

РАДИОТЕХНИКА

Radioengineering XXI век

12 2016

В номере:

РАДИОСИСТЕМЫ

Выпуск 209

Синтез и анализ алгоритмов и устройств
обработки сигналов, № 3

РАБОТЫ СОТРУДНИКОВ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

и др.



тел./факс: (495) 625-9241
e-mail: info@radiotec.ru
<http://www.radiotec.ru>

Синтез и анализ алгоритмов и устройств обработки сигналов

№ 3

Главный редактор – засл. деятель науки РФ, д.т.н., проф. **А.П. Трифонов**
Редакционная коллегия: д.т.н., проф. **В.М. Артюшенко**, д.т.н., проф. **В.Г. Каргашевский**,
д.т.н., проф. **Ю.С. Шинаков** (зам. главного редактора)
Редактор выпуска – д.т.н., доц. **В.И. Воловач**

Синтез и анализ систем и устройств обработки сигналов

УДК 621.391

Квазиправдоподобная оценка моментов появления и исчезновения прямоугольного радиоимпульса с неизвестными амплитудой, частотой и начальной фазой

© Авторы, 2016
© ООО «Издательство «Радиотехника», 2016

А.П. Трифонов – Засл. деятель науки РФ, д.т.н., профессор, зав. кафедрой радиофизики,
Воронежский государственный университет
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

Ю.Э. Корчагин – д.ф.-м.н., доцент, кафедра радиофизики, Воронежский государственный университет
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru

С.В. Корольков – аспирант, кафедра радиофизики, Воронежский государственный университет
E-mail: sergeik1991@rambler.ru

Синтезированы квазиправдоподобные алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения прямоугольного радиоимпульса с неизвестными амплитудой, частотой и начальной фазой. Найдены асимптотические (с ростом отношения сигнал/шум) характеристики эффективности функционирования синтезированных алгоритмов.

Ключевые слова: радиоимпульс, квазиправдоподобный алгоритм, асимптотические характеристики

The quasilingkelihood algorithms for estimation a appearanse and disappearanse moments of arbitrary waveform radiosignal with unknown amplitude, frequency and initial phase has been synthesized. The efficiency of the algorithm are founded.

Keywords: radio pulse, quasilingkelihood algorithm, asymptotic characteristics

Задача оценки моментов появления и исчезновения сигнала, наблюдаемого на фоне шума, представляет значительный интерес для многих практических приложений статистической радиофизики, радио и гидролокации, навигации, сейсмологии и неоднократно рассматривалась в литературе [1–5]. В [2] проанализирована задача оценки моментов скачкообразного изменения сигнала при дискретном времени наблюдения. В работах [3, 4] исследованы алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения квазидетерминированного сигнала произвольной формы с неизвестными (или случайными) моментами появления и исчезновения, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума при непрерывном времени наблюдения. Алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения квазидетерминированного сигнала с неизвестной амплитудой изучены в [5]. Их целесообразно использовать для оценки моментов появления и исчезновения сигналов с неизвестной мощностью. Однако во многих практических приложениях используются сигналы с высокочастотным заполнением (узкополосные радиосигна-

лы), которые ввиду специфики распространения имеют неизвестные амплитуду, частоту и начальную фазу. Поэтому целесообразно рассмотреть алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения радиосигнала с неизвестными амплитудой, частотой и начальной фазой.

Ц е л ь р а б о т ы – исследовать квазиравдоподобные (КП) алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения прямоугольного радиоимпульса с неизвестной амплитудой, частотой и начальной фазой.

Рассмотрим задачу оценки моментов появления и исчезновения на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 прямоугольного узкополосного радиоимпульса

$$s(t, a, \varphi, \omega, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} a \cos(\omega t - \varphi), & \theta_1 \leq t \leq \theta_2, \\ 0, & t < \theta_1, \quad t > \theta_2, \end{cases} \quad (1)$$

где a – амплитуда; $\varphi \in [0, 2\pi]$ – начальная фаза; ω – частота; θ_1 и θ_2 – моменты появления и исчезновения соответственно, принимающие следующие значения из априорных интервалов:

$$\theta_i \in [\theta_{i \min}, \theta_{i \max}], \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Для того чтобы сигнал не мог исчезнуть раньше, чем он появляется, положим, что $\theta_{1 \max} < \theta_{2 \min}$. Пусть амплитуда a , начальная фаза φ , частота ω , моменты появления и исчезновения θ_1 , θ_2 априори неизвестны. Обозначим через a_0 , φ_0 , ω_0 , θ_{01} , θ_{02} их истинные значения соответственно. Тогда наблюдаемая на интервале времени $[0, T]$ реализация аддитивной смеси сигнала и шума будет в виде

$$\xi(t) = s(t, a_0, \varphi_0, \omega_0, \theta_{01}, \theta_{02}) + n(t).$$

Располагая наблюдаемой реализацией $\xi(t)$, приемник должен сформировать оценки моментов появления и исчезновения прямоугольного радиоимпульса (1).

