

320

320

Том 60, Номер 8

ISSN 0033-8494
Август 2015



РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

<http://www.naukaran.ru>
<http://www.maik.ru>



“НАУКА”

ОЦЕНКА ПЛОЩАДИ ИЗОБРАЖЕНИЯ
ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРАХ ИЗОБРАЖЕНИЯ И ФОНА - (0,2)© 2015 г. А. П. Трифонов¹, Ю. Н. Прибытков¹, О. В. Чернояров², Б. Б. Михайлов³¹Воронежский государственный университет

Российская Федерация, 394007, Воронеж, Университетская пл., 1

²Национальный исследовательский университет "МЭИ"

Российская Федерация, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14

³Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Российская Федерация, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

Поступила в редакцию 18.02.2015 г.

Получены характеристики квазиравдоподобной и максимально-равдоподобной оценок площади изображения при неизвестных регулярных составляющих и интенсивностях изображения и аппликативного фона. Выполнен анализ влияния степени априорной неопределенности относительно этих параметров на точность оценки площади.

DOI: 10.7868/S0033849415080185

Как известно, одна из основных задач, которые решают системы машинного зрения, состоит в оценке параметров пространственно протяженных объектов по их изображениям [1, 2]. Так, одним из параметров, точная оценка которого необходима в задачах анализа неоднородностей изображений со стохастической структурой, является площадь изображения неоднородностей. При разработке практически реализуемых алгоритмов необходимо располагать прогнозируемыми характеристиками алгоритмов оценки площади, а также проанализировать влияние априорной неопределенности относительно параметров изображений объекта и подстилающей поверхности на качество выносимой оценки. Такой анализ может быть проведен при использовании соответствующих моделей изображения и фона. В качестве одной из таких моделей, пригодной для описания изображений со стохастической текстурой, может быть использована модель в виде реализации гауссовского случайного поля [3–5], которая широко применяется для синтеза оптимальных алгоритмов обнаружения и фильтрации изображений [4]. Эта модель позволяет описать текстуры изображения и фона путем задания функций их пространственных корреляций. Кроме того, эта модель является частным случаем обобщенной гауссовской модели [6], описывающей широкий класс реальных изображений.

Задача оценки площади гауссовского изображения пространственно протяженного объекта, наблюдаемого на гауссовском фоне, рассматривалась в работе [7] для случая известных параметров

изображения и фона. Цель данной работы – синтез и анализ эффективности алгоритмов оценки площади при неизвестных регулярных составляющих и интенсивностях изображения и фона.

Полагаем, что наблюдаемые данные $x(\bar{r})$ представляют собой реализацию случайного поля и занимают двумерную область G , площадь которой равна χ_G . Здесь $\bar{r} = (r_1, r_2)$ – радиус-вектор точки на плоскости, принадлежащей G . Поле $x(\bar{r})$ содержит полезное изображение объекта $s(\bar{r})$, пространственный шум $n(\bar{r})$ и фоновое излучение $v(\bar{r})$. Это излучение обусловлено рассеянием зондирующего сигнала подстилающей поверхностью, на которой находится обнаруживаемый объект. Для учета проявляющихся на практике эффектов затенения фона воспользуемся аппликативной моделью взаимодействия изображения и фона [5], согласно которой наблюдаемая реализация может быть представлена в виде

$$x(\bar{r}) = I_s(\bar{r}, \chi_0) s(\bar{r}) + I_v(\bar{r}, \chi_0) v(\bar{r}) + n(\bar{r}). \quad (1)$$

Здесь $I_s(\bar{r}, \chi) = I(\bar{r}, \Omega_s(\chi))$, $I_v(\bar{r}, \chi) = I(\bar{r}, \Omega_v \times (\chi_G - \chi))$ – индикаторы областей, занимаемых изображением $\Omega_s(\chi)$ и фоном $\Omega_v(\chi_G - \chi)$; $I(\bar{r}, \Omega(\chi)) = 1$, если $\bar{r} \in \Omega(\chi)$, и $I(\bar{r}, \Omega(\chi)) = 0$, если $\bar{r} \notin \Omega(\chi)$, – индикатор области $\Omega(\chi)$, имеющей площадь χ ; χ_0 – истинное значение неизвестной площади, которое может принимать значение из интервала $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$.

Далее будем полагать, что изображение $s(\bar{r})$ и фон $v(\bar{r})$ представляют собой однородные статистически взаимно независимые гауссовские поля с регулярными составляющими (математическими ожиданиями) a_s, a_v и корреляционными функциями $B_s(\bar{r}), B_v(\bar{r})$. Будем также считать, что спектральные плотности изображения $G_s(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\bar{r}) \exp(-j\bar{\omega} \bar{r}) d\bar{r}$ и фона $G_v(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} B_v(\bar{r}) \times \exp(-j\bar{\omega} \bar{r}) d\bar{r}$ постоянны в пределах областей пространственных частот ω_s и ω_v соответственно. Вне этих областей спектральные плотности изображения и фона равны нулю, т.е. $G_s(\bar{\omega}) = g_s I(\bar{\omega}, \omega_s), G_v(\bar{\omega}) = g_v I(\bar{\omega}, \omega_v)$, где $I(\bar{\omega}, \omega) = 1$ при $\bar{\omega} \in \omega$ и $I(\bar{\omega}, \omega) = 0$ при $\bar{\omega} \notin \omega, g_s = G_s(0), g_v = G_v(0)$. Полагаем, что пространственный шум $n(\bar{r})$ взаимно независим с изображением и фоном и представляет собой реализацию центрированного белого гауссовского шума с нулевым средним и односторонней спектральной плотностью N_0 .

Таким образом, задача состоит в оценке неизвестной площади χ_0 изображения при неизвестных регулярных составляющих a_s, a_v и относительных интенсивностях изображения $q_s = 2g_s/N_0$ и фона $q_v = 2g_v/N_0$.

