

# РАДИОТЕХНИКА

Radioengineering XXI век

## 2 2016

### В номере:

#### **РАДИОСИСТЕМЫ**

##### **Выпуск 199**

Территориально распределенные системы охраны, № 14

##### **Выпуск 200**

Синтез и анализ алгоритмов и устройств обработки сигналов, № 1



тел./факс: (495) 625-9241  
e-mail: [info@radiotec.ru](mailto:info@radiotec.ru)  
<http://www.radiotec.ru>

УДК 621.391

## Эффективность обнаружения радиосигнала с неизвестными параметрами

© Авторы, 2016

© ЗАО «Издательство «Радиотехника», 2016

**А.П. Трифонов** – д.т.н., Засл. деятель науки, профессор, зав. кафедрой радиофизики, Воронежский государственный университет

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

**Е.В. Литвинов** – к.ф.-м.н., ассистент, кафедра радиофизики, Воронежский государственный университет

E-mail: elitvinov@list.ru

Найдены характеристики алгоритма обнаружения радиосигнала, имеющего симметричную огибающую произвольной формы и неизвестные длительность, амплитуду и начальную фазу, с учетом краевых эффектов на границе априорной области неизвестных параметров. Исследовано влияние учета краевых эффектов на точность вычисления характеристик алгоритма обнаружения посредством статистического моделирования на ЭВМ алгоритма обнаружения радиосигнала колокольной формы.

**Ключевые слова:** радиосигнал, огибающая, обнаружение, максимально правдоподобный алгоритм, краевые эффекты, моделирование на ЭВМ.

Expressions of detection algorithm characteristics of symmetrical general form radio-signal are founded when amplitude, duration and phase of the signal are unknown and side effects on the boundary of a priori area are considered. The influence of boundary effects of a priori area on precision of evaluation of detection algorithm characteristics are investigated by means of statistical computer modeling of bell-like signal detection algorithm.

**Keywords:** radio-signal, general, detection, maximum likelihood algorithm, boundary effects statistical computer modeling.

В процессе функционирования различных радиоэлектронных систем локации, навигации и связи возникает необходимость в обнаружении сигналов с неизвестными параметрами, наблюдаемых на фоне помех [1–3]. В частности, при неизвестном расстоянии до цели неизвестно время прихода сигнала. Если при этом неизвестны размеры цели, также оказывается неизвестной и длительность обрабатываемого сигнала.

В работе [2] исследовались характеристики синтезированного по методу максимального правдоподобия алгоритма обнаружения квазидетерминированного радиосигнала вида

$$s(t) = a_0 f\left[\frac{(t - \lambda_0)}{\tau_0}\right] \cos(\omega_0 t - \phi_0), \quad (1)$$

где  $\lambda_0$  – время прихода;  $\tau_0$  – эквивалентная длительность;  $a_0$  – амплитуда;  $\omega_0$  – частота;  $\phi_0$  – начальная фаза радиосигнала;  $f(x)$  – функция, определяющая форму огибающей радиосигнала и имеющая следующие свойства:

$$\sup f(x) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = 1, \quad |df(x)/dx| \ll \omega_0 \tau_0 f(x). \quad (2)$$

В [2] предполагалось, что радиосигнал (1) наблюдается на фоне гауссовского белого шума  $n(t)$  с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ , а время прихода  $\lambda_0$ , длительность  $\tau_0$ , амплитуда  $a_0$  и начальная фаза  $\phi_0$  радиосигнала априори неизвестны. Были получены асимптотические выражения для характеристик алгоритма обнаружения (вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала), не учитывающие возможные пересечения границ априорной области выбросами решающей статистики за порог обнаружения. Точность полученных соотношений зависит от выбранного порога и размеров априорной области и возрастает с ростом порога и увеличением размеров априорной области по каждому из неизвестных параметров. В [2] приведены также результаты моделирования на ЭВМ алгоритма обнаружения сигнала колокольной формы, согласно которым теоретические зависимости вероятности ложной тревоги от порога удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, если приведенный объем априорной области времени прихода и длительности составляет несколько десятков. На практике это условие выполняется не всегда, поэтому представляет интерес нахождение выражений для характери-

стик алгоритма обнаружения радиосигнала (1), учитывающих конечный размер априорной области неизвестных параметров и возможные пересечения границ этой области выбросами решающей статистики.

В дальнейшем положим, что возможные значения времени прихода  $\lambda_0$  и длительности  $\tau_0$  принимают значения из априорных интервалов  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ ,  $\tau \in [T_1; T_2]$ , а функция  $f(x)$  является четной:

$$f(x) = f(-x). \quad (3)$$

Ц е л ь р а б о т ы – найти асимптотические выражения для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода (вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала), возникающих при обнаружении радиосигнала (1) в соответствии с алгоритмом обнаружения, приведенным в [2]. С целью установления границ применимости полученных в работе асимптотически точных формул проведено статистическое моделирование алгоритма обнаружения на ЭВМ.

### Описание алгоритма обнаружения

Пусть в течение времени  $[0; T]$  на вход приемника поступает реализация смеси сигнала и шума  $x(t) = s(t) + n(t)$  или только шума  $x(t) = n(t)$ , причем сигнал  $s(t)$  и шум  $n(t)$  статистически независимы.

