

P6434 (217)  
T. 58, № 5, 2015

(317)

ISSN 0021-3462

**ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ**

# **РАДИОФИЗИКА**

**2015  
ТОМ 58  
5**

---

**ИЗДАНИЕ НИЖЕГОРОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО  
РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА**

---

УДК 621.396

## ОБНАРУЖЕНИЕ РАДИОСИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ, АМПЛИТУДОЙ И НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ

А. П. Трифонов\*, Ю. Э. Корчагин, М. В. Трифонов

Воронежский госуниверситет, г. Воронеж, Россия

Построен максимально правдоподобный алгоритм обнаружения радиосигнала с произвольной формой огибающей, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. При этом длительность, амплитуда и начальная фаза сигнала заранее неизвестны. Выполнен анализ построенного алгоритма в предположении достаточно больших отношений сигнал/шум. Найдены асимптотические выражения для вероятностей ошибок обнаружения. Посредством компьютерного моделирования проверена работоспособность построенного алгоритма, а также определены границы применимости найденных асимптотических выражений для характеристик алгоритма.

### ВВЕДЕНИЕ

Для многих практических приложений радиолокации, навигации и сейсмологии актуальна задача обнаружения сигнала с неизвестной длительностью [1–4]. Алгоритмы обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестной длительностью исследованы в работе [2]. В работе [4] рассмотрена задача обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестными длительностью и амплитудой. Поскольку в ряде практических приложений используются сигналы с высокочастотным заполнением (радиосигналы), целесообразно рассмотреть алгоритмы обнаружения радиосигнала, начальная фаза, а также амплитуда которого в силу особенностей его распространения являются априори неизвестными. В данной работе построен и проанализирован алгоритм максимального правдоподобия для обнаружения радиосигнала с произвольной формой огибающей, неизвестными длительностью, амплитудой и начальной фазой.

Модель радиосигнала, который нужно обнаружить, запишем в виде

$$s(t, a, \varphi, \tau) = \begin{cases} af(t) \cos(\omega t - \varphi), & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & t < 0, \quad t > \tau. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $f(t)$  — огибающая радиосигнала,  $\omega, \tau, a, \varphi$  — его частота, длительность, амплитуда и начальная фаза соответственно. Будем считать, что сигнал (1) наблюдается в течение времени  $[0, T]$  на фоне аддитивного гауссовского белого шума  $n(t)$  с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ . Длительность радиосигнала  $\tau$  принимает значения

$$T_1 \leq \tau \leq T_2, \quad (2)$$

а начальная фаза  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . При этом будет приниматься сигнал  $\xi(t) = \gamma_0 s(t, a_0, \varphi_0, \tau_0) + n(t)$ . Индекс «0» здесь и далее означает истинное значение соответствующего параметра. Параметр  $\gamma_0$  является дискретным и принимает два значения:  $\gamma_0 = 0$  (в наблюдаемой реализации сигнал отсутствует) и  $\gamma_0 = 1$  (в наблюдаемой реализации сигнал присутствует). По наблюдаемой реализации  $\xi(t)$  необходимо решить, какое значение принимает параметр  $\gamma_0$ .

\* trifonov@phys.vsu.ru

# 1. АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ И СВОЙСТВА РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ

При неизвестных параметрах сигнала имеет место априорная параметрическая неопределённость относительно его амплитуды, начальной фазы и длительности. В этом случае логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) зависит от четырёх неизвестных параметров [1, 5, 6] и может быть записан в виде

$$L(\gamma, a, \varphi, \tau) = \frac{2a\gamma}{N_0} \int_0^\tau f(t) \cos(\omega t - \varphi) [\xi(t) - af(t) \cos(\omega t - \varphi)/2] dt. \quad (3)$$

В соответствии с алгоритмом максимального правдоподобия [5, 6], оценка дискретного параметра  $\gamma$  даётся формулой

$$\gamma_m = \sup_{\gamma} \left[ \sup_{a, \varphi, \tau} L(\gamma, a, \varphi, \tau) \right]. \quad (4)$$

Аналогично работам [4–6], вместо алгоритма (4) можно использовать обобщённый алгоритм обнаружения, основанный на сравнении абсолютного (наибольшего) максимума  $L$  логарифма ФОР с некоторым порогом  $h$ . Если выполнено соотношение

$$L > h,$$

то выносится решение о наличии сигнала ( $\gamma_m = 1$ ), если  $L < h$  — о его отсутствии ( $\gamma_m = 0$ ). Пусть

$$L(a, \varphi, \tau) = L(\gamma = 1, a, \varphi, \tau). \quad (5)$$

Тогда для величины максимума логарифма ФОР можно записать

$$L = \sup_{\tau} L(\tau), \quad L(\tau) = \sup_{a, \varphi} L(a, \varphi, \tau) = L(a_m, \varphi_m, \tau), \quad (a_m, \varphi_m) = \arg \sup_{a, \varphi} L(a, \varphi, \tau).$$

Здесь  $L(\tau)$  — логарифм ФОР (5), в который вместо неизвестных амплитуды и начальной фазы подставлены их максимальные правдоподобные оценки  $a_m$  и  $\varphi_m$  соответственно, что равносильно максимизации ФОР по неизвестным амплитуде и начальной фазе. Максимизацию логарифма ФОР (5) по амплитуде и фазе можно выполнить аналитически. Для этого представим логарифм ФОР (5) в виде

$$L(a, \varphi, \tau) = aX_1(\tau) \cos \varphi + aY_1(\tau) \sin \varphi - \frac{a^2}{2N_0} \int_0^\tau f^2(t) dt, \quad (6)$$

где

$$X_1(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^\tau \xi(t) f(t) \cos(\omega t) dt, \quad (7)$$

$$Y_1(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^\tau \xi(t) f(t) \sin(\omega t) dt. \quad (8)$$

В формуле (6) и далее отброшены интегралы от членов, осциллирующих с удвоенной частотой  $2\omega$ .

