



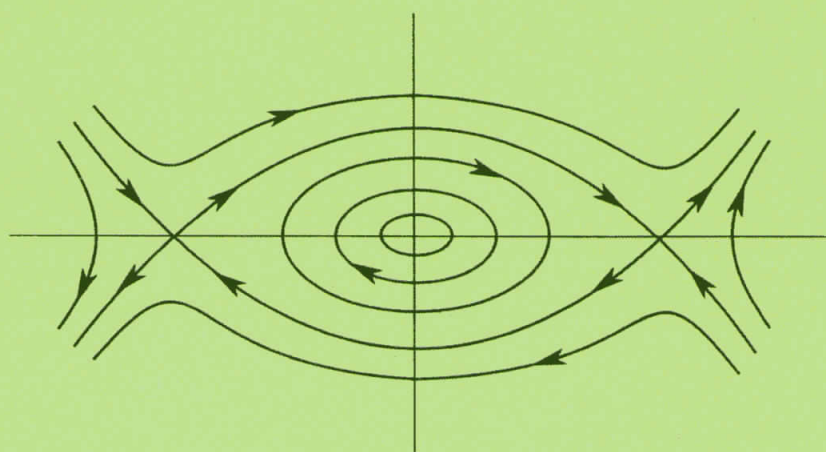
ISSN 0234-5439

ISSN 1609-0705

Основан в 1993 г.

ВЕСТНИК

Воронежского
Государственного
Университета



СЕРИЯ

Физика

Математика

№ 2 / 2016

КВАЗИПРАВДОПОДОБНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ РАЗРЫВНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМИ АМПЛИТУДОЙ И МОМЕНТАМИ ПОЯВЛЕНИЯ И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ*

А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, Е. В. Литвинов, П. А. Кондратович

*Воронежский государственный университет,
Национальный исследовательский университет "МЭИ"*

Поступила в редакцию 10.05.2016 г.

Аннотация. Выполнены синтез и анализ квазиправдоподобных алгоритмов обнаружения разрывного сигнала произвольной формы с неизвестными амплитудой и моментами появления и исчезновения. Предполагалось, что сигнал наблюдается на фоне аддитивного гауссовского белого шума. Выполнен синтез квазиправдоподобного алгоритма обнаружения, использующего вместо неизвестных амплитуды и моментов появления и исчезновения сигнала их ожидаемые значения. Исследована возможность адаптации обнаружителя по неизвестным параметрам. Синтезированы квазиправдоподобные алгоритмы обнаружения с адаптацией по амплитуде и по моментам появления и исчезновения. Получены статистические характеристики эффективности функционирования синтезированных алгоритмов обнаружения: вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала.

Ключевые слова: обнаружение сигнала, амплитуда, моменты появления и исчезновения, квазиправдоподобный алгоритм, вероятность ложной тревоги, вероятность пропуска сигнала, адаптация по амплитуде, адаптация по моментам появления и исчезновения.

QUASI LIKELIHOOD DETECTION OF THE SIGNAL WITH UNKNOWN AMPLITUDE AND THE MOMENTS OF APPEARANCE AND DISAPPEARANCE

A. P. Trifonov, Yu. E. Korchagin, E. V. Litvinov, P. A. Kondratovich

Abstract. We synthesized the quasi-likelihood algorithms for the detection of a waveform signal with unknown amplitude and moments of appearance and disappearance against additive Gaussian white noise. We explored the possibility of adapting the detector for unknown parameters. We synthesized the detection algorithms with adaptation in amplitude and moments of appearance and disappearance. We analyzed the algorithms for calculation of the characteristics of their operating effectiveness and also we found the analytical expressions for false-alarm and missing probabilities of the considered detectors.

Keywords: signal detection, amplitude, appearance and disappearance moments, quasi-likelihood algorithm, false alarm probability, the probability of missing a signal, amplitude adaptation, adaptation of appearance and disappearance moments.

* Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-49-00079)

© Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э., Литвинов Е. В., Кондратович П. А., 2016

Задача обнаружения сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения, наблюдаемого на фоне шума актуальна в практических приложениях теории связи, локации, сейсмологии и не раз обсуждалась в литературе. Так, в работах [1], [2] исследованы алгоритмы обнаружения прямоугольного импульса, а в работе [3] — импульса произвольной формы с неизвестными моментами появления и исчезновения. Однако в ряде практических приложений мощность принимаемого сигнала оказывается неизвестной. Поэтому целесообразно рассмотреть алгоритмы обнаружения сигнала с неизвестными амплитудой и моментами появления и исчезновения. В данной работе выполнен синтез и анализ квазиправдоподобных алгоритмов обнаружения сигнала произвольной формы, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума.

Пусть подлежит обнаружению сигнал

$$s(t, a_0, \theta_{01}, \theta_{02}) = \begin{cases} a_0 f(t), & \theta_{01} \leq t \leq \theta_{02}, \\ 0, & t < \theta_{01}, t > \theta_{02}, \end{cases} \quad (1)$$

где $a_0, \theta_{01}, \theta_{02}$ — амплитуда и моменты появления и исчезновения соответственно, неизвестные на приёмной стороне, $f(t)$ — функция, описывающая форму сигнала. Полагаем, что моменты появления и исчезновения сигнала принимают значения из априорных интервалов $\theta_i \in [\theta_{i \min}; \theta_{i \max}]$, $i = 1, 2$, причем $\max f(t) = 1$ при $t \in [\theta_{1 \min}; \theta_{2 \max}]$. При этом предполагается, что $f(\theta_{0i}) \neq 0$, $i = 1, 2$, так что сигнал (1) является разрывным [4].

