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} [x(t) - a^*/2] dt, \quad (5)$$

при $(\lambda, \tau) \in \Lambda$. Ограничимся, аналогично [1], рассмотрением КПО, когда область Λ удовлетворяет неравенству

$$\Lambda_0 \leq T_1. \quad (6)$$

Для определения характеристик КПО λ^* и τ^* перейдём аналогично [1], [3] к новым параметрам

$$\theta_1 = \lambda - \tau/2, \quad \theta_2 = \lambda + \tau/2 \quad (7)$$

— положениям соответственно переднего и заднего фронтов сигнала (1). Обозначим область их возможных значений Θ . Очевидно, что линейные преобразования (7) взаимно однозначны, поэтому определив характеристики КПО положений фронтов θ_1^* и θ_2^* , можно затем найти характеристики КПО λ^* и τ^* времени прихода и длительности. Для параметров θ_1, θ_2 решающая статистика (5) принимает вид

$$L^*(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2), \quad (8)$$

$$L_1(\theta_1) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} [x(t) - a^*/2] dt, \quad (9)$$

$$L_2(\theta_2) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} [x(t) - a^*/2] dt, \quad (10)$$

где θ — фиксированная точка из интервала $[-(T_1 - \Lambda_0)/2, (T_1 - \Lambda_0)/2]$. Поскольку (9) и (10) содержат интегралы от гауссовского белого шума на неперекрывающихся интервалах, то $L_1(\theta_1)$ и $L_2(\theta_2)$ — статистически независимые гауссовские случайные процессы. Следовательно, положение максимума случайного поля (8) по переменным θ_1 и θ_2 можно искать отдельно как положения максимумов случайных процессов (9) и (10) соответственно.

Расширим аналогично [1], [3] область возможных значений Θ положений фронтов сигнала (1) до области Θ_a — квадрата минимальной площади со сторонами параллельными осям θ_1 и θ_2 , включающего в себя область Θ . Тогда Θ_a задается неравенствами

$$-\beta \leq \theta_1 \leq -\alpha, \quad \alpha \leq \theta_2 \leq \beta, \quad \alpha = (T_1 - \Lambda_0)/2, \quad \beta = (T_2 + \Lambda_0)/2, \quad (11)$$

а возможную блок-схему квазиправдоподобного измерителя времени прихода и длительности можно представить в виде рис. 1.

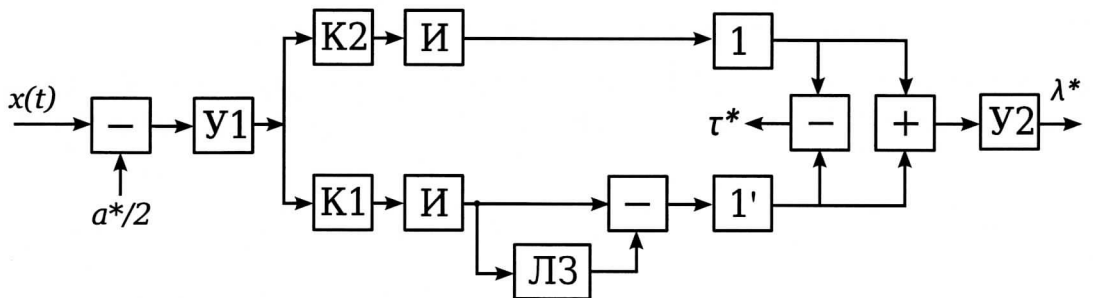


Рис. 1.

Здесь Y_1 и Y_2 — усилители с коэффициентами усиления $2a^*/N_0$ и $1/2$, K_1 и K_2 — ключи, замыкающиеся на отрезки времени $[-\beta, \theta]$ и $[\theta, \beta]$, 1 и $1'$ — устройства поиска положений абсолютных максимумов сигналов на отрезках $[\alpha, \beta]$ и $[\theta, \theta + \beta - \alpha]$ соответственно, $\mathcal{I}$ — интеграторы, $\mathcal{ЛЗ}$ — линия задержки на время $\theta + \beta$.

Рассмотрим статистические характеристики процессов $L_1(\theta_1)$ и $L_2(\theta_2)$, которые, согласно (9) и (10), представляют собой линейные преобразования гауссовского случайного процесса $x(t)$, и, следовательно, являются гауссовскими. Поэтому для их полного статистического описания достаточно найти математические ожидания и корреляционные функции. Выполняя усреднение, получаем

$$S_1(\theta_1) = \langle L_1(\theta_1) \rangle = \frac{z^2}{\tau_0} \int_{\max(\theta_1, \theta_{01})}^{\theta} g(t) dt - z^2(\theta - \theta_1)/2\tau_0, \quad (12)$$

$$S_2(\theta_2) = \langle L_2(\theta_2) \rangle = \frac{z^2}{\tau_0} \int_{\theta}^{\min(\theta_2, \theta_{02})} g(t) dt - z^2(\theta_2 - \theta)/2\tau_0, \quad (13)$$

$$K_1(\theta_{11}, \theta_{21}) = \langle [L_1(\theta_{11}) - \langle L_1(\theta_{11}) \rangle][L_1(\theta_{21}) - \langle L_1(\theta_{21}) \rangle] \rangle = z^2 [\theta - \max(\theta_{11}, \theta_{21})]/\tau_0, \quad (14)$$

$$K_2(\theta_{12}, \theta_{22}) = \langle [L_2(\theta_{12}) - \langle L_2(\theta_{12}) \rangle][L_2(\theta_{22}) - \langle L_2(\theta_{22}) \rangle] \rangle = z^2 [\min(\theta_{12}, \theta_{22}) - \theta]/\tau_0, \quad (15)$$

где $g(t) = f(t)/a^*$,

$$z^2 = 2a^{*2}\tau_0/N_0 \quad (16)$$

— отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе приёмника при совпадении принятого сигнала с ожидаемым прямоугольным импульсом, длительность которого совпадает с длительностью принимаемого сигнала.

