

P5014
T.61,9,2016

339

№1

ISSN 0033-8494

Том 61, Номер 9

Сентябрь 2016



РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

журналу 60 лет

<http://www.naukaran.com>



“НАУКА”

УДК 621.391

ОЦЕНКА ЧИСЛА ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ
С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ© 2016 г. А. П. Трифонов^{1,*}, А. В. Харин¹, О. В. Чернояров²¹Воронежский государственный университет,
Российская Федерация, 394007, Воронеж, Университетская пл., 1²Национальный исследовательский университет "МЭИ"
Российская Федерация, 111250, Москва, ул. Краснаязарменная, 14

*E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

Поступила в редакцию 13.01.2015 г.

На основе модификаций метода максимального правдоподобия выполнен синтез алгоритмов оценки числа сигналов с неизвестными амплитудами и несколькими неэнергетическими параметрами. Найдены асимптотические значения вероятности ошибки оценки числа сигналов. Исследовано влияние приведенного объема априорной области возможных значений и размерности вектора неизвестных неэнергетических параметров на качество функционирования алгоритмов оценки числа сигналов.

DOI: 10.7868/S0033849416090126

Во многих областях науки и техники возникают задачи выбора числа степеней свободы статистической модели, наиболее адекватно описывающей исследуемое явление [1]. Важный класс таких задач – это задачи оценки числа сигналов с неизвестными параметрами на фоне шума [2–11]. Например, при многолучевом распространении сигнала в канале передачи информации появляется проблема оценки числа лучей в многолучевом канале. Оценка числа лучей в канале часто сводится к оценке числа сигналов. В результате эффективные алгоритмы оценки числа сигналов могут существенно повысить помехоустойчивость передачи данных по многолучевому каналу [4–11].

Задача оценки числа принимаемых сигналов с неизвестными амплитудами рассмотрена в [7]. Амплитуда сигнала является энергетическим параметром [12], поскольку от нее зависит энергия сигнала. В то же время достаточно часто, например в радиолокации [6], возникает необходимость в оценке числа сигналов, которые, кроме неизвестной амплитуды, содержат неизвестные неэнергетические параметры [12]. К ним относятся время и направление прихода сигнала, его частота, начальная фаза. В работе [9] решена задача оценки числа сигналов с неизвестными начальными фазами, в работе [10] – задача оценки числа сигналов с неизвестными амплитудами и фазами, в работе [11] исследована задача оценки числа ортогональных сигналов с произвольными неэнергетическими параметрами. Ниже рассмат-

ривается общая задача синтеза и анализа алгоритма оценки числа ортогональных сигналов с неизвестными амплитудами и неэнергетическими параметрами, принимаемых на фоне аддитивного гауссовского белого шума. Синтез такого алгоритма оценки при помощи метода максимального правдоподобия невозможен. Таким образом, оценку числа сигналов приходится производить при помощи модификаций метода максимального правдоподобия [7, 10]. Эффективность алгоритма характеризуется вероятностью ошибки оценки числа сигналов. Для анализа полученного алгоритма использованы теория обнаружения сигналов [13] и понятие укороченной вероятности ошибки [7, 9–11].

Предположим, что наблюдается сумма из ν сигналов $a_i s_i(t, \mathbf{l}_i)$, каждый зависит от вектора неизвестных параметров \mathbf{l}_i и неизвестных амплитуд a_i , поэтому принимается сигнал

$$s(t, \nu, \mathbf{L}, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i s_i(t, \mathbf{l}_i), \quad (1)$$

где $\nu = \overline{1, \nu_{\max}}$, $s_i(t, \mathbf{l}_i) \in L_2(T_1, T_2)$, $\mathbf{l}_i = \|\mathbf{l}_{i1}, \dots, \mathbf{l}_{i\mu_i}\|$, $\mathbf{l}_i \in \Lambda_i$, Λ_i – априорная область возможных значений вектора неизвестных параметров i -го сигнала, μ_i – число неизвестных параметров i -го сигнала, \mathbf{a} – вектор неизвестных амплитуд, $\mathbf{L} = \|\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_{\nu_{\max}}\|$ – блочный вектор, объединяющий векторы неизвестных параметров.

Пусть сигнал (1) наблюдается в течение времени $[0, T]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Следовательно, обработке доступна реализация

$$x(t) = n(t) + \sum_{i=1}^{v_0} a_{0i} s_i(t, \mathbf{l}_{0i}), \quad (2)$$

где a_{0i} , v_0 и $\mathbf{L}_0 = \|\mathbf{l}_{01}, \dots, \mathbf{l}_{0v_0}\|$ — истинные значения соответствующих параметров.

Налагаем на функции из множества $\{s_i(t, \mathbf{l}_i)\}_{i=1}^{v_{\max}}$ условие ортогональности

$$\int_0^T s_i(t, \mathbf{l}_i) s_j(t, \mathbf{l}_j) dt = \begin{cases} E_i, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (3)$$

Условие (3) должно выполняться при любых значениях неизвестных параметров $\mathbf{l}_i \in \Lambda_i$. Кроме того, будем полагать, что неизвестные параметры $\mathbf{L} = \|\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_{v_{\max}}\|$ являются неэнергетическими [12], поэтому $\int_0^T s_i^2(t, \mathbf{l}_i) dt = E_i = \text{const}(\mathbf{l}_i)$ для любого i .