Будем считать, что доступная наблюдению на интервале времени $[0, T]$ реализация $x(t)$ может быть либо только шумом $x(t) = n(t)$, либо аддитивной смесью шума с полезным сигналом (1) $x(t) = s(t, a_0, \theta_{01}, \theta_{02}) + n(t)$. Здесь $n(t)$ — реализация гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0 . Располагая наблюдаемой реализацией $x(t)$, необходимо вынести решение о наличии или отсутствии полезного сигнала (1).

Если амплитуда и моменты появления и исчезновения полезного сигнала (1) априори известны, можно применить оптимальный алгоритм обнаружения [4], [5], согласно которому приемное устройство формирует логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП)

$$L_0 = \frac{2a_0}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f(t) [x(t) - a_0 f(t)/2] dt. \quad (2)$$

Решение о наличии или отсутствии сигнала выносится в результате сравнения сформированной величины (2) с порогом. Однако при неизвестных параметрах сигнала имеет место априорная параметрическая неопределенность относительно амплитуды и моментов появления и исчезновения. В этом случае логарифм ФОП зависит от трёх неизвестных параметров [4], [5]

$$L(a, \theta_1, \theta_2) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(t) [x(t) - a f(t)/2] dt. \quad (3)$$

Ряд алгоритмов обнаружения (возможно неоптимальных) может быть получен при подстановке в выражение (3) вместо неизвестных a_0 и θ_{01}, θ_{02} некоторых их значений. Эти значения могут быть фиксированными, а могут определяться по реализации наблюдаемых данных. Получаемые в результате квазиправдоподобные алгоритмы обнаружения, рассмотренные ниже, отличаются своей эффективностью и степенью простоты аппаратной реализации.

КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ

Квазиправдоподобный приемник формирует логарифм ФОП (3) для некоторой ожидаемой амплитуды a^* и ожидаемых моментов появления θ_1^* и исчезновения θ_2^*

$$L_1 = L(a^*, \theta_1^*, \theta_2^*) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f(t) [x(t) - a^* f(t)/2] dt. \quad (4)$$

Выражение (4) определяет структуру приёмного устройства. В результате сравнения величины (4) с порогом h выносится решение о присутствии или отсутствии полезного сигнала в принятой реализации.

Поставляя в (4) реализацию наблюдаемых данных, получаем при отсутствии сигнала

$$L_{10} = -\frac{a^{*2}}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f^2(t) dt + \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f(t) n(t) dt, \quad (5)$$

при его наличии

$$L_{11} = \frac{2a^* a_0}{N_0} \int_{\max(\theta_1^*, \theta_{01})}^{\min(\theta_2^*, \theta_{02})} f^2(t) dt - \frac{a^{*2}}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f^2(t) dt + \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f(t) n(t) dt. \quad (6)$$

Согласно (5), (6), L_{10} и L_{11} — гауссовские случайные величины с математическими ожиданиями

$$S_{11} = \Delta_a z_0^2 (1 + \min[0, d_1(\Delta_1)] + \min[0, d_2(\Delta_2)]) - \frac{\Delta_a^2}{2} z_0^2 (1 + d_1(\Delta_1) + d_2(\Delta_2)), \quad (7)$$

$$S_{10} = -\frac{\Delta_a^2}{2} z_0^2 (1 + d_1(\Delta_1) + d_2(\Delta_2)), \quad (8)$$

и дисперсией

$$D = \langle (L_{10} - S_{10})^2 \rangle = \langle (L_{11} - S_{11})^2 \rangle = \Delta_a^2 z_0^2 (1 + d_1(\Delta_1) + d_2(\Delta_2)), \quad (9)$$

где введены обозначения $\Delta_a = a^*/a_0$, $\Delta_1 = \theta_1^*/\theta_{01}$ и $\Delta_2 = \theta_2^*/\theta_{02}$ — величины, характеризующие отличие ожидаемых амплитуды, моментов появления и исчезновения от своих истинных значений,

$$d_1(\Delta_1) = \frac{2a_0^2}{N_0} \int_{\theta_{01}\Delta_1}^{\theta_{01}} f^2(t) dt / z_0^2, \quad d_2(\Delta_2) = \frac{2a_0^2}{N_0} \int_{\theta_{02}}^{\theta_{02}\Delta_2} f^2(t) dt / z_0^2$$

— обобщённые расстройки по моментам появления и исчезновения, $z_0^2 = q(\theta_{01}, \theta_{02})$ — отношение сигнал шум (ОСШ) на выходе приемника максимального правдоподобия,

$$q(\theta_1, \theta_2) = \frac{2a_0^2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(t) dt.$$

На основании (7) – (9) запишем вероятность ложной тревоги

$$\alpha_1 = P \{L_{10} > h\} = 1 - \Phi \left(\frac{h}{\Delta_a z_0 \sqrt{1 + d_1(\Delta_1) + d_2(\Delta_2)}} + \frac{\Delta_a z_0}{2} \sqrt{1 + d_1(\Delta_1) + d_2(\Delta_2)} \right), \quad (10)$$

и пропуска сигнала

$$\beta_1 = P \{L_{11} < h\} = \Phi \left(\frac{h + \frac{\Delta_a^2 z_0^2}{2} (1 + d_1(\Delta_1) + d_2(\Delta_2)) - \Delta_a z_0^2 (1 + \min[0, d_1(\Delta_1)] + \min[0, d_2(\Delta_2)])}{\sqrt{\Delta_a^2 z_0^2 (1 + d_1(\Delta_1) + d_2(\Delta_2))}} \right). \quad (11)$$