Согласно [1, 2], для обнаружения сигнала (1) по методу максимального правдоподобия необходимо формировать функционал

$$M(\lambda, \tau) = [R_s^2(\lambda, \tau) + R_c^2(\lambda, \tau)] / 2, \quad (4)$$

где

$$R_s(\lambda, \tau) = \frac{\sqrt{2} \int_0^T x(t) f[(t-\lambda)/\tau] \sin(\omega_0 t) dt}{\sqrt{E(\lambda, \tau) N_0}}; \quad R_c(\lambda, \tau) = \frac{\sqrt{2} \int_0^T x(t) f[(t-\lambda)/\tau] \cos(\omega_0 t) dt}{\sqrt{E(\lambda, \tau) N_0}};$$

$$E(\lambda, \tau) = \int_0^T f^2[(t-\lambda)/\tau] dt / 2, \quad (5)$$

и сравнивать величину его абсолютного (наибольшего) максимума с порогом, выбранным в соответствии с заданным критерием оптимальности обнаружения [1]. Решение о наличии полезного сигнала (1) в наблюдаемых данных принимается, если абсолютный максимум функционала (4) превысил порог  $h$  (гипотеза  $H_1$ ), иначе выносятся решение об отсутствии сигнала (гипотеза  $H_0$ ):

$$\sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} M(\lambda, \tau) > h \Rightarrow H_1, \quad \sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} M(\lambda, \tau) < h \Rightarrow H_0. \quad (6)$$

Здесь  $\Pi \in [\Lambda_1; \Lambda_2][T_1; T_2]$  – априорная область возможных значений времени прихода  $\lambda_0$  и длительности  $\tau_0$ .

### Расчет характеристик алгоритма обнаружения

При анализе алгоритма обнаружения (6) будем считать, что время наблюдения  $T$  достаточно велико, так что радиосигнал (1) полностью расположен внутри интервала наблюдения  $[0; T]$ . В частности, для этого необходимо выполнение условий  $\Lambda_2 - \Lambda_1 \gg T_2$  и  $T - \Lambda_2 \gg T_2$ . Тогда пределы интегрирования в (5) можно заменить на бесконечные, так что

$$R_s(\lambda, \tau) \approx \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f\left(\frac{t-\lambda}{\tau}\right) \sin(\omega_0 t) dt}{\sqrt{\tau N_0}}, \quad R_c(\lambda, \tau) \approx \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f\left(\frac{t-\lambda}{\tau}\right) \cos(\omega_0 t) dt}{\sqrt{\tau N_0}}, \quad E(\lambda, \tau) \approx \tau / 2. \quad (7)$$

Заметим, что функция  $E(\lambda, \tau)$  характеризует долю энергии сигнала (1) единичной амплитуды, сосредоточенную в интервале  $[0; T]$  и, согласно (7), не зависит от параметра  $\lambda$ , так что этот параметр можно считать неэнергетическим [4].

Пусть справедлива гипотеза  $H_0$  об отсутствии сигнала в наблюдаемых данных  $x(t)$ . Тогда вероятность ложной тревоги определяется выражением

$$\alpha = P \left[ \sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} M(\lambda, \tau) > h \middle| H_0 \right] \approx P \left[ \sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} M_0(\lambda, \tau) > 2h \right] = P \left\{ \sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} [R_{0s}^2(\lambda, \tau) + R_{0c}^2(\lambda, \tau)] > 2h \right\}, \quad (8)$$

где

$$M_0(\lambda, \tau) = R_{0s}^2(\lambda, \tau) + R_{0c}^2(\lambda, \tau); \quad (9)$$

$R_{0s}(\lambda, \tau)$ ,  $R_{0c}(\lambda, \tau)$  – функционалы, определяемые выражениями (7), при отсутствии сигнала:

$$R_{0s}(\lambda, \tau) = \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} n(t) f\left(\frac{t-\lambda}{\tau}\right) \sin(\omega_0 t) dt}{\sqrt{\tau N_0}}, \quad R_{0c}(\lambda, \tau) = \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} n(t) f\left(\frac{t-\lambda}{\tau}\right) \cos(\omega_0 t) dt}{\sqrt{\tau N_0}}.$$

Функционалы  $R_{0s}(\lambda, \tau)$  и  $R_{0c}(\lambda, \tau)$  представляют собой центрированные неоднородные гауссовские случайные поля с корреляционными функциями

$$\begin{aligned} B_{0c}(\lambda_1, \tau_1, \lambda_2, \tau_2) &= \langle R_{0c}(\lambda_1, \tau_1) R_{0c}(\lambda_2, \tau_2) \rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t-\lambda_1}{\tau_1}\right) f\left(\frac{t-\lambda_2}{\tau_2}\right) \cos^2(\omega_0 t) dt \sqrt{\tau_1 \tau_2} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t-\lambda_1}{\tau_1}\right) f\left(\frac{t-\lambda_2}{\tau_2}\right) [1 + \cos(2\omega_0 t)] dt \sqrt{\tau_1 \tau_2}, \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} B_{0s}(\lambda_1, \tau_1, \lambda_2, \tau_2) &= \langle R_{0s}(\lambda_1, \tau_1) R_{0s}(\lambda_2, \tau_2) \rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t-\lambda_1}{\tau_1}\right) f\left(\frac{t-\lambda_2}{\tau_2}\right) \sin^2(\omega_0 t) dt \sqrt{\tau_1 \tau_2} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t-\lambda_1}{\tau_1}\right) f\left(\frac{t-\lambda_2}{\tau_2}\right) [1 - \cos(2\omega_0 t)] dt \sqrt{\tau_1 \tau_2}, \end{aligned} \quad (10b)$$

где  $\langle \bullet \rangle$  означает усреднение по реализациям шума  $n(t)$ .

