

УДК 621.391

ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ОПТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ ИНТЕНСИВНОСТЯХ ИМПУЛЬСА И ФОНА

*А. П. Трифонов**, *А. А. Милогородский*

Воронежский госуниверситет, г. Воронеж, Россия

Выполнены синтез и анализ квазиравдоподобного и максимально правдоподобного алгоритмов оценки длительности импульса. Найдены потери в точности оценок вследствие априорного незнания интенсивностей импульса и фона.

ВВЕДЕНИЕ

Модель оптического импульса с прямоугольным профилем интенсивности используется для моделирования оптической связи и локации [1–6]. Рассмотрим оценку неизвестной длительности оптического импульса с прямоугольным профилем интенсивности. Будем считать, что на интервале времени $[0, T]$ наблюдается реализация пуассоновского процесса $\pi(t)$ с интенсивностью

$$\lambda(t) = \beta_0 s(t) + \alpha_0, \quad s(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau_0; \\ 0, & t < 0, t > \tau_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь α_0 — неизвестная интенсивность фона, β_0 — неизвестная интенсивность импульса, τ_0 — неизвестная длительность импульса, которая может принимать значения из интервала $[T_1, T_2]$, причём $0 < T_1 < T_2 < T$. Если бы были известны интенсивности фона α_0 и импульса β_0 , то для оценки длительности импульса τ_0 можно было бы использовать метод максимального правдоподобия [7], согласно которому оценка длительности определяется как положение наибольшего максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОР).

Выражение для логарифма ФОР [1, 2, 5, 6, 8] имеет вид

$$L_0(\tau) = \pi_\tau \ln(1 + \beta_0/\alpha_0) - \beta_0 \tau, \quad (2)$$

где $\pi_\tau = \int_0^\tau d\pi(t)$. Соответственно, оценка максимального правдоподобия определяется как

$$\tau_{0m} : L_0(\tau_{0m}) = \sup L_0(\tau), \tau \in [T_1; T_2]. \quad (3)$$

Однако при неизвестных длительности τ_0 , интенсивности фона α_0 и интенсивности импульса β_0 логарифм ФОР зависит от трёх неизвестных параметров:

$$L(\tau, \alpha, \beta) = \pi_\tau \ln(1 + \beta/\alpha) - \beta\tau. \quad (4)$$

При подстановке в это выражение вместо неизвестных интенсивностей импульса β и фона α некоторых их значений можно получить ряд алгоритмов оценки длительности оптического импульса (возможно, неоптимальных). Подставляемые значения интенсивностей импульса и фона могут быть фиксированными или могут определяться по реализации наблюдаемых данных. Получаемые в результате алгоритмы оценки отличаются своей эффективностью и степенью простоты аппаратной или программной реализации.

* trifonov@phys.vsu.ru

1. КВАЗИПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Одним из способов преодоления априорной параметрической неопределённости относительно интенсивностей импульса и фона является применение квазиправдоподобной оценки [9]. Для её получения необходимо заменить значения неизвестных неинформативных параметров на некоторые их предполагаемые величины.

Поскольку априори интенсивности α_0 и β_0 неизвестны, используем в выражении (2) вместо α_0 и β_0 их предполагаемые значения α^* и β^* . Тогда, вместо логарифма ФОП (2), необходимо формировать решающую статистику

$$L^*(\tau) = \pi_\tau \ln(1 + \beta^*/\alpha^*) - \beta^*\tau. \quad (5)$$

Оценка, определяемая по положению наибольшего максимума решающей статистики (5), является квазиправдоподобной [9]:

$$\tau^* : L^*(\tau^*) = \sup L^*(\tau), \tau \in [T_1; T_2]. \quad (6)$$

Очевидно, что при $\alpha^* = \alpha_0$ и $\beta^* = \beta_0$ квазиправдоподобная оценка (6) совпадает с оценкой максимального правдоподобия (3).