Рассмотрим математические ожидания (12) и (13). Их первые производные по θ_1 и θ_2 соответственно имеют вид

$$\frac{dS_1(\theta_1)}{d\theta_1} = \frac{z^2}{2\tau_0} \begin{cases} 1, & \theta_1 \leq \theta_{01}, \\ 1 - 2g(\theta_1), & \theta_1 > \theta_{01}, \end{cases} \quad \frac{dS_2(\theta_2)}{d\theta_2} = \frac{z^2}{2\tau_0} \begin{cases} 2g(\theta_2) - 1, & \theta_2 \leq \theta_{02}, \\ -1, & \theta_2 > \theta_{02}. \end{cases} \quad (17)$$

Согласно (17), математическое ожидание (12) достигает своего максимума в точке $\theta_1 = \theta_{01}$, если $2g(\theta_1) > 1$, или $2f(\theta_1) > a^*$. Аналогично математическое ожидание (13) достигает максимума в точке $\theta_2 = \theta_{02}$, если $2f(\theta_2) > a^*$. Таким образом положения максимумов математических ожиданий (12) и (13) совпадают с истинными значениями положений фронтов сигнала (1) при выполнении условия

$$a^* \leq 2f(\theta_{0i}), \quad i = 1; 2. \quad (18)$$

Тогда КПО положений фронтов сигнала (1) будут состоятельными [2], [4].

Далее будем полагать, что справедливо условие (18), а ОСШ (16) достаточно велико. В этом случае положения максимумов случайных процессов $L_1(\theta_1)$ и $L_2(\theta_2)$ располагаются в малых окрестностях истинных значений θ_{0i} , $i = 1; 2$. Следовательно, при достаточно больших ОСШ необходимо исследовать поведение случайных процессов (9) и (10) в окрестностях точек θ_{01} и θ_{02} . Полагая $\Delta = \max\{|\theta_i - \theta_{0i}|, |\theta_j - \theta_{0j}|\} \rightarrow 0$, $i, j = 1; 2$, аппроксимируем средние значения (12) и (13) отрезками разложений Тейлора

$$S_i(\theta_i) = s_i + z^2 g(\theta_{0i}) \min[0; (-1)^i(\theta_i - \theta_{0i})]/\tau_0 - (-1)^i z^2(\theta_i - \theta_{0i})/2\tau_0 + o(\Delta), \quad (19)$$

где $s_i = (-1)^i \left[\frac{z^2}{\tau_0} \int_{\theta}^{\theta_{0i}} g(t) dt - z^2(\theta_{0i} - \theta)/2\tau_0 \right]$, $i = 1; 2$, а корреляционные функции (14) и (15) перепишем в виде

$$K_i(\theta_{1i}, \theta_{2i}) = (-1)^i z^2(\theta_{0i} - \theta)/\tau_0 + z^2 \min[(-1)^i(\theta_{1i} - \theta_{0i}); (-1)^i(\theta_{2i} - \theta_{0i})]/\tau_0, \quad i = 1; 2. \quad (20)$$

Поскольку положения максимумов процессов (9) и (10) располагаются в малой окрестности точек θ_{01}, θ_{02} , будем аппроксимировать математические ожидания (12), (13) главными членами асимптотических разложений (19) на интервалах $[-\beta, -\alpha]$ и $[\alpha, \beta]$ при $i = 1; 2$ соответственно.

Рассмотрим случайный процесс $L_2(\theta_2)$ (10). Используя теорему Дуба [5], а также выражения (19) и (20), можно показать, что в малой окрестности точки θ_{02} процесс $L_2(\theta_2)$ является марковским с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \frac{z^2}{2\tau_0} \begin{cases} q_2, & \alpha \leq \theta_2 \leq \theta_{02}, \\ -1, & \theta_{02} < \theta_2 \leq \beta, \end{cases} \quad k_2 = \frac{z^2}{\tau_0}$$

соответственно, где $q_2 = 2g(\theta_{02}) - 1$.

Найти совместную плотность вероятности КПО θ_1^* и θ_2^* положений фронтов сигнала (1) для произвольной области Θ , к сожалению, не удаётся. Определим аналогично [1], [3] аппроксимацию плотности вероятности для области Θ_a .

Согласно выражениям (11), области возможных значений положений фронтов θ_1 и θ_2 не пересекаются при выполнении условия (6). Тогда искомую аппроксимацию плотности вероятности можно аналогично [1], [3] представить выражением

$$W_a(\theta_1, \theta_2) = W_{1\theta}(\theta_1)W_{2\theta}(\theta_2), \quad (21)$$

где $W_{1\theta}(\theta_1)$ и $W_{2\theta}(\theta_2)$ — плотности вероятностей положений абсолютных максимумов реализаций случайных процессов $L_1(\theta_1)$ (9) и $L_2(\theta_2)$ (10) на интервалах $[-\beta, -\alpha]$ и $[\alpha, \beta]$ соответственно.