При выполнении условий (2) и (3) корреляционные функции  $B_{0c}(\lambda_1, \tau_1, \lambda_2, \tau_2)$  и  $B_{0s}(\lambda_1, \tau_1, \lambda_2, \tau_2)$  приблизительно совпадают, зависят от разности аргументов  $\lambda_2$  и  $\lambda_1$  и определяются выражением

$$B_{0c}(\lambda, \tau_1, \lambda + \Delta, \tau_2) \approx B_{0s}(\lambda_1, \tau_1, \lambda + \Delta, \tau_2) \approx B_0(\Delta, \tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t/\tau_1) f[(t-\Delta)/\tau_2] dt \sqrt{\tau_1 \tau_2}. \quad (11)$$

Заметим, что в этом случае дисперсия полей  $R_{0s}(\lambda, \tau)$  и  $R_{0c}(\lambda, \tau)$  постоянна и равна 1.

Для вычисления вероятности ложной тревоги (8) воспользуемся эвристическим методом, предложенным в [5], и учитывающим возможные пересечения выбросами неоднородного случайного поля, распределенного по закону  $\chi^2$ , границ области его определения. Согласно (9), (11) при выполнении (2) и (3) случайное поле  $M_0(\lambda, \tau)$  распределено по закону  $\chi^2$  с двумя степенями свободы и неоднородно по параметру  $\tau$ , определяющему эквивалентную длительность огибающей сигнала (1), а поля  $R_{0s}(\lambda, \tau)$  и  $R_{0c}(\lambda, \tau)$  дважды непрерывно дифференцируемы почти наверное по параметрам  $\lambda$  и  $\tau$ . Кроме того, при фиксированном параметре  $\tau = \tilde{\tau}$  и выполнении условий (2) и (3) случайный процесс  $M_0(\lambda, \tilde{\tau})$  стациона-

рен по параметру  $\lambda$ . Это позволяет воспользоваться результатами [5] для расчета среднего значения эйлеровой характеристики выбросов случайного поля  $M_0(\lambda, \tau)$  за уровень  $h$ , а, следовательно, и вероятности ложной тревоги (8).

Пусть  $\Pi_b = [(\lambda, \tau) \in \Pi : M_0(\lambda, \tau) > b]$  – множество выбросов случайного поля  $M_0(\lambda, \tau)$  (9) за порог  $b$ . Согласно [6], при достаточно большом пороге  $b$  вероятность превышения этого порога абсолютным максимумом случайного поля  $M_0(\lambda, \tau)$  приближенно совпадает со средним значением эйлеровой характеристики  $\psi(\Pi_b)$  множества выбросов этого поля:

$$P \left[ \sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} M_0(\lambda, \tau) > b \right] \approx \langle \psi(\Pi_b) \rangle. \quad (12)$$

В соответствии с [5] для среднего значения эйлеровой характеристики  $\psi(\Pi_{2h})$  случайного поля  $M_0(\lambda, \tau)$ , определяемого соотношениями (9), (11) и распределенного по закону  $\chi^2$  с двумя степенями свободы  $\nu = 2$ , можем записать

$$\langle \psi(\Pi_{2h}) \rangle = V_1(\Pi_\lambda) \rho_1(2h, \Pi_\tau) + V_0(\Pi_\lambda) \rho_0(2h, \Pi_\tau). \quad (13)$$

Здесь  $\Pi_\lambda = [\Lambda_1; \Lambda_2]$ ,  $\Pi_\tau = [T_1; T_2]$  – области возможных значений времени прихода  $\lambda$  и длительности  $\tau$  соответственно;  $V_1(\Pi_\lambda) = \Lambda_2 - \Lambda_1$ ,  $V_0(\Pi_\lambda) = \psi(\Pi_\lambda) = 1$  – функционалы Минковского области  $\Pi_\lambda$ ;  $\rho_0, \rho_1$  – интенсивности эйлеровой характеристики размерностей 0 и 1:

$$\rho_0(2h, \Pi_\tau) = \exp(-h) \left[ 1 + \sqrt{\frac{h\kappa}{\pi}} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \right], \quad \rho_1(2h, \Pi_\tau) = \sqrt{\frac{h\gamma}{\pi}} \frac{\exp(-h)}{2} \left[ \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + \sqrt{\frac{\kappa}{\pi h}} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) (2h-1) \right]; \quad (14)$$