Если амплитуда, начальная фаза и частота априори известны, можно применить максимально правдоподобный (МП) алгоритм оценивания, согласно которому оценки моментов появления и исчезновения совпадают с координатами положения наибольшего максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОП) [6]. При неизвестных моментах появления и исчезновения, амплитуде, начальной фазе и частоте логарифм ФОП зависит от пяти неизвестных параметров:

$$L(a, \varphi, \omega, \theta_1, \theta_2) = \frac{2a}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi(t) \cos(\omega t - \varphi) dt - \frac{a_0^2}{2N_0} (\theta_2 - \theta_1). \quad (3)$$

Здесь и далее отброшены интегралы от функций, осциллирующих с удвоенной частотой. Таким образом, в задаче оценки моментов появления и исчезновения неизвестные амплитуда, начальная фаза и частота являются неинформативными параметрами, что приводит к априорной параметрической неопределенности.

Одним из способов преодоления неопределенности является применение КП-алгоритма оценки [7]. КП-приемник должен формировать логарифм ФОП (3) для некоторых ожидаемых значений амплитуды a^* , частоты ω^* и начальной фазы φ^* и всех возможных значений моментов появления и исчезновения

$$L^*(\theta_1, \theta_2) = L(a^*, \varphi^*, \omega^*, \theta_1, \theta_2) \quad (4)$$

и находить КП-оценки моментов появления и исчезновения как положения абсолютного (наибольшего) максимума решающей статистики (4)

$$(\theta_1^*, \theta_2^*) = \operatorname{argsup} L^*(\theta_1, \theta_2). \quad (5)$$

Согласно (5) приемник должен формировать двумерное случайное поле (4) для всех возможных значений неизвестных моментов появления и исчезновения. Поэтому его аппаратная реализация оказывается в общем случае довольно сложной. Действительно, нахождение величин (5) предполагает построение структуры, многоканальной по обоим неизвестным параметрам. Однако трудностей аппаратной реализации КП-алгоритма оценивания (5) частично удастся избежать, если представить анало-

гично [3, 4] случайное поле (4) в виде суммы $L^*(\theta_1, \theta_2) = L_1^*(\theta_1) + L_2^*(\theta_2)$ двух случайных процессов. Первый из них зависит только от момента появления θ_1 , а второй – только от момента исчезновения θ_2 :

$$L_1^*(\theta_1) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} \xi(t) \cos(\omega^* t - \varphi^*) dt - \frac{a_0^2}{2N_0} (\theta - \theta_1), \quad L_2^*(\theta_2) = \frac{2a^*}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} \xi(t) \cos(\omega^* t - \varphi^*) dt - \frac{a_0^2}{2N_0} (\theta_2 - \theta), \quad (6), (7)$$

где θ – произвольная точка, принадлежащая интервалу $(\theta_{1\max}, \theta_{2\min})$.

Согласно выражениям (6) и (7) случайные процессы $L_1^*(\theta_1)$ и $L_2^*(\theta_2)$ статистически независимы, так как представляют собой интегралы от белого шума на неперекрывающихся интервалах. Следовательно, положение максимума случайного поля $L^*(\theta_1, \theta_2)$ по переменной θ_1 совпадает с положением максимума случайного процесса $L_1^*(\theta_1)$, а по переменной θ_2 – с положением максимума $L_2^*(\theta_2)$. В результате для КП-оценок моментов появления и исчезновения можно записать

$$\theta_j^* = \operatorname{argsup} L_j^*(\theta_j), \quad \theta_j \in [\theta_{j\min}, \theta_{j\max}], \quad j = 1, 2.$$

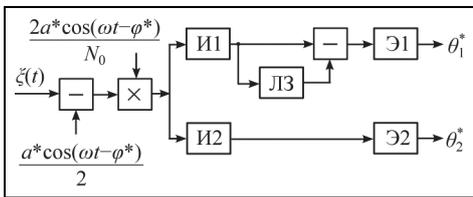


Рис. 1. Схема КП измерителя моментов появления и исчезновения

Схема КП измерителя моментов появления и исчезновения изображена на рис. 1, где использованы обозначения: И1 – интегратор на интервале $[\theta_{1\min}, t]$ ($t \in [\theta_{1\min}, \theta]$); И2 – интегратор на интервале $[\theta, t]$ ($t \in [\theta, \theta_{2\max}]$); ЛЗ – линия задержки на время $t = \theta - \theta_{1\min}$; Э1 и Э2 – экстрематоры, которые осуществляют поиск положений максимумов сигнала на интервалах времени

$[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$ и $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$ соответственно.

