

УДК 621.391

КВАЗИПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА РАДИОСИГНАЛОВ С НЕИЗВЕСТНЫМИ АМПЛИТУДАМИ И ФАЗАМИ

А. П. Трифонов*, А. В. Харин

Воронежский госуниверситет, г. Воронеж, Россия

Выполнены синтез и анализ квазиправдоподобного алгоритма оценки числа сигналов. Предполагалось, что параметры сигналов известны с точностью до некоторого ограниченного априорного интервала. Эффективность алгоритма оценки количественно характеризовалась величиной вероятности ошибки оценки числа сигналов. По результатам анализа рассмотрена возможность применения квазиправдоподобного алгоритма для оценки числа сигналов с частично неизвестными параметрами.

ВВЕДЕНИЕ

Задача оценки числа принимаемых сигналов достаточно часто возникает в процессе передачи и обработки информации. Например, в случае использования многолучевого радиоканала в системах с множественным входом и множественным выходом (multiple input, multiple output, ММО) [1, 2] число лучей часто оказывается априори неизвестным и его требуется определить. При радиолокационном и акустолокационном (активном или пассивном) наблюдении также достаточно распространённой является ситуация, когда число источников сигналов, поступающих на антенную решётку, неизвестно [3–9]. Однако задача оценки числа принимаемых сигналов на сегодняшний день решена лишь частично. Возникают трудности в определении структуры алгоритма такой оценки и практически отсутствуют результаты теоретического анализа качества его функционирования. Более того, нет достаточно общепризнанной и корректной количественной характеристики таких алгоритмов. Без введения количественных характеристик алгоритмов оценки числа сигналов возникают трудности в их сравнении и выборе наиболее эффективного.

В работе [10] с помощью модификаций метода максимального правдоподобия синтезированы алгоритмы оценки числа сигналов с неизвестными амплитудами. Далее, в работе [11], также на основе модификаций метода максимального правдоподобия, синтезированы алгоритмы оценки числа радиосигналов с неизвестными амплитудами и фазами. Кроме того, для всех синтезированных в работах [10, 11] алгоритмов были найдены их основные характеристики. Однако в возникающих на практике задачах параметры сигналов могут быть неизвестны лишь частично. Далее под частично неизвестным параметром сигнала будет подразумевается параметр, истинное значение которого точно неизвестно, но известен некоторый ограниченный интервал, которому принадлежит это значение, т. е., другими словами, частично неизвестный параметр сигнала известен только с точностью до некоторого ограниченного априорного интервала.

В качестве примера можно привести ситуацию, когда значение параметра сигнала задано с некоторой известной конечной погрешностью. Для получения максимально правдоподобной оценки числа сигналов с неизвестными параметрами необходимо вначале подставить в логарифм функционала отношения правдоподобия оценку максимального правдоподобия этих неизвестных параметров. В случае оценки числа сигналов с частично неизвестными параметрами в данной работе предлагается использовать квазиправдоподобный алгоритм [12]. При его применении

* trifonov@phys.vsu.ru

в логарифм функционала отношения правдоподобия вместо значений частично неизвестных параметров подставляются некоторые предполагаемые величины этих параметров из априорных интервалов их возможных значений. Ниже проводится синтез и анализ квазиправдоподобного алгоритма оценки числа радиосигналов с неизвестными амплитудами и фазами, принимаемых на фоне гауссовского белого шума. При этом предполагается, что амплитуды и фазы сигналов частично неизвестны. Эффективность рассмотренного алгоритма характеризуется вероятностью ошибки оценки числа сигналов. Для её определения использовано понятие укороченной вероятности ошибки [10].

1. СИНТЕЗ И АНАЛИЗ КВАЗИПРАВДОПОДОБНОГО АЛГОРИТМА ОЦЕНКИ ЧИСЛА РАДИОСИГНАЛОВ

Положим, что на интервале времени $[0, T]$ наблюдается сумма из ν узкополосных радиосигналов $s_i(t, a_i, \varphi_i) = a_i f_i(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_i]$, т. е. принимается совокупность сигналов

$$s(t, \nu, \mathbf{a}_\nu, \varphi_\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} s_i(t, a_i, \varphi_i) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i f_i(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_i], \quad (1)$$

где $\nu = 1, \dots, \nu_{\max}$, $a_i, \omega_i \in R^1$ — амплитуда и частота сигнала, $\varphi_i \in [0, 2\pi]$ — фаза сигнала, $\Psi_i(t) \in L_1(0, T)$ — закон фазовой модуляции сигнала, $f_i(t) \in L_2(0, T)$ — огибающая функция i -того сигнала и $\mathbf{a}_\nu = \|a_i\|_{i=1, \dots, \nu}$, $\varphi_\nu = \|\varphi_i\|_{i=1, \dots, \nu}$.