Используя марковские свойства [5], [4] процесса (10), можно записать аналогично [1], [3] асимптотическую плотность вероятности положения максимума процесса $L_2(\theta_2)$ как [6]

$$W_{2\theta}(\theta_2) = \frac{z^2}{2\tau_0} \begin{cases} q_2^2 \Psi \left[\frac{z^2 q_2^2}{2\tau_0} (\theta_{02} - \theta_2), \frac{z^2 q_2^2}{2\tau_0} (\theta_{02} - \alpha), \frac{z^2 q_2^2}{2\tau_0} (\beta - \theta_{02}), \frac{1}{q_2} \right], & \alpha \leq \theta_2 \leq \theta_{02}, \\ \Psi \left[\frac{z^2}{2\tau_0} (\theta_2 - \theta_{02}), \frac{z^2}{2\tau_0} (\beta - \theta_{02}), \frac{z^2}{2\tau_0} (\theta_{02} - \alpha), q_2 \right], & \theta_{02} < \theta_2 \leq \beta, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$\Psi(y, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}|y|^{3/2}} \left\{ \Phi \left(\sqrt{\frac{y_1 - y}{2}} \right) + \frac{\exp[-(y_1 - y)/4]}{\sqrt{\pi(y_1 - y)}} \right\} \times \\ \times \int_0^\infty \xi \exp \left[-\frac{(\xi + y)^2}{4y} \right] \left[\Phi \left(\frac{y_3 \xi + y_2}{\sqrt{2y_2}} \right) - \exp(-y_3 \xi) \Phi \left(\frac{-y_3 \xi + y_2}{\sqrt{2y_2}} \right) \right] d\xi,$$

а $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности.

В результате замены переменной $\chi = -\theta_1$ в выражении (9) статистические характеристики случайного процесса $L_1(\chi)$ при достаточно больших ОСШ принимают вид (19), (20) при $i = 2$, где необходимо заменить s_1 на s_2 . Следовательно, можем сразу записать асимптотическое распределение положения максимума процесса $L_1(\theta_1)$

$$W_{1\theta}(\theta_1) = \frac{z^2}{2\tau_0} \begin{cases} \Psi \left[\frac{z^2}{2\tau_0} (\theta_{01} - \theta_1), \frac{z^2}{2\tau_0} (\theta_{01} + \beta), -\frac{z^2}{2\tau_0} (\alpha + \theta_{01}) \right], & -\beta \leq \theta_1 \leq \theta_{01}, \\ q_1^2 \Psi \left[\frac{z^2 q_1^2}{2\tau_0} (\theta_1 - \theta_{01}), -\frac{z^2 q_1^2}{2\tau_0} (\alpha + \theta_{01}), \frac{z^2 q_1^2}{2\tau_0} (\theta_{01} + \beta) \right], & \theta_{01} < \theta_1 \leq -\alpha, \end{cases} \quad (23)$$

где $q_1 = 2g(\theta_{01}) - 1$.

Точность выражений (22), (23) возрастает с увеличением ОСШ (16). Если принимаемый сигнал совпадает с ожидаемым на приёмной стороне прямоугольным импульсом, так что $f(t) = a^*$, то выражения (22) и (23) полностью совпадают с аналогичными выражениями, найденными в [1], [3].

Пусть

$$\mu_1 = z^2 q_1 (\theta_1^* - \theta_{01})/2, \quad \mu_2 = z^2 q_2 (\theta_2^* - \theta_{02})/2 \quad (24)$$

— нормированные ошибки КПО положений фронтов сигнала (1). Тогда при $z \gg 1$ получаем асимптотические выражения для плотностей вероятностей нормированных ошибок (24) в виде

$$W_1(\mu_1) = \begin{cases} W_0(\mu_1/q_1)/q_1, & \mu_1 < 0, \\ q_1 W_0(q_1 \mu_1), & \mu_1 \geq 0, \end{cases} \quad W_2(\mu_2) = \begin{cases} q_2 W_0(q_2 \mu_2), & \mu_2 < 0, \\ W_0(\mu_2/q_2)/q_2, & \mu_2 \geq 0, \end{cases} \quad (25)$$

где

$$W_0(x) = 3 \exp(2|x|) \left[1 - \Phi \left(3\sqrt{\frac{|x|}{2}} \right) \right] + \Phi \left(\sqrt{\frac{|x|}{2}} \right) - 1 \quad (26)$$

— предельная плотность вероятности нормированной ошибки ОМП одного параметра разрывного сигнала при условии, что второй параметр известен. Свойства плотности вероятности (26) изучены и описаны в [7]. Плотность вероятности (26) существенно отличается от гауссовской, имеет нулевые математическое ожидание и коэффициент асимметрии [7], обладает дисперсией $13/2$, коэффициентом эксцесса $1779/169 \approx 10,53$ и четвёртым моментом $1143/4$.

Согласно (21) и (25), совместная плотность вероятности нормированных ошибок КПО (24) равна

$$W_2(\mu_1, \mu_2) = W_1(\mu_1)W_2(\mu_2). \quad (27)$$

Введём в рассмотрение нормированные ошибки КПО времени прихода и длительности сигнала (1):

$$\eta_1 = (\lambda^* - \lambda_0)z^2/\tau_0, \quad \eta_2 = (\tau^* - \tau_0)z^2/2\tau_0. \quad (28)$$

Переходя в выражении (27) к новым переменным (28), находим предельную двумерную плотность вероятности нормированных ошибок совместных оценок [1], [3]

$$W_2(\eta_1, \eta_2) = \frac{q_1 q_2}{2} W_1 \left(q_1 \frac{\eta_1 - \eta_2}{2} \right) W_2 \left(q_2 \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \right). \quad (29)$$

Совместная плотность вероятности (29) позволяет рассчитать асимптотические значения смещений и рассеяний КПО λ^* и τ^* :

$$b(\lambda^* | \lambda_0, \tau_0) = 3\tau_0 (q_1^{-2} - q_2^{-2})/4z^2, \quad b(\tau^* | \lambda_0, \tau_0) = 3\tau_0 (2 - q_1^{-2} - q_2^{-2})/2z^2, \quad (30)$$

$$V(\lambda^* | \lambda_0, \tau_0) = \frac{13\tau_0^2}{4z^4} [(q_1 + q_1^{-1})/q_1^2 + (q_2 + q_2^{-1})/q_2^2],$$

$$V(\tau^* | \lambda_0, \tau_0) = \frac{13\tau_0^2}{z^4} [(q_1 + q_1^{-1})/q_1^2 + (q_2 + q_2^{-1})/q_2^2]. \quad (31)$$