В качестве примера конкретизируем полученные результаты для экспоненциально затухающего импульса. Выберем априорные области (2) возможных значений моментов появления и исчезновения так, чтобы $\theta_{1\min}$ и $\theta_{2\max}$ были фиксированными, а максимальная длительность сигнала $T_{\max} = \theta_{2\max} - \theta_{1\min}$ оставалась неизменной. Будем считать, что точки $\theta_{1\max}$ и $\theta_{2\min}$ располагаются симметрично относительно середины θ отрезка $[\theta_{1\min}, \theta_{2\max}]$: $\theta = (\theta_{1\min} + \theta_{2\max})/2$ и могут изменяться согласованно с изменением динамического диапазона возможных значений длительности $k = T_{\max}/T_{\min}$, где $T_{\min} = \theta_{2\min} - \theta_{1\max}$ – минимальная длительность сигнала. Величина k может принимать значения из интервала $[1, \infty)$. При $k = 1$ априорные интервалы стягиваются в точку, что соответствует приёму сигнала с априори известными моментами появления и исчезновения. Длительность такого сигнала равна T_{\max} . Обозначим

$$\eta_i = \frac{\theta_{i\max} - \theta_{i\min}}{T_{\max}} = \frac{k - 1}{2k}, \quad i = 1; 2 \quad (12)$$

– нормированные длины априорных интервалов. Форму скошенной вершины импульса будем описывать функцией

$$f(t, \alpha) = C \exp(-\alpha(t - \theta)/T_{\max}) \quad (13)$$

где α – декремент затухания экспоненты,

$$C = \sqrt{\frac{\alpha}{\exp(-\alpha\theta_{1\min}/T_{\max}) - \exp(-\alpha\theta_{1\max}/T_{\max})}}$$

– нормирующий множитель, выбранный так, чтобы энергия сигнала формы (13) максимальной длительности $T_{\max} = \theta_{2\max} - \theta_{1\min}$ не зависела от выбора параметра α и равнялась энергии прямоугольного импульса единичной амплитуды той же длительности.

На рис. 1 приведены зависимости средней вероятности ошибки $p_{\text{ср}} = (\alpha_1 + \beta_1)/2$ от ОСШ для различных значения расстройк $\Delta_a, \Delta_1, \Delta_2$ при фиксированном значении порога $h = 0$, декременте затухания $\alpha = 0,5$ и $k = 10, \theta = 0$.

На рис. 1 сплошной линией представлены зависимости средней вероятности ошибки от ОСШ при отсутствии расстройк по амплитуде Δ_a , моментам появления Δ_1 и исчезновения Δ_2 , а штриховыми и штрих-пунктирными – при наличии расстройк.

На рис. 1а показаны зависимости средней вероятности ошибки при наличии расстройк по амплитуде $\Delta_a = 1,5$ (штриховая линия) и $\Delta_a = 0,7$ (штрихпунктирная линия). Расстройки по моментам появления и исчезновения для кривых на рис. 1а отсутствуют, т.е. $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$. На рис. 1б и 1в изображены зависимости средней вероятности ошибки при наличии расстройк по моментам появления и исчезновения соответственно. Штриховая линия на рис. 1б соответствует расстройке момента появления $\Delta_1 = 1,5$, штрих-пунктирная – $\Delta_1 = 0,7$. Штриховая линия на рис. 1в соответствует расстройке момента исчезновения $\Delta_2 = 1,5$, штрих-пунктирная – $\Delta_2 = 0,7$. Расстройка по амплитуде для кривых на рис. 1б, в отсутствует, т.е.