Рассмотрим вначале возможность оценки числа сигналов v_0 методом максимального правдоподобия [12, 14]. В работе [12] приведена формула логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОП) для произвольного сигнала $s(t, \boldsymbol{\theta})$, содержащего неизвестные параметры $\boldsymbol{\theta}$, когда помехой является аддитивный белый гауссовский шум:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(t, \boldsymbol{\theta}) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t, \boldsymbol{\theta}) dt.$$

После подстановки в эту формулу сигнала (1) вместо произвольного сигнала $s(t, \boldsymbol{\theta})$ получаем

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{L}) = \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^v a_i \int_0^T x(t) s_i(t, \mathbf{l}_i) dt - \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^v a_i^2 E_i. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение функционалы

$$L_{zi}(\mathbf{l}_i) = \int_0^T x(t) s_i(t, \mathbf{l}_i) dt. \quad (5)$$

Используя (4) и (5), запишем логарифм ФОП для сигнала (1) в виде

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{L}) = \sum_{i=1}^v \left[\frac{2a_i}{N_0} L_{zi}(\mathbf{l}_i) - \frac{a_i^2 E_i}{N_0} \right]. \quad (6)$$

В соответствии с методом максимального правдоподобия значения неизвестных амплитуд

сигналов в (6) необходимо заменить на их оценки максимального правдоподобия. Эта процедура сводится к максимизации логарифма ФОП (6) по значениям неизвестных амплитуд \mathbf{a} :

$$L_m(\mathbf{v}, \mathbf{L}) = \sup_{\mathbf{a}} L(\mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{L}) = \sum_{i=1}^v \left[\frac{L_{zi}^2(\mathbf{l}_i)}{N_0 E_i} \right]. \quad (7)$$

Далее в соответствии с методом максимального правдоподобия заменим значения неизвестных неэнергетических параметров сигналов в (7) их оценками максимального правдоподобия. Эта процедура также сводится к максимизации логарифма ФОП (7) по значениям вектора неизвестных параметров \mathbf{L} :

$$L_{mm}(\mathbf{v}) = \sup_{\mathbf{L}} L_m(\mathbf{v}, \mathbf{L}) = \sup_{\mathbf{L}} \sum_{i=1}^v \left[\frac{L_{zi}^2(\mathbf{l}_i)}{N_0 E_i} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^v \left[\frac{2L_{mzi}}{N_0 E_i} \right], \quad (8)$$

где $L_{mzi} = \sup_{\mathbf{l}_i \in \Lambda_i} L_{zi}^2(\mathbf{l}_i)$ — абсолютный (наибольший) максимум квадрата функционала (5).

Можно показать, что для любых $i \neq j$ случайные поля $L_{zi}(\mathbf{l}_i)$, $L_{zj}(\mathbf{l}_j)$ не коррелированы, а, значит, все гауссовские случайные поля из множества $\{L_{zk}(\mathbf{l}_k)\}_{k=1}^{v_{\max}}$ статистически независимы. Учитывая выше сказанное, можно заключить, что абсолютные максимумы $\{L_{mzk}\}_{k=1}^{v_{\max}}$ полей $\{L_{zk}(\mathbf{l}_k)\}_{k=1}^{v_{\max}}$ являются независимыми случайными величинами.

Очевидно, что функция $L_{mm}(\mathbf{v})$ (8) не убывает с ростом v , поэтому невозможно применить метод максимального правдоподобия для оценки числа ортогональных сигналов с неизвестными амплитудами и произвольными неизвестными параметрами. Вместо алгоритма максимального правдоподобия будем использовать его модификации [7, 10].

Ниже рассмотрим следующие алгоритмы.

1. Алгоритм с линейной штрафной функцией

$$L_{Dl}(\mathbf{v}; \kappa_1) = L_{mm}(\mathbf{v}) - \kappa_1 v, \quad \kappa_1 > 0, \quad (9)$$

$$\hat{v} = \arg \sup_{\mathbf{v}} L_{Dl}(\mathbf{v}; \kappa_1), \quad \mathbf{v} = \mathbf{l}, v_{\max}.$$

Частным случаем алгоритма (9) при $\kappa_1 = 1 + \sum_{i=1}^v \mu_i/v$ является алгоритм оценки числа сигналов по критерию АИС [1].