Как функции q_i , рассеяния и смещения (30), (31) достигают минимума при $q_1 = q_2 = 1$, что равносильно равенству

$$f(\theta_{01}) = f(\theta_{02}) = a^*. \quad (32)$$

Тогда для характеристик КПО (30), (31) имеем

$$b(\lambda^* | \lambda_0, \tau_0) = 0, \quad b(\tau^* | \lambda_0, \tau_0) = 0, \quad V(\lambda^* | \lambda_0, \tau_0) = \frac{13\tau_0^2}{z^4}, \quad V(\tau^* | \lambda_0, \tau_0) = \frac{52\tau_0^2}{z^4}, \quad (33)$$

что полностью совпадает с аналогичными характеристиками ОМП времени прихода и длительности прямоугольного импульса, найденными в [1].

Таким образом, для обеспечения минимально возможных рассеяний КПО, необходимо обеспечить выполнение условия (32). Однако, это условие накладывает существенные ограничения на форму сигнала $f(t)$. Действительно, мгновенные значения сигнала в моменты времени θ_{01} и θ_{02} должны совпадать. Чтобы повысить точность КПО, когда ограничения на функцию $f(t)$ (32) не выполняются, можно выбрать опорный сигнал, форма которого более близка к форме принимаемого сигнала. Так, например, использование ступенчатой формы опорного сигнала не приведёт к существенному усложнению алгоритма оценивания, однако, возможно, повысит точность оценок. Поэтому рассмотрим КПО времени прихода и длительности при ступенчатом опорном сигнале.

КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫЕ ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ПРИХОДА И ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПРИ СТУПЕНЧАТОЙ ФОРМЕ ОПОРНОГО СИГНАЛА

Пусть в качестве опорного сигнала в выражении (3) используется ступенчатый импульс вида

$$s^*(t, \lambda, \tau) = a^* \left\{ B_1 I \left[\frac{t - (\theta + \lambda - \tau/2)/2}{(\theta - \lambda + \tau/2)} \right] + B_2 I \left[\frac{t - (\theta + \lambda + \tau/2)/2}{(\lambda + \tau/2 - \theta)} \right] \right\}. \quad (34)$$

Тогда КПО времени прихода и длительности определяются аналогично (4) как координаты абсолютного максимума случайного поля

$$L^*(\lambda, \tau) = \frac{2B_1 a^*}{N_0} \int_{\lambda - \tau/2}^{\theta} [x(t) - B_1 a^*/2] dt + \frac{2B_2 a^*}{N_0} \int_{\theta}^{\lambda + \tau/2} [x(t) - B_2 a^*/2] dt \quad (35)$$

для всех $(\lambda, \tau) \in \Lambda$. Выражения (4), (35) определяют структуру преющего устройства. Перейдём в (35) к параметрам (7), тогда решающую статистику $L^*(\lambda, \tau)$ можно представить в виде (8), где

$$L_1(\theta_1) = \frac{2B_1 a^*}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} [x(t) - B_1 a^*/2] dt, \quad (36)$$

$$L_2(\theta_2) = \frac{2B_2 a^*}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} [x(t) - B_2 a^*/2] dt, \quad (37)$$

— статистически независимые гауссовские случайные процессы. Возможная блок-схема квазиправдоподобного измерителя времени прихода и длительности показана на рис. 2. Здесь

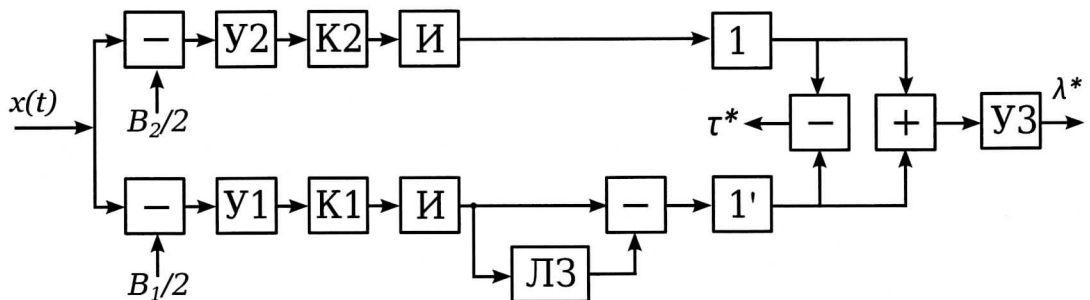


Рис. 2.

У1, У2 и У3 — усилители с коэффициентами усиления $2B_1 a^*/N_0$, $2B_2 a^*/N_0$ и $1/2$, К1 и К2 — ключи, замыкающиеся на отрезки времени $[-\beta, \theta]$ и $[\theta, \beta]$, 1 и 1' — устройства поиска положений абсолютных максимумов сигналов на отрезках $[\alpha, \beta]$ и $[\theta, \theta + \beta - \alpha]$ соответственно, И — интеграторы, ЛЗ — линия задержки на время $\theta + \beta$.