Пусть сигнал (1) принимается на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Следовательно, обработке доступна реализация

$$x(t) = n(t) + \sum_{i=1}^{\nu_0} a_{0i} f_i(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_{0i}], \quad (2)$$

где ν_0 — истинное число сигналов в (1), а множества $\{a_{0i}\}_{i=1, \dots, \nu_{\max}}$, $\{\varphi_{0i}\}_{i=1, \dots, \nu_{\max}}$ содержат истинные значения амплитуд и фаз сигналов.

В работе [13] приведена формула для логарифма функционала отношения правдоподобия $L(l)$ для произвольного сигнала $s(t, l)$, содержащего неизвестные параметры l , когда помехой является аддитивный белый гауссовский шум:

$$L(l) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(t, l) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t, l) dt. \quad (3)$$

Здесь через l обозначена совокупность неизвестных параметров сигнала $s(t, l)$.

Подставляя сигнал (1) в выражение (3), запишем логарифм функционала отношения правдоподобия для совокупности сигналов (1):

$$\begin{aligned} L(\nu, \mathbf{a}_\nu, \varphi_\nu) &= \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^{\nu} a_i \int_0^T x(t) f_i(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_i] dt - \\ &- \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} a_i a_j \int_0^T f_i(t) f_j(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_i] \cos[\omega_j t + \Psi_j(t) - \varphi_j] dt. \end{aligned}$$

Перепишем это выражение в виде

$$L(\nu, \mathbf{a}_\nu, \varphi_\nu) = \frac{2}{N_0} \sum_{m=1}^{\nu} a_m \int_0^T x(t) f_m(t) \cos[\omega_m t + \Psi_m(t) - \varphi_m] dt - \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} a_i a_j K_{ij}. \quad (4)$$

Здесь $\nu = 1, \dots, \nu_{\max}$, K_{ij} — скалярное произведение функций $f_i(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_i]$ и $f_j(t) \cos[\omega_j t + \Psi_j(t) - \varphi_j]$:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^T f_i(t) f_j(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_i - \omega_j t - \Psi_j(t) + \varphi_j] dt + \frac{1}{2} \int_0^T f_i(t) f_j(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_i + \omega_j t + \Psi_j(t) - \varphi_j] dt. \quad (5)$$

Рассмотрим ситуацию, когда сигналы в (1) для всех $i = 1, \dots, \nu_{\max}$ удовлетворяют условию узкополосности [13]

$$\omega_i / \Delta\omega_i \gg 1, \quad (6)$$

где $\Delta\omega_i$ — ширина полосы частот i -го сигнала. В этом случае второе слагаемое в формуле (5) является малым относительно первого слагаемого, что позволяет приближённо переписать выражение (5) в виде

$$K_{ij} = V_{cij} \cos(\varphi_i - \varphi_j) + V_{sij} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad (7)$$

где

$$V_{cij} = \frac{1}{2} \int_0^T f_i(t) f_j(t) \cos[(\omega_i - \omega_j)t + \Psi_i(t) - \Psi_j(t)] dt, \\ V_{sij} = \frac{1}{2} \int_0^T f_i(t) f_j(t) \sin[(\omega_i - \omega_j)t + \Psi_i(t) - \Psi_j(t)] dt.$$

После нормировки из выражения (7) получаем коэффициент корреляции радиосигналов

$$\rho_{ij} = K_{ij} / \sqrt{K_{ii} K_{jj}} = \rho_{cij} \cos(\varphi_i - \varphi_j) + \rho_{sij} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad (8)$$

где $\rho_{cij} = V_{cij} / \sqrt{V_{cii} V_{cjj}}$, $\rho_{sij} = V_{sij} / \sqrt{V_{sii} V_{sjj}}$.

Положим, что амплитуды и фазы сигналов в (1) известны лишь частично, т. е. известны конечные априорные интервалы, которым принадлежат возможные значения амплитуд и фаз. Для синтеза алгоритма оценки числа сигналов заменим неизвестные значения амплитуд $\{a_i\}_{i=1, \dots, \nu_{\max}}$ и фаз $\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, \nu_{\max}}$ в выражении (4) некоторыми предполагаемыми значениями $\{a_i^*\}_{i=1, \dots, \nu_{\max}}$ и $\{\varphi_i^*\}_{i=1, \dots, \nu_{\max}}$ этих параметров из их заданных априорных интервалов:

$$L(\nu) = L(\nu, \mathbf{a}_\nu^*, \varphi_\nu^*) = \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^{\nu} a_i^* \int_0^T x(t) f_i(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_i^*] dt - \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} a_i^* a_j^* K_{ij}^*, \quad (9)$$

где $K_{ij}^* = V_{cij} \cos(\varphi_i^* - \varphi_j^*) + V_{sij} \sin(\varphi_i^* - \varphi_j^*)$.

