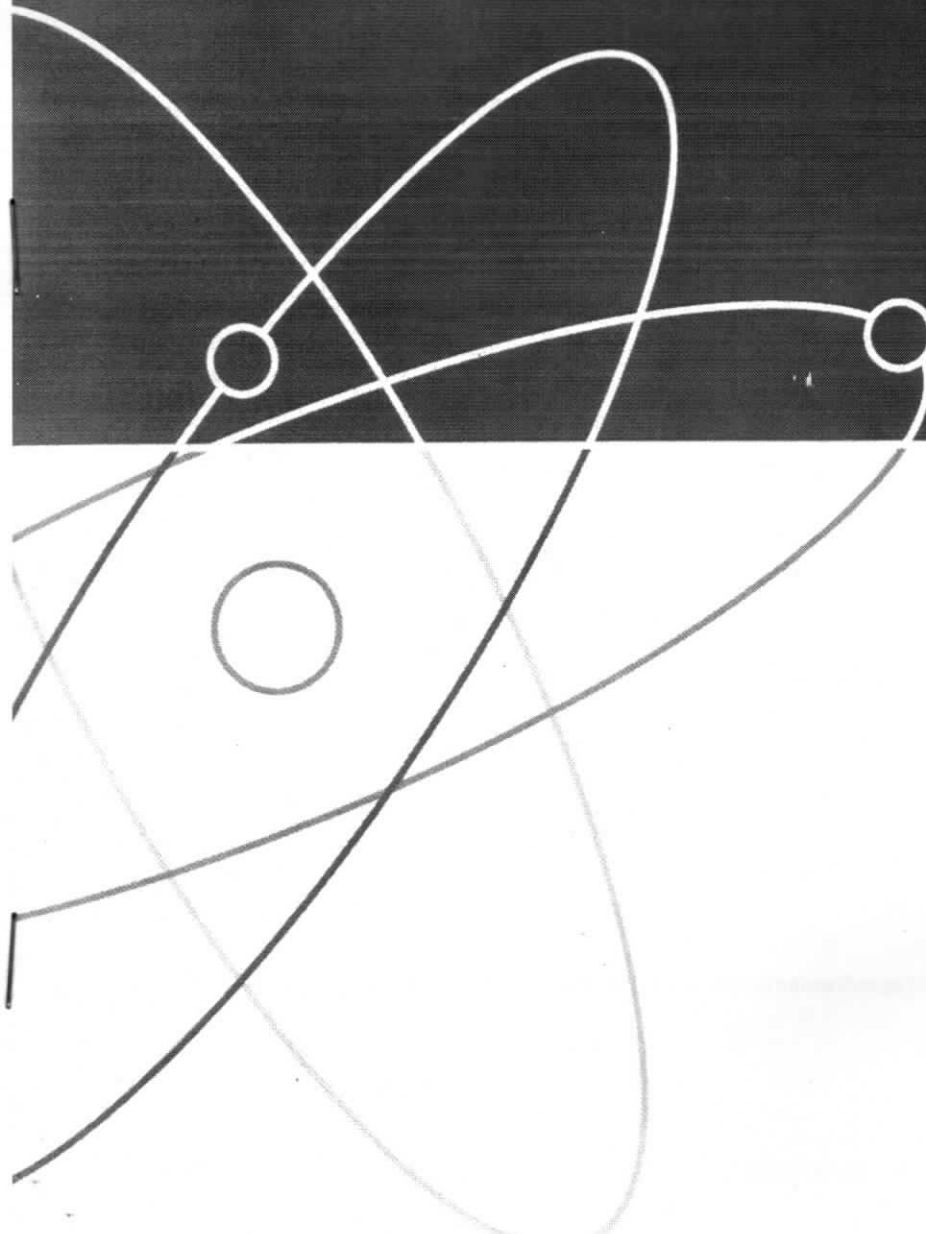


340
Том 59, № 10
октябрь 2016

340
ISSN 0021-3470

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ



ИЗДАНИЕ
НАЦИОНАЛЬНОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ»

УДК 691.396

ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ ОПТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ ИНТЕНСИВНОСТИ НЕИЗВЕСТНОЙ ВЫСОТЫ*

ТРИФОНОВ А. П., МИЛОГОРОДСКИЙ А. А.

*Воронежский государственный университет,
Россия, Воронеж, 394006, Университетская пл., д. 1*

Аннотация. Выполнены синтез и анализ квазиравдоподобного и максимально правдоподобного алгоритмов оценки длительности. Найдены потери в точности квазиравдоподобной оценки вследствие априорного незнания интенсивности импульса. Установлено, что точность оценки максимального правдоподобия длительности асимптотически инвариантна к наличию априорной информации об интенсивности импульса.