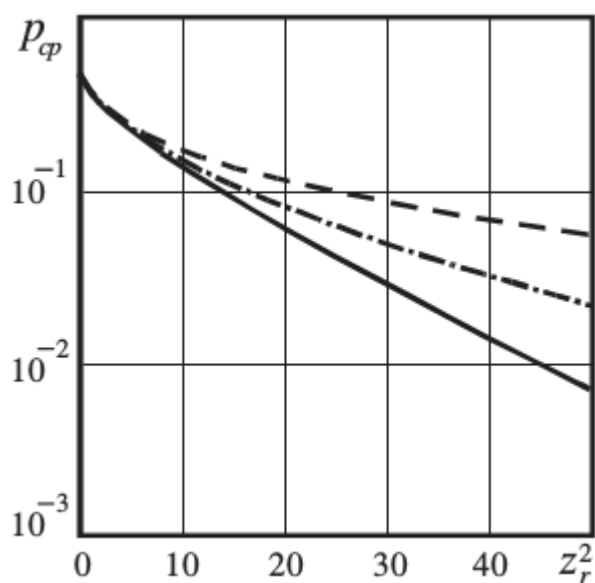


Рис. 1а

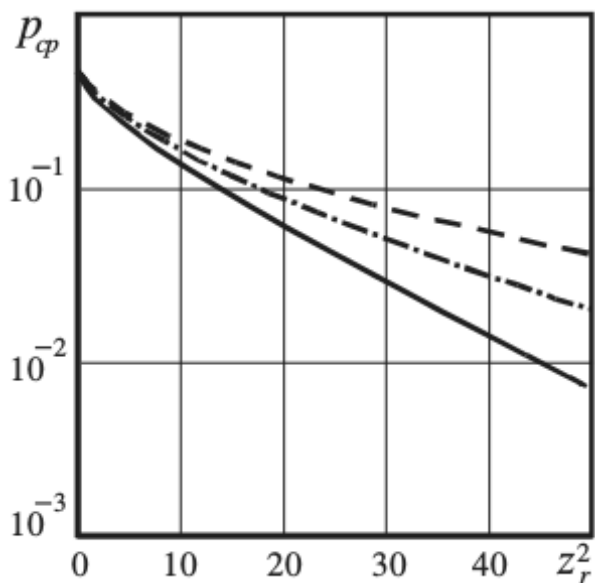


Рис. 1б

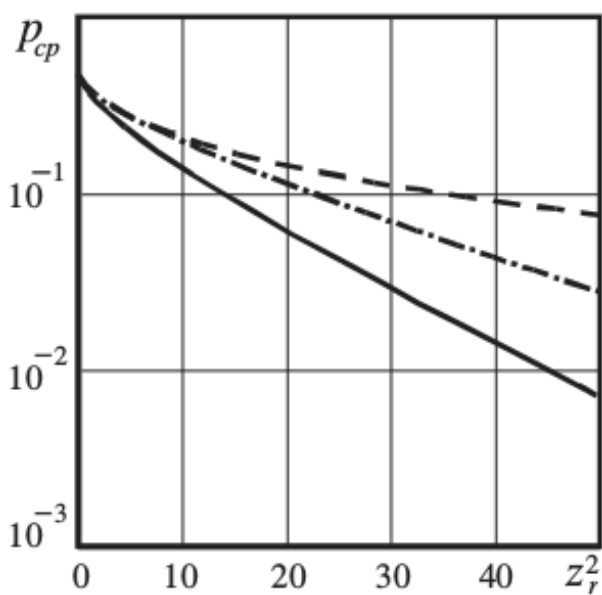


Рис. 1в

Рис. 1. Зависимости средней вероятности ошибки от ОСШ при расстройке по амплитуде Δ_a (рис. 1а), моментам появления Δ_1 (рис. 1б) и исчезновения Δ_2 (рис. 1в).

$\Delta_a = 1$. Из анализа графиков на рис.1 видно, что наличие расстройки по какому либо из параметров $\Delta_a, \Delta_1, \Delta_2$ приводит к заметному снижению эффективности обнаружения.

КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ С АДАПТАЦИЕЙ ПО АМПЛИТУДЕ

С целью повышения эффективности обнаружения можно использовать квазиправдоподобный алгоритм с адаптацией по амплитуде, согласно которому логарифм ФОП (3) формируется для ожидаемых моментов появления и исчезновения, но вместо неизвестной амплитуды используется её оценка максимального правдоподобия, что соответствует максимизация логарифма ФОП (3) по амплитуде. Приемное устройство формирует случайную величину

$$L_2 = \max_a L(a, \theta_1^*, \theta_2^*) = \max_a L(a). \quad (14)$$

В результате сравнения величины (13) с порогом h выносится решение о присутствии или отсутствии полезного сигнала в принятой реализации.

Выполняя аналитически максимизацию логарифма ФОП (3) по амплитуде, получаем решающую статистику в виде

$$L_2 = \frac{1}{N_0} \left(\int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f(t) x(t) dt \right)^2 / \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f^2(t) dt. \quad (15)$$

Выражение (14) определяет структуру приёмного устройства. Для анализа синтезированного алгоритма необходимо найти функцию распределения случайной величины (14). Для этого представим ее в виде

$$L_2 = \left(\int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f(t) x(t) dt / \sqrt{N_0 \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f^2(t) dt} \right)^2. \quad (16)$$

Под квадратом в выражении (15) находится гауссовская случайная величина $\kappa = \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f(t) x(t) dt / \sqrt{N_0 \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f^2(t) dt}$ с математическим ожиданием $m = 0$ при отсутствии сигнала,

$m = a_0 \int_{\max(\theta_1^*, \theta_{01})}^{\min(\theta_2^*, \theta_{02})} f^2(t) dt / \sqrt{N_0 \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f^2(t) dt}$ при наличии сигнала и дисперсией $D = 1/2$. Учти-

тывая, что случайная величина κ преобразуется по квадратичному закону $L_2 = \kappa^2$, запишем вероятность ложной тревоги

$$\alpha_2 = 2 \left[1 - \Phi \left(2\sqrt{h} \right) \right] \quad (17)$$

и вероятность пропуска сигнала

$$\beta_2(z_r^2) = \Phi \left(2\sqrt{h} - \frac{\frac{z_r^2}{T_{\max}} \int_{\max(\theta_{01} \cdot \Delta_1, \theta_{01})}^{\min(\theta_{02} \cdot \Delta_2, \theta_{02})} f^2(t) dt}{\sqrt{\frac{z_r^2}{2T_{\max}} \int_{\theta_{01} \cdot \Delta_1}^{\theta_{02} \cdot \Delta_2} f^2(t) dt}} \right) - \Phi \left(-2\sqrt{h} - \frac{\frac{z_r^2}{T_{\max}} \int_{\max(\theta_{01} \cdot \Delta_1, \theta_{01})}^{\min(\theta_{02} \cdot \Delta_2, \theta_{02})} f^2(t) dt}{\sqrt{\frac{z_r^2}{2T_{\max}} \int_{\theta_{01} \cdot \Delta_1}^{\theta_{02} \cdot \Delta_2} f^2(t) dt}} \right), \quad (18)$$

где z_r^2 — ОСШ прямоугольного импульса с амплитудой a_0 максимальной длительности $T_{\max} = \theta_{2\max} - \theta_{1\min}$.