Для оценки неизвестной площади в соответствии с теорией статистических решений [8] найдем явный вид функционала отношения правдоподобия (ФОП) при проверке гипотезы (1) против альтернативы $x(\bar{r}) = n(\bar{r})$. При этом будем полагать, что площади изображения и фона существенно превышают площади областей их пространственной корреляции, т.е. выполняются следующие неравенства:

$$\mu_s = \chi_{\min} S_{\omega_s} / (2\pi)^2 \gg 1, \quad \mu_b = \chi_{\min} S_{\omega_v} / (2\pi)^2 \gg 1, \quad (2)$$

$$\mu_v = (\chi_G - \chi_{\max}) S_{\omega_v} / (2\pi)^2 \gg 1,$$

где S_{ω_s} и S_{ω_v} — площади областей ω_s и ω_v соответственно. Тогда, обобщая результаты [9] на случай неизвестной площади, для искомого логарифма ФОП получим следующую аппроксимацию:

$$L(a_s, q_s, a_v, q_v, \chi) = L_s(a_s, q_s, \chi) + L_v(a_v, q_v, \chi), \quad (3)$$

где

$$L_s(a_s, q_s, \chi) = \frac{1}{N_0} Y_s(\chi) - \frac{1}{N_0(1+q_s)} \times \quad (4)$$

$$\times [Y_s(\chi) - 2a_s X_s(\chi) + a_s^2 \chi] - \frac{\mu_s \chi}{2\chi_{\min}} \ln(1+q_s),$$

$$L_v(a_v, q_v, \chi) = \frac{1}{N_0} Y_v(\chi) - \frac{1}{N_0(1+q_v)} [Y_v(\chi) - \quad (5)$$

$$- 2a_v X_v(\chi) + a_v^2 (\chi_G - \chi)] - \frac{\mu_v (\chi_G - \chi)}{2(\chi_G - \chi_{\max})} \ln(1+q_v)$$

— логарифмы ФОП, записанные для областей, предположительно занимаемых изображением и фоном. В выражениях (4), (5) введены следующие обозначения:

$$X_s(\chi) = \int_{\Omega_s(\chi)} x(\bar{r}) d\bar{r}, \quad X_v(\chi) = \int_{\Omega_v(\chi_G - \chi)} x(\bar{r}) d\bar{r},$$

$$Y_s(\chi) = \int_{\Omega_s(\chi)} y_s^2(\bar{r}) d\bar{r}, \quad Y_v(\chi) = \int_{\Omega_v(\chi_G - \chi)} y_v^2(\bar{r}) d\bar{r},$$

$y_s(\bar{r}), y_v(\bar{r})$ — сигналы на выходах пространственных фильтров, передаточные функции которых должны удовлетворять условиям $|H_s(\bar{\omega})|^2 = I(\bar{\omega}, \bar{\omega}_s), |H_v(\bar{\omega})|^2 = I(\bar{\omega}, \bar{\omega}_v)$ соответственно. Выражения (3)–(5) показывают, что для формирования логарифма ФОП необходимо получить линейную комбинацию четырех функций: $Y_s(\chi), Y_v(\chi), X_s(\chi), X_v(\chi)$, зависящих от неизвестного значения площади. При этом для формирования $Y_s(\chi), Y_v(\chi)$ необходимо применить два линейных фильтра, частотная характеристика одного определяется спектральной плотностью изображения, а другого — спектральной плотностью фона. Сигналы на выходе этих фильтров необходимо возвести в квадрат и проинтегрировать по области, занимаемой изображением. Дополнительно необходимо сформировать интегралы $X_s(\chi)$ и $X_v(\chi)$ от принятой реализации наблюдаемых данных по областям, занимаемым изображением и фоном.

Рассмотрим вначале квазиравдоподобный подход к оценке неизвестной площади при априори неизвестных математических ожиданиях и интенсивностях изображения и фона. Для этого заменим неизвестные значения параметров a_s, q_s, a_v, q_v в (3) некоторыми прогнозируемыми значениями $a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*$, в общем случае отличными от истинных значений $a_{s0}, q_{s0}, a_{v0}, q_{v0}$. Тогда оценка неизвестной площади определяется как положение абсолютного максимума $L(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*, \chi)$:

$$\hat{\chi}_{\text{кпо}} = \arg \max_{\chi} L(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*, \chi).$$

Согласно [9, 10] при $\mu_s \rightarrow \infty, \mu_v \rightarrow \infty$ распределение функционалов (4) и (5) при фиксированном неизвестном параметре χ сходится к гауссовскому. В дальнейшем будем полагать, что минимальная площадь изображения χ_{\min} и минимальная площадь фона $\chi_G - \chi_{\max}$ велики настолько, что $\mu_s \gg 1, \mu_v \gg 1$. Тогда, как показано в [7], в окрестности истинного значения параметра χ_0 логарифм ФОП $L(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*, \chi)$ (3) как функцию неизвестной площади χ можно приближенно считать гауссовским марковским процессом. Используя методику расчета характеристик гауссовского марковского

процесса [9], найдем следующие выражения для коэффициентов сноса:

$$K_{\text{Икпо}}(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*, \chi) = \frac{1}{\chi_{\text{мин}}} \begin{cases} k_1(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*), & \chi_{\text{мин}} \leq \chi \leq \chi_0, \\ -k_2(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*), & \chi_0 < \chi \leq \chi_{\text{макс}}, \end{cases} \quad (6)$$

и диффузии:

$$K_{\text{2кпо}}(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*, \chi) = \frac{1}{\chi_{\text{мин}}} \begin{cases} d_1(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*), & \chi_{\text{мин}} \leq \chi \leq \chi_0, \\ d_2(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*), & \chi_0 < \chi \leq \chi_{\text{макс}}, \end{cases} \quad (7)$$

процесса $L(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*, \chi)$.