Ключевые слова: квазиравдоподобия оценка; оценка максимального правдоподобия; рассеяния оценок; априорная параметрическая неопределенность

Модель оптического импульса с прямоугольным профилем интенсивности используется во многих приложениях оптической связи и локации [1–6]. Рассмотрим оценку неизвестной длительности оптического импульса с прямоугольным профилем интенсивности на фоне шума. Будем считать, что на интервале времени $[0, T]$ наблюдается реализация пуассоновского процесса $\lambda(t)$ с интенсивностью

$$\lambda(t) = \beta_0 s(t) + \alpha, \quad (1)$$

$$s(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau_0, \\ 0, & t < 0, t > \tau_0, \end{cases}$$

где α — априори известная интенсивность оптического фона, β_0 — неизвестная интенсивность импульса, τ_0 — неизвестная длительность импульса, которая может принимать зна-

чения из интервала $[T_1, T_2]$, причем $0 < T_1 < T_2 < T$.

Если известна интенсивность β_0 , то для оценки длительности импульса τ_0 возможно использовать метод максимального правдоподобия [7]. Согласно этому методу, оценка длительности определяется как положение наибольшего максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОР).

Выражение для логарифма ФОР [8] имеет вид

$$L_0(\tau) = \pi_\tau \ln(1 + \beta_0 / \alpha) - \beta_0 \tau, \quad (2)$$

где $\pi_\tau = \int_0^\tau d\pi(t)$. Соответственно, оценка максимального правдоподобия (ОМП) определяется как:

$$\tau_m = \operatorname{argsup} L_0(\tau), \tau \in [T_1, T_2]. \quad (3)$$

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10022).

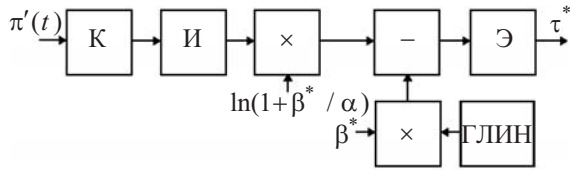


Рис. 1

Однако, при неизвестных как длительности τ_0 , так и интенсивности импульса β_0 логарифм ФОП зависит от двух неизвестных параметров

$$L(\tau, \beta) = \pi_\tau \ln(1 + \beta / \alpha) - \beta\tau. \quad (4)$$

При подстановке в это выражение вместо неизвестной интенсивности импульса β некоторых ее значений получаем ряд алгоритмов оценки длительности оптического импульса (возможно неоптимальных). Подставляемые значения интенсивности импульса могут быть фиксированными или определяются по реализации наблюдаемых данных. Получаемые в результате алгоритмы оценки отличаются своей эффективностью и степенью простоты аппаратной или программной реализации.

Одним из способов преодоления априорной параметрической неопределенности относительно интенсивности импульса является применение квазиравдоподобной оценки (КПО) [9]. Для получения КПО необходимо заменить значение неизвестного неинформативного параметра на некоторую предполагаемую величину.

Поскольку априори интенсивность β_0 неизвестна, используем в (2) вместо β_0 его предполагаемое значение β^* . Тогда, вместо логарифма ФОП (2) формируется решающая статистика

$$L^*(\tau) = \pi_\tau \ln(1 + \beta^* / \alpha) - \beta^* \tau. \quad (5)$$

Оценка, определяемая по положению наибольшего максимума решающей статистики (5) является КПО [9]:

$$\tau^* = \operatorname{argsup} L^*(\tau), \quad \tau \in [T_1, T_2]. \quad (6)$$

Очевидно, что при $\beta^* = \beta_0$ КПО (6) совпадает с ОМП (3).

Квазиравдоподобную оценку длительности возможно получить с помощью устройства, блок-схема которого показана на рис. 1. Последовательность коротких импульсов $\pi'(t)$ поступает на измеритель, на входе которого расположен ключ К, открывающийся на время анализа $[0, T]$. Сигнал с выхода ключа поступает на вход интегратора И, где интегрируется в интервале от 0 до $t \in [0, T]$. Сигнал с выхода интегратора поступает на вход перемножителя, на второй вход которого подается величина, пропорциональная $\ln(1 + \beta^* / \alpha)$. Сигнал с генератора линейно изменяющегося напряжения (ГЛИН), пропорциональный t , поступает на перемножитель, на второй вход которого подается предполагаемое значение интенсивности сигнала. Далее сигналы с перемножителей поступают на вычитающее устройство. В результате, на выходе вычитающего устройства формируется решающая статистика $L^*(t)$ (5) как функция текущего времени, которая подается на экстрематор Э. Он определяет положение наибольшего максимума решающей статистики при $t \in [T_1, T_2]$, т.е. момент времени $\hat{t} = \tau^*$ (6) при котором решающая статистика максимальна.

Найдем характеристики КПО (6). Для этого представим (5) в виде суммы [7] сигнальной (регулярной) и шумовой (помеховой) составляющих

$$L(\tau) = S(\tau) + N(\tau),$$

где $S(\tau) = \langle L(\tau) \rangle$, $N(\tau) = L(\tau) - \langle L(\tau) \rangle$.