Получим уравнение правдоподобия для оценки  $\varphi_m$ , приравнявая нулю производную функции (6) по  $\varphi$ :

$$\left. \frac{dL(a, \varphi, \tau)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_m} = -aX_1(\tau) \sin \varphi_m + aY_1(\tau) \cos \varphi_m = 0.$$

Отсюда

$$\varphi_m = \arctg[Y_1(\tau)/X_1(\tau)]. \quad (9)$$

Подставляя найденное решение в (6), получим

$$L(a, \tau) = \sup_{\varphi} L(a, \varphi, \tau) = a \sqrt{X_1^2(\tau) + Y_1^2(\tau)} - \frac{a^2}{2N_0} \int_0^{\tau} f^2(t) dt. \quad (10)$$

Выполним теперь максимизацию логарифма ФОП (10) по амплитуде. Приравняв нулю производную функции (10) по переменной  $a$

$$\left. \frac{dL(a, \tau)}{da} \right|_{a=a_m} = \sqrt{X_1^2(\tau) + Y_1^2(\tau)} - \frac{a_m}{N_0} \int_0^{\tau} f^2(t) dt,$$

получим

$$a_m = N_0 \sqrt{X_1^2(\tau) + Y_1^2(\tau)} / \int_0^{\tau} f^2(t) dt. \quad (11)$$

Подставляя оценку максимального правдоподобия (11) в выражение (10) вместо априори неизвестной амплитуды  $a$ , получим

$$L(\tau) = \sup_{a, \varphi} L(a, \varphi, \tau) = \frac{N_0}{2} [X_1^2(\tau) + Y_1^2(\tau)] / \int_0^{\tau} f^2(t) dt. \quad (12)$$

Выражение (12) определяет структуру приёмного устройства. Приёмник должен формировать случайный процесс (12) для всех возможных значений длительности, находить величину его наибольшего максимума и сравнивать её с порогом. На рис. 1 изображена блок-схема соответствующего алгоритма обнаружения, где введены следующие обозначения: И — интеграторы на интервале времени  $[0, t]$ ,  $T_1 \leq t \leq T_2$ , ПД — пиковый детектор, РУ — решающее устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала пикового детектора в момент времени  $t = T_2$  с порогом.

Исследуем решающую статистику (12), формируемую алгоритмом обнаружения, основанном на оценках максимально правдоподобия. Подставив выражения (7) и (8) в формулу (12) и отбрасывая интегралы от функций, осциллирующих с удвоенной частотой, перепишем логарифм функционала отношения правдоподобия  $L(\tau)$  в виде

$$L(\tau) = \frac{[\gamma_0 G(\tau_0, \tau) \cos \varphi_0 + N_c(\tau)]^2 + [\gamma_0 G(\tau_0, \tau) \sin \varphi_0 + N_s(\tau)]^2}{2q(\tau)}. \quad (13)$$

Здесь

$$G(\tau_0, \tau) = q[\min(\tau_0, \tau)], \quad (14)$$

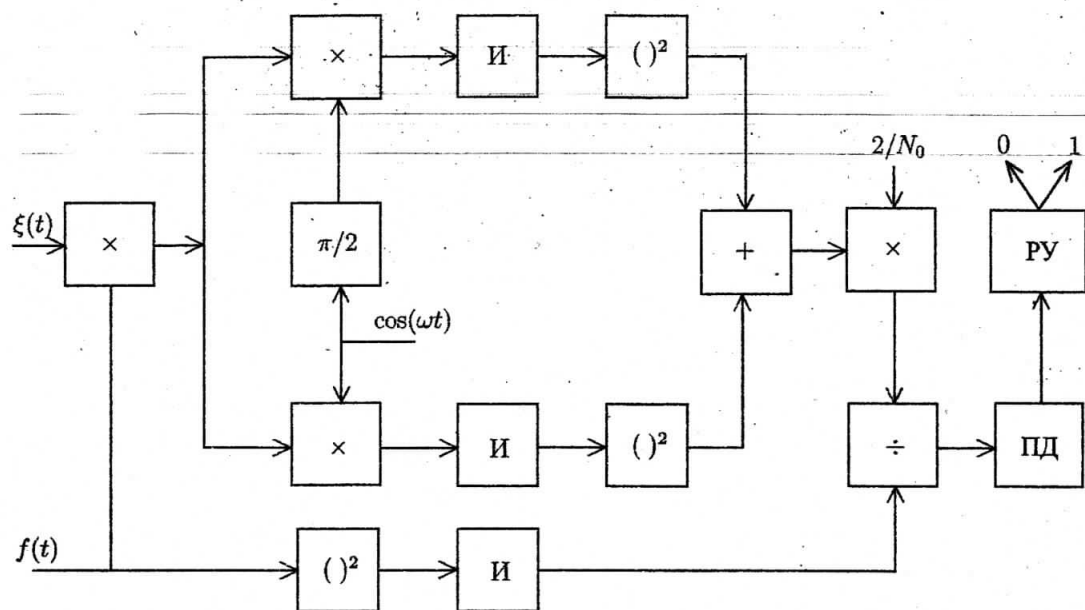


Рис. 1

$$N_c(\tau) = \frac{2a_0}{N_0} \int_0^\tau n(t)f(t) \cos(\omega t) dt, \quad N_s(\tau) = \frac{2a_0}{N_0} \int_0^\tau n(t)f(t) \sin(\omega t) dt, \quad (15)$$