2. Алгоритм со случайной штрафной функцией [5]

$$L_{D2}(v; \kappa_2) = L_{mm}(v) - \kappa_2 v \max_{k \in \overline{1, v_{\max}}} \left(\frac{L_{mk}}{N_0 E_k} \right),$$

$$\kappa_2 > 0, \quad (10)$$

$$\hat{v} = \arg \sup_v L_{D2}(v; \kappa_2), \quad v = \overline{1, v_{\max}}.$$

3. Алгоритм с обратной штрафной функцией, предложенный в [7, 10],

$$L_B(v; n) = \frac{L_{mm}^n(v)}{v}, \quad n > 1, \quad (11)$$

$$\hat{v} = \arg \sup_v L_B(v; n), \quad v = \overline{1, v_{\max}}.$$

Отметим, что все приведенные выше алгоритмы зависят от параметров κ_1 , κ_2 , n , которым при практической реализации (9)–(11) необходимо придать конкретные значения. В дальнейшем при анализе алгоритмов (9)–(11) будут найдены их укороченные вероятности ошибки. Исследование указанных вероятностей как функций κ_1 , κ_2 , n позволяет определить оптимальные значения этих параметров в смысле минимума укороченной вероятности ошибки. При этом очевидно, что алгоритм (11) будет состоятелен при любых значениях параметра $n > 1$, в то же время алгоритмы (9) и (10) могут оказаться несостоятельными при определенных значениях κ_1 и κ_2 соответственно.

Эффективность алгоритма оценки числа сигналов можно охарактеризовать величиной полной вероятности ошибки $p_e = P(\hat{v} \neq v_0)$. Однако расчет этой вероятности требует существенных вычислительных ресурсов. Для получения упрощенной приближенной формулы заметим, что любой алгоритм \mathfrak{R} оценки числа сигналов можно представить в виде

$$\hat{v} = \arg \sup_v R(v; x(t)),$$

где $R(v; x(t))$ – функционал, определяемый структурой алгоритма \mathfrak{R} и зависящий от числа сигналов и реализации наблюдаемых данных. При помощи данного представления полную вероятность ошибки для алгоритма \mathfrak{R} можно записать как

$$p_e = 1 - P[R(v_0; x(t)) > R(i; x(t)),$$

$$i \neq v_0, i = \overline{1, v_{\max}}].$$

Теперь в качестве приближения к полной вероятности ошибки введем в рассмотрение укороченную вероятность ошибки алгоритма \mathfrak{R} , определяемую следующим образом:

$$p_i = 1 - P[R(v_0; x(t)) > R(v_0 + 1; x(t)), R(v_0; x(t)) > R(v_0 - 1; x(t))]. \quad (12)$$

Из определения (12) следует, что укороченная вероятность ошибки является нижней границей для полной вероятности ошибки, т.е. $p_e \geq p_i$, когда $1 < v_0 < v_{\max}$. Отметим также, что укороченная вероятность ошибки совпадает с вероятностью ошибки в случае, когда $v_{\max} = 3$ и $v_0 = 2$.

Используя формулы (2) и (5), введем нормированные независимые случайные величины

$$H_k = \frac{2}{E_k N_0} L_{mk} =$$

$$= \begin{cases} \sup_{l_k \in \Lambda_k} (z_k S_k(l_{0k}, l_k) + N_k(l_k))^2, & k \leq v_0, \\ \sup_{l_k \in \Lambda_k} N_k^2(l_k), & k > v_0. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь

$$z_k^2 = 2a_k^2 E_k / N_0 \quad (14)$$

– отношение сигнал/шум (ОСШ) для k -го сигнала, $S_k(l_{1k}, l_{2k})$ – нормированная сигнальная функция, определяемая как [12, 13]

$$S_k(l_{1k}, l_{2k}) = \frac{1}{E_k} \int_0^T s_k(t, l_{1k}) s_k(t, l_{2k}) dt, \quad (15)$$

$N_k(l_k)$ – нормированная шумовая функция [13], представляющая собой реализацию централизованного гауссовского однородного поля с корреляционной функцией $S_k(l_{1k}, l_{2k})$ (15).

Выясним явный вид функций распределения случайных величин $\{H_k\}_{k=1}^{v_{\max}}$. Рассмотрим случайные величины H_k (13) при $k \leq v_0$:

$$H_k = \sup_{l_k \in \Lambda_k} [z_k^2 S_k^2(l_{0k}, l_k) + 2z_k S_k(l_{0k}, l_k) N_k(l_k) + N_k^2(l_k)].$$

Для каждого k разобьем область определения Λ_k неизвестных параметров l_k на две подобласти: Λ_{Sk} и Λ_{Nk} . Подобласть Λ_{Sk} выберем так, чтобы в нее входили только те значения вектора неизвестных параметров l_k , при которых сигнальная функция $S_k(l_{0k}, l_k)$ существенно отлична от нуля. Тогда получим, что $S_k(l_{0k}, l_k) \approx 0$ при $l_k \in \Lambda_{Nk}$. Подобласть Λ_{Nk} дополняет подобласть Λ_{Sk} до априорной области Λ_k возможных значений неизвестных неэнергетических параметров l_k . Пе-

репишем выражение для H_k при $k \leq v_0$ и использовании подобластей Λ_{Sk} и Λ_{Nk} :

$$H_k = \begin{cases} \sup_{\mathbf{l}_k} [z_k^2 S_k^2(\mathbf{l}_{0k}, \mathbf{l}_k) + 2z_k S_k(\mathbf{l}_{0k}, \mathbf{l}_k) \times \\ \times N_k(\mathbf{l}_k) + N_k^2(\mathbf{l}_k)], & \mathbf{l}_k \in \Lambda_{Sk}, \\ \sup_{\mathbf{l}_k} N_k^2(\mathbf{l}_k), & \mathbf{l}_k \in \Lambda_{Nk}. \end{cases} \quad (16)$$