Представление решающей статистики в виде суммы двух статистически независимых случайных процессов позволяет не только предложить достаточно простую аппаратную реализацию КП-измерителя, но и выполнить анализ КП-алгоритма оценивания, используя методику [4]. Для полного статистического описания решающей статистики достаточно найти математические ожидания и корреляционные функции гауссовских независимых случайных процессов (6) и (7). Выполняя усреднение, получаем математические ожидания

$$S_1^*(\theta_1) = \langle L_1^*(\theta_1) \rangle = \frac{a_0^2}{N_0} \left[(1 + \delta_a) [\theta - \max(\theta_{01}, \theta_1)] d[\Delta\omega, \Delta\varphi, \max(\theta_{01}, \theta_1), \theta] - \frac{1}{2} (1 + \delta_a)^2 (\theta - \theta_1) \right],$$

$$S_2^*(\theta_2) = \langle L_2^*(\theta_2) \rangle = \frac{a_0^2}{N_0} \left[(1 + \delta_a) [\min(\theta_{02}, \theta_2) - \theta] d[\Delta\omega, \Delta\varphi, \theta, \min(\theta_{02}, \theta_2)] - \frac{1}{2} (1 + \delta_a)^2 (\theta_2 - \theta) \right]$$

и корреляционные функции

$$B_1^*(\theta_{11}, \theta_{21}) = \langle [L_1^*(\theta_{11}) - S_1^*(\theta_{11})][L_1^*(\theta_{21}) - S_1^*(\theta_{21})] \rangle = \frac{a_0^2}{N_0} (1 + \delta_a)^2 [\theta - \max(\theta_{11}, \theta_{21})],$$

$$B_2^*(\theta_{12}, \theta_{22}) = \langle [L_2^*(\theta_{12}) - S_2^*(\theta_{12})][L_2^*(\theta_{22}) - S_2^*(\theta_{22})] \rangle = \frac{a_0^2}{N_0} (1 + \delta_a)^2 [\min(\theta_{12}, \theta_{22}) - \theta],$$

где $d(\Delta\omega, \Delta\varphi, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\Delta\omega(\theta_2 - \theta_1)} 2 \sin\left(\frac{\Delta\omega(\theta_2 - \theta_1)}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta\omega(\theta_1 + \theta_2)}{2} - \Delta\varphi\right)$.

Величина $\delta_a = (a^* - a_0) / a_0$ характеризует относительное отклонение ожидаемой амплитуды a^* от ее истинного значения a_0 . В дальнейшем будем называть ее расстройкой КП-измерителя по амплитуде. Аналогично, величина $\Delta\varphi = \varphi^* - \varphi_0$ – расстройка КП-измерителя по начальной фазе, а $\Delta\omega = \omega^* - \omega_0$ – расстройка КП-измерителя по частоте.

Рассмотрим вначале случайный процесс $L_2^*(\theta_2)$. Его математическое ожидание и корреляционную функцию запишем в виде

$$S_2^*(\theta_2) = \frac{a^* a_0^2}{\Delta \omega N_0} 2 \sin\left(\frac{\Delta \omega [\min(\theta_{02}, \theta_2) - \theta]}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta \omega [\min(\theta_{02}, \theta_2) + \theta]}{2} - \Delta \varphi\right) - \frac{a^{*2} (\theta_2 - \theta)}{2 N_0}, \quad (8)$$

$$B_2^*(\theta_{12}, \theta_{22}) = \frac{a^{*2}}{N_0} [\min(\theta_{12}, \theta_{22}) - \theta]. \quad (9)$$

Исследуем состоятельность оценки момента исчезновения (5). Производные функции (8) справа и слева от θ_{02} равны соответственно

$$\frac{dS_2^*(\theta_2)}{d\theta_2} = -\frac{a^{*2}}{2N_0} \text{ при } \theta_2 > \theta_{02}, \quad \frac{dS_2^*(\theta_2)}{d\theta_2} = \frac{a^* a_0}{N_0} \cos(\Delta \omega \theta_2 - \Delta \varphi) - \frac{a^{*2}}{2N_0} \text{ при } \theta_2 < \theta_{02}.$$

Для состоятельности оценки (5) достаточно, чтобы последнее выражение было положительным, то есть

$$\cos(\Delta \omega \theta_2 - \Delta \varphi) > \frac{\Delta_a}{2} \text{ при } \theta_2 < \theta_{02}, \quad (10)$$

где $\Delta_a = a^* / a_0 = 1 + \delta_a$.

Будем считать далее, что отношение сигнал/шум (ОСШ) $z_2^2 = a_0^2 (\theta_{02} - \theta) / N_0 \gg 1$, то есть достаточно велико. Тогда КП-оценка момента исчезновения располагается в окрестности максимума математического ожидания (8). Перепишем выражение (8) в виде

$$S_2^*(\theta_2) = \frac{z_2^2 \Delta_a}{\Delta \omega (\theta_{02} - \theta)} \left\{ \sin[\Delta \omega \min(\theta_{02}, \theta_2) - \Delta \varphi] - \sin(\Delta \omega \theta - \Delta \varphi) \right\} - \frac{z_2^2 \Delta_a^2 (\theta_2 - \theta)}{2 (\theta_{02} - \theta)}.$$