$$q(\tau) = \frac{a_0^2}{N_0} \int_0^\tau f^2(t) dt \quad (16)$$

Величина  $q(\tau)$  есть отношение сигнал/шум (ОСП) на выходе приёмника максимального правдоподобия для сигнала с длительностью  $\tau$ . Шумовые составляющие  $N_c(\tau)$  и  $N_s(\tau)$  представляют собой линейные преобразования гауссовского случайного процесса и поэтому также являются гауссовскими. Они обладают нулевыми математическими ожиданиями и следующими корреляционными функциями:

$$\langle N_c(\tau_1)N_c(\tau_2) \rangle = \langle N_s(\tau_1)N_s(\tau_2) \rangle = q[\min(\tau_1, \tau_2)], \quad \langle N_c(\tau_1)N_s(\tau_2) \rangle = 0. \quad (17)$$

Перейдём в выражении (13) к переменной  $\lambda = q(\tau)$ ,  $\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2$ ,  $\Lambda_1 = q(T_1)$ ,  $\Lambda_2 = q(T_2)$ . Тогда решающая статистика (13) как функция переменной  $\lambda$  может быть представлена выражением

$$L(\lambda) = \frac{\gamma_0 G^2(\lambda_0, \lambda) + 2\gamma_0 G(\lambda_0, \lambda)N_1(\lambda) + N_c^2(\lambda) + N_s^2(\lambda)}{2\lambda}, \quad (18)$$

где  $G(\lambda_0, \lambda) = \min(\lambda_0, \lambda)$ , а  $N_c(\lambda)$  и  $N_s(\lambda)$  — гауссовские статистически независимые случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями

$$\langle N_c(\lambda_1)N_c(\lambda_2) \rangle = \langle N_s(\lambda_1)N_s(\lambda_2) \rangle = \min(\lambda_1, \lambda_2), \quad (19)$$

а

$$N_1(\lambda) = N_c(\lambda) \cos \varphi_0 + N_s(\lambda) \sin \varphi_0 \quad (20)$$

— гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией (19).

## 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ

Основными характеристиками качества обнаружения являются вероятность ложной тревоги и вероятность пропуска сигнала [6]. Для нахождения вероятности ложной тревоги обнаружителя, основанного на алгоритме максимального правдоподобия, необходимо найти функцию распределения абсолютного максимума случайного процесса

$$L_0(\lambda) = L(\lambda|\gamma_0 = 0) = \frac{N_c^2(\lambda) + N_s^2(\lambda)}{2\lambda}. \quad (21)$$

Введём обозначения

$$X_c(\lambda) = \frac{N_c(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}, \quad X_s(\lambda) = \frac{N_s(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \quad (22)$$

и перепишем выражение (21) как

$$L_0(\lambda) = [X_c^2(\lambda) + X_s^2(\lambda)]/2. \quad (23)$$

Случайные процессы (22) являются статистически независимыми гауссовскими случайными процессами с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и коэффициентами корреляции

$$\langle X_c(\lambda_1)X_c(\lambda_2) \rangle = \langle X_s(\lambda_1)X_s(\lambda_2) \rangle = \frac{\min(\lambda_1, \lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}. \quad (24)$$

Выполним в формулах (22) и (23) замену переменных  $m = \ln(\lambda/\Lambda_1)$ ,  $0 \leq m \leq \tilde{m}$ ,  $\tilde{m} = \ln(\Lambda_2/\Lambda_1)$ ,  $\lambda = \Lambda_1 \exp(m)$ . При такой замене случайные процессы  $X_c(\lambda)$  и  $X_s(\lambda)$  как функции переменной  $m$  обладают корреляционной функцией

$$\langle X_c(m_1)X_c(m_2) \rangle = \langle X_s(m_1)X_s(m_2) \rangle = \frac{\min[\exp(m_1), \exp(m_2)]}{\exp[(m_1 + m_2)/2]} = \exp[-|m_2 - m_1|/2]. \quad (25)$$

Следовательно, случайные процессы  $X_c(m)$  и  $X_s(m)$  являются статистически независимыми стационарными гауссовскими и марковскими процессами [7]. Тогда решающая статистика (23) как функция переменной  $m$  представляет собой случайный процесс с математическим ожиданием

$$\langle L_0(m) \rangle = 1, \quad (26)$$

корреляционной функцией

$$K(m_1, m_2) = \exp(-|m_2 - m_1|) \quad (27)$$

и одномерной плотностью вероятности

$$W(x) = \exp(-x). \quad (28)$$

Согласно работе [6] процесс  $L_0(m)$  является марковским с коэффициентами сноса и диффузии  $k_1 = 1 - L_0$  и  $k_2 = 2L_0$  соответственно. Приближённое выражение для распределения величины абсолютного максимума случайного процесса  $L(m)$  можно записать как (см. [6], с. 85)

$$P\{L_0(m) < h\} \approx \begin{cases} \exp[-\tilde{m}h \exp(-h)], & h \geq 1, \\ 0, & h < 1. \end{cases} \quad (29)$$



Возвращаясь к переменной  $\lambda$ , а затем к переменной  $\tau$ , получаем

$$P\{L_0(\tau) < h\} \approx \begin{cases} \left[ \frac{q(T_1)}{q(T_2)} \right]^{h \exp(-h)}, & h \geq 1, \\ 0, & h < 1. \end{cases} \quad (30)$$