Полагаем, что ОСШ (14) достаточно велико, и евклидов объем $V(\Lambda_k)$ априорной области Λ_k существенно превышает евклидов объем $V(\Lambda_{Sk})$ подобласти Λ_{Sk} , которая представляет собой область высокой корреляции случайного поля $N_k(\mathbf{l}_k)$. При сделанных предположениях формулу (16) можно переписать в виде

$$H_k = \begin{cases} \sup_{\mathbf{l}_k} [z_k^2 S_k^2(\mathbf{l}_{0k}, \mathbf{l}_k) + \\ + 2z_k S_k(\mathbf{l}_{0k}, \mathbf{l}_k) N_k(\mathbf{l}_k)], & \mathbf{l}_k \in \Lambda_{Sk}, \\ \sup_{\mathbf{l}_k} N_k^2(\mathbf{l}_k), & \mathbf{l}_k \in \Lambda_k. \end{cases} \quad (17)$$

В первой строке правой части (17) при $\mathbf{l}_k \in \Lambda_{Sk}$ опущено слагаемое $N_k^2(\mathbf{l}_k)$, которое имеет нулевой порядок малости относительно ОСШ z_k (14). Во второй строке подобласть поиска абсолютного максимума расширена до всей априорной области Λ_k , так как предполагается, что $V(\Lambda_k) \gg V(\Lambda_{Sk})$. Последнее условие также обеспечивает приближенную статистическую независимость случайных величин, указанных в правой части формулы (17), поэтому [13]

$$P(H_k < u) \approx P\left[\sup_{\mathbf{l}_k \in \Lambda_{Sk}} (z_k^2 S_k^2(\mathbf{l}_{0k}, \mathbf{l}_k) + 2z_k S_k(\mathbf{l}_{0k}, \mathbf{l}_k) N_k(\mathbf{l}_k)) < u\right] P\left[\sup_{\mathbf{l}_k \in \Lambda_{Nk}} N_k^2(\mathbf{l}_k) < u\right]. \quad (18)$$

Для вычисления первого множителя в правой части этой формулы предположим, что сигнальная функция (15) имеет лишь один ярко выраженный максимум в точке $\mathbf{l}_k = \mathbf{l}_{0k}$. Поскольку

подобласть Λ_{Sk} приближенно совпадает с областью высокой корреляции случайного поля $N_k(\mathbf{l}_k)$, видим, что при достаточно больших ОСШ (14) справедлива аппроксимация

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{\mathbf{l}_k \in \Lambda_{Sk}} (z_k^2 S_k^2(\mathbf{l}_{0k}, \mathbf{l}_k) + 2z_k S_k(\mathbf{l}_{0k}, \mathbf{l}_k) N_k(\mathbf{l}_k)) < u\right] &\approx \\ \approx P\left[z_k^2 S_k^2(\mathbf{l}_{0k}, \mathbf{l}_{0k}) + 2z_k S_k(\mathbf{l}_{0k}, \mathbf{l}_{0k}) N_k(\mathbf{l}_{0k}) < u\right] &= \\ = P(z_k^2 + 2z_k \eta_k < u) = P\left(\eta_k < \frac{u - z_k^2}{2z_k}\right) = \Phi\left(\frac{u - z_k^2}{2z_k}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь η_k — гауссовская случайная величина с параметрами $(0, 1)$, $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$ — интеграл вероятности.

Теперь вычислим второй множитель в правой части формулы (18). Для этого учтем, что при

достаточно больших значениях объема подобласти Λ_{Nk} значения наибольших максимумов и наименьших минимумов центрированного случайного поля $N_k(\mathbf{l}_k)$ являются приближенно независимыми случайными величинами [15]. Тогда после очевидных преобразований получаем

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{\mathbf{l}_k \in \Lambda_k} N_k^2(\mathbf{l}_k) < u\right] &= P\left[\sup_{\mathbf{l}_k \in \Lambda_k} N_k(\mathbf{l}_k) < \sqrt{u}, \inf_{\mathbf{l}_k \in \Lambda_k} N_k(\mathbf{l}_k) > -\sqrt{u}\right] \approx \\ &\approx P\left[\sup_{\mathbf{l}_k \in \Lambda_k} N_k(\mathbf{l}_k) < \sqrt{u}\right] P\left[\inf_{\mathbf{l}_k \in \Lambda_k} N_k(\mathbf{l}_k) > -\sqrt{u}\right] = \\ &= P\left[\sup_{\mathbf{l}_k \in \Lambda_k} N_k(\mathbf{l}_k) < \sqrt{u}\right] P\left[\sup_{\mathbf{l}_k \in \Lambda_k} (-N_k(\mathbf{l}_k)) < \sqrt{u}\right] = \\ &= \left\{P\left[\sup_{\mathbf{l}_k \in \Lambda_k} N_k(\mathbf{l}_k) < \sqrt{u}\right]\right\}^2. \end{aligned} \quad (20)$$