Выполняя усреднение по реализациям наблюдаемого процесса $\pi(t)$ для сигнальной функции получаем выражение

$$S(\tau) = \beta_0 \min(\tau, \tau_0) \ln(1 + \beta^* / \alpha) -$$

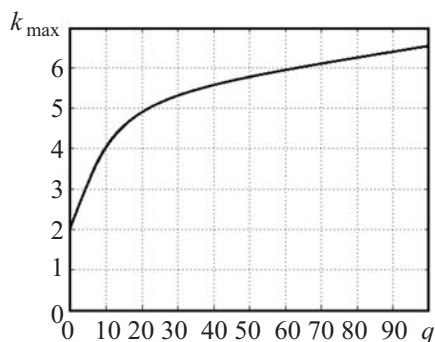


Рис. 2

$$-(\beta^* - \alpha \ln(1 + \beta^* / \alpha))\tau. \quad (7)$$

Аналогично для шумовой функции имеем

$$N(\tau) = (\pi_\tau - \beta_0 \min(\tau, \tau_0) - \alpha\tau) \ln(1 + \beta^* / \alpha). \quad (8)$$

Рассмотрим основные свойства сигнальной функции (7). Для этого найдем производные (7) по τ справа и слева от истинного значения длительности τ_0 . Получаем, что сигнальная функция достигает максимума в точке τ_0 , если

$$a_1 = \left. \frac{dS(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_0-0} = \alpha [(1+q) \ln(1+kq) - kq] > 0, \quad (9)$$

$$a_2 = - \left. \frac{dS(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_0+0} = \alpha [kq - \ln(1+kq)] > 0. \quad (10)$$

Здесь

$$q = \beta_0 / \alpha \quad (11)$$

— отношение сигнал-фон, а $k = \beta^* / \beta_0$ характеризует отличие предполагаемой интенсивности импульса, используемой для синтеза КПО (6), от истинного значения интенсивности принимаемого импульса (1).

Найдем условие состоятельности оценки (6). Для того чтобы оценка была состоятельна,

необходимо чтобы сигнальная функция (7) достигала максимума в точке τ_0 [7], т.е. выполнялись неравенства (9), (10). Анализ этих неравенств показывает, что они выполняются, если для некоторого q имеем

$$0 \leq k \leq k_{\max}(q). \quad (12)$$

Зависимость $k_{\max}(q)$ показана на рис. 2. Видно, что интервал допустимых значений величины k (12) возрастает с увеличением отношения сигнал-фон q (11). Например при $q = 10$, $k_{\max} = 4,2$.

Используя выражение для шумовой функции (8), найдем корреляционную функцию шумовой функции

$$\begin{aligned} K(\tau_1, \tau_2) &= \langle N(\tau_1)N(\tau_2) \rangle = \\ &= \langle [(\pi_{\tau_1} - \langle \pi_{\tau_1} \rangle)(\pi_{\tau_2} - \langle \pi_{\tau_2} \rangle)] \ln^2(1 + \beta^* / \alpha) = \\ &= (\beta_0 \min(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \alpha \min(\tau_1, \tau_2)) \times \\ &\quad \times \ln^2(1 + \beta^* / \alpha) = \\ &= \alpha (q \min(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \min(\tau_1, \tau_2)) \ln^2(1 + kq). \end{aligned} \quad (13)$$

Из выражения для корреляционной функции (13) получаем значение дисперсии решающей статистики (5)

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) &= K(\tau, \tau) = \\ &= (\beta_0 \min(\tau_0, \tau) + \alpha\tau) \ln^2(1 + \beta^* / \alpha) = \\ &= \mu(\tau) \ln^2(1 + \beta^* / \alpha), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\mu(\tau) = \langle \pi_\tau \rangle = \beta_0 \min(\tau, \tau_0) + \alpha\tau \quad (15)$$

— среднее число точек наблюдаемого пуассоновского процесса на интервале $[0, \tau]$.

Введем в рассмотрение отношение сигнал-шум (ОСШ) на выходе устройства обработки [7]:

$$z^2 = \frac{S^2(\tau_0)}{\langle N^2(\tau_0) \rangle} = \frac{\mu_s [(1+q) \ln(1+kq) - kq]^2}{q(1+q) \ln^2(1+kq)}, \quad (16)$$

где $\mu_s = \beta_0 \tau_0$ — среднее число сигнальных точек на интервале длительности импульса.

В дальнейшем ОСШ (16) предполагается достаточно большим, так что оценка обладает высокой апостериорной точностью [7]. Отметим, что при малых значениях отношения сигнал–фон (11) ($q \rightarrow 0$) выражение для ОСШ (16) принимает вид $z^2 = \mu_s q (1 - k/2)^2$, т. е. существенно зависит от параметра k . Если же отношение сигнал–фон велико ($q \rightarrow \infty$), то ОСШ стремится к своему предельному значению

$$z^2 = \mu_s. \quad (17)$$

Следовательно, даже при отсутствии фона, ОСШ имеет не бесконечное значение, что объясняется случайным характером оптического импульса. Кроме того, согласно (17) предельное значение ОСШ не зависит от большого значения отношения сигнал–фон q и от параметра k . При этом значение k должно обеспечивать выполнение условий (9), (10).

Для нахождения характеристик КПО (6) исследуем статистические свойства решающей статистики (5). Для этого получим выражения для коэффициентов асимметрии и эксцесса решающей статистики.