На рис. 2 приведены зависимости вероятностей пропуска сигналов от ОСШ для сигнала (13) при фиксированном значении порога, который обеспечивает уровень ложной тревоги $\alpha_1 = 10^{-1}$, декременте затухания $\alpha = 0,5$. Сплошной линией показаны зависимости вероятности пропуска сигнала от ОСШ при отсутствии расстройк по моментам появления и исчезновения, а штриховой и штрихпунктирной линиями — при наличии расстройк. Штриховой линией на рис. 2 слева изображена кривая при расстройке по моменту появления $\Delta_1 = 1,1$, а штрих пунктирной — кривая при расстройке $\Delta_1 = 0,7$. Расстройка по моменту исчезновения на рис. 2 слева отсутствует, т.е. $\Delta_2 = 1$. Штриховой линией на рис. 2 справа изображена кривая при расстройке по моменту исчезновения $\Delta_2 = 1,1$, а штрих пунктирной — кривая при расстройке $\Delta_2 = 0,7$. Расстройка по моменту появления на рис. 2 справа отсутствует, т.е. $\Delta_1 = 1$. Из приведенных на рис. 2 графиков видно, что наличие расстройк по моментам появления Δ_1 и исчезновения Δ_2 приводит к снижению эффективности обнаружения.

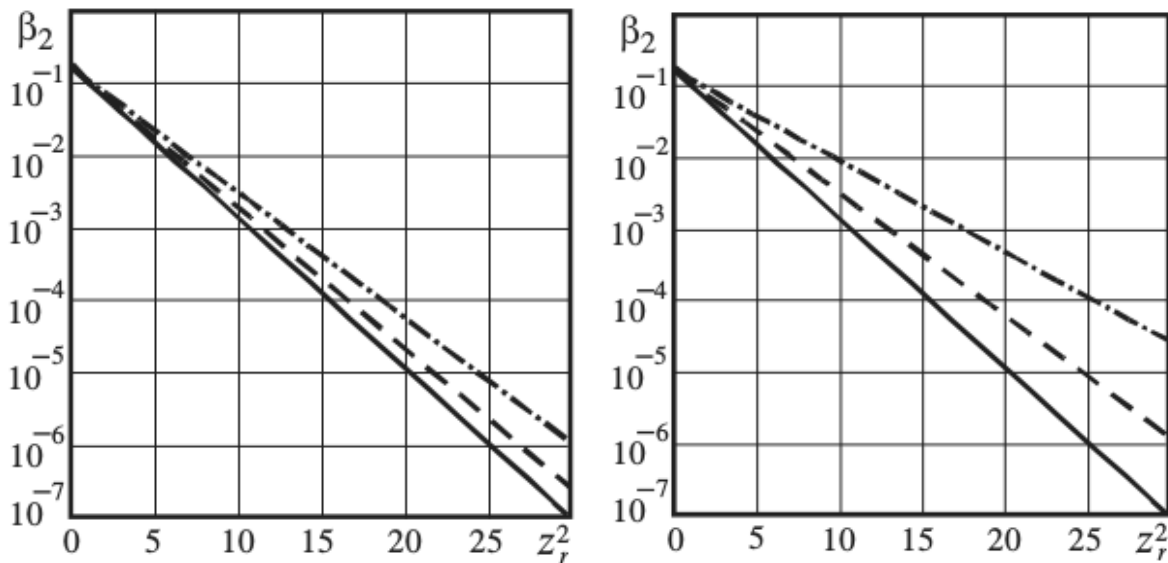


Рис. 2. Зависимости вероятности пропуска сигнала от ОСШ при расстройке по моментам появления Δ_1 (слева) и исчезновения Δ_2 (справа).

КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ С АДАПТАЦИЕЙ ПО МОМЕНТАМ ПОЯВЛЕНИЯ И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ

С целью улучшения эффективности обнаружения рассмотрим квазиправдоподобный алгоритм с максимизацией по моментам появления и исчезновения. Логарифм ФОП (3) формируется для ожидаемой амплитуды a^* и выполняется максимизация по моментам появления и исчезновения

$$L_3 = \max_{\theta_1, \theta_2} L_3(\theta_1, \theta_2). \quad L_3(\theta_1, \theta_2) = L(a^*, \theta_1, \theta_2). \quad (19)$$

Решение о наличии или отсутствии сигнала выносится в результате сравнения величины (20) с порогом h . Согласно (20) приёмник должен формировать двумерное случайное поле $L_3(\theta_1, \theta_2)$ для всех возможных значений неизвестных моментов появления и исчезновения. Поэтому его аппаратная реализация оказывается в общем случае довольно сложной. Однако, сложностей в аппаратной реализации частично удаётся избежать, если представить случайное поле $L_3(\theta_1, \theta_2)$ в виде суммы $L_3(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2)$ двух случайных процессов [2], [3].

Первый из них зависит только от момента появления, второй — от момента исчезновения:

$$L_1(\theta_1) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f(t)x(t) dt - \frac{a^{*2}}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt, \quad (20)$$

где θ — произвольная точка, принадлежащая интервалу $(\theta_{1\max}, \theta_{2\min})$.

Согласно выражениям (21) и (22) функции $L_1(\theta_1)$ и $L_2(\theta_2)$ статистически независимы, так как представляют собой интегралы от гауссовского белого шума на неперекрывающихся интервалах. Тогда $L_3 = \max_{\theta_1, \theta_2} L_3(\theta_1, \theta_2) = L_1 + L_2$, где $L_1 = \max L_1(\theta_1)$, $L_2 = \max L_2(\theta_2)$ — статистически независимые случайные величины. Таким образом, величину максимума случайного поля $L_3(\theta_1, \theta_2)$ можно получить посредством раздельной максимизации случайных процессов (21) и (22).