Здесь

$$k_1(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*) = \frac{\mu_s q_s^* (1 + q_{s0})}{2(1 + q_s^*)} - \frac{\mu_v q_v^*}{2(1 + q_v^*)} \times \frac{\chi_{\text{мин}}}{\chi_G - \chi_{\text{макс}}} \left(1 + \varphi q_{s0} \sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_b}} \right) + \frac{\chi_{\text{мин}}}{N_0} \left[\frac{(a_{s0} - a_v^*)^2}{1 + q_v^*} - \frac{(a_s^* - a_{s0})^2}{1 + q_s^*} \right] - \frac{\mu_s}{2} \ln(1 + q_s^*) + \frac{\mu_v \chi_{\text{мин}}}{2(\chi_G - \chi_{\text{макс}})} \ln(1 + q_v^*), \quad (8)$$

$$k_2(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*) = -\frac{\mu_s q_s^*}{2(1 + q_s^*)} \left(1 + \varphi q_{v0} \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \right) + \frac{\mu_v \chi_{\text{мин}}}{2(\chi_G - \chi_{\text{макс}})} \frac{q_v^* (1 + q_{v0})}{1 + q_v^*} - \frac{\chi_{\text{мин}}}{N_0} \left[\frac{(a_{v0} - a_v^*)^2}{1 + q_v^*} - \frac{(a_s^* - a_{v0})^2}{1 + q_s^*} \right] + \frac{\mu_s}{2} \ln(1 + q_s^*) - \frac{\mu_v \chi_{\text{мин}}}{2(\chi_G - \chi_{\text{макс}})} \ln(1 + q_v^*), \quad (9)$$

$$d_1(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*) = \frac{1}{2(1 + q_s^*)^2} \times \left[\mu_s q_s^{*2} (1 + q_{s0})^2 + \frac{4\chi_{\text{мин}}}{N_0} (1 + q_{s0})(a_{s0} q_s^* + a_s^*)^2 \right] + \frac{1}{2(1 + q_v^*)^2} \left[\frac{\mu_v \chi_{\text{мин}} q_v^{*2}}{\chi_G - \chi_{\text{макс}}} \left(1 + \varphi q_{s0} (2 + q_{s0}) \sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_b}} \right) + \frac{4\chi_{\text{мин}}}{N_0} (1 + q_{s0})(a_{s0} q_s^* + a_v^*)^2 \right], \quad (10)$$

$$d_2(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*) = \frac{1}{2(1 + q_v^*)^2} \left[\frac{\mu_v \chi_{\text{мин}} q_v^{*2}}{\chi_G - \chi_{\text{макс}}} \times \left((1 + q_{v0})^2 + \frac{4\chi_{\text{мин}}}{N_0} (1 + q_{v0})(a_{v0} q_v^* + a_v^*)^2 \right) + \frac{1}{2(1 + q_s^*)^2} \left[\mu_s q_s^{*2} \left(1 + \varphi q_{v0} (2 + q_{v0}) \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \right) + \frac{4\chi_{\text{мин}}}{N_0} (1 + q_{v0})(a_{v0} q_s^* + a_s^*)^2 \right] \right], \quad (11)$$

$\varphi = S_{\text{осв}} / \sqrt{S_{\text{осв}} S_{\text{ов}}}$ – коэффициент, определяющий степень перекрытия областей, занимаемых спектральными плотностями полезного изображения и фона, $S_{\text{осв}}$ – площадь области перекрытия этих областей. Тогда, следуя [9, 11], для условного рассеяния оценки площади получим

$$V_{\text{кпо}}(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*, \hat{\chi} | \chi_0) \approx \chi_{\text{мин}}^2 \left[\frac{2 + 6R + 5R^2}{2z_2^4 (1 + R)^3} + \frac{R(5 + 6R + 2R^2)}{2z_1^4 (1 + R)^3} \right], \quad (12)$$

где

$$R = k_2(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*) d_1(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*) / k_1(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*) d_2(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*),$$

$$z_1 = k_1(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*) / \sqrt{d_1(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*)},$$

$$z_2 = k_2(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*) / \sqrt{d_2(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*)}.$$

Выражение (12) позволяет оценить влияние неточности задания прогнозируемых значений

$a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*$ неизвестных параметров на точность оценки площади. Для примера на рис. 1 приведены зависимости проигрыша $V_{\text{кпо}}/V_0$ в точности оценки площади от отношения $\varepsilon_{q_s} = (q_s^* - q_{s0})/q_{s0}$ при $q_v^* = q_{v0}, a_s^* = a_{s0} = a_v^* = a_{v0}, \mu_s = \mu_v = 100, \varphi = 0, \chi_{\text{макс}}/\chi_{\text{мин}} = 10, \chi_G/\chi_{\text{мин}} = 12, \chi_0/\chi_{\text{мин}} = 5, z_s = z_v = 10$. Здесь $V_{\text{кпо}} = V_{\text{кпо}}(a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*, \hat{\chi} | \chi_0), V_0 = V_{\text{кпо}}(a_{s0}, q_{s0}, a_{v0}, q_{v0}, \hat{\chi} | \chi_0)$ – рассеяние оценки площади при априори известных регулярных составляющих и относительных интенсивностях изображения и фона, $z_s^2 = 2a_{s0}^2 \chi_{\text{мин}}/N_0, z_v^2 = 2a_{v0}^2 (\chi_G - \chi_{\text{макс}})/N_0$. Сплошные кривые построены при $q_v^* = q_{v0} = 2$, штриховые – при $q_v^* = q_{v0} = 3$. Кривые 1–3 соответствуют $q_{s0} = 0.75; 0.5; 0.25$.

На рис. 2 представлены зависимости проигрыша в точности оценки площади от отношения $\varepsilon_{q_v} = (q_v^* - q_{v0})/q_{v0}$ при фиксированном значении $q_s^* = q_{s0}$. Сплошные кривые построены при $q_s^* = q_{s0} = 2$, штриховые – при $q_s^* = q_{s0} = 3$. Кривые 1–3 соответствуют $q_{v0} = 0.75; 0.5; 0.25$.

Из рис. 1, 2 следует, что ошибки в предполагаемых значениях интенсивности изображения q_s^* и фона q_v^* могут приводить к существенному снижению точности оценки площади. Кроме того, абсолютные значения относительных ошибок $\varepsilon_{q_s}, \varepsilon_{q_v}$ не должны превышать 0.7...0.9. В противном случае использование квазиправдоподобного

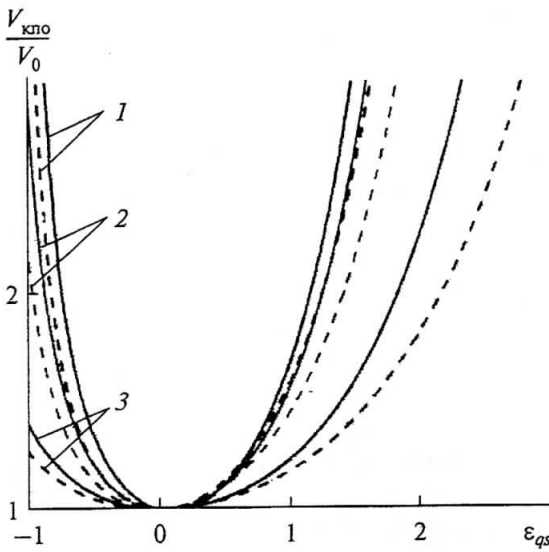


Рис. 1. Зависимость проигрыша в точности оценки площади от предполагаемого значения интенсивности изображения.