Определим аппроксимацию совместной плотности вероятности (21) для $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_a$, где область Θ_a определена в (11). Математические ожидания и корреляционные функции случайных процессов (36) и (37) запишем аналогично (12) и (13)

$$S_1(\theta_1) = \frac{z_1^2}{\tau_0} \int_{\max(\theta_1, \theta_{01})}^{\theta} g_1(t) dt - z_1^2 (\theta - \theta_1) / 2\tau_0, \quad (38)$$

$$S_2(\theta_2) = \frac{z_2^2}{\tau_0} \int_{\theta}^{\min(\theta_2, \theta_{02})} g_2(t) dt - z_2^2(\theta_2 - \theta)/2\tau_0, \quad (39)$$

$$K_1(\theta_{11}, \theta_{21}) = z_1^2 [\theta - \max(\theta_{11}, \theta_{21})] / \tau_0, \quad (40)$$

$$K_2(\theta_{12}, \theta_{22}) = z_2^2 [\min(\theta_{12}, \theta_{22}) - \theta] / \tau_0, \quad (41)$$

где $g_i(t) = f(t)/B_i a^*$,

$$z_i^2 = 2B_i^2 a^{*2} \tau_0 / N_0, \quad i = 1; 2. \quad (42)$$

Рассмотрим математические ожидания (38) и (39). Их первые производные по θ_1 и θ_2 соответственно имеют вид

$$\frac{dS_1(\theta_1)}{d\theta_1} = \frac{z_1^2}{2\tau_0} \begin{cases} 1, & \theta_1 \leq \theta_{01}, \\ 1 - 2g_1(\theta_1), & \theta_1 > \theta_{01}, \end{cases} \quad \frac{dS_2(\theta_2)}{d\theta_2} = \frac{z_2^2}{2\tau_0} \begin{cases} 2g_2(\theta_2) - 1, & \theta_2 \leq \theta_{02}, \\ -1, & \theta_2 > \theta_{02}. \end{cases} \quad (43)$$

Согласно (43), математическое ожидание (38) достигает своего максимума в точке $\theta_1 = \theta_{01}$, если $2g_1(\theta_1) > 1$, или $2f(\theta_1) > B_1 a^*$. Аналогично математическое ожидание (39) достигает максимума в точке $\theta_2 = \theta_{02}$, если $2f(\theta_2) > B_2 a^*$. Таким образом, положения максимумов математических ожиданий (38) и (39) совпадают с истинными значениями положений фронтов сигнала (1) при выполнении условия

$$B_i a^* \leq 2f(\theta_{0i}), \quad i = 1; 2. \quad (44)$$

Тогда КПО положений фронтов сигнала (1) будут состоятельными [2], [4].

При достаточно больших ОСШ (42) необходимо исследовать поведение случайных процессов (36) и (37) в окрестностях точек θ_{01} и θ_{02} . Полагая

$$\Delta = \max \{|\theta_i - \theta_{0i}|, |\theta_j - \theta_{0j}|\} \rightarrow 0 \quad i, j = 1; 2,$$

аппроксимируем средние значения (38) и (39) отрезками разложений Тейлора

$$S_i(\theta_i) = s_i + z_i^2 g_i(\theta_{0i}) \min [0; (-1)^i (\theta_i - \theta_{0i})] / \tau_0 - (-1)^i z_i^2 (\theta_i - \theta_{0i}) / 2\tau_0 + o(\Delta), \quad (45)$$

где $s_i = (-1)^i \left[\frac{z_i^2}{\tau_0} \int_{\theta}^{\theta_{0i}} g_i(t) dt - z_i^2 (\theta_{0i} - \theta) / 2\tau_0 \right]$, $i = 1; 2$, а корреляционные функции (40) и (43) перепишем в виде

$$K_i(\theta_{1i}, \theta_{2i}) = (-1)^i z_i^2 (\theta_{0i} - \theta) / \tau_0 + z_i^2 \min [(-1)^i (\theta_{1i} - \theta_{0i}); (-1)^i (\theta_{2i} - \theta_{0i})] / \tau_0, \quad i = 1; 2. \quad (46)$$

Поскольку положения максимумов процессов (36) и (37) располагаются в малой окрестности точек θ_{01} , θ_{02} , будем аппроксимировать математические ожидания (38), (39) главными членами асимптотических разложений (45) на интервалах $[-\beta, -\alpha]$ и $[\alpha, \beta]$ при $i = 1; 2$ соответственно.

Случайный процесс $L_2(\theta_2)$ (37) согласно теореме Дуба [5], а также выражениям (45) и (46), является марковским и в окрестности точки θ_{02} обладает коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \frac{z_2^2}{2\tau_0} \begin{cases} q_2, & \alpha \leq \theta_2 \leq \theta_{02}, \\ -1, & \theta_{02} < \theta_2 \leq \beta, \end{cases} \quad k_2 = \frac{z_2^2}{\tau_0}$$

соответственно, где $q_2 = 2g_2(\theta_{02}) - 1$. Пользуясь марковскими свойствами [5] процесса (37), можно записать аналогично [1], [3] асимптотическую плотность вероятности положения максимума процесса $L_2(\theta_2)$ как [6]

$$W_{2\theta}(\theta_2) = \frac{z_2^2}{2\tau_0} \begin{cases} q_2^2 \Psi \left[\frac{z_2^2 q_2^2}{2\tau_0} (\theta_{02} - \theta_2), \frac{z_2^2 q_2^2}{2\tau_0} (\theta_{02} - \alpha), \frac{z_2^2 q_2^2}{2\tau_0} (\beta - \theta_{02}), \frac{1}{q_2} \right], & \alpha \leq \theta_2 \leq \theta_{02}, \\ \Psi \left[\frac{z_2^2}{2\tau_0} (\theta_2 - \theta_{02}), \frac{z_2^2}{2\tau_0} (\beta - \theta_{02}), \frac{z_2^2}{2\tau_0} (\theta_{02} - \alpha), q_2 \right], & \theta_{02} < \theta_2 \leq \beta. \end{cases}$$