Точность этого выражения возрастает с увеличением параметра  $h$  и отношения  $q(T_2)/q(T_1)$ . Вероятность ложной тревоги  $\alpha$  по определению равна вероятности превышения порога решающей статистикой (13) при отсутствии сигнала в принятой реализации. Следовательно,

$$\alpha = 1 - P\{L_0(\tau) < h\} \approx \begin{cases} 1 - \left[ \frac{q(T_1)}{q(T_2)} \right]^{h \exp(-h)}, & h \geq 1, \\ 1, & h < 1. \end{cases} \quad (31)$$

Перейдём к определению вероятности пропуска  $\beta$ . При наличии сигнала в наблюдаемой реализации решающая статистика (18) принимает вид

$$L_1(\lambda) = L(\lambda|\gamma_0 = 1) = \frac{[\min(\lambda_0, \lambda)]^2}{2\lambda} + \frac{\min(\lambda_0, \lambda)N_1(\lambda)}{\lambda} + \frac{N_c^2(\lambda) + N_s^2(\lambda)}{2\lambda}. \quad (32)$$

Перейдём в последнем выражении к новой переменной  $l = \lambda/\lambda_0$ ,  $\Lambda_1/z_0^2 \leq l \leq \Lambda_2/z_0^2$ . Тогда

$$L_1(l) = z_0^2 \frac{[\min(1, l)]^2}{2l} + z_0 \frac{\min(1, l)N_1(l)}{l} + \frac{N_c^2(l) + N_s^2(l)}{2l}, \quad (33)$$

где  $z_0^2 = \lambda_0$  — отношение сигнал/шум на выходе приёмника для принятого сигнала. При достаточно больших отношениях сигнал/шум последним слагаемым можно пренебречь по сравнению с предыдущими и, возвращаясь к переменной  $\lambda$ , записать приближённо

$$L_1(\lambda) \approx \frac{[\min(\lambda_0, \lambda)]^2}{2\lambda} + \frac{\min(\lambda_0, \lambda)}{\lambda} N_1(\lambda). \quad (34)$$

Эта функция представляет собой гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием

$$S_1(\lambda) = \frac{[\min(\lambda, \lambda_0)]^2}{2\lambda} \quad (35)$$

и корреляционной функцией

$$K_1(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\min(\lambda_1, \lambda_0) \min(\lambda_2, \lambda_0)}{\lambda_1 \lambda_2} \min(\lambda_1, \lambda_2). \quad (36)$$

Как показано в работе [4], коэффициент корреляции решающей статистики (34)

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = \min(\lambda_1, \lambda_2) / \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$$

удовлетворяет условию [7, 8]

$$R(x, y) = R(x, t)R(t, y), \quad x > t > y.$$

Следовательно, случайный процесс (34) является марковским с коэффициентами сноса и диффузии [7]

$$k_1(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0, \\ -\lambda_0^2/\lambda^2, & \lambda \geq \lambda_0, \end{cases} \quad k_2(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0, \\ \lambda_0^2/\lambda^2, & \lambda \geq \lambda_0. \end{cases}$$

При больших отношениях сигнал/шум максимум решающей статистики (34) располагается в малой окрестности положения максимума её математического ожидания [1]. Математическое ожидание (35) достигает максимального значения при  $\lambda = \lambda_0$ . Введём величину  $\varepsilon = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$ , абсолютное значение которой уменьшается с ростом отношения сигнал/шум  $\lambda_0 = z_0^2$ , и перепишем коэффициенты сноса и диффузии в виде

$$k_1(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0, \\ -(1 + \varepsilon)^{-2}, & \lambda \geq \lambda_0, \end{cases} \quad k_2(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0, \\ (1 + \varepsilon)^{-2}, & \lambda \geq \lambda_0. \end{cases}$$

Поскольку  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $z_0 \rightarrow \infty$ , то при больших отношениях сигнал/шум решающую статистику (34) в окрестности точки  $\lambda = \lambda_0$  можно аппроксимировать гауссовским марковским случайным процессом  $\mu_1(\lambda)$  с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0, \\ -1, & \lambda \geq \lambda_0. \end{cases} \quad k_2(\lambda) = 1.$$

Будем использовать эту аппроксимацию на всём интервале возможных значений параметра  $\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2$ .

Вероятность пропуска сигнала по определению равна вероятности непревышения порога  $h$  случайным процессом  $\mu_1(\lambda)$ :

$$\beta = P\{-\infty < \mu_1(\lambda) < h, \quad \Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2\}. \quad (37)$$

Для нахождения вероятности (37) воспользуемся методикой, приведённой в работах [1, 2]. Введём вспомогательный случайный процесс  $y(\lambda) = h - \mu_1(\lambda)$ , который является гауссовским марковским процессом с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} -1, & \lambda < \lambda_0, \\ 1, & \lambda \geq \lambda_0. \end{cases} \quad k_2(\lambda) = 1. \quad (38)$$

Тогда вероятность пропуска (37)

$$\beta = P\{y(\lambda) > 0, \quad \Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2\}$$

представляет собой вероятность недостижения границ  $y = 0$  и  $y = +\infty$  марковским случайным процессом  $y(\lambda)$  на отрезке  $\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2$ . Согласно [7] для искомой вероятности можно записать

$$\beta = \int_0^\infty W(y, \Lambda_2) dy. \quad (39)$$

Здесь  $W(y, \lambda)$  — решение уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова [1, 7]

$$\frac{\partial W(y, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial y} [k_1 W(y, \lambda)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_2 W(y, \lambda)] = 0 \quad (40)$$

при граничных условиях  $W(y = 0, \lambda) = W(y = \infty, \lambda) = 0$  и начальном условии

$$W(y, \lambda)|_{\lambda=\Lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \exp \left[ -\frac{(y - h + \Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1} \right].$$