подхода для преодоления параметрической априорной неопределенности относительно интенсивностей изображения или фона может привести к существенной потере в точности оценки площади изображения. Сопоставление сплошных и штриховых кривых на рис. 1, 2 показывает, что чувствительность точности оценки площади к ошибкам в задании неизвестных значений интенсивностей изображения и фона зависит от того, насколько близки эти значения. На рис. 1 интенсивность фона больше интенсивности изображения. В результате увеличение истинного значения интенсивности изображения приводит к увеличению (сплошные кривые) проигрыша в точности оценки площади. На рис. 2 интенсивность изображения больше истинного значения интенсивности фона. При этом увеличение истинного значения интенсивности фона также приводит к увеличению проигрыша (сплошные кривые) в точности оценки площади. Таким образом, чем меньше абсолютное значение разности между истинными значениями интенсивностей изображения и фона, тем больше проигрыш в точности оценки площади, вызванный неточностью задания их прогнозируемых значений.

Отметим также, что ошибки в задании прогнозируемых значений интенсивности изображения и фона могут по-разному влиять на точность оценки площади изображения. Так, кривые на рис. 1 и 2 построены при $\delta\chi = 0.5$, где $\delta\chi = \chi_{\min}/(\chi_G - \chi_{\max})$ — отношение минимальной площади изображения к минимальной площади фона. Нетрудно видеть, что при таком соотношении площадей χ_{\min} , χ_{\max} , χ_G ошибки в предполагаемом значении интенсивности фона приводят к

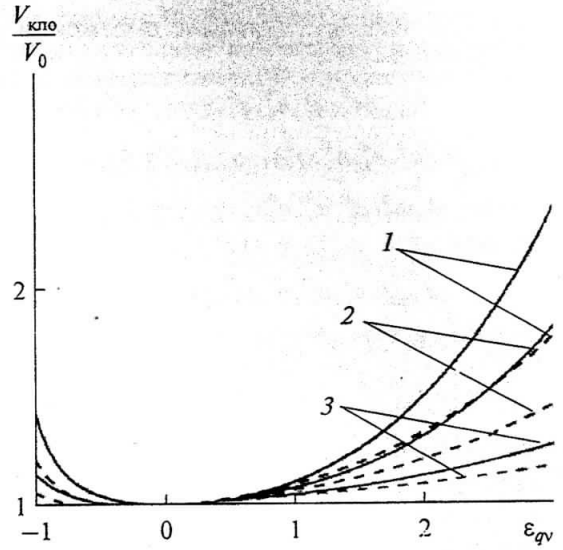


Рис. 2. Зависимость проигрыша в точности оценки площади от предполагаемого значения интенсивности фона.

меньшим проигрышам, чем аналогичные ошибки в предполагаемом значении интенсивности изображения. Тем не менее, при $\delta\chi > 1$ ошибки в предполагаемом значении интенсивности фона могут оказывать большее влияние на проигрыш в точности оценки площади, чем ошибки в задании предполагаемого значения интенсивности изображения.

На рис. 3 для $z_s = z_v = 10$ приведены зависимости проигрыша в точности оценки площади от параметра $\delta\chi$. Сплошные кривые построены при $q_v^* = q_{v0} = 2$, $\epsilon_{qs} = 1$, штриховые — при $q_s^* = q_{s0} = 2$, $\epsilon_{qv} = 1$. Таким образом, кривые 1–3 иллюстрируют проигрыш в точности оценки площади при ошибках задания прогнозируемого значения интенсивности изображения, кривые 4–6 — проигрыш при ошибках задания прогнозируемого значения интенсивности фона. Кривые 1–3 соответствуют $q_{s0} = 0.75; 0.5; 0.25$; кривые 4–6 — $q_{v0} = 0.75; 0.5; 0.25$. Из рисунка следует, что соотношение между априори известными минимальными значениями площадей изображения χ_{\min} и фона $\chi_G - \chi_{\max}$ оказывает влияние на чувствительность квази-правдоподобного алгоритма оценки площади к ошибкам ϵ_{qs} и ϵ_{qv} . Кроме того, параметр $\delta\chi$ определяет, какая из ошибок: ϵ_{qs} или ϵ_{qv} в большей степени влияет на точность оценки площади изображения.

Рассмотрим проигрыш в точности оценки площади, вызванный ошибками в задании значений регулярных составляющих изображения и фона. На рис. 4 показаны зависимости проигрыша в точности оценки площади от относительной ошибки $\epsilon_{as} = (a_s^* - a_{s0})/a_{s0}$ при $q_s^* = q_{s0} = q_v^* = q_{v0} = 0.3$,

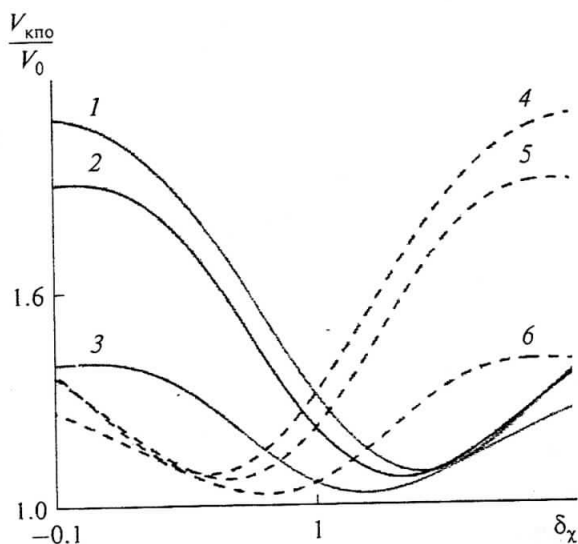


Рис. 3. Зависимость проигрыша в точности оценки площади от параметра $\delta\chi$ при ошибках в задании значений интенсивностей изображения и фона.