Квазиправдоподобную оценку длительности можно получить с помощью устройства, блок-схема которого показана на рис. 1. Последовательность коротких импульсов $\pi'(t)$ поступает на измеритель, на входе которого расположен ключ К, открывающийся на время анализа $[0, T]$. Сигнал с выхода ключа поступает на вход перемножителя, на второй вход которого подаётся величина, пропорциональная $\ln(1 + \beta^*/\alpha^*)$. Сигнал с выхода перемножителя подаётся на первый вход вычитающего устройства, на второй вход которого подаётся предполагаемое значение интенсивности импульса β^* . Сигнал с выхода вычитающего устройства поступает на вход интегратора И, где интегрируется в интервале от 0 до $t \in [0, T]$. В результате, на выходе интегратора формируется решающая статистика $L^*(t)$ (5) как функция текущего времени, которая подаётся на экстрематор Э. Он определяет положение наибольшего максимума решающей статистики при $t \in [T_1, T_2]$, т. е. момент времени $\hat{t} = \tau^*$ (6), при котором решающая статистика максимальна.

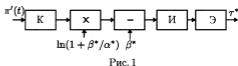


Рис. 1

Найдём характеристики квазиправдоподобной оценки (6). Для этого представим статистику (5) в виде суммы [7] сигнальной (регулярной) и шумовой (помеховой) составляющих: $L^*(\tau) = S(\tau) + N(\tau)$, где $S(\tau) = \langle L^*(\tau) \rangle$, $N(\tau) = L^*(\tau) - \langle L^*(\tau) \rangle$. Выполняя усреднение по реализациям (здесь и далее оно обозначено угловыми скобками) наблюдаемого процесса $\pi(t)$, для сигнальной функции получаем выражение

$$S(\tau) = \beta_0 \min(\tau, \tau_0) \ln(1 + \beta^*/\alpha^*) - [\beta^* - \alpha_0 \ln(1 + \beta^*/\alpha^*)]\tau. \quad (7)$$

Аналогично для шумовой функции имеем

$$N(\tau) = (\pi_\tau - \langle \pi_\tau \rangle) \ln(1 + \beta^*/\alpha^*). \quad (8)$$

Рассмотрим вначале основные свойства сигнальной функции (7). Для этого найдём её производные по τ справа и слева от истинного значения длительности τ_0 . Получаем, что сигнальная функция достигает максимума в точке τ_0 , если

$$\left. \frac{dS(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_0-0} = \alpha_0[(1+q) \ln(1+kq/\chi) - kq] = a_1 > 0, \quad (9)$$

$$-\left. \frac{dS(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_0+0} = \alpha_0[kq - \ln(1 + kq/\chi)] = a_2 > 0. \quad (10)$$

Здесь

$$q = \beta_0/\alpha_0 \quad (11)$$

— отношение сигнал/фон, $\chi = \alpha^*/\alpha_0$ характеризует отличие значения предполагаемой интенсивности фона, используемого для синтеза квазиравдоподобной оценки (6), от истинного значения интенсивности фона, а $k = \beta^*/\beta_0$ характеризует отличие предполагаемой интенсивности импульса, используемой для синтеза (6), от истинного значения интенсивности принимаемого импульса (1).

Найдём условие состоятельности оценки (6). Для того, чтобы оценка была состоятельна, необходимо, чтобы сигнальная функция (7) достигала максимума в точке τ_0 [7], т. е. выполнялись неравенства (9) и (10). Анализ этих неравенств показывает, что они выполняются, если для некоторого q при фиксированном k имеем

$$\chi_{\min}(q, k) \leq \chi \leq \chi_{\max}(q, k) \quad (12)$$

и для некоторого q при фиксированном χ

$$0 \leq k \leq k_{\max}(q, \chi). \quad (13)$$

Таким образом, при выполнении неравенств (12) и (13) оценка (6) сходится к истинному значению длительности τ_0 с ростом отношения сигнал/шум (ОСШ) [7].