Представление решающей статистики в виде суммы двух статистически независимых случайных процессов позволяет не только предложить достаточно простую аппаратную реализацию алгоритма обнаружения, но и выполнить его анализ. Для полного статистического описания решающей статистики достаточно найти математические ожидания и корреляционные функции статистически независимых гауссовских случайных процессов (21) и (22). Выполняя усреднение, получаем математические ожидания при наличии сигнала

$$S_{11}(\theta_1) = -\Delta_a q(\max(\theta_1, \theta_{01})) + \frac{\Delta_a^2}{2} q(\theta_1), \quad (21)$$

$$S_{21}(\theta_1) = \Delta_a q(\min(\theta_2, \theta_{02})) - \frac{\Delta_a^2}{2} q(\theta_2),$$

при отсутствии сигнала

$$S_{10}(\theta_2) = \frac{\Delta_a^2}{2} q(\theta_1), \quad S_{20}(\theta_2) = -\frac{\Delta_a^2}{2} q(\theta_2), \quad (22)$$

и корреляционные функции

$$K_1(\theta_{11}, \theta_{12}) = -\Delta_a^2 q(\max(\theta_{11}, \theta_{12})), \quad K_2(\theta_{21}, \theta_{22}) = \Delta_a^2 q(\min(\theta_{21}, \theta_{22})) \quad (23)$$

соответственно, где $q(\theta_i) = \frac{2a_0^2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_i} f^2(t) dt$.

Перейдем в (21), (22) к новым переменным $\lambda_i = (-1)^i q(\theta_i)$, $i = 1, 2$. Тогда $\lambda_1 \in [\Lambda_{11}, \Lambda_{12}]$, а $\lambda_2 \in [\Lambda_{21}, \Lambda_{22}]$, где $\Lambda_{11} = -q(\theta_{1\max})$, $\Lambda_{12} = -q(\theta_{1\min})$ и $\Lambda_{21} = q(\theta_{2\min})$, $\Lambda_{22} = q(\theta_{2\max})$. Пусть $f(t)$ может обращаться в нуль только на части интервала $[\theta_{1\min}, \theta_{2\max}]$, имеющей нулевую меру. Тогда функции $q(x)$ — монотонно возрастающая неотрицательная функция, и имеют место равенства:

$$q(\min(\theta_1, \theta_2)) = \min(q(\theta_1), q(\theta_2)), \quad -q(\max(\theta_1, \theta_2)) = \min(-q(\theta_1), -q(\theta_2)),$$

Использование свойств функции $q(x)$ позволяет переписать решающую статистику $L_3(\theta_1, \theta_2)$ как функцию переменных λ_i в виде

$$\mu_{3j}(\lambda_1, \lambda_2) = \mu_{1j}(\lambda_1) + \mu_{2j}(\lambda_2),$$

где при наличии сигнала ($j = 1$)

$$\mu_{11}(\lambda_1) = \Delta_a \min(\lambda_1, \lambda_{01}) - \Delta_a^2 \lambda_1 / 2 + \nu_1(\lambda_1),$$

$$\mu_{21}(\lambda_2) = \Delta_a \min(\lambda_2, \lambda_{02}) - \Delta_a^2 \lambda_2 / 2 + \nu_2(\lambda_2),$$

при отсутствии сигнала ($j = 0$)

$$\mu_{10}(\lambda_1) = \mu_{20}(\lambda_2) = -\Delta_a^2 \lambda_i / 2 + \nu(\lambda_i),$$

а $\nu_i(\lambda)$ — гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями $B_i(\lambda_1, \lambda_2) = \Delta_a^2 \min(\lambda_1, \lambda_2)$.

Статистически независимые случайные процессы $\mu_{1j}(\lambda_1)$ и $\mu_{2j}(\lambda_2)$ являются марковскими [6] с коэффициентами сноса и диффузии при наличии сигнала [7]

$$k_{1i} = \begin{cases} \Delta_a - \Delta_a^2/2, & \lambda \leq \lambda_{0i}, \\ -\Delta_a^2, & \lambda > \lambda_{0i}, \end{cases} \quad k_{2i} = \Delta_a^2 \quad (24)$$

и при отсутствии сигнала

$$k_1 = -\Delta_a^2/2 \quad k_2 = \Delta_a^2. \quad (25)$$

Вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала определяются следующими выражениями [4], [5]

$$\alpha_3 = 1 - P(-\infty < \mu_{10}(\lambda_1) + \mu_{20}(\lambda_2) < h, \lambda_i \in [\Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}]) = 1 - \int F_{20}(h-x) dF_{10}(x),$$

$$\beta_3 = P(-\infty < \mu_{11}(\lambda_1) + \mu_{21}(\lambda_2) < h, \lambda_i \in [\Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}]) = \int F_{21}(h-x) dF_{11}(x), \quad (26)$$

$$F_{ij}(u) = P\{\max \mu_{ij}(\lambda_i) < u, \lambda_{i \min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{i \max}\}$$

— функции распределения величин абсолютных максимумов случайных процессов $\mu_{ij}(\lambda_i)$.