Разложим математическое ожидание $S_2^*(\theta_2)$ в ряд Тейлора по θ_2 в окрестности θ_{02} и удержим слабые не выше первой степени $(\theta_2 - \theta_{02})$:

$$S_2^*(\theta_2) = \frac{z_2^2 \Delta_a}{\Delta \omega (\theta_{02} - \theta)} [\sin(\Delta \omega \theta_{02} - \Delta \varphi) - \sin(\Delta \omega \theta - \Delta \varphi)] + \frac{z_2^2 \Delta_a}{(\theta_{02} - \theta)} \cos(\Delta \omega \theta_{02} - \Delta \varphi) [\min(\theta_{02}, \theta_2) - \theta_{02}] - \frac{z_2^2 \Delta_a^2 (\theta_2 - \theta)}{2 (\theta_{02} - \theta)}. \quad (11)$$

Будем аппроксимировать случайный процесс $L_2^*(\theta_2)$ гауссовским случайным процессом с математическим ожиданием (11) и корреляционной функцией (9) на всем априорном интервале возможных значений момента исчезновения (2). Перейдем в выражениях (11) и (9) к новой переменной $\lambda_2 = z_2^2 (\theta_2 - \theta) / (\theta_{02} - \theta)$, $\lambda_2 \in [\lambda_{2\min}, \lambda_{2\max}]$, $\lambda_{2\min} = z_2^2 (\theta_{2\min} - \theta) / (\theta_{02} - \theta)$, $\lambda_{2\max} = z_2^2 (\theta_{2\max} - \theta) / (\theta_{02} - \theta)$, $\lambda_{02} = z_2^2$. Тогда для случайного процесса (7) можем записать

$$L_2^*(\theta_2) = \mu_2^*(\lambda_2) = \Delta_a \cos(\Delta \omega \theta_{02} - \Delta \varphi) \min(\lambda_2, \lambda_{02}) - \frac{\Delta_a^2}{2} \lambda_2 + \nu_2(\lambda_2), \quad (12)$$

где $\nu_2(\lambda_2)$ – гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$B_2^*(\lambda_{12}, \lambda_{22}) = \Delta_a^2 \min(\lambda_{12}, \lambda_{22}). \quad (13)$$

Согласно (12) и (13) процесс $\mu_2^*(\lambda_2)$ является марковским с коэффициентами сноса k_1 и диффузии k_2

$$k_1 = \begin{cases} \Delta_a \cos(\Delta \omega \theta_{02} - \Delta \varphi) - \Delta_a^2 / 2, & \lambda_{2\min} \leq \lambda_2 \leq \lambda_{02}, \\ -\Delta_a^2 / 2, & \lambda_{02} < \lambda_2 \leq \lambda_{2\max}, \end{cases} \quad k_2 = \Delta_a^2. \quad (14), (15)$$

Заметим, что при выполнении условия (10) коэффициент сноса удовлетворяет неравенству $\Delta_a \cos(\Delta\omega\theta_{02} - \Delta\varphi) - \Delta_a^2 / 2 > 0$ для всех $\lambda_2 \in [\lambda_{2\min}, \lambda_{02}]$. Поэтому аналогично [8] можем записать

$$F_2(u, v, x) = \int_{-\infty}^v W_2(y, \lambda_{2\max}) dy,$$

где $W_2(y, \lambda_2)$ – решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) [9]:

$$\frac{\partial W_2(y, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial}{\partial y} [k_1 W_2(y, \lambda_2)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_2 W_2(y, \lambda_2)] = 0 \quad (16)$$

с коэффициентами сноса и диффузии (14), (15). Применяя метод отражения с переменной знака [9], находим решение уравнения (16) с коэффициентами (14), (15) отдельно для случаев $\lambda_2 \in [\lambda_{2\min}, \lambda_{02}]$ и $\lambda_2 \in [\lambda_{02}, \lambda_{2\max}]$. Аналогично [4], получаем выражения для плотности вероятности КП-оценки момента исчезновения:

$$W_{\lambda_2}^*(\lambda_2 | \lambda_{02}) = \begin{cases} c_1^2 \Psi \left(c_1^2 (\lambda_{02} - \lambda_2), c_1^2 (\lambda_{02} - \lambda_{2\min}), c_2^2 (\lambda_{2\max} - \lambda_{02}), \frac{1}{R} \right), & \lambda_2 \leq \lambda_{02}, \\ c_2^2 \Psi \left(c_2^2 (\lambda - \lambda_{02}), c_2^2 (\lambda_{2\max} - \lambda_{02}), c_1^2 (\lambda_{02} - \lambda_{2\min}), R \right), & \lambda_2 > \lambda_{02}, \end{cases} \quad (17)$$