В результате замены переменной $\chi = -\theta_1$ в выражении (36) статистические характеристики случайного процесса $L_1(\chi)$ при достаточно больших ОСШ принимают вид (45), (46) при $i = 2$, где необходимо заменить s_1 на s_2 и z_1 на z_2 . Следовательно, можем сразу записать асимптотическое распределение положения максимума процесса $L_1(\theta_1)$

$$W_{1\theta}(\theta_1) = \frac{z_1^2}{2\tau_0} \begin{cases} \Psi \left[\frac{z_1^2}{2\tau_0} (\theta_{01} - \theta_1), \frac{z_1^2}{2\tau_0} (\theta_{01} + \beta), -\frac{z_1^2}{2\tau_0} (\alpha + \theta_{01}) \right], & -\beta \leq \theta_1 \leq \theta_{01}, \\ q_1^2 \Psi \left[\frac{z_1^2 q_1^2}{2\tau_0} (\theta_1 - \theta_{01}), -\frac{z_1^2 q_1^2}{2\tau_0} (\alpha + \theta_{01}), \frac{z_1^2 q_1^2}{2\tau_0} (\theta_{01} + \beta) \right], & \theta_{01} < \theta_1 \leq -\alpha, \end{cases}$$

где $q_1 = 2g_1(\theta_{01}) - 1$.

Обозначим

$$\mu_1 = z_1^2 q_1 (\theta_1^* - \theta_{01}) / 2, \quad \mu_2 = z_2^2 q_2 (\theta_2^* - \theta_{02}) / 2 \quad (47)$$

— нормированные ошибки КПО положений фронтов сигнала (1). Тогда при $z_i \gg 1$, $i = 1; 2$ получаем асимптотические выражения для плотностей вероятностей нормированных ошибок (47) в виде (25), а совместной плотности вероятности нормированных ошибок (47) — в виде (27).

Введём в рассмотрение нормированные ошибки КПО времени прихода и длительности сигнала (1):

$$\eta_1 = (\lambda^* - \lambda_0) z_1 z_2 / \tau_0, \quad \eta_2 = (\tau^* - \tau_0) z_1 z_2 / 2\tau_0. \quad (48)$$

Переходя в выражении (27) к новым переменным (48), находим предельную двумерную плотность вероятности нормированных ошибок совместных оценок [1], [3]

$$W_2(\eta_1, \eta_2) = \frac{q_1 q_2}{2} W_1 \left(q_1 \frac{z_1}{z_2} \frac{\eta_1 - \eta_2}{2} \right) W_2 \left(q_2 \frac{z_2}{z_1} \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \right). \quad (49)$$

Совместная плотность вероятности (49) позволяет рассчитать асимптотические значения смещений и рассеяний КПО λ^* и τ^* :

$$\begin{aligned} b(\lambda^* | \lambda_0, \tau_0) &= 3\tau_0 (z_2^{-2} - z_1^{-2} + z_1^{-2} q_1^{-2} - z_2^{-2} q_2^{-2}) / 4, \\ b(\tau^* | \lambda_0, \tau_0) &= 3\tau_0 (z_1^{-2} + z_2^{-2} - z_1^{-2} q_1^{-2} - z_2^{-2} q_2^{-2}) / 2, \\ V(\lambda^* | \lambda_0, \tau_0) &= \frac{13\tau_0^2}{4} [(q_1 + q_1^{-1}) / z_1^4 q_1^2 + (q_2 + q_2^{-1}) / z_2^4 q_2^2], \\ V(\tau^* | \lambda_0, \tau_0) &= 13\tau_0^2 [(q_1 + q_1^{-1}) / z_1^4 q_1^2 + (q_2 + q_2^{-1}) / z_2^4 q_2^2]. \end{aligned} \quad (50)$$

Как функции q_i , рассеяния и смещения (50), (51) достигают минимума при $q_1 = q_2 = 1$, что равносильно равенствам

$$f(\theta_{0i}) = B_i a^*, \quad i = 1; 2. \quad (52)$$

Тогда характеристики КПО (50), (51) принимают вид

$$b(\lambda^* | \lambda_0, \tau_0) = 0, \quad b(\tau^* | \lambda_0, \tau_0) = 0,$$

$$V(\lambda^* | \lambda_0, \tau_0) = 13\tau_0^2 (z_1^{-2} + z_2^{-2}) / 2, \quad V(\tau^* | \lambda_0, \tau_0) = 26\tau_0^2 (z_1^{-2} + z_2^{-2}). \quad (53)$$

Таким образом, чтобы рассеяния КПО были минимальными необходимо обеспечить выполнение условия (52).

КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫЕ ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ПРИХОДА И ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА СО СКОШЕННОЙ ВЕРШИНОЙ

В качестве примета конкретизируем полученные выражения для прямоугольного импульса со скошенной вершиной [8]

$$f(t) = a \left[1 + 2 \frac{t - \lambda_0}{\tau_0} \left(\frac{1 - q}{1 + q} \right) \right], \quad (54)$$

где параметр $q = f(\lambda_0 - \tau_0/2) / f(\lambda_0 + \tau_0/2)$ характеризует наклон вершины импульса. Выберем истинные время прихода и длительность сигнала (1), (54) таким образом, чтобы соответствующие им истинные моменты появления и исчезновения располагались посередине своих априорных интервалов возможных значений, то есть $\theta_{01} = -(\alpha + \beta) / 2$, $\theta_{02} = (\alpha + \beta) / 2$, а α и β определены в (11). Тогда, используя преобразования (7), получаем $\lambda_0 = 0$, $\tau_0 = (T_2 + T_1) / 2$.