Применяя метод отражения с переменной знака [7], находим решение уравнения (40) с коэффициентами (38) отдельно для случаев  $\Lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0$  и  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \Lambda_2$ . Подставляя найденные решения в формулу (39), получаем выражение для вероятности пропуска сигнала в виде

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_0}} \int_0^\infty \exp \left[ -\frac{(\xi + \lambda_0/2)^2 + h^2 - h\lambda_0}{2\lambda_0} \right] \left[ \Phi \left( \frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) - \exp(-\xi) \Phi \left( \frac{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \lambda_0}} \right) \right] \left[ \Phi \left( h \sqrt{\frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{\lambda_0 \Lambda_1}} + \xi \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0 - \Lambda_1)}} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left( \frac{h\xi}{\lambda_0} \right) - \Phi \left( h \sqrt{\frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{\lambda_0 \Lambda_1}} - \xi \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0 - \Lambda_1)}} \right) \exp \left( -\frac{h\xi}{\lambda_0} \right) \right] d\xi, \quad (41)$$

где  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$  — интеграл вероятности. Выражение (41) совпадает с выражением для вероятности пропуска сигнала, найденном в работе [2] для алгоритма обнаружения сигнала с неизвестной длительностью и априори известными амплитудой и фазой. Следовательно, при больших отношениях сигнал/шум вероятность пропуска инвариантна к отсутствию априорной информации об амплитуде и фазе сигнала.

В качестве примера конкретизируем полученные выражения для прямоугольного радиоимпульса со скошенной вершиной огибающей [9]. Форму огибающей, запишем в виде

$$f(t) = [1 + (d-1)t/T_2] \sqrt{3/(d^2 + d + 1)}. \quad (42)$$

Рис. 2

Параметр  $d = f(T_2)/f(0)$  характеризует наклон скошенной вершины. Множитель  $\sqrt{3/(d^2 + d + 1)}$  введён для того, чтобы энергия нормированного сигнала с максимальной длительностью

$$E = \int_0^{T_2} f^2(t) dt = \int_0^{T_2} 3 \frac{[1 + (d-1)t/T_2]^2}{d^2 + d + 1} dt = T_2$$

не зависела от наклона вершины импульса. Это даёт возможность сравнивать эффективность обнаружения сигналов с разным наклоном вершины, но одинаковой энергией.

Вычислим функцию (16) применительно к сигналу (42):

$$q(\tau) = \lambda = \frac{3a_0^2 \tau}{N_0} \frac{1 + (d-1)\tau/T_2 + (d-1)^2 \tau^2 / (3T_2^2)}{d^2 + d + 1}.$$

Введём нормированную длительность  $\eta = \tau/T_2$ ,  $1/k \leq \eta \leq 1$ , где  $k = T_2/T_1$  — динамический диапазон возможных значений длительности. Далее получим

$$\Lambda_1 = q(T_1) = \frac{3z_T^2}{k} \frac{1 + (d-1)/k + (d-1)^2 / (3k^2)}{d^2 + d + 1},$$

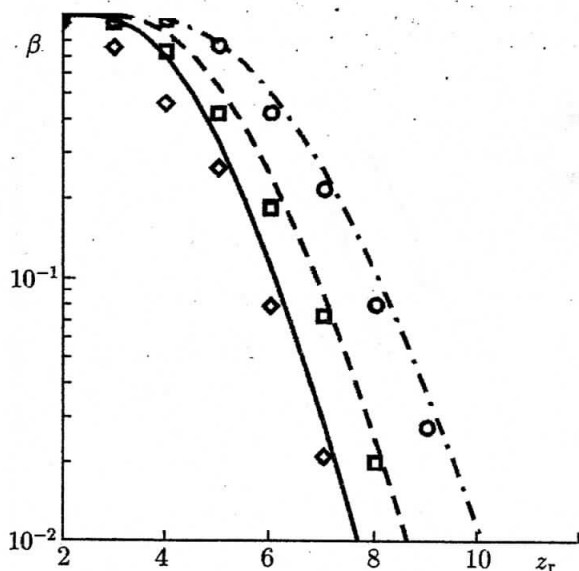


Рис. 3

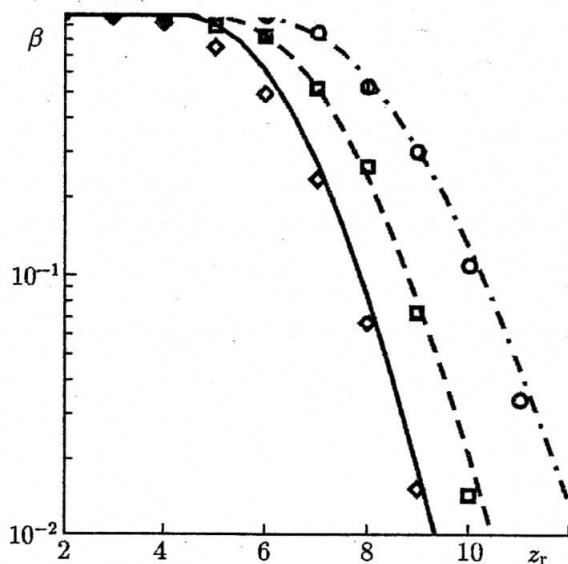


Рис. 4

$$\lambda_0 = q(\tau_0) = z_0^2 = 3z_r^2 \eta_0 \frac{1 + (d-1)\eta_0 + (d-1)^2 \eta_0^2 / 3}{d^2 + d + 1},$$

$$\Lambda_2 = q(T_2) = z_r^2.$$

Здесь  $\eta_0 = \tau_0/T_2$ ,  $z_r^2 = a_0^2 T_2/N_0$  — отношение сигнал/шум для сигнала с максимальной длительностью.