где $c_1^2 = (\Delta_2 - \delta_a)^2 / 2$; $c_2^2 = (1 + \delta_a)^2 / 2$; $R = (\Delta_2 - \delta_a) / (1 + \delta_a)$; $\Delta_2 = 2 \cos(\Delta\omega\theta_{02} - \Delta\varphi) - 1$;

$$\Psi(y, y_1, y_2, y_3) = \left\{ \Phi \left(\sqrt{\frac{y_1 - y}{2}} \right) + \exp \left[-\frac{y_1 - y}{4} \right] / \sqrt{\pi(y_1 - y)} \right\} \frac{1}{2|y|^{3/2} \sqrt{\pi}} \times \\ \times \int_0^\infty x \exp \left[-\frac{(x+y)^2}{4y} \right] \left[\Phi \left(\frac{y_3 x + y_2}{\sqrt{2y_2}} \right) - \exp(-y_3 x) \Phi \left(\frac{-y_3 x + y_2}{\sqrt{2y_2}} \right) \right] dx.$$

Аналогично [4], находим асимптотические значения смещения и рассеяния КП-оценок моментов появления и исчезновения:

$$B_a(\theta_2^* | \theta_{02}) = \frac{2T_{\max}}{z^2} \cdot \frac{(\Delta_2 + 1)(\Delta_2 - 2\delta_a - 1)}{(1 + \delta_a)^2 (\Delta_2 - \delta_a)^2}, \quad V_a(\theta_2^* | \theta_{02}) = \frac{8T_{\max}^2}{z^4} \cdot \frac{P(\delta_a, \Delta_2)}{(1 + \delta_a)^4 (\Delta_2 + 1)^2 (\Delta_2 - \delta_a)^4}, \quad (18), (19)$$

где $z^2 = 2a_0^2 T_{\max} / N_0$; $T_{\max} = \theta_{2\max} - \theta_{1\min}$ – максимально возможная длительность сигнала;

$$P(x, y) = 2y^6 - 4(2x - 1)y^5 + (11x^2 - 18x + 1)y^4 - (5x^3 - 29x^2 + 7x + 1)y^3 - (15x^3 - 21x^2 - 7x - 1)y^2 + \\ + (3x^5 + 15x^4 + 15x^3 + 29x^2 + 18x + 4)y - x^6 - 3x^5 + 5x^3 + 11x^2 + 8x + 2.$$

При $\Delta\varphi = 0$ и $\Delta\omega = 0$ величины (18) и (19) совпадают со смещением и рассеянием оценки МП-момента исчезновения сигнала с неизвестной амплитудой и априори известной начальной фазой, найденными в [5]: $B_a(\theta_2^* | \theta_{02}) = -\frac{8T_{\max} \delta_a}{z^2 (\delta_a - 1)^2 (\delta_a + 1)^2}$, $V_a(\theta_2^* | \theta_{02}) = \frac{2T_{\max}^2 (13 + 101\delta_a^2 + 15\delta_a^4 - \delta_a^6)}{z^4 (\delta_a - 1)^4 (\delta_a + 1)^4}$.

При $\delta_a = 0$, $\Delta\varphi = 0$ и $\Delta\omega = 0$ величины (18) и (19) совпадают со смещением и рассеянием оценки МП-момента исчезновения сигнала с априори известными амплитудой, частотой и начальной фазой, найденными в [3], а именно: $B_{02} = 0$, $V_{02} = 26T_{\max}^2 / z^4$.

Рассмотрим теперь случайный процесс $L_1^*(\theta_1)$. Его математическое ожидание и корреляционную функцию запишем в виде

$$S_1^*(\theta_1) = \frac{a^* a_0^2}{\Delta\omega N_0} 2 \sin \left(\frac{\Delta\omega[\theta - \max(\theta_{01}, \theta_1)]}{2} \right) \cos \left(\frac{\Delta\omega[\theta + \max(\theta_{01}, \theta_1)]}{2} - \Delta\varphi \right) - \frac{a^{*2} (\theta - \theta_1)}{2N_0}, \quad (20)$$

$$B_1^*(\theta_{11}, \theta_{21}) = \frac{a^{*2}}{N_0} [\theta - \max(\theta_{11}, \theta_{21})]. \quad (21)$$

Исследуем состоятельность оценки момента появления (5). Производные функции (20) слева и справа от θ_{01} равны соответственно

$$\frac{dS_1^*(\theta_1)}{d\theta_1} = \frac{a^{*2}}{2N_0} \text{ при } \theta_1 < \theta_{01}, \quad \frac{dS_1^*(\theta_1)}{d\theta_1} = -\frac{a^* a_0}{N_0} \cos(\Delta\omega\theta_1 - \Delta\varphi) + \frac{a^{*2}}{2N_0} \text{ при } \theta_1 > \theta_{01}.$$

Для состоятельности оценки момента появления (5) достаточно, чтобы последнее выражение было отрицательным, что равносильно $\cos(\Delta\omega\theta_1 - \Delta\varphi) > \frac{\Delta a}{2}$, $\theta_1 > \theta_{01}$.