В работе [13] при решении задачи обнаружения сигнала с неизвестными неэнергетическими параметрами найдено асимптотически точное вы-

ражение для функции распределения величины наибольшего максимума случайного поля $N_k(\mathbf{I}_k)$. Используя результаты [13], для (20) находим

$$P\left[\sup_{\mathbf{I}_k \in \Lambda_k} N_k^2(\mathbf{I}_k) < u\right] \approx \begin{cases} \exp\left[-\frac{2\xi_k}{(2\pi)^{(\mu_k+1)/2}} u^{(\mu_k-1)/2} \exp\left(-\frac{u}{2}\right)\right], & u \geq \mu_k - 1, \\ 0, & u < \mu_k - 1. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь $\xi_k = V_k \sqrt{\Omega_k}$ — приведенный объем априорной области Λ_k возможных значений параметров \mathbf{I}_k , $V_k = V(\Lambda_k)$ — евклидов объем этой области,

$$\Omega_k = \det \left\| \frac{\partial S_k(\mathbf{I}_{1k}, \mathbf{I}_{2k})}{\partial I_{ik} \partial I_{jk}} \right\|_{i,k=1,2k}, \quad i, j = \overline{1, \mu_k}.$$

Приведенный объем ξ_k характеризует число различных значений неизвестных параметров в априорной области Λ_k . В случае, когда помехой является белый гауссовский шум, приведенный объем можно выразить через производные полезного сигнала:

$$\xi_k = V_k \sqrt{\det \left\| \frac{1}{E_k} \int_0^T \frac{ds_k(t, \mathbf{I}_k)}{dI_{ik}} \frac{ds_k(t, \mathbf{I}_k)}{dI_{jk}} dt \right\|}, \quad i, j = \overline{1, \mu_k}. \quad (22)$$

Формула (21) является приближенной, причем ее точность улучшается с ростом величины u и приведенного объема ξ_k [13].

Используя (18), (19) и (21), можем записать выражение для функции распределения $F_{H_k}(u)$ случайной величины H_k (17) при $k \leq \nu_0$:

$$F_{H_k}(u) \approx \begin{cases} \Phi\left(\frac{u-z^2}{2z}\right) \exp\left[-\frac{2\xi_k}{(2\pi)^{(\mu_k+1)/2}} u^{(\mu_k-1)/2} \exp\left(-\frac{u}{2}\right)\right], & u \geq \mu_k - 1, \\ 0, & u < \mu_k - 1. \end{cases} \quad (23)$$

Найдем функцию распределения случайной величины H_k для $k > \nu_0$. Аналогично (21) имеем

$$F_{H_k}(u) = P\left[\sup_{\mathbf{I}_k \in \Lambda_k} N_k^2(\mathbf{I}_k) < u\right] \approx \begin{cases} \exp\left[-\frac{2\xi_k}{(2\pi)^{(\mu_k+1)/2}} u^{(\mu_k-1)/2} \exp\left(-\frac{u}{2}\right)\right], & u \geq \mu_k - 1, \\ 0, & u < \mu_k - 1. \end{cases} \quad (24)$$

Теперь из формул (18), (23), (24) можем получить следующее выражение для функций распределения случайных величин из множества $\{H_k\}_{k=1}^{\nu_{\max}}$:

$$F_{H_k}(u) \approx \begin{cases} \Phi\left(\frac{u-z^2}{2z}\right) \exp\left[-\frac{2\xi_k}{(2\pi)^{(\mu_k+1)/2}} u^{(\mu_k-1)/2} \exp\left(-\frac{u}{2}\right)\right], & k \leq \nu_0, \\ \exp\left[-\frac{2\xi_k}{(2\pi)^{(\mu_k+1)/2}} u^{(\mu_k-1)/2} \exp\left(-\frac{u}{2}\right)\right], & k > \nu_0 \end{cases} \quad (25)$$

при $u \geq \mu_k - 1$ и $F_{H_k}(u) \approx 0$ при $u < \mu_k - 1$.

В дальнейшем также потребуются функции плотности вероятности $W_{H_k}(u)$ случайных величин $\{H_k\}_{k=1}^{\nu_{\max}}$. Для их вычисления необходимо продифференцировать функцию распределения (25):

$$W_{H_k}(u) = dF_{H_k}(u)/du. \quad (26)$$

Явные выражения для функций $W_{H_k}(u)$ можно вычислить по правилам дифференцирования

сложных функций, однако эти выражения довольно громоздки и поэтому здесь не приводятся.

Теперь можно вычислить укороченную вероятность ошибки для алгоритмов (9)–(11) по формуле (12).