Запишем ступенчатый опорный сигнал в виде

$$s(t, \lambda, \tau) = 2a^* \{ q^* I [t / (\tau/2 - \lambda) + 1/2] + I [t / (\tau/2 + \lambda) - 1/2] \} / (1 + q^*), \quad (55)$$

где величина q^* характеризует отношение амплитуд ступенек, а при $q^* = 1$ опорный сигнал (55) является прямоугольным импульсом амплитуды a^* . Значения параметров a^* и q^* будем выбирать так, чтобы обеспечивалось выполнение условия (44), а при $q^* = 1$ — условия (18). Нетрудно показать, что неравенство (18) применительно к сигналу (54) можно представить в виде

$$\begin{cases} \xi_a > (1 + q) / 4q, & q < 1, \\ \xi_a > (1 + q) / 4, & q > 1, \end{cases}$$

а условия (44) переписать как

$$\begin{cases} \xi_a > \frac{q^*(1 + q)}{2q(1 + q^*)}, & \xi_a > \frac{1}{1 + q^*}, & q < 1, \\ \xi_a > \frac{1 + q}{2(1 + q^*)}, & \xi_a > \frac{1}{1 + q^*}, & q > 1, \end{cases}$$

где $\xi_a = a / a^*$. Тогда для смещений и рассеяний КПО (50), (51) можно записать

$$b(\lambda^* | \lambda_0, \tau_0) = 3\tau_0(1 + q^*)^2 [1 - q^{*-2} + (1 - q)^2 \{ q^{*-2}(C_1 q - 1)^{-2} - (C_2 - q)^{-2} \}] / 16z^2,$$

$$b(\tau^* | \lambda_0, \tau_0) = 3\tau_0(1 + q^*)^2 [1 + q^{*-2} - (1 - q)^2 \{ q^{*-2}(C_1 q - 1)^{-2} + (C_2 - q)^{-2} \}] / 8z^2,$$

$$V(\lambda^* | \lambda_0, \tau_0) = \frac{13\tau_0^2(1 + q)(1 + q^*)^4}{64z^4} \left[\frac{q^2(C_1^2 + 1) + 2q(1 - C_1) + 2}{q^{*4}(C_1 q - 1)^3} + \frac{2q^2 + 2q(1 - C_2) + C_2^2 + 1}{(C_2 - q)^3} \right],$$

$$V(\tau^*|\lambda_0, \tau_0) = \frac{13\tau_0^2(1+q)(1+q^*)^4}{16z^4} \left[\frac{q^2(C_1^2+1) + 2q(1-C_1) + 2}{q^{*4}(C_1q-1)^3} + \frac{2q^2 + 2q(1-C_2) + C_2^2 + 1}{(C_2-q)^3} \right], \quad (56)$$

где z определено в (16), $C_1 = 2\xi_a(1+q^*)/q^* - 1$, $C_2 = 2\xi_a(1+q^*) - 1$.

Характеристики ОМП времени прихода и длительности сигнала (1), (54) найдены в [1] и могут быть представлены в виде (33), где

$$z^2 = 8a^2\tau_0\sqrt{2} / N_0(1+q)^2\sqrt{1+q^{-4}}.$$

Проигрыши в точности КПО по сравнению с ОМП времени прихода и длительности сигнала (54) будем характеризовать отношениями

$$\chi_\lambda = V(\lambda^*|\lambda_0, \tau_0)/V(\hat{\lambda}|\lambda_0, \tau_0), \quad \chi_\tau = V(\tau^*|\lambda_0, \tau_0)/V(\hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0). \quad (57)$$

Подставляя (33), (56) в (57) получаем

$$\chi = \chi_\lambda = \chi_\tau = \frac{(1+q^*)^4\xi_a^4/2}{(1+q^{-4})(1+q)^3} \left[\frac{q^2(C_1^2+1) + 2q(1-C_1) + 2}{q^{*4}(C_1q-1)^3} + \frac{2q^2 + 2q(1-C_2) + C_2^2 + 1}{(C_2-q)^3} \right]. \quad (58)$$

При использовании опорного сигнала в виде прямоугольного импульса $q^* = 1$ проигрыш (58) принимает вид

$$\chi = \frac{8\xi_a^4}{(1+q^{-4})(1+q)^3} \left[\frac{q^2(C^2+1) + 2q(1-C) + 2}{(Cq-1)^3} + \frac{2q^2 + 2q(1-C) + C^2 + 1}{(C-q)^3} \right], \quad (59)$$

где $C = 4\xi_a - 1$.

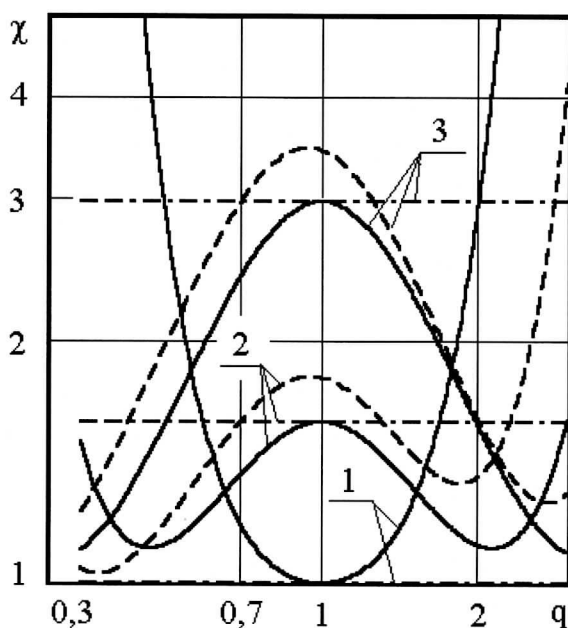


Рис. 3.