Найдем сначала вероятность пропуска сигнала. Используя марковские свойства случайных процессов $\mu_{ij}(\lambda_i)$ аналогично [7] находим функции распределения $F_{i1}(u)$

$$F_{i1}(u) = A_\beta(\Lambda_{i1}) \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(u - R(\xi, \Lambda_{i1}))^2}{2c(\Lambda_{i1})}\right\} B_\beta(\xi, \xi_1, \Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}) d\xi d\xi_1, \quad (27)$$

где $A_\beta(\Lambda_{i1}) = \frac{1}{2\pi\Delta_a^2\sqrt{\Lambda_{i1}(\lambda_{0i}-\Lambda_{i1})}} \exp\left\{-\left(\lambda_{0i} - \Lambda_{i1}\right)\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta_a}{2}\right)^2\right\}$,

$$B_\beta(\xi, \xi_1, \Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}) = \left[\Phi\left(\frac{\Delta_a}{2}\sqrt{\Lambda_{i2} - \lambda_{0i}} + \frac{\xi_1}{\Delta_a\sqrt{(\Lambda_{i2}-\lambda_{0i})}}\right) - \exp(-\xi_1) \Phi\left(\frac{\Delta_a}{2}\sqrt{\Lambda_{i2} - \lambda_{0i}} - \frac{\xi_1}{\Delta_a\sqrt{(\Lambda_{i2}-\lambda_{0i})}}\right) \right] \times \\ \times \left\{ \exp\left[-\frac{(\xi_1-\xi)^2}{2\Delta_a^2(\lambda_{0i}-\Lambda_{i1})}\right] - \exp\left[-\frac{(\xi_1+\xi)^2}{2\Delta_a^2(\lambda_{0i}-\Lambda_{i1})}\right] \right\} \exp\left[(\xi - \xi_1)\left(\frac{1}{\Delta_a} - \frac{1}{2}\right)\right],$$

$$R_{ki} \equiv R(\xi_k, \Lambda_{i1}) = \xi_k + \Delta_a \Lambda_{i1} - \Delta_a^2 \Lambda_{i1} / 2, \quad c_i \equiv c(\Lambda_{i1}) = \Delta_a^2 \Lambda_{i1}.$$

Подставив (27) в (26), получим выражение для вероятности пропуска сигнала

$$\beta_3 = \sqrt{\frac{2\pi\Lambda_{11}\Lambda_{21}}{\Delta_a^2(\Lambda_{11}+\Lambda_{21})^3}} A_\beta(\Lambda_{11}) A_\beta(\Lambda_{21}) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (R_{11} + R_{32} - h) \exp\left\{-\frac{(R_{11}+R_{32}-h)^2}{2\Delta_a^2(\Lambda_{11}+\Lambda_{21})}\right\} \times \\ \times B_\beta(\xi_1, \xi_2, \Lambda_{11}, \Lambda_{12}) B_\beta(\xi_3, \xi_4, \Lambda_{21}, \Lambda_{22}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4. \quad (28)$$

Найдем вероятность ложной тревоги сигнала. Используя марковские свойства случайных процессов $\mu_{ij}(\lambda_i)$ аналогично [7] находим функции распределения $F_{i0}(u)$

$$F_{i0}(u) = A_\alpha(\Lambda_{i1}) \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(u - P(\xi_k, \Lambda_{i1}))^2}{2c_i}\right\} B_\alpha(\xi, \Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}) d\xi, \quad (29)$$

где

$$A_\alpha(\Lambda_{i1}) = \frac{1}{\Delta_a \sqrt{2\pi\Lambda_{i1}}},$$

$$B_\alpha(\xi, \Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}) = \left[\Phi \left(\frac{\Delta_a}{2} \sqrt{\Lambda_{i2} - \Lambda_{i1}} + \frac{\xi}{\Delta_a \sqrt{(\Lambda_{i2} - \Lambda_{i1})}} \right) - \exp(-\xi) \Phi \left(\frac{\Delta_a}{2} \sqrt{\Lambda_{i2} - \Lambda_{i1}} - \frac{\xi}{\Delta_a \sqrt{(\Lambda_{i2} - \Lambda_{i1})}} \right) \right],$$

$$P_{ki} = P(\xi_k, \Lambda_{i1}) = \xi_k - \Delta_a^2 \Lambda_{i1} / 2, \quad c_i = \Delta_a^2 \Lambda_{i1}.$$

Подставив (29) в (26), получим выражение для вероятности ложной тревоги

$$\alpha_3 = 1 - \frac{1}{\Delta_a^3 \sqrt{2\pi} (\Lambda_{11} + \Lambda_{12})^3} \int_0^\infty \int_0^\infty (P_{11} + P_{21} - h) \exp \left[-\frac{(P_{11} + P_{21} - h)^2}{2\Delta_a^2 (\Lambda_{11} + \Lambda_{21})} \right] \times \quad (30)$$

$$\times B_\alpha(\xi_1, \Lambda_{11}, \Lambda_{12}) B_\alpha(\xi_2, \Lambda_{21}, \Lambda_{22}) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$B_\alpha(\xi, \Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}) = \left[\Phi \left(\frac{\Delta_a}{2} \sqrt{\Lambda_{i2} - \Lambda_{i1}} + \frac{\xi}{\Delta_a \sqrt{(\Lambda_{i2} - \Lambda_{i1})}} \right) - \exp(-\xi) \Phi \left(\frac{\Delta_a}{2} \sqrt{\Lambda_{i2} - \Lambda_{i1}} - \frac{\xi}{\Delta_a \sqrt{(\Lambda_{i2} - \Lambda_{i1})}} \right) \right], \quad P_{ki} \equiv P(\xi_{ki}) = \xi_k - \Delta_a^2 \Lambda_{i1} / 2.$$

Как и следовало ожидать, вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала при использовании КП алгоритма с адаптацией по моментам появления и исчезновения не зависят от произвольно выбранной точки θ . Однако, выражения оказываются достаточно громоздкими и вероятности ошибок могут быть найдены только с применением численных методов.