Используя решающую статистику (9), можно записать квазиправдоподобный алгоритм оценки числа сигналов (1) в виде

$$\hat{\nu} : L(\hat{\nu}) = \sup_{\nu} L(\nu), \quad \nu = 1, \dots, \nu_{\max}. \quad (10)$$

Рассмотрим свойства решающей статистики (9). Для этого подставим в (9) реализацию наблюдаемых данных (2):

$$L(\nu) = \sum_{j=1}^{\nu} (1 + \delta_j) z_j \sum_{i=1}^{\nu_0} z_i [\rho_{cij} \cos(\varphi_{0i} - \varphi_{0j} - \Delta_j) + \rho_{sij} \sin(\varphi_{0i} - \varphi_{0j} - \Delta_j)] + \\ + \sum_{j=1}^{\nu} (1 + \delta_j) z_j \xi_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (1 + \delta_i) (1 + \delta_j) z_i z_j \times \\ \times [\rho_{cij} \cos(\varphi_{0i} - \varphi_{0j} + \Delta_i - \Delta_j) + \rho_{sij} \sin(\varphi_{0i} - \varphi_{0j} + \Delta_i - \Delta_j)]. \quad (11)$$

Здесь $\xi_i = \sqrt{2/(N_0 K_{ii})} \int_0^T n(t) f_i(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_{0i}] dt$ — гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; $\rho_{ij} = K_{ij} / \sqrt{K_{ii} K_{jj}}$, $\rho_{\nu} = \|\rho_{ij}\|_{i,j=1,\dots,\nu}$, $\delta_i = (a_i^* - a_{0i})/a_{0i}$ — параметр, характеризующий относительное отклонение предполагаемых значений амплитуд a_i^* от их истинных значений a_{0i} ; $\Delta_i = \varphi_i^* - \varphi_{0i}$ — параметр, описывающий отличие предполагаемых значений начальных фаз φ_i^* от их истинных значений φ_{0i} ; $z_i^2 = 2a_{0i}^2 K_{ii}/N_0$ — отношение сигнал/шум (ОСШ) для i -го сигнала в выражении (2).

Эффективность алгоритма оценки числа сигналов можно охарактеризовать величиной вероятности ошибки $p_e = p(\hat{\nu} \neq \nu_0)$. Однако расчёт этой вероятности требует существенных вычислительных ресурсов. С целью получения упрощённой приближённой формулы для вероятности ошибки заметим, что любой алгоритм R оценки числа сигналов можно представить в виде

$$\hat{\nu} : R[\hat{\nu}, x(t)] = \sup_{\nu} R[\nu; x(t)],$$

где $R[\nu; x(t)]$ — функционал, определяемый структурой алгоритма R и зависящий от числа сигналов и реализации наблюдаемых данных. Соответственно, вероятность ошибки для алгоритма R можно записать как

$$p_e = 1 - p\{R[\nu_0; x(t)] > R[i; x(t)], \quad i \neq \nu_0, \quad i = 1, \dots, \nu_{\max}\}. \quad (12)$$

Теперь, в качестве приближения к полной вероятности ошибки, введём в рассмотрение укороченную вероятность ошибки алгоритма R определяемую как

$$p_t = 1 - p\{R[\nu_0; x(t)] > R[\nu_0 + 1; x(t)], R[\nu_0; x(t)] > R[\nu_0 - 1; x(t)]\}. \quad (13)$$

Из определения (13) следует, что укороченная вероятность ошибки является нижней границей для полной вероятности ошибки (12), когда $1 < \nu_0 < \nu_{\max}$. Необходимо также отметить, что укороченная вероятность ошибки совпадает с полной вероятностью ошибки в случае, когда $\nu_{\max} = 3$ и $\nu_0 = 2$.

Применительно к алгоритму (10) формулу (13) можно переписать в виде

$$p_t = 1 - p\{L(\nu_0) > L(\nu_0 + 1), L(\nu_0) > L(\nu_0 - 1)\}. \quad (14)$$

Из формул (9) и (14) для алгоритма (10) получаем

$$p_t = 1 - p(\xi_{\nu_0} > R_{\text{впр}}, \xi_{\nu_0+1} < Q_{\text{впр}}), \quad (15)$$