Коэффициент асимметрии по определению имеет вид [10]:

$$\gamma_1 = \mu_3 / \sigma^3, \quad (18)$$

где

$$\mu_3 = \langle (L - \langle L \rangle)^3 \rangle = \mu(\tau) \ln^3(1 + \beta^* / \alpha). \quad (19)$$

Подставляя (14), (19) в (18), получим выражение для коэффициента асимметрии:

$$\gamma_1 = 1 / \sqrt{\mu(\tau)}. \quad (20)$$

Коэффициент эксцесса по определению имеет вид [10]:

$$\gamma_2 = \mu_4 / \sigma^4 - 3, \quad (21)$$

где

$$\mu_4 = \langle (L - \langle L \rangle)^4 \rangle = (\mu(\tau) + 3\mu^2(\tau)) \ln^4(1 + \beta^* / \alpha). \quad (22)$$

Подставляя (14), (22) в (21), получим выражение для коэффициента эксцесса

$$\gamma_2 = 1 / \mu(\tau). \quad (23)$$

Решающую статистику возможно считать асимптотически гауссовской, если γ_1, γ_2 весьма малы. При высокой апостериорной точности характеристики КПО (6) определяются поведением решающей статистики в окрестности τ_0 . Поэтому судить о гауссовском характере решающей статистики возможно по величине

$$\mu_0 = \mu(\tau_0) = (\alpha + \beta_0) \tau_0. \quad (24)$$

Если $\mu_0 \gg 1$, то в окрестности точки τ_0 решающая статистика приближенно гауссовская.

Установим марковские свойства решающей статистики (5). Гауссовский процесс является марковским [11] тогда и только тогда, когда его коэффициент корреляции $R(\tau_1, \tau_3)$ удовлетворяет условию

$$R(\tau_1, \tau_3) = R(\tau_1, \tau_2) R(\tau_2, \tau_3), \quad (25)$$

где $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$.

По определению коэффициент корреляции имеет вид

$$R(\tau_1, \tau_3) = K(\tau_1, \tau_3) / \sigma(\tau_1) \sigma(\tau_3), \quad (26)$$

так что согласно (13), (14) при $\tau_2 > \tau_1$

$$R(\tau_1, \tau_2) = \sqrt{\mu(\tau_1) / \mu(\tau_2)}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (25) находим, что условие (25) выполняется. Следовательно, решаю-

шую статистику (5) при больших значениях μ_0 возможно считать асимптотическим гауссовским марковским процессом.

Таким образом, установлено, что решающая статистика (5) при больших μ_0 может быть аппроксимирована гауссовским марковским процессом. Следовательно, характеристики оценки, т.е. характеристики положения наибольшего максимума этого гауссовского марковского процесса возможно найти используя решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова [12]. Для этого найдем коэффициенты сноса и диффузии решающей статистики (5), которые для гауссовского процесса имеют вид [6]:

$$A = \left. \frac{dS(\tau_1)}{d\tau_1} \right|_{\tau_1=\tau+0} + \frac{[L-S(\tau)]}{\sigma^2(\tau)} \left. \frac{\partial K(\tau, \tau_1)}{\partial \tau_1} \right|_{\tau_1=\tau+0},$$

$$B = \left. \frac{d\sigma^2(\tau_1)}{d\tau_1} \right|_{\tau_1=\tau+0} - 2 \left. \frac{\partial K(\tau, \tau_1)}{\partial \tau_1} \right|_{\tau_1=\tau+0}. \quad (28)$$

Подставляя (5), (7), (13), (14) в (28) и выполняя дифференцирование, получаем выражения для коэффициентов сноса и диффузии:

$$A = \begin{cases} a_1, & \tau < \tau_0, \\ -a_2, & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (29)$$

$$B = \begin{cases} \alpha(1+q) \ln^2(1+kq) = b_1, & \tau < \tau_0, \\ \alpha \ln^2(1+kq) = b_2, & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (30)$$

В [6] в результате решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова найдены значения смещения и рассеяния оценки в общем виде:

$$b = \langle \tau^* - \tau_0 \rangle = \Delta \frac{z_1^2 R(R+2) - z_2^2 (2R+1)}{z_1^2 z_2^2 (R+1)^2}, \quad (31)$$

$$V = \langle (\tau^* - \tau_0)^2 \rangle = \quad (32)$$

$$= 2\Delta^2 \frac{z_1^4 R(2R^2 + 6R + 5) + z_2^4 (5R^2 + 6R + 2)}{z_1^4 z_2^4 (R+1)^3},$$

где $\Delta = T_2 - T_1$, $z_1^2 = 2a_1^2 \Delta / b_1$, $z_2^2 = 2a_2^2 \Delta / b_2$, $R = a_1 b_2 / a_2 b_1$.