Применительно к алгоритму (9) формулу (12) можно переписать как

$$P_{\Pi} = 1 - P[L_{D1}(\nu_0; \kappa_1) > L_{D1}(\nu_0 - 1; \kappa_1), L_{D1}(\nu_0; \kappa_1) > L_{D1}(\nu_0 + 1; \kappa_1)]. \quad (27)$$

Из формул (8) и (27) для алгоритма (9) получим

$$p_{11} = 1 - P(H_{v_0} > 2\kappa_1) P(H_{v_0+1} < 2\kappa_1). \quad (28)$$

Используя функции распределения $\{H_k\}_{k=1}^{v_{\max}}$, можно записать формулу для вычисления вероятности (28):

$$p_{11} = 1 - [1 - F_{H_{v_0}}(2\kappa_1)] F_{H_{v_0+1}}(2\kappa_1). \quad (29)$$

При неограниченном увеличении v_{v_0} (14) из формулы (29) и асимптотической формулы (25) имеем

$$p_{11} \rightarrow 1 - F_{H_{v_0+1}}(2\kappa_1), \quad (30)$$

т.е. укороченная вероятность ошибки стремится к постоянной величине, не зависящей от ОСШ (14). Это предельное значение вероятности ошибки можно использовать для выбора значения κ_1 в (9). Таким образом, можно рекомендовать выбор κ_1 по значению допустимой вероятности ошибки p_{11} .

Как отмечено выше, укороченная вероятность ошибки является нижней границей полной вероятности ошибки. Из формулы (30) следует, что с ростом ОСШ (14) полная вероятность ошибки не стремится к нулю. Это является серьезным недостатком алгоритма (9).

Вычислим укороченную вероятность ошибки (12) для алгоритма со случайной штрафной функцией (10). Аналогично (28) получаем

$$p_{12} = 1 - P\left[H_{v_0} > \kappa_2 \max_{i \in \overline{1, v_{\max}}} H_i, \right. \\ \left. H_{v_0+1} < \kappa_2 \max_{i \in \overline{1, v_{\max}}} H_i \right]. \quad (31)$$

Для дальнейшего вычисления p_{12} сформулируем вспомогательное утверждение: пусть $\{A_i\}_{i=1}^M$ — попарно независимые случайные величины, $k = \overline{1, M}$, $h \in [0, 1]$, $B = \max_{i \in \overline{1, M}, i \neq k} A_i$. Тогда

$$P(A_k > h \max_{i \in \overline{1, M}} A_i, A_{k+1} < h \max_{i \in \overline{1, M}} A_i) = \\ = P(A_k > h A_{k+1}, A_k > h B) - \\ - P(A_k > A_{k+1}, A_{k+1} > h A_k, A_{k+1} > h B) - \\ - P(A_{k+1} > A_k, A_k > h A_{k+1}, A_k > h B). \quad (32)$$

При помощи (31) и (32) можно записать окончательную формулу для укороченной вероятности ошибки алгоритма со случайной штрафной функцией

$$p_{12} = 1 - \int_0^{\infty} W_{H_{v_0}}(x) F_{H_{\max}}\left(\frac{x}{\kappa_2}\right) \times \\ \times F_{H_{v_0+1}}\left(\frac{x}{\kappa_2}\right) dx + \int_0^{\infty} W_{H_{v_0+1}}(x) F_{H_{\max}}\left(\frac{x}{\kappa_2}\right) \times \\ \times \left[F_{H_{v_0}}\left(\frac{x}{\kappa_2}\right) - F_{H_{v_0}}(x) \right] dx + \int_0^{\infty} W_{H_{v_0}}(x) \times \\ \times F_{H_{\max}}\left(\frac{x}{\kappa_2}\right) \left[F_{H_{v_0+1}}\left(\frac{x}{\kappa_2}\right) - F_{H_{v_0+1}}(x) \right] dx. \quad (33)$$

Здесь $W_{H_i}(x)$, $F_{H_i}(x)$ — плотности вероятности (26) и функции распределения случайных величин H_i , а $W_{H_{\max}}(x)$, $F_{H_{\max}}(x)$ — аналогичные характеристики случайной величины $H_{\max} = \max_{\substack{i \in \overline{1, v_{\max}}, \\ i \neq v_0, i \neq v_0+1}} H_i$.

Учитывая независимость случайных величин $\{H_k\}_{k=1}^{v_{\max}}$, функцию распределения $F_{H_{\max}}(x)$ можно представить в виде

$$F_{H_{\max}}(x) = \prod_{\substack{i=1, i \neq v_0, \\ i \neq v_0+1}}^{v_{\max}} F_{H_i}(x).$$

Теперь найдем вероятность ошибки для алгоритма с обратной штрафной функцией (11):

$$p_{13} = 1 - P[L_B(v_0; n) > L_B(v_0 - 1; n), \\ L_B(v_0; n) > L_B(v_0 + 1; n)] = \\ = 1 - P\left[H_{v_0} > \left(\sqrt{\frac{v_0}{v_0 - 1}} - 1 \right) \sum_{i=1}^{v_0-1} H_i, \right. \\ \left. H_{v_0} + H_{v_0+1} < \left(\sqrt{\frac{v_0+1}{v_0}} - 1 \right) \sum_{i=1}^{v_0-1} H_i \right] = \\ = 1 - P\left[H_{v_0} > \left(\sqrt{\frac{v_0}{v_0 - 1}} - 1 \right) \sum_{i=1}^{v_0-1} H_i \right] + \\ + P\left[H_{v_0} + H_{v_0+1} < \left(\sqrt{\frac{v_0+1}{v_0}} - 1 \right) \sum_{i=1}^{v_0-1} H_i \right]. \quad (34)$$