$\gamma, \kappa$  – величины, характеризующие кривизну корреляционной функции в окрестности ее максимума по соответствующим параметрам:

$$\begin{aligned} \gamma &= -\tau^2 \left[ \frac{\partial^2 B_0(\Delta, \tau_1, \tau_2)}{\partial \Delta^2} \right]_{\substack{\Delta=0, \\ \tau_1=\tau_2=\tau}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{df(x)}{dx} \right]^2 dx, \\ \kappa &= \tau^2 \left[ \frac{\partial^2 B_0(\Delta, \tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \right]_{\substack{\Delta=0, \\ \tau_1=\tau_2=\tau}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ x \frac{df(x)}{dx} + \frac{f(x)}{2} \right]^2 dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (14), (15) в (13), а затем с учетом (12) в (8) и ограничивая полученное выражение сверху значением 1, для вероятности ложной тревоги можем записать

$$\begin{aligned} \alpha &\approx P \left[ \sup_{(\lambda, \tau) \in \Pi} M_0(\lambda, \tau) > 2h \right] = \\ &= \min \left( 1, \exp(-h) \left\{ \sqrt{\frac{h\gamma}{4\pi}} \left[ \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + \sqrt{\frac{\kappa}{\pi h}} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) (2h-1) \right] (\Lambda_2 - \Lambda_1) + \left[ 1 + \sqrt{\frac{h\kappa}{\pi}} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \right] \right\} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Точность выражения (16) увеличивается с ростом порога обнаружения  $h$  и не зависит от размера априорной области возможных значений времени прихода и длительности. В частности, полагая  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \lambda_0$  и  $T_1 = T_2 = \tau_0$ , из соотношения (16) нетрудно получать частные выражения для вероятности ложной тревоги при обнаружении сигнала (1) с неизвестными амплитудой, временем прихода и начальной фазой, или амплитудой, длительностью и начальной фазой или только с неизвестными амплитудой и начальной фазой.

Сравним выражение для вероятности ложной тревоги (16) с результатом, полученным в [1, 2]. Согласно [2], вероятность ложной тревоги при обнаружении сигнала (1) определяется выражением

$$\tilde{\alpha} \approx \begin{cases} 1 - \exp[-\xi h \exp(-h)/\pi^2], & h \geq 1; \\ 1, & h < 1. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь  $\xi$  – приведенный объем априорной области возможных значений времени прихода, длительности и фазы:

$$\xi = \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \int_{T_1}^{T_2} \int_{-\pi}^{\pi} d(\lambda, \tau, \phi) d\lambda d\tau d\phi, \quad (18)$$

$$d^2(\lambda, \tau, \phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 B(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 B(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)}{\partial \tau_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 B(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)}{\partial \phi_1 \partial \lambda_2} \\ \frac{\partial^2 B(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)}{\partial \lambda_1 \partial \tau_2} & \frac{\partial^2 B(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} & \frac{\partial^2 B(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)}{\partial \phi_1 \partial \tau_2} \\ \frac{\partial^2 B(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)}{\partial \lambda_1 \partial \phi_2} & \frac{\partial^2 B(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)}{\partial \tau_1 \partial \phi_2} & \frac{\partial^2 B(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} \end{vmatrix}_{\substack{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \\ \tau_1 = \tau_2 = \tau, \\ \phi_1 = \phi_2 = \phi,}} \quad (19)$$

где  $\bar{\eta}_i = \|\lambda_i, \tau_i, \phi_i\|$ ,  $i = 1, 2$ ;

$$B(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t - \lambda_1}{\tau_1}\right) f\left(\frac{t - \lambda_2}{\tau_2}\right) dt \right\} \cos(\phi_2 - \phi_1) / \sqrt{\tau_1 \tau_2} = B_0(\lambda_1, \tau_1, \lambda_2, \tau_2) \cos(\phi_2 - \phi_1), \quad (20)$$

а функция  $B_0(\lambda_1, \tau_1, \lambda_2, \tau_2)$  определена в (11).

Подставляя (20) в (19), производя дифференцирование по  $\phi_1$  и  $\phi_2$  и полагая  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ , для величины  $d(\lambda, \tau, \phi)$  можем записать

$$d^2(\lambda, \tau, \phi) = \tilde{d}^2(\lambda, \tau) = \left\{ \frac{\partial^2 B_0(\lambda_1, \tau_1, \lambda_2, \tau_2)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \cdot \frac{\partial^2 B_0(\lambda_1, \tau_1, \lambda_2, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} - \left[ \frac{\partial^2 B_0(\lambda_1, \tau_1, \lambda_2, \tau_2)}{\partial \lambda_1 \partial \tau_2} \right]^2 \right\}_{\substack{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \\ \tau_1 = \tau_2 = \tau.}} \quad (21)$$

При выполнении (3)  $\partial^2 B_0(\lambda_1, \tau_1, \lambda_2, \tau_2) / \partial \lambda_1 \partial \tau_2 = 0$ . Подставляя (15) в (21), а затем в (18) и производя интегрирование, выразим параметр  $\xi$  через параметры  $\gamma$  и  $\kappa$  (15):

$$\xi = (\Lambda_2 - \Lambda_1) \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \pi \sqrt{\gamma \kappa}. \quad (22)$$

Положим, что порог обнаружения  $h$  достаточно высок. Тогда, раскладывая в (17) экспоненту в ряд Маклорена и учитывая только два первых члена разложения, выражение для вероятности ложной тревоги можно записать в виде

$$\tilde{\alpha} \approx \begin{cases} \xi h \exp(-h)/\pi^2, & h \geq 1; \\ 1, & h < 1. \end{cases} \quad (23)$$

Используя (22), перепишем выражение для вероятности ложной тревоги (16) в виде

$$\alpha \approx \min \left( 1, \frac{\xi h \exp(-h)}{\pi^2} \times \left\{ 1 + \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\pi^3}{h}} \left[ \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) (\Lambda_2 - \Lambda_1) + \sqrt{\kappa} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \right] + \frac{\pi^2}{h\xi} - \frac{1}{2h} \right\} \right). \quad (24)$$