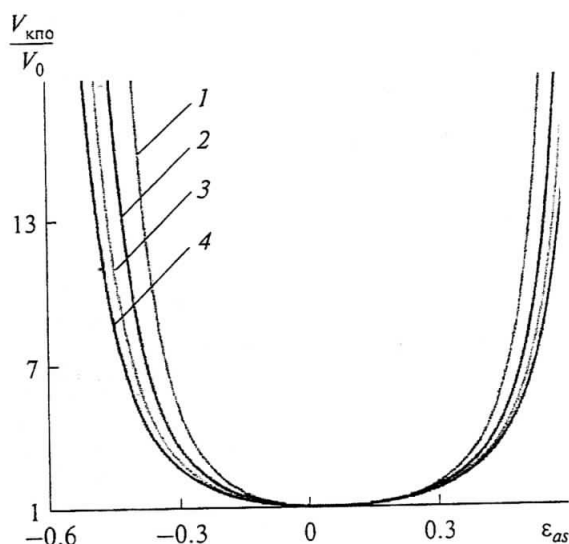


Рис. 4. Зависимость проигрыша в точности оценки площади от предполагаемого значения регулярной составляющей изображения.

$a_v^* = a_{v0}$, $z_v = 10$. Кривые 1–4 соответствуют $z_s = 30; 40; 50; 60$. На рис. 5 изображены зависимости проигрыша в точности оценки площади от относительной ошибки $\epsilon_{av} = (a_v^* - a_{v0})/a_{v0}$ при $q_s^* = q_{s0} = q_v^* = q_{v0} = 0.3$, $a_s^* = a_{s0}$, $z_s = 10$. Кривые 1–4 соответствуют $z_v = 30; 40; 50; 60$. Значение отношения $\delta\chi$ на рис. 4, 5 полагали равным 0.5.

Как следует из рис. 4, 5, при выбранном параметре $\delta\chi$ ошибки ϵ_{av} приводят к большим проигрышам в точности оценки площади, чем аналогичные значения ошибок ϵ_{as} . В то же время ошибки в задании прогнозируемого значения регулярной составляющей изображения могут существенно снижать точность оценки площади изображения (так, в рассматриваемом примере при увеличении $|\epsilon_{as}| > 0.3$ наблюдается резкое возрастание потерь в качестве оценки площади). Отметим также, что кривые на рис. 4 построены для случая $z_s > z_v$, причем уменьшение z_s при фиксированном значении ϵ_{as} приводит к увеличению проигрыша в точности оценки площади. Аналогичным образом увеличение проигрыша в точности выносимой оценки наблюдается при уменьшении z_v , когда $z_v > z_s$ и значение ϵ_{av} фиксировано (рис. 5). Следовательно, чем меньше абсолютное значение разности между z_s и z_v , тем больше проигрыш в точности оценки площади, вызванный ошибками задания прогнозируемых значений регулярных составляющих изображения и фона.

На рис. 6 изображены зависимости проигрыша в точности оценки площади от параметра $\delta\chi$

при $q_s^* = q_{s0} = q_v^* = q_{v0} = 0.3$. Кривые 1–3 построены при $a_v^* = a_{v0}$, $z_v = 10$, $\epsilon_{as} = 0.25$, эти кривые характеризуют влияние ошибки в точности задания прогнозируемого значения регулярной составляющей изображения на точность оценки площади. Кривые 1–3 соответствуют $z_s = 30; 40; 50$. Кривые 4–6 рассчитаны для $a_s^* = a_{s0}$, $z_s = 10$, $\epsilon_{av} = 0.25$, эти кривые характеризуют влияние ошибок в точности задания прогнозируемого значения

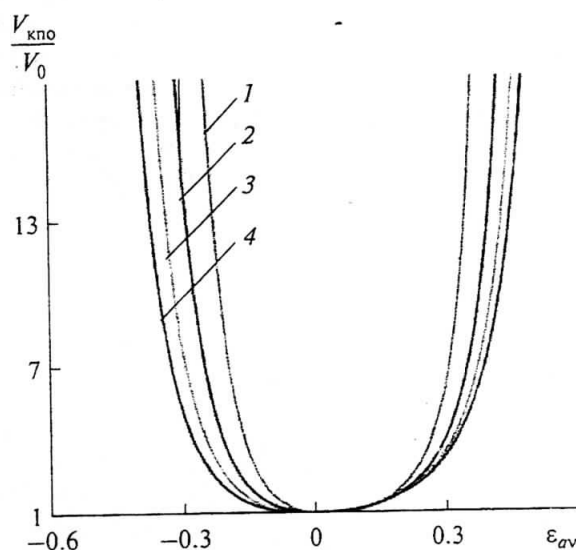


Рис. 5. Зависимость проигрыша в точности оценки площади от предполагаемого значения регулярной составляющей фона.

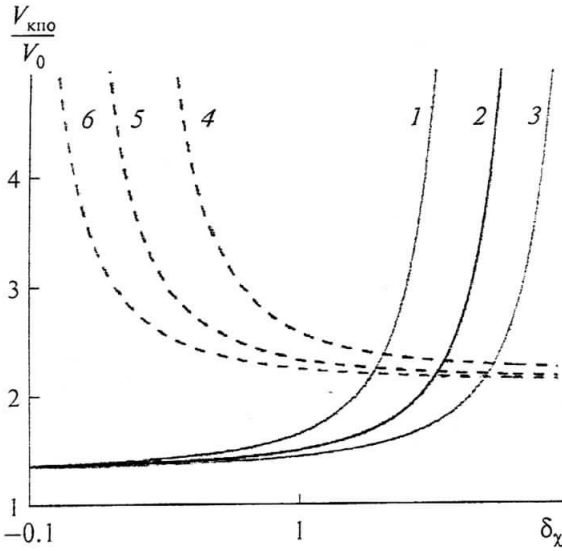


Рис. 6. Зависимость проигрыша в точности оценки площади от параметра $\delta\chi$ при ошибках в задании значений регулярных составляющих изображения и фона.

регулярной составляющей фона на точность оценки площади. Кривые 4–6 соответствуют $z_v = 30; 40; 50$.