Используя гауссовскую аппроксимацию функции распределения случайной величины $\sum_{i=1}^{v_0-1} H_i$ из (34), на основе (24), (25), (34) получаем

$$p_{13} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} W_{H_{v_0+1}}(y) \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-z/2)^2}{2}\right] \times \\ \times \left[\Phi\left(\frac{x/A - (v_0 - 1)z/2}{\sqrt{v_0 - 1}}\right) - \right. \\ \left. - \Phi\left(\frac{y/2zB - x - (v_0 - 1)z/2}{\sqrt{v_0 - 1}}\right) \right] dx dy. \quad (35)$$

Здесь $B = \sqrt{(v_0 + 1)/v_0} - 1$, $A = \sqrt{v_0}/(v_0 - 1) - 1$.

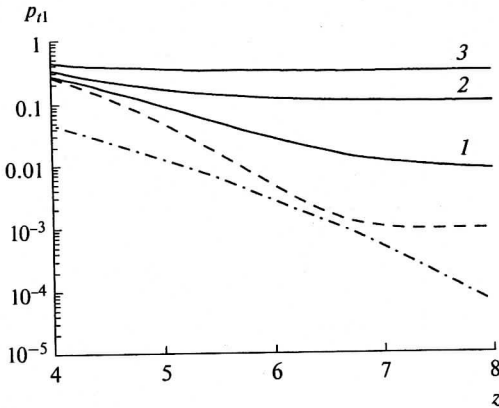


Рис. 1. Укороченная вероятность ошибки для алгоритма с линейной штрафной функцией.

В качестве примера рассмотрим случай, когда i -й сигнал $a_i s_i(t, l_i)$ в (1) представляет собой радиопульс с колоколообразной огибающей:

$$s_i(t, \varphi_i, \omega_i, \lambda_i) = a_i \exp\left[-(t - \lambda_i)^2 / \tau_i^2\right] \cos(\omega_i t - \varphi_i), \quad (36)$$

где для любого i неизвестна амплитуда a_i ; фаза $\varphi \in [-\pi, \pi]$, частота $\omega \in [\Omega_1, \Omega_2]$ и задержка $\lambda \in [T_1, T_2]$ — это возможно неизвестные неэнергетические параметры сигнала. Предполагается, что время наблюдения $[0, T]$ много больше длительности τ_i любого сигнала (36), $T_1 > 0$ и $T_2 < T$. При дальнейших вычислениях длительности всех сигналов для наглядности будем считать равными: $\tau_i = \tau$.

При помощи (22) найдем величины приведенных объемов априорных областей возможных значений неизвестных неэнергетических параметров для ситуаций, когда неизвестны только фазы: $\xi_1 = 2\pi$, $\mu_1 = 1$, когда неизвестны и фазы, и частоты: $\xi_2 = \pi(\Omega_2 - \Omega_1)$, $\mu_2 = 2$, и для случая, когда все три неэнергетических параметра сигнала: фаза, частота и задержка неизвестны: $\xi_3 = \pi(T_2 - T_1)(\Omega_2 - \Omega_1)$, $\mu_3 = 3$. При этом полагаем, что амплитуды сигналов во всех трех случаях также остаются неизвестными.

На рис. 1–3 приведены зависимости укороченной вероятности ошибки оценки числа сигналов вида (36) от ОСШ (14) для алгоритмов (9), (10), (11) соответственно. При этом предполагали, что все значения ОСШ равны $z_k = z$ для любого k . Кривые 1 рассчитаны для случая, когда неизвестны амплитуды и фазы сигналов и $\xi_1 = 2\pi$;

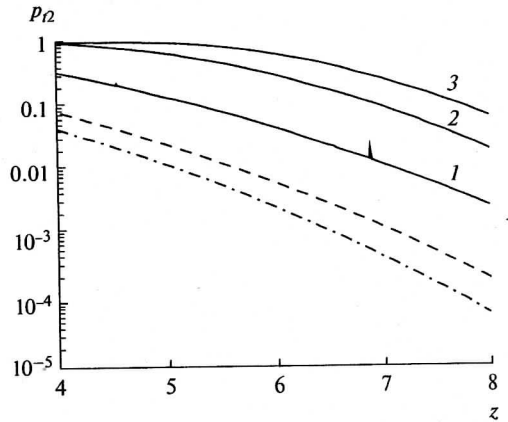


Рис. 2. Укороченная вероятность ошибки для алгоритма со случайной штрафной функцией.

кривые 2 — для неизвестных амплитуд, фаз и частот при $\xi_2 = 20\pi$; кривые 3 — для неизвестных амплитуд, фаз, частот и задержек сигналов при $\xi_2 = 50\pi$. Штрихпунктирными линиями показаны укороченные вероятности при оценке числа ортогональных сигналов с априори известными параметрами по методу максимального правдоподобия, заимствованные из [7].