Из сравнения (23) и (24) следует, что относительное отклонение  $\chi = (\alpha - \tilde{\alpha})/\tilde{\alpha}$  вероятности ложной тревоги  $\alpha$  (16), рассчитанное с учетом возможных пересечений выбросами случайного поля  $M_0(\lambda, \tau)$  границ априорной области  $\Pi$ , от вероятности ложной тревоги  $\tilde{\alpha}$  (23), рассчитанной без учета этих пере-

сечений, определяется четырьмя слагаемыми, пропорциональными  $\sqrt{\pi^3 \gamma / \xi^2 h}$ ,  $\sqrt{\pi^3 \kappa / \xi^2 h}$ ,  $1/h\xi$  и  $1/h$ . При  $h \rightarrow \infty$  влиянием этих слагаемых на вероятность ложной тревоги в (24) можно пренебречь, так что соотношения (23) и (24) асимптотически совпадают. Однако, при конечных порогах  $h$  влияние этих слагаемых на величину вероятности ложной тревоги в (24) оказывается довольно существенным, причем оно может увеличиваться как с ростом априорной области  $\Pi$ , так и с ростом параметров  $\gamma$  и  $\kappa$  (15), характеризующих кривизну корреляционной функции (11) случайных полей  $R_{0s}(\lambda, \tau)$  и  $R_{0c}(\lambda, \tau)$  (9) в окрестности их максимума.

Для расчета вероятности пропуска сигнала (1) воспользуемся результатами, полученными в [2], согласно которым вероятность пропуска сигнала определяется выражением

$$\beta \approx (1 - \alpha) \left[ \Phi(\sqrt{2h} + z_0) - \Phi(z_0 - \sqrt{2h}) \right], \quad (25)$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$  – интеграл вероятности;  $z_0^2 = a_0^2 \tau_0 / N_0$  – отношение сигнал/шум;  $h$  – порог обнаружения;  $\alpha$  – вероятность ложной тревоги (16).

Точность соотношения (25) возрастает с увеличением  $z_0$ ,  $h$ .

### Результаты моделирования алгоритма обнаружения колокольного радиоимпульса

Формулы для характеристик обнаружения (16), (23) и (25) радиосигнала  $s(t)$  (1) получены на основе ряда допущений, которые носят приближенный характер. Оценить аналитически точность этих формул не представляется возможным. Можно лишь утверждать, что она возрастает с увеличением  $h$  и  $z_0^2$  (а также с увеличением  $\xi$  для соотношения (23)). Поэтому с целью установления границ применимости найденных асимптотически точных формул (16) и (25) и сравнения точности формул (16) и (23) было выполнено статистическое моделирование алгоритма обнаружения (6) на ЭВМ. В качестве модели сигнала был выбран радиоимпульс с огибающей колокольной формы:

$$s(t) = a_0 \exp\left\{-\left[\sqrt{\pi/2}(t - \lambda_0)/\tau_0\right]^2\right\} \cos(\omega_0 t - \phi_0) = a_0 f\left[(t - \lambda_0)/\tau_0\right] \cos(\omega_0 t - \phi_0), \quad (26)$$

где

$$f(x) = \exp(-\pi x^2 / 2). \quad (27)$$

Предполагалось, что истинные значения времени прихода  $\lambda_0$  и длительности  $\tau_0$  лежат в середине соответствующих априорных интервалов, т.е.  $\lambda_0 = (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2$ ,  $\tau_0 = (T_1 + T_2)/2$ . Исходя из явного выражения для функции  $f(x)$  (27), согласно (16), (25), (26) были найдены выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска радиосигнала:

$$\alpha \approx \min\left(1, \frac{m_\lambda h(1 - \eta) \exp(-h)}{2\sqrt{\pi}} \times \left\{1 + \frac{\sqrt{2}}{m_\lambda(1 - \eta)\sqrt{h}} \left[ \frac{m_\lambda \sqrt{\pi}(1 + \eta)}{2} - \ln(\eta) \right] + \frac{1}{2h} \left[ \frac{4\sqrt{\pi}}{m_\lambda(1 - \eta)} - 1 \right] \right\}\right), \quad (28a)$$

$$\beta \approx (1 - \alpha) \left[ \Phi(\sqrt{2h} + z_0) - \Phi(z_0 - \sqrt{2h}) \right], \quad (28b)$$

а также выражение для вероятности ложной тревоги, рассчитанное согласно (25):

$$\tilde{\alpha} \approx \begin{cases} m_\lambda h(1 - \eta) \exp(-h) / 2\sqrt{\pi}, & h \geq 1; \\ 1, & h < 1. \end{cases} \quad (29)$$

где  $z_0^2 = a_0^2 \tau_0 / N_0$  – отношение сигнал/шум;  $\eta = T_1 / T_2$ ;  $m_\lambda = (\Lambda_2 - \Lambda_1) / T_1$  – число элементов разрешения, укладываемых в априорном интервале возможных значений времени прихода  $\lambda_0$  сигнала (1) с минимально возможной длительностью.