где

$$R_{\text{впр}} = \frac{1}{2} (1 + \delta_{\nu_0}) z_{\nu_0} \rho_{c\nu_0\nu_0} - \sum_{i=1}^{\nu_0} z_i [\rho_{c i \nu_0} \cos(\varphi_{0i} - \varphi_{0\nu_0} - \Delta_{\nu_0}) + \rho_{s i \nu_0} \sin(\varphi_{0i} - \varphi_{0\nu_0} - \Delta_{\nu_0})] + \\ + \sum_{i=1}^{\nu_0-1} (1 + \delta_i) z_i [\rho_{c i \nu_0} \cos(\varphi_{0i} - \varphi_{0\nu_0} + \Delta_i - \Delta_{\nu_0}) + \rho_{s i \nu_0} \sin(\varphi_{0i} - \varphi_{0\nu_0} + \Delta_i - \Delta_{\nu_0})], \quad (16)$$

$$Q_{\text{впр}} = \frac{1}{2} (1 + \delta_{\nu_0+1}) z_{\nu_0+1} \rho_{c(\nu_0+1)(\nu_0+1)} + \\ + \sum_{i=1}^{\nu_0} (1 + \delta_i) z_i [\rho_{c i \nu_0+1} \cos(\varphi_{0i} - \varphi_{0\nu_0+1} + \Delta_i - \Delta_{\nu_0+1}) + \\ + \rho_{s i \nu_0+1} \sin(\varphi_{0i} - \varphi_{0\nu_0+1} + \Delta_i - \Delta_{\nu_0+1})] - \\ - \sum_{i=1}^{\nu_0} z_i [\rho_{c i (\nu_0+1)} \cos(\varphi_{0i} - \varphi_{0\nu_0+1} - \Delta_{\nu_0+1}) + \rho_{s i (\nu_0+1)} \sin(\varphi_{0i} - \varphi_{0\nu_0+1} - \Delta_{\nu_0+1})]. \quad (17)$$

Учитывая, что ξ_{ν_0} и ξ_{ν_0+1} — гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием, единичной дисперсией и коэффициентом корреляции $\langle \xi_{\nu_0} \xi_{\nu_0+1} \rangle = \rho_{\nu_0(\nu_0+1)}$, найдём из выражения (15) формулу для вычисления укороченной вероятности (13) ошибки алгоритма (10)

$$p_t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Q_{\text{впр}}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{R_{\text{впр}} + y\rho_{\nu_0(\nu_0+1)}}{\sqrt{1 - \rho_{\nu_0(\nu_0+1)}^2}}\right) dy. \quad (18)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по ансамблю, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности.

Формула (18) имеет довольно общий характер. С её помощью можно исследовать ситуации, когда, например, с ограниченной точностью известны только амплитуды или только начальные фазы, а также ситуации, когда у части сигналов в (1) амплитуды и фазы априори известны точно. В частности, полагая в (16) и (17) $\delta_i = \Delta_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, \nu_{\text{max}}$, из (18) получаем выражение для укороченной вероятности ошибки максимально правдоподобной оценки числа радиосигналов с априори точно известными амплитудами и фазами [10, 11]:

$$p_{\nu_0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_{\nu_0+1}/2} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{z_{\nu_0}/2 + y\rho_{\nu_0(\nu_0+1)}}{\sqrt{1 - \rho_{\nu_0(\nu_0+1)}^2}}\right) dy. \quad (19)$$

2. АНАЛИЗ КВАЗИПРАВДОПОДОБНОЙ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ГАРМОНИЧЕСКИХ РАДИОСИГНАЛОВ

Рассмотрим частный случай, когда все функции множества $\{f_i(t)\}_{i=1, \dots, \nu_{\text{max}}}$ тождественно равны единице на интервале $[0, T]$ и фазовая модуляция отсутствует. Тогда радиосигналы в совокупности (1) представляют собой отрезки гармонических колебаний. Положим также, что для

любого $k = 1, \dots, \nu_{\max}$ выполняется равенство $\omega_k = k\omega$, где ω — вещественное число. Если сигналы в (1) удовлетворяют условию узкополосности (6), то выражение (8) для коэффициента корреляции между i -м и j -м сигналами запишется в виде

$$\rho_{ij} = \frac{\sin[2\pi(i-j)B]}{2\pi(i-j)B} \cos(\varphi_i - \varphi_j) + \frac{\sin^2[\pi(i-j)B]}{\pi(i-j)B} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad (20)$$

где $B = \omega T/(2\pi)$. Как видно из (20), величина B определяет коэффициент корреляции между сигналами. Например, если $i-j = 1$, $\varphi_{0i} - \varphi_{0j} = 0$ и $B = 0,3$, то $\rho_{1,2} = 0,5$, а при достаточно больших значениях B , например при $B > 15$, сигналы в совокупности (1) практически ортогональны.