Из рис. 6 следует, что соотношение между априори известными минимальными значениями площадей изображения χ_{\min} и фона $\chi_G - \chi_{\max}$ может оказывать заметное влияние на чувствительность квазиправдоподобного алгоритма оценки площади к ошибкам ε_{as} и ε_{av} . При этом параметр $\delta\chi$ определяют, какая из ошибок ε_{as} и ε_{av} в большей степени влияет на точность оценки площади изображения. Обобщая результаты, представленные на рис. 3, 6, заключаем, что при заданных параметрах (μ_s, μ_v, φ) уменьшение $\delta\chi$ приводит к увеличению влияния ошибок в точности задания прогнозируемых значений интенсивности изображения и регулярной составляющей фона, а при увеличении $\delta\chi$ большее влияние оказывают ошибки в задании интенсивности фона и регулярной составляющей изображения.

Таким образом, точность квазиправдоподобного алгоритма оценки площади существенно зависит от точности задания прогнозируемых значений $a_s^*, a_v^*, q_s^*, q_v^*$. Проигрыши, вызванные ошибками задания этих величин, могут достигать существенных значений и зависят не только от энергетических соотношений, характеризующих отношение сигнал/шум (μ_s, q_{s0}, z_s) или фон/шум (μ_v, q_{v0}, z_v), но и от соотношения площадей между априори известными минимальными значениями площадей изображения χ_{\min} и фона $\chi_G - \chi_{\max}$.

Уменьшить потери в точности оценки площади можно, если вместо предполагаемых значений

$a_s^*, q_s^*, a_v^*, q_v^*$ использовать их оценки, найденные по методу максимального правдоподобия [8]. В этом случае оценка максимального правдоподобия (ОМП) неизвестной площади имеет вид

$$\hat{\chi}_{\text{омп}} = \underset{\chi}{\text{argsup}} L(\chi), \quad (13)$$

$$L(\chi) = L(\hat{a}_s(\chi), \hat{q}_s(\chi), \hat{a}_v(\chi), \hat{q}_v(\chi), \chi),$$

где $\hat{a}_s(\chi), \hat{q}_s(\chi), \hat{a}_v(\chi), \hat{q}_v(\chi) = \underset{a_s, q_s, a_v, q_v}{\text{arg max}} L(a_s, q_s, a_v, q_v, \chi)$ — ОМП неизвестных регулярных составляющих и относительных интенсивностей изображения и фона.

Максимизируя (4) и (5), получим явный вид оценок $\hat{a}_s(\chi), \hat{q}_s(\chi), \hat{a}_v(\chi), \hat{q}_v(\chi)$:

$$\hat{a}_s(\chi) = \frac{X_s(\chi)}{\chi}, \quad (14)$$

$$\hat{q}_s(\chi) = \frac{2\chi_{\min}}{\mu_s N_0 \chi} \left[Y_s(\chi) - \frac{X_s^2(\chi)}{\chi} \right] - 1,$$

$$\hat{a}_v(\chi) = \frac{X_v(\chi)}{\chi_G - \chi}, \quad (15)$$

$$\hat{q}_v(\chi) = \frac{2(\chi_G - \chi_{\max})}{\mu_v N_0 (\chi_G - \chi)} \left[Y_v(\chi) - \frac{X_v^2(\chi)}{\chi_G - \chi} \right] - 1.$$

Усредняя (14), (15) по реализациям наблюдаемых данных при фиксированных значениях $a_{s0}, q_{s0}, a_{v0}, q_{v0}$ всех неизвестных параметров, для математических ожиданий $m_{\hat{a}_s}(\chi) = \langle \hat{a}_s - a_{s0} \rangle$, $m_{\hat{a}_v}(\chi) = \langle \hat{a}_v - a_{v0} \rangle$, $m_{\hat{q}_s}(\chi) = \langle \hat{q}_s - q_{s0} \rangle$, $m_{\hat{q}_v}(\chi) = \langle \hat{q}_v - q_{v0} \rangle$ и дисперсий $\sigma_{\hat{a}_s}^2(\chi) = \langle (\hat{a}_s - \langle \hat{a}_s \rangle)^2 \rangle$, $\sigma_{\hat{a}_v}^2(\chi) = \langle (\hat{a}_v - \langle \hat{a}_v \rangle)^2 \rangle$, $\sigma_{\hat{q}_s}^2(\chi) = \langle (\hat{q}_s - \langle \hat{q}_s \rangle)^2 \rangle$, $\sigma_{\hat{q}_v}^2(\chi) = \langle (\hat{q}_v - \langle \hat{q}_v \rangle)^2 \rangle$ оценок (14), (15) при $\mu_s \gg 1$, $\mu_v \gg 1$ находим

$$m_{\hat{a}_s}(\chi) = a_{s0} \frac{\min(\chi_0, \chi)}{\chi} + a_{v0} \frac{\max(0, \chi - \chi_0)}{\chi},$$

$$m_{\hat{a}_v}(\chi) = a_{s0} \frac{\max(0, \chi_0 - \chi)}{\chi_G - \chi} + a_{v0} \frac{\chi_G - \max(\chi_0, \chi)}{\chi_G - \chi},$$