Используя обозначения (29), (30) находим, что выражения для смещения (31) и рассеяния (32) оценки принимают вид

$$b(k) = \frac{\ln^2(1+kq)}{2\alpha(R+1)^2} \left[\frac{R(R+2)}{\eta_2^2} - \frac{2R+1}{\eta_1^2} \right], \quad (33)$$

$$V(k) = \frac{\ln^4(1+kq)}{2\alpha^2(R+1)^3} \times \left[\frac{R(2R^2 + 6R + 5)}{\eta_2^4} + \frac{5R^2 + 6R + 2}{\eta_1^4} \right], \quad (34)$$

где

$$R = \frac{(1+q) \ln(1+kq) - kq}{(1+q)(kq - \ln(1+kq))},$$

$$\eta_1 = \frac{(1+q) \ln(1+kq) - kq}{\sqrt{1+q}},$$

$$\eta_2 = kq - \ln(1+kq).$$

Выражения (33), (34) получены в [12] в предположении, что оценка состоятельна, т.е. с ростом ее точности она сходится к истинному значению параметра. Это имеет место при выполнении (9), (10).

Рассмотрим смещение и рассеяние оценки при $\beta^* = \beta_0$, когда КПО переходит в ОМП. Полагая в (33) и (34) $k=1$ получаем выражения для смещения и рассеяния ОМП (3) длительности импульса с априори известной высотой прямоугольного профиля интенсивности (1):

$$b_0 = b \quad (k=1), \quad (35)$$

$$V_0 = V \quad (k=1). \quad (36)$$

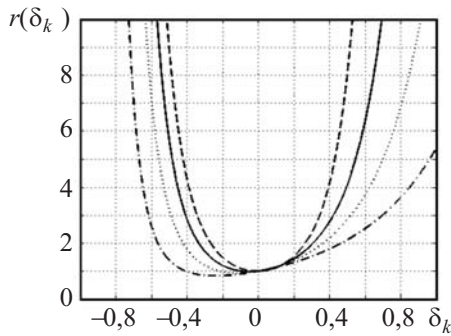


Рис. 3

Для того чтобы охарактеризовать влияние отклонения предполагаемого значения интенсивности импульса от истинного на точность КПО введем в рассмотрение отношение рассеяний КПО и ОМП:

$$r(\delta_k) = V(k) / V_0, \quad (37)$$

где $V(k)$ определяется из (34), V_0 из (36), а $\delta_k = (\beta^* - \beta_0) / \beta_0 = k - 1$ — относительное отклонение предполагаемого значения интенсивности импульса от истинного. На рис. 3 приведено отношение (37). Штриховой линией нанесена зависимость (37) при $q = 0,1$, сплошной при $q = 1$, пунктирной при $q = 3$ и штрихпунктирной при $q = 10$.

Из кривых рис. 3 следует, что априорное незнание интенсивности сигнала может привести к существенному снижению точности КПО по сравнению с точностью ОМП. При этом с ростом отношения сигнал–фон q влияние априорного незнания интенсивности импульса на точность КПО несколько снижается.

Таким образом, установлено, что априорное незнание интенсивности импульса β может привести к существенному проигрышу в точности оценки длительности. Уменьшить этот проигрыш возможно, если использовать метод максимального правдоподобия.

Согласно этому методу [7] неизвестную интенсивность импульса в (4) необходимо заменить на ее ОМП $\hat{\beta}$. Это равносильно макси-

мизации логарифма ФОП (4) по интенсивности оптического импульса.

Максимизацию логарифма ФОП (4) по переменной β выполним аналитически. Для этого, решая уравнение

$$[\partial L(\tau, \beta) / \partial \beta]_{\hat{\beta}} = 0,$$

получим оценку интенсивности импульса, которая имеет вид

$$\hat{\beta}(\tau) = \pi_{\tau} / \tau - \alpha. \quad (38)$$

Подставляя (38) в (4), находим

$$L(\tau) = \sup_{\beta} L(\beta, \tau) = \pi_{\tau} [\ln[\pi_{\tau} / \alpha \tau] - 1] + \alpha \tau. \quad (39)$$

Следовательно, ОМП длительности оптического импульса при его неизвестной интенсивности имеет вид

$$\tau_m = \operatorname{argsup} L(\tau), \quad \tau \in [T_1, T_2]. \quad (40)$$

Блок-схема измерителя, реализующего ОМП длительности импульса с неизвестной интенсивностью, представлена на рис. 4. Здесь \ln — нелинейный преобразователь с логарифмической характеристикой $y = \ln x$, e — основание натуральных логарифмов. Остальные обозначения соответствуют рис. 1.

Последовательность коротких импульсов $\pi'(t)$ поступает на измеритель, на входе которого расположен ключ, открывающийся на время анализа $[0, T]$. Сигнал с выхода ключа поступает на вход интегратора, где интегрируется в интервале от 0 до $t \in [0, T]$. Далее сигнал с выхода интегратора поступает на вход делителя, на второй вход которого с выхода перемножителя подается произведение величины, пропорциональной αt и основания натурального логарифма e . Сигнал с выхода делителя подается на вход нелинейного преобразователя. Сигнал с выхода нелинейного преобразователя поступает на сумматор, на второй вход которого с выхода перемножителя подается величина, пропорциональная αt .