При выполнении (2) и достаточно большом интервале наблюдения  $[0; T]$  для процессов  $R_s(\lambda, \tau)$  и  $R_c(\lambda, \tau)$  (7) при отсутствии составляющих радиосигнала  $R_{0s}(\lambda, \tau)$ ,  $R_{0c}(\lambda, \tau)$  и наличии  $R_{1s}(\lambda, \tau)$ ,  $R_{1c}(\lambda, \tau)$  и при  $\phi_0 = 0$  справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle R_{0s}(\lambda, \tau) \rangle &= \langle R_{0c}(\lambda, \tau) \rangle = 0, \\ \langle R_{1s}(\lambda, \tau) \rangle &\approx 0, \quad \langle R_{1c}(\lambda, \tau) \rangle \approx z_0 \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t-\lambda_0}{\tau_0}\right) f\left(\frac{t-\lambda}{\tau}\right) dt / \sqrt{\tau_0 \tau} = z_0 S(\lambda, \tau), \\ \langle [R_c(\lambda_1, \tau_1) - \langle R_{0c}(\lambda_1, \tau_1) \rangle] [R_c(\lambda_2, \tau_2) - \langle R_{0c}(\lambda_2, \tau_2) \rangle] \rangle &\approx \\ \approx \langle [R_s(\lambda_1, \tau_1) - \langle R_s(\lambda_1, \tau_1) \rangle] [R_s(\lambda_2, \tau_2) - \langle R_s(\lambda_2, \tau_2) \rangle] \rangle &\approx \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t-\lambda_1}{\tau_1}\right) f\left(\frac{t-\lambda_2}{\tau_2}\right) dt / \sqrt{\tau_1 \tau_2}, \\ \langle [R_s(\lambda_1, \tau_1) - \langle R_s(\lambda_1, \tau_1) \rangle] [R_c(\lambda_2, \tau_2) - \langle R_c(\lambda_2, \tau_2) \rangle] \rangle &\approx \\ \approx \langle [R_c(\lambda_1, \tau_1) - \langle R_c(\lambda_1, \tau_1) \rangle] [R_s(\lambda_2, \tau_2) - \langle R_s(\lambda_2, \tau_2) \rangle] \rangle &\approx 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $S(\lambda, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t-\lambda_0}{\tau_0}\right) f\left(\frac{t-\lambda}{\tau}\right) dt / \sqrt{\tau_0 \tau}$ .

Это позволило для сокращения объема вычислений при моделировании алгоритма (6) в случае отсутствия сигнала вместо процессов  $R_s(\lambda, \tau)$  и  $R_c(\lambda, \tau)$  (7) моделировать процессы

$$N_k(\lambda, \tau) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} n_k(t) f[(t-\lambda)/\tau] dt / \sqrt{\tau N_0},$$

где  $n_k(t)$  ( $k=1, 2$ ) – статистически независимые центрированные гауссовские случайные процессы с корреляционными функциями вида  $B_n(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1)$ .

Корреляционные свойства процессов  $N_k(\lambda, \tau)$  ( $k=1, 2$ ) аналогичны (30). При этом решающая статистика (4) радиосигнала формировалась в виде

$$\hat{M}(\lambda, \tau) = \left\{ N_1^2(\lambda, \tau) + \left[ \mathcal{G} z_0 \hat{S}(\lambda, \tau) + N_2(\lambda, \tau) \right]^2 \right\} / 2, \quad (31)$$

где  $\mathcal{G} = 0$  при отсутствии сигнала и  $\mathcal{G} = 1$  при его наличии.

В процессе моделирования для различных значений  $\eta$ ,  $m_\lambda$  и  $z_0$  методом скользящего суммирования [7] при наличии и отсутствии сигнала формировались отсчеты функционалов  $N_{kij} = N_k(i\Delta_\lambda, j\Delta_\tau)$ ,  $\hat{S}_{ij} = \hat{S}(i\Delta_\lambda, j\Delta_\tau)$  с шагом  $\Delta_\lambda$  по параметру  $\lambda$  и с шагом  $\Delta_\tau$  – по параметру  $\tau$ , так что среднеквадратическая погрешность такой ступенчатой аппроксимации не превышала 5%. По сформированным отсчетам вырабатывались отсчеты решающей статистики (31)  $\hat{M}_{gij} = \left\{ N_{1ij}^2 + \left[ \mathcal{G} z_0 \hat{S}_{ij} + N_{2ij} \right]^2 \right\} / 2$ ,  $\mathcal{G} = 0, 1$ . При моделировании алгоритма обнаружения наибольший отсчет решающей статистики  $\hat{M}_{gij}$  ( $\mathcal{G} = 0, 1$ ) сравнивался с заданным порогом  $h$  и подсчитывалось относительное число превышений (для оценки вероятности ложной тревоги) или непревышений (для оценки вероятности пропуска сигнала) максимальным отчетом  $\hat{M}_{gij}$  этого порога. При вычислении экспериментальных значений вероятности пропуска сигнала порог  $h$  выбирался по критерию Неймана-Пирсона исходя из заданной вероятности ложной тревоги  $\alpha$  (29).