Будем считать далее, что ОСШ $z_1^2 = a_0^2(\theta - \theta_{01}) / N_0 \gg 1$, то есть достаточно велико. Тогда КП-оценка момента появления располагается в окрестности максимума математического ожидания (20). Перепишем выражение (20) в виде

$$S_1^*(\theta_1) = \frac{z_1^2 \Delta a}{\Delta\omega(\theta - \theta_{01})} \left\{ \sin(\Delta\omega\theta - \Delta\varphi) - \sin[\Delta\omega \max(\theta_{01}, \theta_1) - \Delta\varphi] \right\} - \frac{z_1^2 \Delta a^2}{2} \frac{(\theta - \theta_1)}{(\theta - \theta_{01})}.$$

Разложим математическое ожидание $S_2^*(\theta_2)$ в ряд Тейлора по θ_1 в окрестности θ_{01} и удержим слабые не выше первой степени $(\theta_1 - \theta_{01})$:

$$S_1^*(\theta_1) = \frac{z_1^2 \Delta a}{\Delta\omega(\theta - \theta_{01})} [\sin(\Delta\omega\theta - \Delta\varphi) - \sin(\Delta\omega\theta_{01} - \Delta\varphi)] + \frac{z_0^2 \Delta a}{(\theta - \theta_{01})} \cos(\Delta\omega\theta_{01} - \Delta\varphi) [\theta_{01} - \max(\theta_{01}, \theta_1)] - \frac{z_1^2 \Delta a^2}{2} \frac{(\theta - \theta_1)}{(\theta - \theta_{01})}. \quad (22)$$

Будем аппроксимировать случайный процесс $L_1^*(\theta_1)$ гауссовским случайным процессом с математическим ожиданием (22) и корреляционной функцией (21) на всем априорном интервале возможных значений момента появления (2). Перейдем в выражениях (22) и (21) к новой переменной $\lambda_1 = z_1^2(\theta - \theta_1) / (\theta - \theta_{01})$, $\lambda_1 \in [\lambda_{1\min}, \lambda_{1\max}]$, $\lambda_{1\min} = z_1^2(\theta - \theta_{1\max}) / (\theta - \theta_{01})$, $\lambda_{1\max} = z_1^2(\theta - \theta_{2\min}) / (\theta - \theta_{01})$, $\lambda_{01} = z_1^2$. Тогда для случайного процесса (7) получим

$$L_1^*(\theta_1) = \mu_1^*(\lambda_1) = \Delta a \cos(\Delta\omega\theta_{01} - \Delta\varphi) \min(\lambda_1, \lambda_{01}) - \frac{\Delta a^2}{2} \lambda_1 + \nu_1(\lambda_1), \quad (23)$$

где $\nu_1(\lambda_1)$ – гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $B_1^*(\lambda_{11}, \lambda_{12}) = \Delta a^2 \min(\lambda_{11}, \lambda_{12})$.

Заметим, что выражение (23) совпадает с выражением (12) с точностью до замены θ_{01} на θ_{02} и λ_{01} на λ_{02} . Следовательно, можем сразу записать выражение для плотности вероятности КП-оценки момента появления аналогично (17):

$$W_{\lambda_1}^*(\lambda_1 | \lambda_{01}) = \begin{cases} c_1^2 \Psi \left(c_1^2(\lambda_{01} - \lambda_1), c_1^2(\lambda_{01} - \lambda_{1\min}), c_2^2(\lambda_{1\max} - \lambda_{01}), \frac{1}{R} \right), & \lambda_1 \leq \lambda_{01}, \\ c_2^2 \Psi \left(c_2^2(\lambda - \lambda_{01}), c_2^2(\lambda_{1\max} - \lambda_{01}), c_1^2(\lambda_{01} - \lambda_{1\min}), R \right), & \lambda_1 > \lambda_{01}, \end{cases} \quad (24)$$

где $c_1^2 = (\Delta_1 - \delta_a)^2 / 2$; $c_2^2 = (1 + \delta_a)^2 / 2$; $R = (\Delta_1 - \delta_a) / (1 + \delta_a)$; $\Delta_1 = 2 \cos(\Delta\omega\theta_{01} - \Delta\varphi) - 1$.

Используя плотность вероятности (24), находим асимптотические выражения для смещения и рассеяния КП-оценки момента появления:

$$B_a(\theta_1^* | \theta_{01}) = -\frac{2T_{\max}}{z^2} \cdot \frac{(\Delta_1 + 1)(\Delta_1 - 2\delta_a - 1)}{(1 + \delta_a)^2 (\Delta_1 - \delta_a)^2}, \quad V_a(\theta_1^* | \theta_{01}) = \frac{8T_{\max}^2}{z^4} \cdot \frac{P(\delta_a, \Delta_1)}{(1 + \delta_a)^4 (\Delta_1 + 1)^2 (\Delta_1 - \delta_a)^4}. \quad (25), (26)$$

При $\delta_a = 0$, $\Delta\varphi = 0$ и $\Delta\omega = 0$ величины (25) и (26) совпадают со смещением и рассеянием оценки МП-момента появления сигнала с априори известными амплитудой, частотой и начальной фазой, найденными в [3]: $B_{01} = 0$, $V_{01} = 26T_{\max}^2 / z^4$.