На рис. 3 показаны зависимости проигрышей (58), (59) от параметра q при различных q^* и ξ_a . Кривые 1 соответствуют $\xi_a = 1$; кривые 2 — $\xi_a = 1,5$; кривые 3 — $\xi_a = 2$. Сплошными

линиями показан проигрыш (59) в точности КПО при прямоугольной $q^* = 1$ форме опорного сигнала, штриховыми и штрих-пунктирными — проигрыш (58) при ступенчатой форме для $q^* = 0,7$ и $q^* = q$ соответственно.

Как видно из рис. 3, при использовании в качестве опорного сигнала ступенчатого импульса (55) при $q^* = q$ и $\xi_a = 1$, проигрыш в точности КПО времени прихода и длительности отсутствует ($\chi = 1$) при всех q . Это можно объяснить тем, что асимптотические характеристики КПО (50), (51) не зависят от формы принимаемого сигнала, а зависят лишь от величин его скачков в моменты времени, соответствующие переднему и заднему фронтам. Если в эти моменты мгновенные значения принимаемого и опорного сигналов совпадают, а также опорный сигнал удовлетворяет условиям (44), то и асимптотические характеристики КПО и ОМП времени прихода и длительности совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Трифонов А.П. Оценка времени прихода и длительности сигнала / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2000. — Т. 5, № 6. — С. 33–42.
- [2] Трифонов А.П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А.П. Трифонов, Ю.С. Шинаков. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
- [3] Трифонов А.П. Совместная оценка двух параметров разрывного сигнала на фоне белого шума / А.П. Трифонов, В.К. Бутейко // Радиотехника и электроника. — 1989. — Т. 34, № 11. — С. 2323–2330.
- [4] Захаров А.В. Оценка параметров скачкообразного случайного возмущения с неизвестным моментом появления / А.В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 17–28.
- [5] Тихонов В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. — М.: Радио и связь, 1977. — 488 с.
- [6] Трифонов А.П. Статистические свойства высоты и положения абсолютного максимума марковского случайного процесса типа Башелье / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, М.Б. Беспалова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 54–65.
- [7] Трифонов А.П. Разрывные модели сигналов и оценка их параметров / А.П. Трифонов // Прикладная теория случайных процессов и полей. — Ульяновск: УлГТУ, 1995. — С. 164–214.
- [8] Грязнов М.И. Измерение параметров импульсов / М.И. Грязнов, М.Л. Гуревич, Ю.А. Рябинин. — М.: Радио и связь, 1991. — 216 с.

REFERENCES

- [1] Trifonov A.P., Korchagin Yu.E. An arrival time and duration estimation of a signal. [Trifonov A.P., Korchagin Yu.E. Ocenka vremeni prihoda i dlitelnosti signala]. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy — Electromagnetic Waves and Electronic Systems*, 2000, vol. 5, no. 6, pp. 33–42.
- [2] Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Joint distinction signals and estimation of their parameters in noise. [Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i ocenka ih parametrov na fone pomех]. Moscow: Radio and communications, 1986, 264 p.
- [3] Trifonov A.P., Buteyko V.K. Joint Estimation of the two parameters discontinuous signal in white noise. [Trifonov A.P., Butejko V.K. Sovmestnaya ocenka dvux parametrov razryvnogo signala na fone belogo shuma]. *Radiotekhnika i elektronika — Journal of Communications Technology and Electronics*, 1989, vol. 34, no. 11, pp. 2323–2330.
- [4] Zacharov A.V. Estimation of parameters of abrupted random disturbance with unknown moment of appearance. [Zacharov A.V. Ocenka parametrov skachkoobraznogo sluchainogo

vozmushcheniia s neizvestnym momentom poiavleniia]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 1, pp. 17–28.

[5] Tihonov V.I., Mironov M.A. Markov processes. [Tihonov V.I., Mironov M.A. Markovskie processy]. Moscow: Radio and communications, 1977, 488 p.

[6] Trifonov A.P., Korchagin Yu.E., Bepalova M.B. Statistical properties of height and provisions of absolute maximum markov processes Bachelier type. [Trifonov A.P., Korchagin Yu.E., Bepalova M.B. Statisticheskie svojstva vysoty i polozheniya absolyutnogo maksimuma markovskogo sluchajnogo processa tipa Bachel'e]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 54–65.

[7] Trifonov A.P. Discontinuous models of signals and estimation of their parameters. [Trifonov A.P. Razryvnye modeli signalov i ocenka ih parametrov]. *Prikladnaya teoriya sluchajnyx processov i polej — Applied theory of random processes and fields. Ul'yanovsk: UIGTU*, 1995, pp. 164–214.

[8] Griaznov M.I., Gurevich M.L., Riabinin Yu.A. Measurement of pulse parameters. [Griaznov M.I., Gurevich M.L., Riabinin Yu.A. Izmerenie parametrov impulsov]. Moscow: Radio and communications, 1991, 216 p.

Трифонов Андрей Павлович, доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, зав. каф. радиофизики ВГУ, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru
Тел.: (473) 220-89-16

Trifonov Andrei Pavlovich, Doctor of technical sciences, Professor, Honored Scientist of the Russian Federation, Head of the Department of Radiophysics of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru
Tel.: (473) 220-89-16

Корчагин Юрий Эдуардович, доктор физико-математических наук, доцент, доцент каф. радиофизики ВГУ, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru
Тел.: (473) 220-89-16

Korchagin Yurii Eduardovich, Doctor of physicomathematical sciences, Associate Professor of the Department of radiophysics of Voronezh State University. Voronezh, Russian Federation
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru
Tel.: (473) 220-89-16