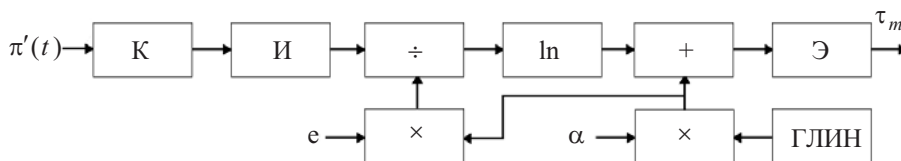


Рис. 4

В результате, на выходе сумматора получается решающая статистика $L(t)$ (39), которая подается на экстрематор Э. Он определяет положение наибольшего максимума решающей статистики при $t \in [T_1, T_2]$ и момент $\hat{t} = \tau_m$ (40) при котором решающая статистика максимальна.

Обозначим

$$L_1(\tau) = \pi_\tau / \alpha\tau. \quad (41)$$

Представим вспомогательную функцию (41) в виде суммы регулярной и шумовой составляющих $L_1(\tau) = S_1(\tau) + N_1(\tau)$. Здесь, регулярная и шумовая составляющие имеют вид

$$S_1(\tau) = \langle \pi_\tau \rangle / \alpha\tau, \quad (42)$$

$$N_1(\tau) = [\pi_\tau - \langle \pi_\tau \rangle] / \alpha\tau. \quad (43)$$

Выразив логарифм ФОП (39) через вспомогательную функцию (41) получаем

$$\begin{aligned} L(\tau) &= \alpha\tau L_1(\tau) [\ln[L_1(\tau)] - 1] + \alpha\tau = \\ &= \alpha\tau [L_1(\tau) [\ln[L_1(\tau)] - 1] + 1] = \\ &= \alpha\tau [(S_1(\tau) + N_1(\tau)) [\ln[S_1(\tau) + N_1(\tau)] - 1] + 1] = \\ &= \alpha\tau [S_1(\tau) [1 + \delta(\tau)] [\ln[S_1(\tau)] + \\ &\quad + \ln[1 + \delta(\tau)] - 1] + 1], \end{aligned}$$

где

$$\delta(\tau) = N_1(\tau) / S_1(\tau). \quad (44)$$

Подставив в (44) выражения (42) и (43) получим явный вид процесса (44):

$$\delta(\tau) = \pi_\tau / \mu(\tau) - 1 \quad (45)$$

и его математическое ожидание $\langle \delta(\tau) \rangle = 0$. Найдем математическое ожидание квадрата случайного процесса (45): $\langle \delta^2(\tau) \rangle = 1 / \mu(\tau)$. Следовательно, функцию (45) возможно считать малой, если $\mu(\tau)$ (15) велико. При высокой апостериорной точности характеристики ОМП (41) определяются поведением логарифма ФОП (39) в окрестности τ_0 . Поэтому, если $\mu_0 \gg 1$ (24), то функция (45) является малой.

Разложим логарифм ФОП в ряд по степеням (45) и удержим только члены первого порядка малости. Получим

$$\begin{aligned} L(\tau) &= \alpha\tau [S_1(\tau) \ln[S_1(\tau)] - S_1(\tau) + 1] + \\ &\quad + \alpha\tau \delta(\tau) S_1(\tau) \ln[S_1(\tau)]. \end{aligned} \quad (46)$$

Представим далее логарифм ФОП (46) в виде суммы сигнальной и шумовой функции $L(\tau) = S_0(\tau) + N_0(\tau)$, где сигнальная функция

$$S_0(\tau) = \langle L(\tau) \rangle = \alpha\tau [S_1(\tau) [\ln[S_1(\tau)] - 1] + 1], \quad (47)$$

а шумовая

$$N_0(\tau) = \alpha\tau \delta(\tau) S_1(\tau) \ln[S_1(\tau)]. \quad (48)$$

Подставим (42) и (45) в (47), (48) и получим окончательные выражения для сигнальной и шумовой функций

$$S_0(\tau) = \mu(\tau) [\ln[\mu(\tau) / \alpha\tau] - 1] + \alpha\tau, \quad (49)$$

$$N_0(\tau) = [\pi_\tau - \mu(\tau)] \ln[\mu(\tau) / \alpha\tau]. \quad (50)$$

Найдем условие состоятельности оценки (40). Для того чтобы оценка была состоятельной, сигнальная функция (49) должна достигать максимума в точке τ_0 [7]. Для этого необходимо, чтобы

$$a_{01} = \left. \frac{dS_0(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_0-0} = \alpha [(1+q) \ln(1+q) - q] > 0,$$

$$a_{02} = - \left. \frac{dS_0(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_0+0} = \alpha [q - \ln(1+q)] > 0.$$

Нетрудно убедиться, что эти условия выполняются при любых значениях $q > 0$.