Влияние априорного незнания амплитуды, частоты и начальной фазы на точность КП-оценок моментов появления и исчезновения можно охарактеризовать нормированными величинами смещения

$b_i = B_a(\theta_i^* | \theta_{0i}) / \sqrt{V_a(\theta_i^* | \theta_{0i})}$ и рассеяния $v_i = V_a(\theta_i^* | \theta_{0i}) / V_{0i}$ ($i = 1, 2$) КП-оценок. Эти величины (с точностью до знака) одинаковы для КП-оценок моментов появления и исчезновения и могут служить характеристикой проигрыша в точности КП-оценок по сравнению с точностью оценок МП-моментов появления и исчезновения сигнала с априори известными амплитудой, частотой и начальной фазой.

На рис. 2 представлены зависимости нормированного смещения b_i , на рис. 3 – нормированного рассеяния v_i от величины δ_a при нескольких значениях разности фаз $\Delta\varphi$ ожидаемого и принятого сигналов и $\Delta\omega = 0$.

На рис. 4 представлены зависимости нормированного рассеяния v_i от обобщенной нестабильности несущей частоты $\eta = \Delta\omega T_{\max} / (2\pi) = \delta f \kappa$ ($\delta f = \Delta\omega / \omega_0$ – относительная нестабильность несущей частоты, $\kappa = \omega_0 T_{\max} / (2\pi)$ – максимально возможное число периодов колебаний в импульсе) при нескольких значениях разности фаз $\Delta\varphi$ ожидаемого и принятого сигналов и $\delta_a = 0$. Сплошные кривые на рис. 2–4 построены при $\Delta\varphi = 0$, пунктирные линии – при $\Delta\varphi = \pi / 8$, штриховые – при $\Delta\varphi = \pi / 5$, штрих-пунктирными – при $\Delta\varphi = \pi / 4$. Как видно из рис. 2 и 3, при известной амплитуде ($\delta_a = 0$) КП-оценки моментов появления и исчезновения обладают нулевым смещением, а их рассеяние совпадает с рассеянием МП-оценок. Наличие расстройки по амплитуде приводит к появлению смещения оценок моментов появления и исчезновения и увеличению их рассеяния в десятки раз [4].

Так, при $|\delta_a| = 0,5$ рассеяние КП-оценок в десять раз больше рассеяния МП-оценок при априори известных амплитуде и начальной фазе. Наличие расстройки по фазе также приводит к увеличению рассеяния КП-оценок. Так, даже при $\delta_a = 0$ расстройка по фазе на величину $\Delta\varphi = \pm\pi / 5$ приводит к увеличению рассеяния КП-оценки в четыре раза. Из рис. 4 видно, что при обобщенной нестабильности частоты, большей 0,5, точность оценок моментов появления и исчезновения может заметно снизиться.

- Полученные результаты позволяют, задавшись приемлемым увеличением рассеяния оценок моментов появления и исчезновения, найти допустимую нестабильность несущей частоты.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-10022).

Литература

1. Репин В.Г. Обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Проблемы передачи информации. 1991. Т. 27. № 1. С. 61–72.

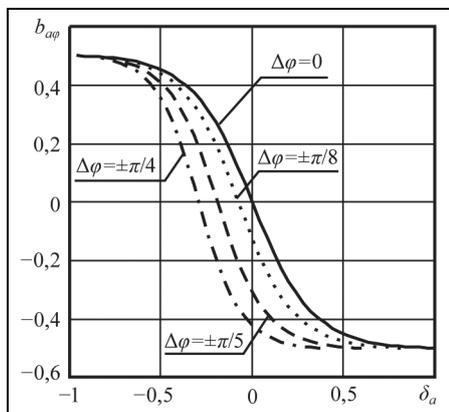


Рис. 2. Графики зависимости нормированного смещения оценки от расстройки по амплитуде

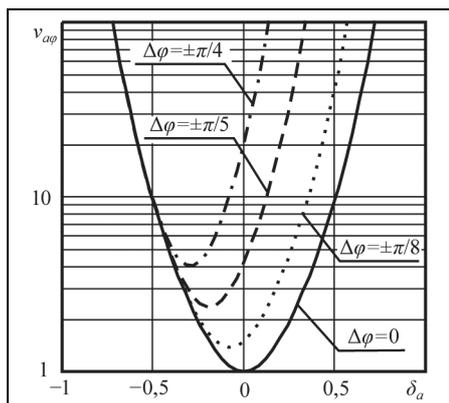


Рис. 3. Графики зависимости нормированного рассеяния оценки от расстройки по амплитуде

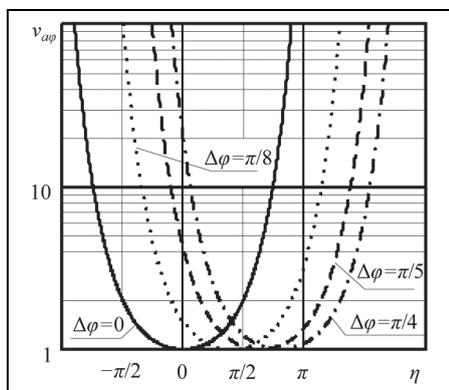


Рис. 4. Графики зависимости нормированного рассеяния оценки от обобщенной нестабильности частоты