Кроме этого, положим, что для любого i имеем $z_i = z$ и $\delta_i = \delta$ и для любых i и j выполняется равенство $\varphi_{0i} - \varphi_{0j} = 0$. Тогда в вероятность (18), вместо выражений (16), (17) следует подставить

$$\begin{aligned} R_{a\varphi} &= z(1+\delta) \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\nu_0-1} \rho_{ci \nu_0} \right) - z \sum_{i=1}^{\nu_0} [\rho_{ci \nu_0} \cos(\Delta) - \rho_{si \nu_0} \sin(\Delta)], \\ Q_{a\varphi} &= z(1+\delta) \left[\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\nu_0} \rho_{ci (\nu_0+1)} \right] - z \sum_{i=1}^{\nu_0} [\rho_{ci (\nu_0+1)} \cos(\Delta) - \rho_{si (\nu_0+1)} \sin(\Delta)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Для дальнейших вычислений по формулам (18) и (21) будем предполагать, что $\nu_0 = 2$, $\nu_{\max} = 3$, так что формулы (18) и (21) примут вид

$$p_t(z, B, \delta, \Delta) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Q_{a\varphi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{R_{a\varphi} + y\rho_{2,3}}{\sqrt{1-\rho_{2,3}^2}}\right) dy, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} R_{a\varphi} &= z(1+\delta) \left(\frac{1}{2} + \rho_{c1,2} \right) - z \sum_{i=1}^2 [\rho_{ci 2} \cos(\Delta) - \rho_{si 2} \sin(\Delta)], \\ Q_{a\varphi} &= z(1+\delta) \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^2 \rho_{ci 3} \right) - z \sum_{i=1}^2 [\rho_{ci 3} \cos(\Delta) - \rho_{si 3} \sin(\Delta)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Ухудшение качества оценки числа сигналов вследствие отклонения предполагаемых значений амплитуды и фазы от истинных будем характеризовать величиной $g_{a\varphi}(\delta, \Delta)$. Эта величина определяется как отношение укороченной вероятности ошибки при отклонении предполагаемых значений амплитуд и фаз сигналов от их истинных значений $p_t(z, B, \delta, \Delta)$ (22) к укороченной вероятности ошибки p_{t0} (19) при точно известных амплитудах и фазах сигналов:

$$g_{a\varphi}(\delta, \Delta) = p_t(z, B, \delta, \Delta) / p_{t0}.$$

Вначале рассмотрим случай, когда фазы радиосигналов известны точно, а амплитуды — лишь с ограниченной точностью. Тогда ухудшение качества оценки числа сигналов вследствие отклонения предполагаемых значений амплитуд от истинных будет характеризоваться величиной

$$g_a(\delta) = g_{a\varphi}(\delta, \Delta)|_{\Delta=0}.$$

На рис. 1 приведены функции $g_a(\delta)$ при ОСЦ $z = 4$ и различных значениях параметра B : кривая 1 соответствует случаю $B = 0,05$, кривая 2 — $B = 0,20$, кривая 3 — $B = 0,27$, кривая 4 — $B = 0,32$, кривая 5 — $B = 0,37$, кривая 6 — $B = 16$.

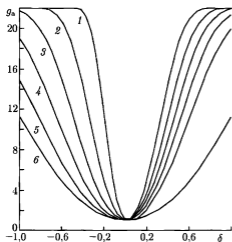


Рис. 1

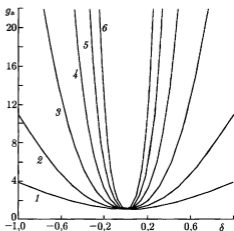


Рис. 2

Сопоставление кривых 1–6 на рис. 1 показывает относительное ухудшение качества функционирования квазиправдоподобного алгоритма оценки числа сигналов по сравнению с максимально правдоподобным алгоритмом с увеличением степени корреляции сигналов в совокупности (1).

На рис. 2 приведены функции $g_a(\delta)$ в случае ортогональных сигналов ($B = 16$) при различных значениях ОСШ z . Кривая 1 соответствует $z = 3$, кривая 2 – $z = 4$, кривая 3 – $z = 5$, кривая 4 – $z = 6$, кривая 5 – $z = 7$, кривая 6 – $z = 8$.

Сопоставление кривых 1–6 на рис. 2 показывает относительное ухудшение качества функционирования квазиправдоподобного алгоритма оценки числа сигналов вследствие отклонения предполагаемого значения амплитуд от истинного по сравнению с максимально правдоподобным алгоритмом при априори известных амплитудах по мере увеличения ОСШ.

В работе [11] выполнены синтез и анализ алгоритмов оценки числа сигналов с неизвестными амплитудами и фазами, основанных на модификациях метода максимального правдоподобия, а также получены формулы для укороченной вероятности ошибки синтезированных алгоритмов. Сравним эффективность найденных в работе [11] алгоритмов оценки числа сигналов с неизвестными амплитудами и фазами и квазиправдоподобного алгоритма оценки числа сигналов с частично неизвестными амплитудами и фазами.