Используя выражение для шумовой функции (50), найдем ее корреляционную функцию

$$\begin{aligned} K_0(\tau_1, \tau_2) &= \langle N_0(\tau_1), N_0(\tau_2) \rangle = \\ &= \ln \left[\frac{\mu(\tau_1)}{\alpha \tau_1} \right] \ln \left[\frac{\mu(\tau_2)}{\alpha \tau_2} \right] \times \\ &\times [\beta_0 \min(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \alpha \min(\tau_1, \tau_2)]. \end{aligned} \quad (51)$$

Соответственно, дисперсия логарифма ФОП имеет вид

$$\langle N_0^2(\tau) \rangle = \sigma_0^2(\tau) = \mu(\tau) \ln^2 [\mu(\tau) / \alpha \tau]. \quad (52)$$

Введем в рассмотрение ОСШ на выходе приемника максимального правдоподобия [7]

$$z_0^2 = \frac{S_0^2(\tau_0)}{\langle N_0^2(\tau_0) \rangle} = \frac{\mu_s [(1+q) \ln(1+q) - q]^2}{q(1+q) \ln^2(1+q)}, \quad (53)$$

где μ_s определено в (17). Отметим, что ОСШ (16) на выходе квазиравдоподобного измерителя (рис. 1) совпадает с ОСШ (53) на выходе максимально правдоподобного измерителя (рис. 4) при $k = 1$.

Для нахождения характеристик ОМП (40) исследуем статистические свойства логарифма ФОП (46). С этой целью, получим выражения для коэффициентов асимметрии и эксцесса логарифма ФОП. Коэффициент асимметрии по определению имеет вид (18), где теперь

$$\mu_3 = \langle (L - \langle L \rangle)^3 \rangle = \mu(\tau) \ln^3 [\mu(\tau) / \alpha \tau]. \quad (54)$$

Подставляя (52), (54) в (18) получим выражение (20) для коэффициента асимметрии,

найденное ранее. Коэффициент эксцесса по определению имеет вид (21), где теперь

$$\mu_4 = \langle (L - \langle L \rangle)^4 \rangle = (\mu(\tau) + 3\mu^3(\tau)) \ln[\mu(\tau) / \alpha \tau]. \quad (55)$$

Подставляя (52), (55) в (21) получим выражение (23) для коэффициента эксцесса, найденное ранее. Логарифм ФОП (46) возможно считать гауссовским, если γ_1, γ_2 малы. Это имеет место, когда в (24) $\mu_0 \gg 1$.

Установим марковские свойства логарифма ФОП (46). Гауссовский процесс является марковским [11] тогда и только тогда, когда его коэффициент корреляции $R(\tau_1, \tau_2)$ удовлетворяет условию (27). По определению коэффициент корреляции имеет вид (26).

Подставив в числитель (26) корреляционную функцию (51), а в знаменатель среднеквадратические отклонения из (52) для каждого значения аргумента, получим коэффициенты корреляции, которые совпадают с (27). Тогда условие (25) выполняется. Следовательно, (46) при больших значениях μ_0 возможно считать асимптотическим гауссовским марковским процессом.

Таким образом установлено, что логарифм ФОП (46) при больших $\mu(\tau)$ представляет собой асимптотически гауссовский марковский процесс. Следовательно, характеристики оценки, т.е. характеристики положения наибольшего максимума этого гауссовского марковского процесса, возможно найти используя решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова [12]. Коэффициенты сноса и диффузии логарифма ФОП (46) рассчитываются по (28).

В условиях высокой апостериорной точности ОМП τ_m для расчета характеристик алгоритма максимального правдоподобия необходимо обеспечить высокую точность аппроксимации характеристик логарифма ФОП в малой окрестности истинного значения параметра τ_0 . При этом точность аппроксимации характеристик выходной статистики за предела-

ми этой окрестности не играет существенной роли.

На основе (49), (51) с помощью (28) в малой окрестности истинного значения длительности импульса τ_0 найдены коэффициенты сноса и диффузии логарифма ФОР (46) при неизвестной интенсивности импульса. Найденные значения коэффициентов сноса и диффузии совпадают с (29) и (30) соответственно при $k=1$. Таким образом, коэффициенты сноса и диффузии логарифма ФОР асимптотически одинаковы при априори известной интенсивности импульса и при априори неизвестной интенсивности импульса. Поэтому, выражения для смещения и рассеяния ОР при априори известной и при априори неизвестной величине интенсивности импульса асимптотически совпадают для достаточно больших ОСШ (53) и определяются формулами (35), (36).

Полученные результаты позволяют сделать обоснованный выбор между измерителями (рис. 1, 4) в зависимости от имеющейся априорной информации, а также в зависимости от требований, предъявляемых к точности оценок и к степени простоты технической реализации измерителя. Например при $q=0,1$ и $\delta_k=0,4$ рассеяние КПО, получаемой с помощью измерителя (рис. 1) в 4 раза больше, чем рассеяние ОР, получаемой с помощью измерителя (рис. 4).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шереметьев А. Г. Статистическая теория лазерной связи / А. Г. Шереметьев. — М. : Связь, 1971. — 264 с.

2. Волохатюк В. А. Вопросы оптической локации / В. А. Волохатюк, В. М. Кочетков, Р. Р. Красовский. — М. : Сов. радио, 1971. — 256 с.