Приведенные результаты позволяют сделать обоснованный выбор алгоритма обнаружения с учетом сложности его аппаратной реализации и эффективности обнаружения. Наиболее простым в смысле аппаратной реализации является квазиправдоподобный алгоритм (4). Для улучшения эффективности обнаружения можно использовать адаптацию по неизвестным амплитуде и моментами появления и исчезновения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Репин, В. Г. Обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / В. Г. Репин // Проблемы передачи информации. — 1991. — Т. 27, № 1. — С. 61–72.
2. Трифонов, А. П. Оптимальный приём прямоугольного импульса с неизвестными моментами появления и исчезновения / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин // Известия ВУЗов. Радиофизика. — 2000. — Т. 63, № 3. — С. 271–282.
3. Трифонов, А. П. Квазиправдоподобное обнаружение сигналов с неизвестными формой и моментами появления и исчезновения / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 4. — С. 43–53.
4. Теория обнаружения сигналов / П. С. Акимов, П. А. Бакут, В. А. Богданович [и др.]; под ред. П. А. Бакута. — М. : Радио и связь, 1984. — 440 с.
5. Трифонов, А. П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков. — М. : Радио и связь, 1986. — 264 с.
6. Тихонов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. — М. : Радио и связь, 1977. — 488 с.

7. Трифонов, А. П. Квазиправдоподобное обнаружение сигналов с неизвестными амплитудой и длительностью / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, Е. В. Литвинов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 1. — С. 41–49.

REFERENCES

1. Repin V.G. Detection of a Signal with Unknown Appearance and Disappearance. [Repin V.G. Obnaruzhenie signala s neizvestnymi momentami poyavleniya i ischeznoveniya]. *Problemy peredachi informacii — Problems of information transmission*, 1991, vol. 27, no. 1, pp. 61–72.
2. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E. Optimal receiving of the rectangular pulse with unknown appearance and disappearance moments. [Trifonov A.P., Korchagin Yu.E. Optimal'nyi priem pryamougol'nogo impul'sa s neizvestnymi momentami poyavleniya i ischeznoveniya]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Radiophizika — Radiophysics and Quantum Electronics*, 2000, vol. 43, no. 3, pp. 271–282.
3. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E. Quasilikelihood detection of signal with unknown forms and moments of appearance and disappearance. [Trifonov A.P., Korchagin Yu.E. Kvazipravdopodobnoe obnaruzhenie signalov s neizvestnymi formoi i momentami poyavleniya i ischeznoveniya]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 4, pp. 43–53.
4. Akimov I.S., Bakut P.A., Bogdanovich V.A. et. al. Theory of detection of signals. [Akimov I.S., Bakut P.A., Bogdanovich V.A. i dr. Teoriya obnaruzheniya signalov]. Moscow: Radio and communications, 1984, 440 p.
5. Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. The joint assessment of the distinction between signals and their parameters on the background noise. [Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i oценка ih parametrov na fone pomех]. Moscow: Radio and communications, 1986, 264 p.
6. Tihonov V.I., Mironov M.A. Markov processes. [Tihonov V.I., Mironov M.A. Markovskie processy]. Moscow: Radio and communications, 1977. 488 p.
7. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E., Linvinov E.V. Quasi likelihood detection of the signal with unknown amplitude and duration. [Trifonov A.P., Korchagin Yu.E., Linvinov E.V. Kvazipravdopodobnoe obnaruzhenie signalov s neizvestnymi amplitudoi i dlitel'nost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 1, pp. 41–49.

Трифонов Андрей Павлович, доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, зав. каф. радиофизики ВГУ, г. Воронеж, профессор кафедры радиотехнических приборов и антенных систем НИУ "МЭИ", г. Москва, Российская Федерация

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

Tel.: +7(473)220-89-16

Trifonov Andrei Pavlovich, Doctor of technical sciences, Professor, Honored Scientist of the Russian Federation, Head of the Department of Radiophysics of Voronezh State University, Voronezh, Professor Department of Radio Engineering Devices and Antenna Systems of National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Russian Federation

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

Tel.: +7(473)220-89-16

Корчагин Юрий Эдуардович, доктор физико-математических наук, доцент, доцент каф. радиофизики ВГУ, г. Воронеж, доцент кафедры радиотехнических приборов и антенных систем НИУ "МЭИ", г. Москва, Российская Федерация
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru
Тел.: +7(473)220-89-16

Korchagin Yurii Eduardovich, Doctor of physico-mathematical sciences, Associate Professor of the Department of radiophysic of Voronezh State University. Voronezh, Associate Professor Department of Radio Engineering Devices and Antenna Systems of National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Russian Federation
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru
Tel.: +7(473)220-89-16

Литвинов Евгений Владимирович, кандидат физико-математических наук, ассистент каф. радиофизики ВГУ, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: elitvinov@list.ru
Тел.: +7(473)220-89-16

Litvinov Evgenii Vladimirovich, Candidate of physico-mathematical sciences, assistant professor of the Department of radiophysic of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: elitvinov@list.ru
Tel.: +7(473)220-89-16

Кондратович Павел Александрович, кандидат физико-математических наук, инженер 1 категории ЗАО "ПКК Миландр", г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: pkondr@mail.ru
Тел.: +7(495)981-54-33

Kondratovich Pavel Aleksandrovich, Candidate of physico-mathematical sciences, Engineer of 1 category JSC "ICC Milandr", Voronezh, Russian Federation
E-mail: pkondr@mail.ru
Tel.: +7(495)981-54-33