Некоторые результаты статистического моделирования и соответствующие теоретические зависимости, рассчитанные по формулам (28) и (29), представлены на рис. 1 и 2. Каждое экспериментальное



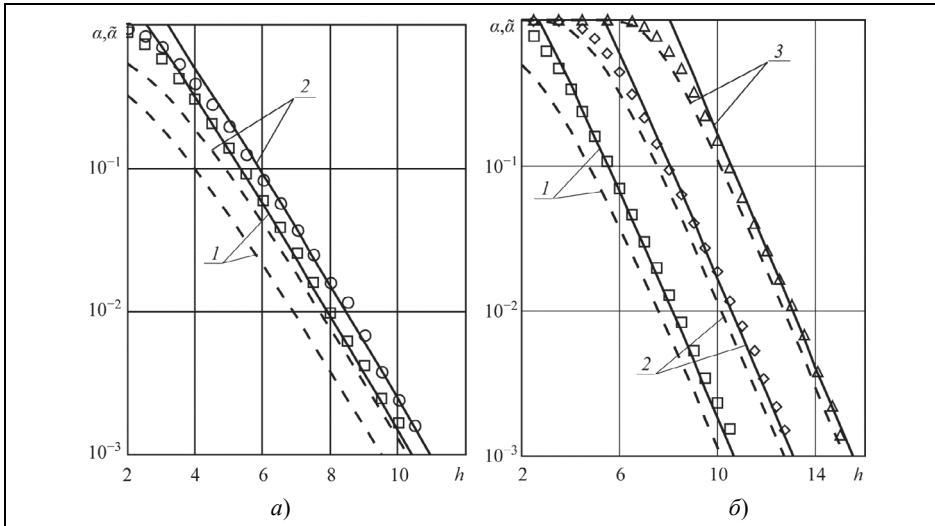


Рис. 1. Графики зависимости вероятности ложной тревоги от порога при различных  $\eta$  (а) и различных  $m_\lambda$  (б)

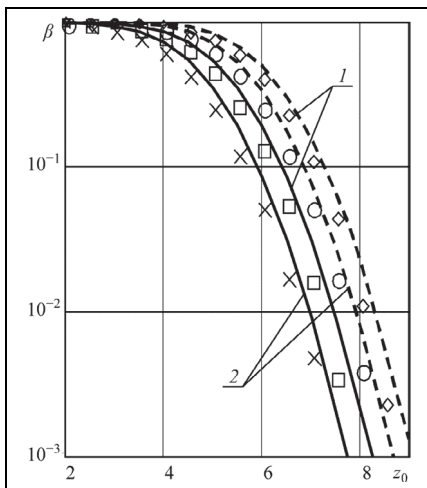


Рис. 2. Графики зависимости вероятности пропуска сигнала от отношения сигнал/шум

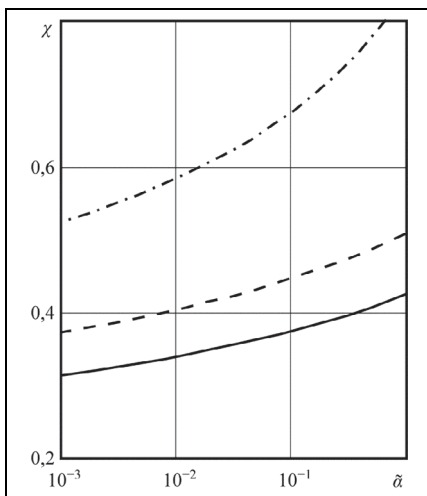


Рис. 3. Графики зависимости величины  $\chi$  от вероятности ложной тревоги

значение получено в результате обработки не менее  $5 \cdot 10^3$  реализаций решающей статистики  $\hat{M}_{g_{ij}}$  ( $g = 0, 1$ ), так что с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов вероятностей ложной тревоги, пропуска сигнала и рассеяний оценок времени прихода и длительности отклоняются от экспериментальных значений не более чем на 10...15%.

На рис. 1 значками отмечены экспериментальные значения, а линиями – соответствующие

теоретические зависимости вероятностей ложной тревоги  $\alpha$  (сплошные линии) и  $\tilde{\alpha}$  (штриховые линии) от порога  $h$  при фиксированном значении  $m_\lambda = 10$  (рис. 1,а) и  $\eta = 10^{-1}$  (рис. 1,б). На рис. 1,а кривые 1 и квадратики соответствуют  $\eta = 0,5$ , а кривые 2 и кружочки –  $\eta = 10^{-5}$ . На рис. 1,б кривые 1 и квадратики соответствуют  $m_\lambda = 10$ , кривые 2 и кружочки –  $m_\lambda = 10^2$ , кривые 3 и треугольники –  $m_\lambda = 10^3$ . На рис. 2 значками отмечены экспериментальные значения, а линиями соответствующие теоретические зависимости вероятности пропуска сигнала  $\beta$  от отношения сигнал/шум  $z_0$  при  $\alpha = 10^{-2}$  (сплошные линии, крестики и квадратики) и при  $\alpha = 10^{-3}$  (штриховые линии, кружочки и ромбики). Кривые 1, крестики и кружочки соответствуют  $m_\lambda = 10^3$ ,  $\eta = 10^{-1}$ , кривые 2, квадратики и ромбики –  $m_\lambda = 10^4$ ,  $\eta = 10^{-1}$ .