$$m_{\hat{q}_s}(\chi) = \frac{1}{\chi} \left[(1 + q_{s0}) \min(\chi_0, \chi) + \left(1 + \varphi q_{v0} \sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_v}} \right) \max(0, \chi - \chi_0) \right] - \frac{\chi_{\min}}{\mu_s \chi} \left[\frac{1}{\chi} ((1 + q_{s0}) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \min(\chi_0, \chi) + (1 + q_{v0}) \max(0, \chi - \chi_0) - \\ & - \frac{2a_{s0}^2}{N_0} \min(\chi_0, \chi) - \frac{2a_{v0}^2}{N_0} \max(0, \chi - \chi_0) + \\ & + \frac{2}{N_0 \chi} (a_{s0} \min(\chi_0, \chi) + a_{v0} \max(0, \chi - \chi_0))^2 - 1, \\ m_{\hat{\chi}_v}(\chi) &= \frac{1}{(\chi_G - \chi)} \left[\left(1 + \varphi q_{s0} \sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_b}} \right) \max(0, \chi_0 - \right. \\ & - \chi) + (1 + q_{v0}) (\chi_G - \max(\chi_0, \chi)) \left. \right] - \frac{(\chi_G - \chi_{\max})}{\mu_v (\chi_G - \chi)} \times \\ & \times \left[\frac{1}{(\chi_G - \chi)} ((1 + q_{s0}) \max(0, \chi_0 - \chi) + (1 + q_{v0}) (\chi_G - \right. \\ & - \max(\chi_0, \chi))) - \frac{2a_{s0}^2}{N_0} \max(0, \chi_0 - \chi) - \\ & - \frac{2a_{v0}^2}{N_0} (\chi_G - \max(\chi_0, \chi)) + \\ & + \frac{2}{N_0 (\chi_G - \chi)} (a_{s0} + a_{v0} (\chi_G - \max(\chi_0, \chi)))^2 \left. \right] - 1, \\ \sigma_{\hat{a}_s}^2(\chi) &= \frac{1}{\chi^2} \left[\frac{2}{N_0} ((1 + q_{s0}) \min(\chi_0, \chi) + \right. \\ & + (1 + q_{v0}) \max(0, \chi - \chi_0)) + \\ & + (a_{s0} \min(\chi_0, \chi) + a_{v0} \max(0, \chi - \chi_0))^2 \left. \right], \\ \sigma_{\hat{a}_v}^2(\chi) &= \frac{1}{(\chi_G - \chi)^2} \left[\frac{2}{N_0} ((1 + q_{s0}) \max(0, \chi_0 - \chi) + \right. \\ & + (1 + q_{v0}) (\chi_G - \max(\chi_0, \chi))) + \\ & + (\max(0, \chi_0 - \chi) + a_{v0} (\chi_G - \max(\chi_0, \chi)))^2 \left. \right], \\ \sigma_{\hat{q}_s}^2(\chi) &= \frac{\chi_{\min}^2}{\mu_s \chi^2} \left\{ \frac{2\mu_s}{\chi_{\min}} \left[(1 + q_{s0})^2 \min(\chi_0, \chi) + \right. \right. \\ & + \left. \left(1 + \varphi q_{v0} (2 + q_{v0}) \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_s}} \right) \max(0, \chi - \chi_0) \right] + \\ & + \frac{2}{\chi} [(1 + q_{s0}) \min(\chi_0, \chi) + (1 + q_{v0}) \max(0, \chi - \chi_0)]^2 - \\ & - \frac{4}{\chi} [(1 + q_{s0})^2 \min(\chi_0, \chi) + (1 + q_{v0})^2 \max(0, \chi - \chi_0)] + \\ & + 4(a_{s0} - a_{v0})^2 [(1 + q_{s0}) \min(\chi_0, \chi) \max^2(0, \chi - \chi_0) + \\ & + (1 + q_{v0}) \min^2(\chi_0, \chi) \max(0, \chi - \chi_0)] \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{q}_v}^2(\chi) &= \frac{(\chi_G - \chi_{\max})^2}{\mu_v^2 (\chi_G - \chi)^2} \left\{ \frac{2\mu_v}{\chi_G - \chi_{\max}} \left[\left(1 + q_{s0} \varphi (2 + q_{s0}) \times \right. \right. \right. \\ & \times \left. \left. \sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_b}} \right) \max(0, \chi_0 - \chi) + (1 + q_{v0})^2 (\chi_G - \max(\chi_0, \chi)) \right] + \\ & + \frac{2}{(\chi_G - \chi)^2} [(1 + q_{s0}) \max(0, \chi_0 - \chi) + (1 + q_{v0}) \times \\ & \times (\chi_G - \max(\chi_0, \chi))]^2 - \frac{4}{\chi_G - \chi} [(1 + q_{s0})^2 \times \\ & \times \max(0, \chi_0 - \chi) - (1 + q_{v0})^2 (\chi_G - \max(\chi_0, \chi))] + \\ & + \frac{8(a_{s0} - a_{v0})^2}{N_0} [(1 + q_{s0}) (\chi_G - \max(\chi_0, \chi))^2 \max(0, \chi_0 - \\ & - \chi) + (1 + q_{v0}) (\chi_G - \max(\chi_0, \chi)) \max^2(0, \chi_0 - \chi)] \left. \right\}. \end{aligned}$$

С учетом выражений (14) и (15) логарифм ФОП (13) может быть записан в виде

$$L(\chi) = L_s(\chi) + L_v(\chi), \quad (16)$$

где

$$L_s(\chi) = \frac{\chi}{N_0} \hat{a}_s^2(\chi) + \frac{\mu_s \chi}{2\chi_{\min}} [\hat{q}_s(\chi) - \ln(1 + \hat{q}_s(\chi))], \quad (17)$$

$$\begin{aligned} L_v(\chi) &= \frac{\chi_G - \chi}{N_0} \hat{a}_v^2(\chi) + \\ & + \frac{\mu_v (\chi_G - \chi)}{2(\chi_G - \chi_{\max})} [\hat{q}_v(\chi) - \ln(1 + \hat{q}_v(\chi))]. \end{aligned} \quad (18)$$

Из сопоставления (16)–(18) и (3)–(5) следует, что алгоритм максимального правдоподобия более сложен при реализации по сравнению с квазиправдоподобным.

Проведя ряд последовательных преобразований, можно показать, что при неограниченном увеличении числа степеней свободы: $\mu_s \rightarrow \infty$ имеем $\sigma_{\hat{q}_s}(\chi) / (m_{\hat{q}_s}(\chi) + 1) \rightarrow 0$. Поэтому, когда $\mu_s \gg 1$, случайная функция, которой пропорционально последнее слагаемое в (17), допускает приближенное представление вида

$$\begin{aligned} \hat{q}_s(\chi) - \ln(1 + \hat{q}_s(\chi)) &\approx \\ &\approx m_{\hat{q}_s}(\chi) \frac{1 + \hat{q}_s(\chi)}{1 + m_{\hat{q}_s}(\chi)} - \ln(1 + m_{\hat{q}_s}(\chi)). \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом (19) представим функционал (17) следующим образом:

$$\begin{aligned} L_s(\chi) &\approx \frac{\chi}{N_0} \hat{a}_s^2(\chi) + \\ & + \frac{\mu_s \chi}{2\chi_{\min}} \left[m_{\hat{q}_s}(\chi) \frac{1 + \hat{q}_s(\chi)}{1 + m_{\hat{q}_s}(\chi)} - \ln(1 + m_{\hat{q}_s}(\chi)) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Введем в рассмотрение нормированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией

$$\xi_{qs}(\chi) = (\hat{q}_s(\chi) - m_{\hat{q}_s}(\chi)) / \sigma_{\hat{q}_s}(\chi),$$

$$\xi_{as}(\chi) = (\hat{a}_s(\chi) - m_{\hat{a}_s}(\chi)) / \sigma_{\hat{a}_s}(\chi)$$