На рис. 2 показаны зависимости вероятности ложной тревоги (31) от порога  $h$  для сигнала (42). Сплошные кривые соответствуют убывающему импульсу с наклоном  $d = 0,5$ , штриховые — прямоугольному  $d = 1$ , штрих-пунктирные — возрастающему импульсу  $d = 2$ . Динамический диапазон возможных значений длительности  $k = 4$ . На рис. 3 и 4 изображены зависимости вероятности пропуска сигнала (41) от отношения сигнал/шум  $z_r$  при заданных уровнях вероятности ложной тревоги  $\alpha = 10^{-3}$  и  $\alpha = 10^{-6}$  соответственно. При расчёте вероятности пропуска предполагалось, что  $k = 4$ , истинная длительность сигнала была выбрана в середине априорного интервала, т. е.

$$\tau_0 = (T_1 + T_2)/2, \text{ и } \eta_0 = (1 + 1/k)/2 = (k + 1)/2k.$$

Порог  $h$  находился из формулы (31) в соответствии с критерием Неймана—Пирсона [6]. Обозначения кривых на рис. 3 и 4 такие же, как на рис. 2. Как видно из рис. 2–4, увеличение скачка огибающей в неизвестный момент окончания сигнала приводит к росту вероятностей ошибок.

Поскольку вероятность пропуска сигнала (41) инвариантна к отсутствию априорной информации об амплитуде и фазе сигнала, влияние априорного незнания начальной фазы радиосигнала на вероятность ложной тревоги при неизменной вероятности пропуска сигнала можно количественно охарактеризовать величиной

$$\zeta = \alpha(h_a)/p, \quad (43)$$

где  $h_a$  — порог, найденный из решения уравнения  $\alpha_a(h_a) = p$ ,

$$\alpha_a(h) = \begin{cases} 1 - \left[ \frac{q(T_1)}{q(T_2)} \right] \sqrt{h/\pi} \exp(-h), & h \geq 1/2; \\ 1, & h < 1/2 \end{cases} \quad (44)$$

— заимствована из работы [4] формула для вероятности ложной тревоги в алгоритме обнаружения сигнала с неизвестными амплитудой и длительностью при априори известной начальной фазе. Величина  $\zeta$  (43) показывает, во сколько раз увеличивается вероятность ложной тревоги в алгоритме обнаружения вследствие априорного незнания начальной фазы сигнала при неизменной вероятности пропуска. На рис. 5 показаны зависимости проигрыша (43) от величины  $p$  для динамического диапазона значений длительности  $k = 4$  и различных наклонов скошенной вершины огибающей:  $d = 0,1$  (сплошная кривая, убывающий импульс),  $d = 1$  (штриховая кривая, прямоугольный импульс),  $d = 10$  (штрих-пунктирная кривая, возрастающий импульс). Как следует из кривых рис. 5, проигрыш в величине вероятности ложной тревоги вследствие априорного незнания начальной фазы радиосигнала возрастает с уменьшением требуемого уровня ложной тревоги и с увеличением величины скачка огибающей в неизвестный момент окончания сигнала.

Рассмотрим далее, как изменяется вероятность пропуска сигнала вследствие отсутствия информации о его амплитуде и начальной фазе при одинаковых вероятностях ложной тревоги. Для этого аналогично работе [4] введём в рассмотрение величины проигрышей в эффективности обнаружения

$$\chi_1 = \beta(h_{a\varphi}, z_r) / \beta(h_0, z_r), \quad \chi_2 = \beta(h_a, z_r) / \beta(h_0, z_r), \quad (45)$$

$$\chi = \beta(h_{a\varphi}, z_r) / \beta(h_a, z_r). \quad (46)$$

Здесь  $h_{a\varphi}$  — порог, найденный из решения уравнения  $\alpha(h_{a\varphi}) = p$  (31),  $h_a$  — порог, определённый из решения уравнения  $\alpha_a(h_a) = p$ , где  $\alpha_a(h_a)$  определяется формулой (44), а  $h_0$  — из решения уравнения  $\alpha_0(h_0, z_r) = p$ . Величина  $\alpha_0(h, z_r)$  определяется выражением

$$\alpha_0(h, z_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \int_0^\infty \exp \left[ -\frac{(\xi - c - \Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1} \right] \left[ \Phi \left( \frac{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}} \right) - \exp(-\xi) \Phi \left( \frac{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}} \right) \right] d\xi$$

и представляет собой вероятность ложной тревоги при обнаружении сигнала с априори известной амплитудой и неизвестной длительностью, заимствованную из работы [2],  $p$  — заданный согласно критерию Неймана–Пирсона уровень ложной тревоги.

Проигрыш  $\chi_1$  представляет собой отношение вероятности пропуска сигнала с неизвестными длительностью, амплитудой и начальной фазой к вероятности пропуска сигнала с неизвестной длительностью и априори известными амплитудой и фазой. Он показывает, во сколько раз изменяется вероятность пропуска сигнала вследствие незнания амплитуды и начальной фазы. Проигрыш  $\chi_2$  рассмотрен в работе [4] и показывает, во сколько раз вероятность пропуска сигнала с неизвестной амплитудой больше вероятности пропуска сигнала с известной амплитудой.