2. Мальцев А.А. Оптимальное оценивание моментов скачкообразных изменений параметров сигналов // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. № 5. С. 1024–1033.
3. Трифонов А.П., Корчагин Ю.Э. Оптимальный прием сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Проблемы передачи информации. 2001. Т. 37. № 1. С. 52–71.
4. Трифонов А.П., Корчагин Ю.Э. Точные формулы для расчета характеристик приема сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения // Проблемы передачи информации. 2009. Т. 45. № 2. С. 91–100.
5. Трифонов А.П., Корчагин Ю.Э., Кондратович П.А. Оценка моментов появления и исчезновения сигнала с неизвестной амплитудой // Известия ВУЗов. Сер. Радиофизика. 2012. Т. 55. № 6. С. 455–471.
6. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех М.: Сов. радио. 1978. 296 с.
7. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки. М.: Радио и связь. 1983. 304 с.
8. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь. 1986. 264 с.
9. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы М.: Радио и связь. 1977. 488 с.
10. Терентьев А.С. Распределение вероятностей временного положения абсолютного максимума на выходе согласованного фильтра // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13. № 4. С. 652–657.
11. Грязнов М.И., Гуревич М.А., Рябинин М.А. Измерение параметров импульсов М.: Радио и связь. 1991. 216 с.

Поступила 11 ноября 2016 г.

Quasi-likelihood of appearance and disappearance moments estimations of radiosignal with unknown amplitude, frequency and initial phase

© Authors, 2016
© Radiotekhnika, 2016

A.P. Trifonov – Honored Scientist of RF, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of Department of Radiophysics, Voronezh State University

E-mail: trifonov@phys.vsu.ru

Yu.E. Korchagin – Dr. Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Radiophysics, Voronezh State University

E-mail: korchagin@phys.vsu.ru

S.V. Korolkov – Post-graduate Student, Department of Radiophysics, Voronezh State University

E-mail: sergeik1991@rambler.ru

In this paper we have studied quasi-likelihood algorithm evaluation of appearance and disappearance moments of radiosignal with the rectangular pulse waveform and the unknown amplitude, the initial phase and frequency. We have carried out the synthesis of quasi-likelihood evaluation algorithm. Instead of the unknown parameters we have used some of their predicted values. We have introduced block-diagrams of formation evaluation. We have analyzed the synthesized algorithm and found the asymptotically exact expressions (with the increase of signal-to-noise ratio) for bias and dispersion of evaluation of appearance and disappearance moments. We have studied the influence of a priori ignorance of amplitude, the initial phase and frequency on the accuracy of evaluation of appearance and disappearance moments. We have found quantitative characteristics of loss in accuracy during the evaluation of appearance and disappearance moments due to a priori ignorance of amplitude, the initial phase and frequency of radio signal.

References

1. Repin V.G. Obnaruzhenie signala s neizvestny'mi momentami poyavleniya i ischeznoeniya // Problemy' peredachi informacii. 1991. Т. 27. № 1. С. 61–72.
2. Mal'czev A.A. Optimal'noe ocenivanie momentov skachkoobrazny'x izmenenij parametrov signalov // Radiotekhnika i e'lektronika. 1989. Т. 34. № 5. С. 1024–1033.
3. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E'. Optimal'ny'j priem signala s neizvestny'mi momentami poyavleniya i ischeznoeniya // Problemy' peredachi informacii. 2001. Т. 37. № 1. С. 52–71.
4. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E'. Tochnye formuly' dlya rascheta karakteristik priema signala s neizvestny'mi momentami poyavleniya i ischeznoeniya // Problemy' peredachi informacii. 2009. Т. 45. № 2. С. 91–100.
5. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E', Kondratovich P.A. Ocenka momentov poyavleniya i ischeznoeniya signala s neizvestnoj amplitudoj // Izvestiya VUZov. Ser. Radiofizika. 2012. Т. 55. № 6. С. 455–471.
6. Kulikov E.I., Trifonov A.P. Ocenka parametrov signalov na fone pomex М.: Sov. radio. 1978. 296 с.
7. Mudrov V.I., Kushko V.L. Metody' obrabotki izmerenij. Kvazipravdopodobnye ocenki. М.: Radio i svyaz'. 1983. 304 с.
8. Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i ocenka ix parametrov na fone pomex. М.: Radio i svyaz'. 1986. 264 с.
9. Tikhonov V.I., Mironov M.A. Markovskie processy' М.: Radio i svyaz'. 1977. 488 с.
10. Terent'ev A.S. Raspredelenie veroyatnostej vremennogo polozheniya absolutnogo maksimuma na vy'xode soglasovannogo fil'tra // Radiotekhnika i e'lektronika. 1968. Т. 13. № 4. С. 652–657.
11. Gryaznov M.I., Gurevich M.A., Ryabinin M.A. Izmerenie parametrov impul'sov М.: Radio i svyaz'. 1991. 216 с.