Зависимости $\chi_{\min}(q, k)$ и $\chi_{\max}(q, k)$ от отношения сигнал/фон q показаны на рис. 2 (сплошными линиями при $k = 0,5$, штриховыми — при $k = 1$, штрихпунктирными — при $k = 2$). Можно видеть, что интервал допустимых значений величины χ (12) возрастает с увеличением отношения сигнал/фон q (11) и зависит от значения k .

Зависимости $k_{\max}(q, \chi)$ от отношения сигнал/фон q показаны на рис. 3 (сплошными линиями при $\chi = 0,5$, штриховыми — при $\chi = 1$, штрихпунктирными — при $\chi = 2$). Интервал допустимых значений величины k (13) возрастает с увеличением отношения сигнал/фон q (11) и уменьшается по мере роста χ .

Используя выражение для шумовой функции (8), найдём корреляционную функцию шумовой функции

$$\begin{aligned} K(\tau_1, \tau_2) &= \langle N(\tau_1)N(\tau_2) \rangle = \langle (\pi_{\tau_1} - \langle \pi_{\tau_1} \rangle)(\pi_{\tau_2} - \langle \pi_{\tau_2} \rangle) \rangle \ln^2(1 + \beta^*/\alpha^*) = \\ &= [\beta_0 \min(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \alpha_0 \min(\tau_1, \tau_2)] [\ln(1 + \beta^*/\alpha^*)]^2 = \\ &= \alpha_0 [q \min(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \min(\tau_1, \tau_2)] [\ln(1 + kq/\chi)]^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Из выражения для корреляционной функции (14) получаем значение дисперсии решающей статистики (5)

$$\sigma^2(\tau) = K(\tau, \tau) = [\beta_0 \min(\tau_0, \tau) + \alpha_0 \tau] [\ln(1 + \beta^*/\alpha^*)]^2 = \mu(\tau) [\ln(1 + kq/\chi)]^2, \quad (15)$$

где

$$\mu(\tau) = \langle \pi_{\tau} \rangle = \beta_0 \min(\tau, \tau_0) + \alpha_0 \tau \quad (16)$$

— среднее число точек наблюдаемого пуассоновского процесса на интервале $[0; \tau]$.

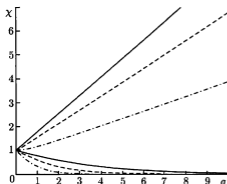


Рис. 2

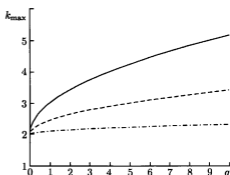


Рис. 3

Введём в рассмотрение отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе устройства обработки [7]

$$z^2 = \frac{S^2(\tau_0)}{\langle N^2(\tau_0) \rangle} = \frac{\mu_s [(1+q) \ln(1+kq/\chi) - kq]^2}{q(1+q) \ln^2(1+kq/\chi)}, \quad (17)$$

где $\mu_s = \beta_0 \tau_0$ — среднее число сигнальных точек на интервале времени, равном длительности импульса.

В дальнейшем ОСШ (17) предполагается достаточно большим, так что оценка обладает высокой апостериорной точностью [7]. Если отношение сигнал/фон весьма велико ($q \rightarrow \infty$), то ОСШ стремится к своему предельному значению

$$z^2 = \mu_s. \quad (18)$$

Следовательно, даже в отсутствие фона, ОСШ имеет не бесконечное значение, что объясняется случайным характером оптического импульса. Кроме того, согласно выражению (18), предельная величина ОСШ не зависит от большого значения отношения сигнал/фон q .

Для того, чтобы найти характеристики квазиравнодоподобной оценки (6), необходимо исследовать статистические свойства решающей статистики (5). С этой целью получим выражения для коэффициентов асимметрии и эксцесса решающей статистики.