Результаты этого сравнения приведены на рис. 3. Сплошной линией показана функция $g_a(\delta)$ при $B = 16$ и $z = 4$. Штриховая линия соответствует отношению укороченной вероятности ошибки при оценке числа сигналов с неизвестными амплитудами и фазами алгоритмом с обратной штрафной функцией [10, 11], основанном на модификации метода максимального правдоподобия, к укороченной вероятности ошибки при точно известных амплитудах (18), когда $B = 16$ и $z = 4$. Пунктирная линия показывает отношение укороченной вероятности ошибки при оценке числа сигналов с неизвестными амплитудами алгоритмом со случайной штрафной функцией [10, 11] к укороченной вероятности ошибки (18) при точно известных амплитудах, когда $B = 16$ и $z = 4$.

Зависимости, приведённые на рис. 3, дают возможность оценить величину априорного интервала частично неизвестных параметров, при котором квазиправдоподобный алгоритм будет обладать более высокой эффективностью, чем алгоритмы на основе модификаций метода максимального правдоподобия. Например, из рис. 3 следует, что при $B = 16$ и $z = 4$ использование

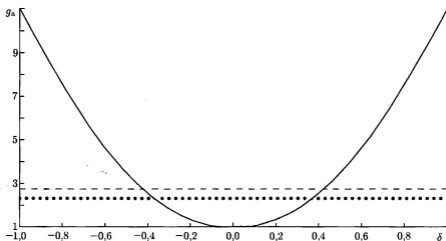


Рис. 3

квазиравдоподобного алгоритма оценки числа сигналов более целесообразно, чем использование модификаций максимально правдоподобного алгоритма, если $|\delta| < 0,4$, т. е. когда амплитуды радиосигналов известны с погрешностью не более 40%. Действительно, применение квазиравдоподобного алгоритма в этой ситуации снижает укороченную вероятность ошибки.

Теперь рассмотрим случай, когда амплитуды радиосигналов априори известны точно, а их начальные фазы известны с ограниченной погрешностью Δ . Ухудшение качества оценки числа сигналов вследствие отклонения предполагаемых значений фаз от истинных будем характеризовать величиной

$$g_{\varphi}(\Delta) = g_{\text{вп}}(\delta, \Delta)|_{\delta=0}.$$

На рис. 4 приведены функции $g_{\varphi}(\Delta)$ при ОСШ $z = 4$ и различных значениях параметра B : кривая 1 соответствует $B = 0,05$, кривая 2 — $B = 0,37$, кривая 3 — $B = 16$. Сопоставление кривых 1–3 на рис. 4 показывает относительное ухудшение качества функционирования квазиравдоподобного алгоритма оценки числа сигналов по сравнению с максимально правдоподобным алгоритмом оценки числа радиосигналов с априори известными амплитудами и фазами с увеличением степени корреляции сигналов в совокупности (1). На рис. 5 приведены функции $g_{\varphi}(\Delta)$ в случае ортогональных сигналов ($B = 16$) при различных значениях ОСШ z . Кривая 1 соответствует $z = 3$, кривая 2 — $z = 4$, кривая 3 — $z = 5$, кривая 4 — $z = 6$, кривая 5 — $z = 7$, кривая 6 — $z = 8$. Сопоставление кривых 1–6 на рис. 5 показывает относительное ухудшение качества функционирования квазиравдоподобного алгоритма оценки числа сигналов по сравнению с максимально правдоподобным алгоритмом по мере увеличения ОСШ.

На рис. 6 сплошной линией показана функция $g_{\varphi}(\Delta)$ при $B = 16$ и $z = 4$. Пунктирной линией изображено отношение укороченной вероятности ошибки при оценке числа радиосигналов с неизвестными амплитудами и фазами алгоритмом с обратной штрафной функцией [11] к укороченной вероятности ошибки при точно известных амплитудах и фазах, когда $B = 16$ и $z = 4$. Штриховой линией показано значение отношения укороченной вероятности ошибки при оценке числа сигналов с неизвестными амплитудами и фазами алгоритмом со случайной штрафной функцией [11] к укороченной вероятности ошибки при точно известных амплитудах и фазах, когда $B = 16$ и $z = 4$.

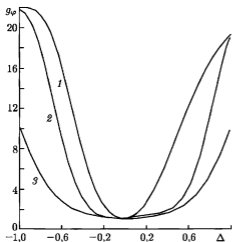


Рис. 4

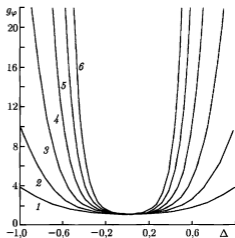


Рис. 5

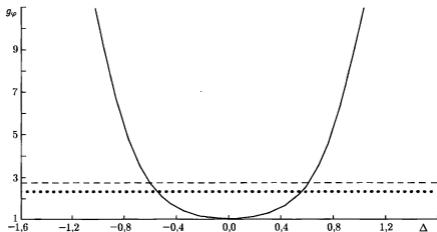


Рис. 6

Из рис. 6 следует, что при $B = 16$ и $z = 4$ использование квазиравдоподобного алгоритма оценки числа сигналов более целесообразно, чем использование модификаций максимально правдоподобного алгоритма, если $|\Delta| < 0,5$, т. е. начальная фаза известна с погрешностью не более 30° . Действительно, применение квазиравдоподобного алгоритма в этой ситуации снижает укороченную вероятность ошибки.