На рис. 6 показаны зависимости проигрышей (45) в эффективности обнаружения сигнала (42) вследствие незнания его амплитуды и начальной фазы от отношения сигнал/шум  $z_r$  при  $k = 4$ . Сплошными линиями построены зависимости проигрыша  $\chi_2$ , штриховыми — проигрыша  $\chi_1$ . Кривые 1 соответствуют возрастающему импульсу с наклоном вершины  $d = 2$ , кривые 2 — убывающему импульсу с наклоном  $d = 0,5$ . Уровень ложной тревоги был выбран равным  $p = 10^{-2}$ . Как видно из рис. 6, проигрыш в эффективности обнаружения из-за незнания амплитуды и начальной фазы сигнала может быть достаточно большим и растёт с уменьшением скачка заднего фронта огибающей.

Сравнить эффективность алгоритма обнаружения радиосигнала с неизвестной амплитудой с эффективностью алгоритма обнаружения радиосигнала с неизвестными амплитудой и начальной

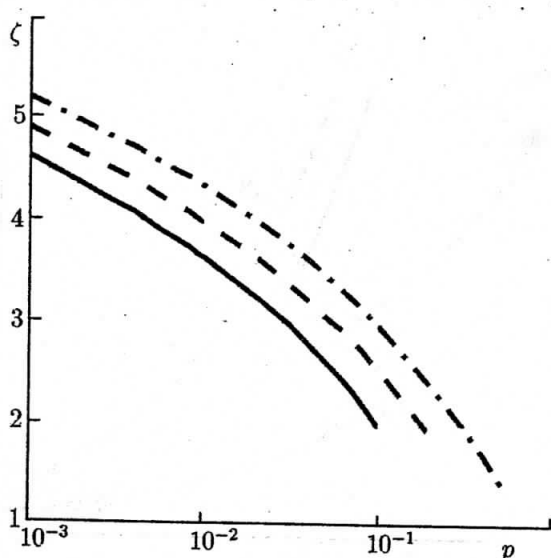


Рис. 5

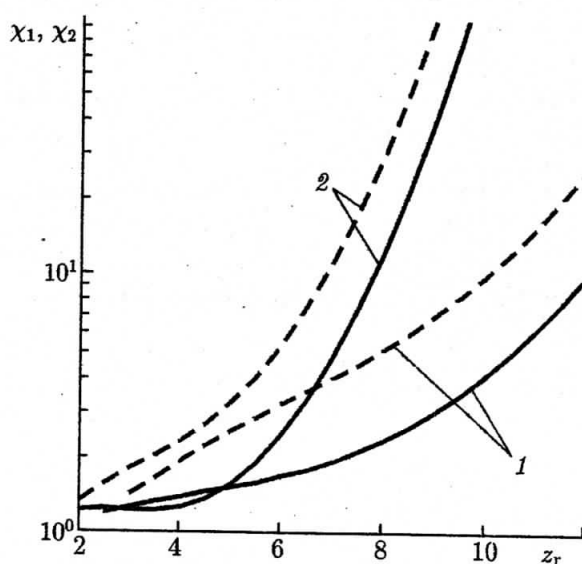


Рис. 6

фазой позволяет величина проигрыша  $\chi$  (46). Она характеризует увеличение вероятности пропуска радиосигнала вследствие априорного незнания его начальной фазы. На рис. 7 показаны зависимости проигрыша (46) в эффективности обнаружения сигнала (42) вследствие незнания его начальной фазы от отношения сигнал/шум  $z_r$  при  $k = 4$ . Сплошными линиями построены графики для убывающего импульса с наклоном вершины  $d = 0,5$ , штриховыми — для возрастающего импульса с наклоном  $d = 2$ . Кривые 1 соответствуют вероятности ложной тревоги  $p = 10^{-2}$ , кривые 2 — вероятности  $p = 10^{-3}$ . Как видно из рис. 7, проигрыш в эффективности обнаружения из-за незнания начальной фазы сигнала может быть достаточно большим и растёт с уменьшением скачка заднего фронта сигнала.

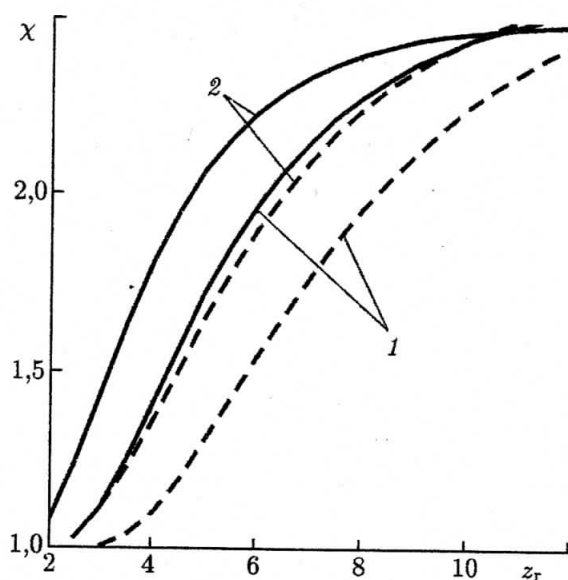


Рис. 7

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью проверки работоспособности синтезированного алгоритма обнаружения, а также определения границ применимости найденных асимптотических выражений для вероятностей ошибок было выполнено статистическое моделирование алгоритма обнаружения прямоугольного радиопульса со скошенной вершиной огибающей (42). Логарифм ФОП (13) представлялся в виде

$$L_i(\eta) = \frac{[z_r i S(\eta, \eta_0) \cos \varphi_0 + N_c(\eta)]^2 + [z_r i S(\eta, \eta_0) \sin \varphi_0 + N_s(\eta)]^2}{2S(\eta, \eta) \sqrt{(d^2 + d + 1)/3}},$$

$$S(\eta, \eta_0) = \sqrt{3} \min(\eta, \eta_0) [1 + (d-1) \min(\eta, \eta_0) + (d-1)^2 \min(\eta, \eta_0)^2 / 3] / \sqrt{d^2 + d + 1},$$

$$N_c(\eta) = \sqrt{\frac{T_2}{N_0}} \int_0^\eta n(T_2 x) [1 + (d-1)x] \cos(\omega T_2 x) dx,$$

$$N_s(\eta) = \sqrt{\frac{T_2}{N_0}} \int_0^\eta n(T_2 x) [1 + (d-1)x] \sin(\omega T_2 x) dx,$$