и перепишем выражение (20) как

$$L_s(\chi) \approx \frac{\chi}{N_0} \sigma_{\hat{a}_s}^2(\chi) \xi_{as}^2(\chi) +$$

$$+ \frac{\mu_s \chi}{2\chi_{\min}} \frac{\sigma_{\hat{q}_s}(\chi)}{1 + m_{\hat{q}_s}(\chi)} \xi_{qs}(\chi) + \frac{2\chi}{N_0} m_{\hat{a}_s}(\chi) \sigma_{\hat{a}_s}(\chi) \xi_{as} +$$

$$+ \frac{\mu_s \chi}{2\chi_{\min}} [m_{\hat{q}_s}(\chi) - \ln(1 + m_{\hat{q}_s}(\chi))] + \frac{\chi}{N_0} m_{\hat{a}_s}^2(\chi).$$

Проанализируем в полученном выражении поведение множителей перед случайными величинами $\xi_{as}^2(\chi)$, $\xi_{qs}(\chi)$, ξ_{as} при $\mu_s \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что при увеличении числа степеней свободы изображения сомножитель $\mu_s \chi \sigma_{\hat{q}_s}(\chi) / 2\chi_{\min} (1 + m_{\hat{q}_s}(\chi))$, стоящий перед случайной величиной $\xi_{qs}(\chi)$, неограниченно увеличивается, в то время как произведение $2\chi m_{\hat{a}_s}(\chi) \sigma_{\hat{a}_s}(\chi) / N_0$, стоящее перед ξ_{as} , и произведение $\chi \sigma_{\hat{a}_s}^2(\chi) / N_0$, стоящее перед случайной величиной $\xi_{as}^2(\chi)$, не зависят от μ_s и имеют конечные значения. Поэтому при неограниченном увеличении числа степеней свободы μ_s распределение функционала (17) характеризуется случайной составляющей оценки интенсивности изображения $\xi_{qs}(\chi)$. Используя результаты работы [12], можно показать, что при $\mu_s \rightarrow \infty$ закон распределения величины $\xi_{qs}(\chi)$ сходится к гауссовскому. Следовательно, функционал (17) при фиксированном значении неизвестной площади можно считать гауссовским случайным процессом.

Аналогичным образом получаем, что при $\mu_v \rightarrow \infty$ функционал (18) допускает аппроксимацию вида

$$L_v(\chi) \approx \frac{\mu_v (\chi_G - \chi)}{2(\chi_G - \chi_{\max})} \left[\frac{1 + \hat{q}_v(\chi)}{1 + m_{\hat{q}_v}(\chi)} + m_{\hat{q}_v}(\chi) - \right.$$

$$\left. - 1 - \ln(1 + m_{\hat{q}_v}(\chi)) \right] + \frac{\chi_G - \chi}{N_0} \hat{a}_v^2(\chi)$$

и является асимптотически гауссовским случайным процессом. Тогда, как показано в [7], в окрестности истинного значения параметра χ_0 логарифм ФОП $L(\chi)$ (16), как функцию неизвестной площади χ , можно приближенно считать гауссовским марковским процессом. Используя методику [9], для коэффициентов сноса $K_{1\text{омп}}(\chi)$ и диффузии $K_{2\text{омп}}(\chi)$ процесса (16) находим

$$K_{1\text{омп}}(\chi) \approx K_{1\text{кпо}}(a_{s0}, q_{s0}, a_{v0}, q_{v0}, \chi),$$

$$K_{2\text{омп}}(\chi) \approx K_{2\text{кпо}}(a_{s0}, q_{s0}, a_{v0}, q_{v0}, \chi),$$
(21)

где коэффициенты $K_{1\text{кпо}}$ и $K_{2\text{кпо}}$ определяются из (6) и (7) соответственно.

Из соотношений (21) следует, что характеристики оценки площади при использовании ОМП неизвестных регулярных составляющих и интенсивностей изображения и фона асимптотически (при $\mu_s \rightarrow \infty$, $\mu_v \rightarrow \infty$) совпадают с характеристиками оценки площади, полученной при априори известных параметрах изображения и фона. Таким образом, кривые на рис. 1–6 характеризуют также проигрыш в точности оценки площади за счет использования квазиравдоподобных оценок a_s^* , q_s^* ,

a_v^* , q_v^* вместо ОМП \hat{a}_s , \hat{q}_s , \hat{a}_v , \hat{q}_v . Согласно рис. 1–6 алгоритм максимального правдоподобия позволяет повысить точность оценки площади при неизвестных неинформативных параметрах изображения и фона. В то же время использование более простого квазиравдоподобного алгоритма оценки площади может оказаться целесообразным, если относительные ошибки задания неизвестных интенсивностей и регулярных составляющих изображения и фона составляют не более десяти процентов. Конкретные количественные рекомендации по применению квазиравдоподобного алгоритма в зависимости от заданных условий могут быть сформулированы на основе полученных выше выражений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-49-00079).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов Б.Б., Девятериков Е.А. // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. "Информатика. Телекоммуникации. Управление". 2013. № 5(181). С. 103.
2. Нгуен А.В., Михайлов Б.Б. // Робототехника и технические кибернетика. 2014. № 1(2). С. 65.
3. Перетягин Г.И. // Автометрия. 1984. № 6. С. 42.
4. Kashyap R., Chellappa R. // IEEE Trans. 1983. V.IT-29. № 1. P. 60.
5. Бычков А.А., Понькин В.А. // Автометрия. 1992. № 4. С. 33.
6. Voitan S., Sauer K. // IEEE Trans. 1993. V. Image Proc.-2. № 3. P. 296.
7. Трифонов А.П., Прибытков Ю.Н. // Автометрия. 2010. Т. 46. № 2. С. 49.
8. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
9. Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфёнов В.И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Воронеж: ВГУ, 1991.
10. Прикладная теория случайных процессов и полей / Под ред. Васильева К.К., Омельченко В.А. Ульяновск: УлГТУ, 1995. С. 164–214.
11. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
12. Трифонов А.П., Прибытков Ю.Н. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2014. Т. 57. № 2. С. 43.