Наконец, исследуем общий случай, когда отклонение предполагаемых значений от истинных имеет место как для амплитуд, так и для фаз.

На рис. 7 приведены зависимости функции $g_{\text{авф}}(\delta, \Delta)|_{\Delta=\text{const}}$ при ОСШ $z = 4$, различных значениях параметра B и различных отклонениях Δ предполагаемых значений фаз от истинных. Кривые 1 соответствуют $B = 16$, кривые 2 — $B = 0,3$, сплошные кривые построены для $\Delta = \pi/16$,

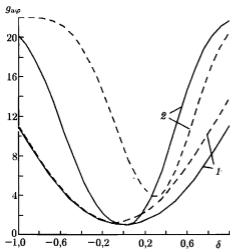


Рис. 7

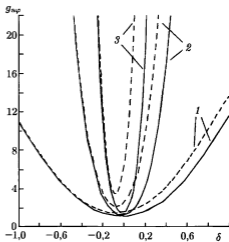


Рис. 8

штриховые кривые — для $\Delta = \pi/8$.

Из рис. 7 можно сделать вывод, что различие между предполагаемыми и истинными значениями амплитуд и фаз может существенно сказаться на качестве функционирования квазиравдоподобного алгоритма, если радиосигналы, число которых необходимо оценить, будут достаточно сильно коррелированы. Действительно, при $B = 0,3$ коэффициент корреляции между сигналами приблизительно равен 0,5. С другой стороны, при $B = 16$ принимаемые радиосигналы практически ортогональны и различие между предполагаемыми и истинными значениями амплитуд и фаз на качество функционирования квазиравдоподобного алгоритма влияет меньше.

На рис. 8 приведены функции $g_{\text{вп}}(\delta, \Delta)|_{\Delta=\text{const}}$ при $B = 16$, различных значениях ОСШ z и различных отклонениях Δ предполагаемых значений фаз от истинных. Кривые 1 соответствуют $z = 4$, кривые 2 — $z = 6$, кривые 3 — $z = 8$, сплошные кривые построены для $\Delta = \pi/16$, штриховые кривые — для $\Delta = \pi/8$. Сопоставление сплошных и штриховых кривых на рис. 8 показывает относительное ухудшение качества функционирования квазиравдоподобного алгоритма оценки числа сигналов по сравнению с максимально правдоподобным алгоритмом по мере увеличения ОСШ. На рис. 9 приведены зависимости функции $g_{\text{вп}}(\delta, \Delta)|_{\delta=\text{const}}$ при ОСШ $z = 4$, различных значениях параметра B и отклонениях δ : кривые 1 соответствуют $B = 0,3$, кривые 2 — $B = 16$, сплошные кривые построены для $\delta = 0,1$, штриховые кривые — $\delta = 0,5$.

Из рис. 9 можно сделать вывод, что различие между предполагаемыми и истинными значениями амплитуд и фаз может существенно сказаться на качестве функционирования квазиравдоподобного алгоритма, если радиосигналы, число которых необходимо оценить, имеют достаточно большой коэффициент корреляции.

На рис. 10 приведены функции $g_{\text{вп}}(\delta, \Delta)|_{\delta=\text{const}}$ при $B = 16$, различных значениях ОСШ z и различных отклонениях δ . Кривые 1 соответствуют $z = 4$, кривые 2 — $z = 8$, сплошные кривые — $\delta = 0,1$, штриховые кривые — $\delta = 0,2$.

Сопоставление сплошных и штриховых кривых на рис. 10 показывает относительное ухудшение качества функционирования квазиравдоподобного алгоритма оценки числа сигналов по сравнению с максимально правдоподобным алгоритмом оценки числа известных сигналов по мере

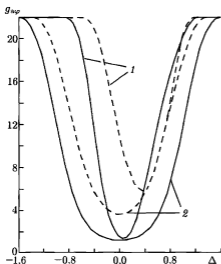


Рис. 9

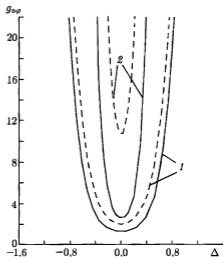


Рис. 10

увеличения ОСШ.