где  $\eta = \tau/T_2$ ,  $i = 0$  соответствует отсутствию сигнала в принятой реализации, а  $i = 1$  — наличию сигнала. При компьютерном моделировании вместо  $N_c(\eta)$  и  $N_s(\eta)$  использовались статистически эквивалентные им случайные процессы

$$\tilde{N}_c(\eta) = \sqrt{\frac{T_2}{2N_0}} \int_0^\eta n(T_2 x) [1 + (d-1)x] dx,$$

$$\tilde{N}_s(\eta) = \sqrt{\frac{T_2}{2N_0}} \int_0^\eta n(T_2 x) [1 + (d-1)x] dx.$$

В процессе моделирования с шагом  $\Delta\eta = 10^{-6}$  вычислялись отсчёты функций  $\tilde{N}(\eta)$  и  $\tilde{N}(\eta)$ , на основе которых логарифм ФОП аппроксимировался ступенчатой функцией с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью  $\varepsilon = 0,1$ , а истинное значение начальной фазы  $\varphi_0$  было выбрано равным нулю. Соответственно дискретные отсчёты логарифма ФОП представлялись в виде

$$L_i(n\Delta\eta) = \frac{\left[ z_{\tau} i S(n\Delta\eta, n_0\Delta\eta) + \sqrt{\Delta\eta} \sum_{m=1}^n |1 + (d-1)m\Delta\eta| x_m \right]^2}{2n\Delta[1 + (d-1)n\Delta\eta + (d-1)^2 n^2 \Delta\eta^2 / 3]} + \frac{\left[ \sqrt{\Delta\eta} \sum_{m=1}^n |1 + (d-1)m\Delta\eta| x_m \right]^2}{2n\Delta[1 + (d-1)n\Delta\eta + (d-1)^2 n^2 \Delta\eta^2 / 3]}. \quad (47)$$

Здесь  $x_m$  — гауссовские статистически независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией,  $n = \overline{n_1, n_2}$ ,  $n_1 = 1/k\Delta\eta$ ,  $n_2 = 1/\Delta\eta$ ,  $n_0 = \eta_0/\Delta\eta$ .

Для моделирования алгоритма обнаружения на основе отсчётов (47) вычислялись величины

$$L_i = \max_n L_i(n\Delta\eta).$$

Затем они сравнивались с порогом. Если при  $i = 0$  порог был превышен, то фиксировалась ложная тревога. Аналогичным образом, если порог не был превышен при  $i = 1$ , то фиксировалась ошибка пропуска сигнала. В качестве оценок вероятностей ложной тревоги и пропуска использовались относительные частоты появления соответствующих ошибок. В процессе моделирования было реализовано  $10^5$  циклов испытаний для каждого  $z_{\tau}$ . Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала не более чем на 15% при  $\alpha, \beta > 10^{-3}$ .

Результаты моделирования приведены на рис. 2–4. На рис. 2 ромбиками (для  $d = 0,5$ ), квадратиками (для  $d = 1$ ) и кружками (для  $d = 2$ ) нанесены экспериментальные значения вероятности



ложной тревоги. Как видно из этих рисунков, точность асимптотического выражения (31) для вероятности ложной тревоги возрастает с ростом порога. Формула (31) удовлетворительно описывает экспериментальные данные при  $k \geq 4$ .

На рис. 3, 4 ромбиками (для  $d = 0,5$ ), квадратиками (для  $d = 1$ ) и кружками (для  $d = 2$ ) нанесены экспериментальные значения вероятности пропуска сигнала при  $k = 4$ . Порог при моделировании вычислялся из заданного уровня вероятности ложной тревоги  $\alpha(h) = p$  с использованием асимптотического выражения (31). Результаты, показанные на рис. 3, соответствуют вероятности  $p = 10^{-3}$ , на рис. 4 —  $p = 10^{-6}$ . Из этих рисунков видно, что асимптотические выражения для вероятности пропуска сигнала удовлетворительно описывают экспериментальные данные для величин отношения сигнал/шум  $z_T \geq 4 \div 5$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Априорное незнание амплитуды и начальной фазы радиосигнала с произвольной формой огибающей и неизвестной длительностью приводит к усложнению структуры обнаружителя. Показано, что форма сигнала может оказывать существенное влияние на эффективность обнаружения. Относительный проигрыш в эффективности обнаружения вследствие априорного незнания амплитуды и начальной фазы возрастает с уменьшением скачка заднего фронта огибающей радиосигнала.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 годы (проект 978).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.
2. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 7. С. 625.
3. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32, № 6. С. 1241.
4. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э., Кондратович П. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2011. Т. 54, № 5. С. 391.
5. Тихонов В. И. Оптимальный приём сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.
6. Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др. Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984. 440 с.
7. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977. 488 с.
8. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978. 304 с.
9. Грязнов М. И., Гуревич М. Л., Рябинин Ю. А. Измерение параметров импульсов. М.: Радио и связь, 1991. 216 с.

Поступила в редакцию 7 июля 2014 г.; принята в печать 24 февраля 2015 г.