Коэффициент асимметрии по определению имеет вид [10]

$$\gamma_1 = \mu_3 / \sigma^3, \quad (19)$$

где

$$\mu_3 = \langle (L^* - \langle L^* \rangle)^3 \rangle = \mu(\tau) [\ln(1 + \beta^*/\alpha^*)]^3. \quad (20)$$

Подставляя выражения (15) и (20) в формулу (19), получим выражение для коэффициента асимметрии

$$\gamma_1 = 1 / \sqrt{\mu(\tau)}.$$

Коэффициент эксцесса по определению есть [10]

$$\gamma_2 = \mu_4 / \sigma^4 - 3, \quad (21)$$

где

$$\mu_4 = \langle (L^* - \langle L^* \rangle)^4 \rangle = [\mu(\tau) + 3\mu^2(\tau)] [\ln(1 + \beta^*/\alpha^*)]^4. \quad (22)$$

Подставляя выражения (15) и (22) в формулу (21), получим выражение для коэффициента эксцесса

$$\gamma_2 = 1/\mu(\tau).$$

Решающую статистику можно считать асимптотически гауссовской, если γ_1, γ_2 весьма малы. При высокой апостериорной точности характеристики квазиравдоподобной оценки (6) определяются поведением решающей статистики в окрестности τ_0 . Поэтому судить о гауссовском характере решающей статистики можно по величине

$$\mu_0 = \mu(\tau_0) = (\alpha_0 + \beta_0)\tau_0. \quad (23)$$

Если $\mu_0 \gg 1$, то в окрестности точки τ_0 решающая статистика приближённо гауссовская.

Установим марковские свойства решающей статистики (5). Гауссовский процесс является марковским [11] тогда и только тогда, когда его коэффициент корреляции $R(\tau_1, \tau_3)$ удовлетворяет условию

$$R(\tau_1, \tau_3) = R(\tau_1, \tau_2)R(\tau_2, \tau_3), \quad (24)$$

где $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$.

По определению коэффициент корреляции имеет вид

$$R(\tau_1, \tau_3) = K(\tau_1, \tau_3)/[\sigma(\tau_1)\sigma(\tau_3)], \quad (25)$$

так что согласно (14) и (15) при $\tau_2 > \tau_1$

$$R(\tau_1, \tau_2) = \sqrt{\mu(\tau_1)/\mu(\tau_2)}. \quad (26)$$

Подставляя выражение (26) в условие (24), находим, что оно выполняется. Следовательно, решающую статистику (5) при больших значениях μ_0 (23) можно считать асимптотическим гауссовским марковским процессом.

Таким образом установлено, что решающая статистика (5) при больших μ_0 может быть аппроксимирована гауссовским марковским процессом. Следовательно, характеристики оценки, т. е. характеристики положения наибольшего максимума этого гауссовского марковского процесса, можно определить, используя решение уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова [12]. Для этого найдём коэффициенты сноса и диффузии решающей статистики (5), которые для гауссовского процесса имеют вид [6]

$$A = \left. \frac{dS(\tau_1)}{d\tau_1} \right|_{\tau_1=\tau+0} + \frac{[L^* - S(\tau)]}{\sigma^2(\tau)} \left. \frac{\partial K(\tau, \tau_1)}{\partial \tau_1} \right|_{\tau_1=\tau+0},$$

$$B = \left. \frac{d\sigma^2(\tau_1)}{d\tau_1} \right|_{\tau_1=\tau+0} - 2 \left. \frac{\partial K(\tau, \tau_1)}{\partial \tau_1} \right|_{\tau_1=\tau+0}. \quad (27)$$

Подставляя формулы (5), (7), (14) и (15) в выражение (27) и выполняя дифференцирование, получаем выражения для коэффициентов сноса и диффузии:

$$A = \begin{cases} a_1, & \tau < \tau_0; \\ -a_2, & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (28)$$

$$B = \begin{cases} \alpha_0(1+q)\ln^2(1+kq/\chi) = b_1, & \tau < \tau_0; \\ \alpha_0\ln^2(1+kq/\chi) = b_2, & \tau > \tau_0. \end{cases} \quad (29)$$