На рис. 11 сплошными линиями приведены зависимости $g_{вар}(\delta, \Delta)|_{\delta=\text{const}}$ от отклонения Δ предполагаемых значений фаз от истинных при $B = 16$, значениях ОСШ $z = 4$ и различных отклонениях δ . Здесь кривая 1 соответствует $\delta = 0,1$, кривая 2 — $\delta = 0,3$, кривая 3 — $\delta = 0,5$.

Для сравнения на рис. 11 также показаны значения укороченной вероятности ошибки алгоритмов из работы [11], основанных на модификациях метода максимального правдоподобия. Пунктирной линией изображено отношение укороченной вероятности ошибки при оценке числа сигналов с неизвестными амплитудами и фазами алгоритмом с обратной штрафной функцией [11] к укороченной вероятности ошибки алгоритма максимального правдоподобия при точно известных амплитудах и фазах, когда $z = 4$ и $B = 16$. Штриховой линией показано отношение укороченной вероятности ошибки при оценке числа сигналов с неизвестными амплитудами и фазами алгоритмом со случайной штрафной функцией [11] к укороченной вероятности ошибки при точно известных амплитудах и фазах, когда $z = 4$ и $B = 16$.

Зависимости, приведённые на рис. 11, дают возможность оценить величину априорного интервала возможных значений неизвестных параметров, при которой квазиправдоподобный алгоритм обладает более высокой эффективностью, чем алгоритмы на основе модификаций метода максимального правдоподобия. Например, из рис. 11 следует, что при $z = 4$ и $B = 16$ использование квазиправдоподобного алгоритма оценки числа сигналов более целесообразно, чем использование модификаций максимально правдоподобного алгоритма, если $|\delta| < 0,3$ и $|\Delta| < 0,3$. Таким образом, квазиправдоподобный алгоритм предпочтительнее, если амплитуды радиосигналов известны с погрешностью не более 30%, а фазы — с погрешностью не более 18° .

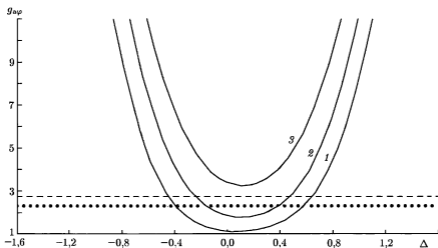


Рис. 11

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введённая укороченная вероятность ошибки оценки числа сигналов позволяет количественно охарактеризовать эффективность различных алгоритмов оценки числа сигналов. Полученные результаты дают возможность сделать обоснованный выбор между квазиравдоподобной оценкой числа сигналов и оценкой числа сигналов с помощью модификаций метода максимального правдоподобия. Показано, что, при не слишком больших величинах априорных интервалов возможных значений неизвестных параметров сигналов, квазиравдоподобная оценка числа сигналов может иметь лучшие характеристики, чем оценка, полученная с помощью модификаций метода максимального правдоподобия.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 15-11-10022).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков Л. И., Немировский М. С., Шинаков Ю. С. Системы цифровой радиосвязи. М.: Экотрендз, 2005. 392 с.
2. Флаксмат А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 12. С. 1064.
3. Манелис В. Б. // Радиотехника. 2007. № 4. С. 16.
4. El-Beheery I. N., Macphie R. H. // Anten. Propag. IEEE Trans. 1978. V. 26, No. 2. P. 294.
5. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.
6. Ратынский М. В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решётках. М.: Радио и связь, 2003. 200 с.
7. Kundu D. // J. Statist. Plan. Inference. 2000. V. 90, No. 1. P. 57.
8. Wax M., Kailath T. // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 1985. V. 33, No. 2. P. 387.

9. Логинов А. А., Морозов О. А., Семёнова Ю. М. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2013. Т. 56, № 7. С. 513.
10. Трифонов А. П., Харин А. В. // Нелинейный мир. 2013. Т. 11, № 12. С. 853.
11. Трифонов А. П., Харин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 1. С. 62.
12. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки. М.: Радио и связь, 1983. 304 с.
13. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Советское радио, 1978. 296 с.

Поступила в редакцию 26 августа 2015 г.; принята в печать 23 ноября 2016 г.

QUASI-LIKELIHOOD ESTIMATE OF THE NUMBER OF RADIO SIGNALS WITH UNKNOWN AMPLITUDES AND PHASES

A. P. Trifonov and A. V. Kharin

We perform the synthesis and analysis of the quasi-likelihood algorithm for estimating the number of signals. It is assumed that the signal parameters are known to an accuracy of up to a certain limited *a priori* interval. The estimation-algorithm efficiency is qualitatively characterized by the error probability when estimating the number of signals. The analysis results are used to consider the possibility of using the quasi-likelihood algorithm for estimating the number of the signals with partially unknown parameters.