На рис. 1 штриховой линией изображена укороченная вероятность ошибки оценки числа ортогональных сигналов с неизвестными амплитудами при помощи алгоритма (9). Эта вероятность рассчитана по результатам [7] при значении параметра $\kappa_1 = 5.5$, которое при достаточно больших ОСШ (14) обеспечивает соответствующую вероятность ошибки $p_{11} \approx 10^{-3}$. Кривые 1–3 также построены при $\kappa_1 = 5.5$.

На рис. 2 штриховой линией показана укороченная вероятность ошибки оценки числа ортогональных сигналов с неизвестными амплитудами при помощи алгоритма (10). Эта вероятность рассчитана по результатам [7] при значении параметра $\kappa_2^{\text{опт}} = 0.12$, которое обеспечивает минимальное значение вероятности ошибки p_{12} . Кривые 1–3 также построены при $\kappa_2^{\text{опт}} = 0.12$.

На рис. 3 штриховой линией показана укороченная вероятность ошибки оценки числа ортогональных сигналов с неизвестными амплитудами при помощи алгоритма (11). Эта вероятность рассчитана по результатам [7] при значении параметра $n^{\text{опт}} = 10/3$, которое обеспечивает минимальное значение вероятности ошибки p_{13} . Кривые 1–3 также построены при $n^{\text{опт}} = 10/3$.

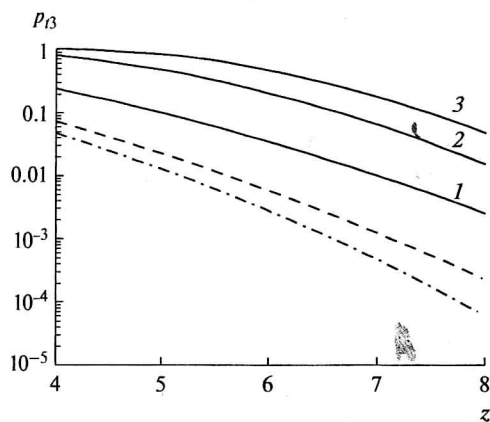


Рис. 3. Укороченная вероятность ошибки для алгоритма с обратной штрафной функцией.

Сопоставление кривых 1–3 и штриховых линий на рис. 1–3 показывает ухудшение качества функционирования алгоритмов оценки числа сигналов вследствие наличия неизвестных неэнергетических параметров. Очевидно, что увеличение приведенного объема области возможных значений неизвестных неэнергетических параметров и числа этих параметров приводит к заметному снижению качества функционирования алгоритмов (9), (10), (11) оценки числа сигналов.

Предложенная укороченная вероятность ошибки оценки числа сигналов позволяет относительно просто охарактеризовать эффективность различных алгоритмов оценки числа сигналов, является нижней границей вероятности ошибки и стремится к ней с ростом ОСШ (14). Полученные результаты анализа ряда алгоритмов оценки числа сигналов с неизвестными параметрами дают возможность определить потери в качестве функционирования алгоритмов в зависимости от числа и характера неизвестных параметров. Это позволяет сделать обоснованный выбор требуемого алгоритма оценки числа сигналов с неизвестными параметрами. Показано, что с ро-

стом приведенного объема априорной области возможных значений неизвестных неэнергетических параметров и числа этих параметров снижается качество функционирования алгоритмов оценки числа сигналов.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-49-00079).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Akaike H. // IEEE Trans. 1974. V. AC-19. № 6. P. 716.
2. Wax M., Kailath M. // IEEE Trans. 1985. V. ASSP-33. № 2. P. 387.
3. Волков Л.И., Немировский М.С., Шинаков Ю.С. Системы цифровой радиосвязи. М.: Эко-Трендз, 2005.
4. Флакман А.Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45. № 12. С. 1064.
5. Манелис В.Б. // Радиотехника. 2007. № 4. С. 16.
6. El-Beheery I.N., Macphie R.H. // IEEE Trans. 1978. V. AP-26. № 2. P. 294.
7. Трифонов А.П., Харин А.В. // Нелинейный мир. 2013. Т. 11. № 12. С. 853.
8. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
9. Trifonov A.P., Kharin A.V., Chernoyarov O.V., Kalashnikov K.S. // Int. J. Commun. Antenna and Propagation. 2015. V. 5. № 6. P. 367.
10. Трифонов А.П., Харин А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58. № 1. С. 62.
11. Трифонов А.П., Харин А.В. // Известия вузов. Радиоэлектроника. 2015. Т. 58. № 8. С. 33.
12. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
13. Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др. Теория обнаружения сигналов / Под ред. Бакута П.А. М.: Радио и связь, 1984.
14. Тихонов В.И., Шахтарин Б.И., Сизых В.В. Случайные процессы. Примеры и задачи. Т. 5. Оценка сигналов, их параметров и спектров. Основы теории информации. М.: Горячая линия-Телеком, 2009.
15. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.