Пусть  $\chi = (\alpha - \tilde{\alpha})/\tilde{\alpha}$  – величина, характеризующая относительное отклонение вероятности ложной тревоги  $\alpha$  (28), рассчитанной с учетом возможного пересечения выбросами решающей статистики границ априорной области  $\Pi$ , от вероятности ложной тревоги  $\tilde{\alpha}$  (29), рассчитанной без учета этих эффектов. На рис. 3 представлена зависимость величины  $\chi$  от вероятности ложной тревоги  $\tilde{\alpha}$  (29) при  $m_\lambda = 10^2$ ,  $\eta = 10^{-2}$  (сплошная линия),  $m_\lambda = 10^2$ ,  $\eta = 10^{-1}$  (штриховая линия) и  $m_\lambda = 10$ ,  $\eta = 10^{-1}$  (штрихпунктирная линия).

Из рис. 1 следует, что при малых априорных интервалах для вычисления вероятности ложной тревоги формулы (28) существенно лучше аппроксимируют экспериментальные значения, чем соотношения (29), полученные в [1, 2]. Например, при  $m_\lambda = 10$ ,  $\eta = 0.5$ ,  $h = 4$  значение вероятности ложной тревоги, рассчитанное по формуле (28), отличается от значения вероятности ложной тревоги, рассчитанного по формуле (29), более чем в 3 раза.

Однако при достаточно высоких порогах (малых значениях вероятности ложной тревоги) и больших априорных интервалах это различие уменьшается. В частности, в соответствии с рис. 3 при  $m_\lambda = 10^2$ ,  $\eta = 10^{-1}$  значения вероятности ложной тревоги, рассчитанные по формулам (28) и (29), удивительно согласуются (отклонение не более 50%) при  $\tilde{\alpha} < 10^{-3}$ .

- Проведенное исследование показало, что если априорный интервал возможных значений времени прихода  $\lambda_0$  и длительности  $\tau_0$  достаточно велик, а расчетные значения вероятности ложной тревоги достаточно малы, то для вычисления вероятности ложной тревоги можно воспользоваться простой формулой (17), полученной в [2]. В противном случае следует использовать более точную формулу (16), учитывающую краевые эффекты на границе априорной области возможных значений неизвестных параметров.

*Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект №15 11 10022).*

## Литература.

1. Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П.А. Бакута. М.: Радио и связь. 1984. 440 с.
2. Проняев Е.В. Обнаружение узкополосного радиосигнала в условиях параметрической априорной неопределенности // Труды IX Междунар. научно-технич. конф. «Радиолокация, навигация, связь». Воронеж. 2003.
3. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь. 1986. 264 с.
4. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. Радио. 1978. 296 с.
5. Worsley K.J. Testing for signals with unknown location and scale in a  $\chi^2$  random field, with an application to fMRI // Advances in Applied Probability. 2001. 33. P. 773–793.
6. Hasofer A.M. Upcrossings of Random Fields // Supplement to Advances in Applied Probability. 1978. 10. P. 14–21.
7. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио. 1971. 326 с.

Поступила 15 января 2016 г.

## Efficiency of radio-signal with unknown parameters detection

© Authors, 2016  
© Radiotekhnika, 2016

**A.P. Trifonov** – Dr. Sc. (Eng.), Honored Scientist of RF, Professor, Head of Department of Radiophysics, Voronezh State University

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

**E.V. Litvinov** – Ph. D. (Phys.-Math.), Assistant, Department of Radiophysics, Voronezh State University

E-mail: elitvinov@list.ru

In this paper the analysis of detection algorithm of the symmetrical general form radio-signal with unknown amplitude, arrival time, duration and phase is considered provided by finite-sized a priori area.

The asymptotically exact expressions for Type I and Type II error probabilities are get. The heuristic method based on the evaluation of the mean Euler characteristic of principal statistic excursion sets in fixed-size a priori area is used to evaluate Type I error probability. To derive the expression for Type II error probability the well-known expression is used there are take into account conditions of high precision estimation of unknown parameters and the distribution of principal statistic obtained for evaluation of Type I error.

It is shown that the precision of derived expressions increases when the detection level rises, it does not depend on the size of a priori area and it is higher then the precision of expressions for Type I and Type II error probabilities evaluated on condition of infinite a priori area.

The statistical computer modeling of bell-like signal detection algorithm is used to investigate the applicability limits of derived expressions.

## References

1. Akimov P.S., Bakut P.A., Bogdanovich V.A. i dr. Teoriya obnaruzheniya signalov / Pod red. P.A. Bakuta. M.: Radio i svyaz'. 1984. 440 s.
2. Pronyaev E.V. Obnaruzhenie uzkopolosnogo radiosignala v usloviyax parametricheskoj apriornoj neopredelennosti // Trudy' IX Mezhdunar. nauchno-texnich. konf. «Radiolokacziya, navigacziya, svyaz'». Voronezh. 2003.
3. Trifonov A.P., Shinaikov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i ocenka ix parametrov na fone pomex. M.: Radio i svyaz'. 1986. 264 s.
4. Kulikov E.I., Trifonov A.P. Ocenka parametrov signalov na fone pomex. M.: Sov. Radio. 1978. 296 s.
5. Worsley K.J. Testing for signals with unknown location and scale in a  $\chi^2$  random field, with an application to fMRI // Advances in Applied Probability. 2001. 33. P. 773–793.
6. Hasofer A.M. Upcrossings of Random Fields // Supplement to Advances in Applied Probability. 1978. 10. P. 14–21.
7. By'kov V.V. Czifrovoe modelirovanie v statisticheskoj radiotexnike. M.: Sov. radio. 1971. 326 s.