3. Гальярди Р. М. Оптическая связь / Р. М. Гальярди, Ш. Карп. — М. : Связь, 1978. — 424 с.

4. Воробьев В. И. Оценка координат источника оптического излучения с прямоугольным профилем интенсивности / В. И. Воробьев // Оптико-механическая промышленность. — 1978. — № 4. — С. 14–16.

5. Воробьев В. И. Оптическая локация для радиоинженеров / В. И. Воробьев. — М. : Радио и связь, 1983. — 176 с.

6. Овчинникова Т. М. Обнаружение и оценка момента изменения неизвестной интенсивности пуассоновского потока. I / Т. М. Овчинникова, А. П. Трифонов // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 1. — С. 66–76. — Режим доступа : <http://mi.mathnet.ru/at24>.

7. Куликов Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М. : Сов. радио, 1978. — 296 с.

8. Большаков И. А. Прикладная теория случайных потоков / И. А. Большаков, В. С. Ракошиц. — М. : Сов. радио, 1978. — 248 с.

9. Мудров В. И. Методы обработки измерений. Квазиравноподобные оценки / В. И. Мудров, В. Л. Кушко. — М. : Радио и связь, 1983. — 304 с.

10. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике / Р. Л. Стратонович. — М. : Сов. радио, 1961. — 550 с.

11. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов / Ю. Г. Сосулин. — М. : Сов. радио, 1978. — 320 с.

12. Трифонов А. П. Статистические свойства высоты и положения абсолютного максимума марковского случайного процесса типа Башелье / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, М. Б. Беспалова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 4. — С. 35–43. — Режим доступа : http://www.vestnik.vsu.ru/program/view/view.asp?sec=hysmath&year=2014&num=04&f_name=2014-04-07.

Поступила в редакцию 22.09.2015

INFORMATION ON THE ARTICLE

ESTIMATION OF THE OPTICAL PULSE DURATION WITH RECTANGULAR INTENSITY PROFILE OF UNKNOWN HEIGHT

Andrey P. Trifonov, trifonov@phys.vsu.ru, Voronezh State University, Russian Federation

Aleksandr A. Milogrodskii, milogrodskii@mail.ru, Voronezh State University, Russian Federation

The quasi-likelihood and maximum likelihood algorithms of duration estimation have been synthesized and analyzed. The losses in accuracy of quasi-likelihood estimate caused by a priori lack of knowledge of pulse intensity were also found. The accuracy of the maximum likelihood estimate of duration was found to be asymptotically invariant to the presence of a priori information about the pulse intensity.

Keywords: quasi-likelihood estimate; maximum likelihood estimate; scattering of estimates; a priori parametric uncertainty

REFERENCES

1. SHEREMET'EV, A.G. *Statistical Theory of Laser Communications*. Moscow: Svyaz', 1971 [in Russian].
2. VOLOKHATYUK, V.A.; KOCHETKOV, V.M.; KRASOVSKII, R.R. *Optical Detection Problems*. Moscow: Sov. Radio, 1971 [in Russian].
3. GAGLIARDI, R.M.; KARP, S. *Optical Communications*, 2nd ed. Wiley, 1995.
4. VOROB'EV, V.I. Evaluation of coordinates of the optical radiation source having rectangular intensity profile. *Optiko-Mekhanicheskaya Promyshlennost*, 1978, n.4, p.14-16.
5. VOROB'EV, V.I. *Optical Detection and Ranging for Radio-Engineers*. Moscow: Radio i Svyaz', 1983 [in Russian].
6. OVCHINNIKOVA, T.M.; TRIFONOV, A.P. Detection and estimation of the instant of change of unknown intensity of a Poisson flow. I. *Automation and Remote Control*, 1999, v.60, n.1, p.52-60.
7. KULIKOV, E.I.; TRIFONOV, A.P. *Estimated Parameters of Signals against the Background of Interferences*. Moscow: Sov. Radio, 1978 [in Russian].
8. BOL'SHAKOV, I.A.; RAKOSHITS, V.S. *Applied Theory of Stochastic Flows*. Moscow: Sov. Radio, 1978 [in Russian].
9. MUDROV, V.I.; KUSHKO, V.L. *Measurement Processing Methods. Quasi-likelihood Estimates*. Moscow: Radio i Svyaz', 1983 [in Russian].
10. STRATONOVICH, R.L. *Selected Problems of the Theory of Fluctuations in Radio Engineering*. Moscow: Sov. Radio, 1961 [in Russian].
11. SOSULIN, Y.G. *The Theory of Detection and Estimation of Stochastic Signals*. Moscow: Sov. Radio, 1978 [in Russian].
12. TRIFONOV, A.P.; KORCHAGIN, Y.E.; BESPALOVA, M.B. Statistical properties of height and provisions of absolute maximum Markov processes Bachelier type. *Vestnik VGU. Ser. Fizika, Matematika*, 2014, n.4, p.35-43, http://www.vestnik.vsu.ru/program/view/view.asp?sec=physmath&year=2014&num=04&f_name=2014-04-07.

Received in final form September 22, 2015