В работе [12], в результате решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова были найдены значения смещения и рассеяния оценки в общем виде:

$$b = \langle \tau^* - \tau_0 \rangle = \Delta \frac{z_1^2 R(R+2) - z_2^2 (2R+1)}{z_1^2 z_2^2 (R+1)^2}, \quad (30)$$

$$V = \langle (\tau^* - \tau_0)^2 \rangle = 2\Delta^2 \frac{z_1^4 R(2R^2 + 6R + 5) + z_2^4 (5R^2 + 6R + 2)}{z_1^4 z_2^4 (R+1)^3}, \quad (31)$$

где $\Delta = T_2 - T_1$, $z_1^2 = 2a_1^2 \Delta / b_1$, $z_2^2 = 2a_2^2 \Delta / b_2$, $R = a_1 b_2 / a_2 b_1$. Используя обозначения (28), (29), находим, что выражения для смещения (30) и рассеяния (31) оценки (6) принимают вид

$$b(k, \chi) = \frac{[\ln(1 + kq/\chi)]^2}{2\alpha_0(R+1)^2} \left[\frac{R(R+2)}{\eta_2^2} - \frac{2R+1}{\eta_1^2} \right], \quad (32)$$

$$V(k, \chi) = \frac{[\ln(1 + kq/\chi)]^4}{2\alpha_0^2(R+1)^3} \left[\frac{R(2R^2 + 6R + 5)}{\eta_2^4} + \frac{5R^2 + 6R + 2}{\eta_1^4} \right], \quad (33)$$

где

$$R = \frac{(1+q) \ln(1 + kq/\chi) - kq}{(1+q)[kq - \ln(1 + kq/\chi)]}, \quad \eta_1 = \frac{(1+q) \ln(1 + kq/\chi) - kq}{\sqrt{1+q}}, \quad \eta_2 = kq - \ln(1 + kq/\chi).$$

Выражения (32) и (33) были получены в работе [12] в предположении, что оценка состоятельна, т. е. с ростом её точности она сходится к истинному значению параметра. Это имеет место при выполнении условий (9) и (10).

Рассмотрим также смещение и рассеяние оценки при $\beta^* = \beta_0$ и $\alpha^* = \alpha_0$, когда квазиравдоподобная оценка переходит в максимально правдоподобную. Полагая в (32) и (33) $k = 1$ и $\chi = 1$, получаем выражения для смещения и рассеяния максимально правдоподобной оценки длительности импульса (3) при априори известных интенсивностях сигнала и фона:

$$b_0 = b(k=1, \chi=1), \quad (34)$$

$$V_0 = V(k=1, \chi=1). \quad (35)$$

Для того, чтобы охарактеризовать влияние отклонений предполагаемых значений интенсивностей импульса и фона от истинных на точность квазиравдоподобной оценки, введём в рассмотрение отношение рассеяний квазиравдоподобной и максимально правдоподобной оценок

$$r(\delta_k, \delta_\chi) = V(k, \chi) / V_0. \quad (36)$$

Здесь $V(k, \chi)$ определяется выражением (33), V_0 — выражением (35), а $\delta_k = (\beta^* - \beta_0) / \beta_0 = k - 1$ и $\delta_\chi = (\alpha^* - \alpha_0) / \alpha_0 = \chi - 1$ — относительные отклонения предполагаемых значений интенсивностей импульса и фона соответственно от истинных.

На рис. 4 приведены значения отношения рассеяний квазиравдоподобной и максимально правдоподобной оценок (36), характеризующие проигрыш в точности квазиравдоподобной оценки длительности при априори известных интенсивностях импульса и фона по сравнению с точностью максимально правдоподобной оценки. Сплошные линии показывают отношение (36) при $q=0,1$, штриховые — при $q=5$ и пунктирные — при $q=10$. Кривые 1 отвечают зависимости $r_k(\delta_k) = r(\delta_k, \delta_\chi)|_{\delta_\chi=0}$, т. е. при $\chi=1$. Эти кривые характеризуют проигрыш в точности квазиравдоподобной оценки вследствие априорного незнания интенсивности импульса при априори известной интенсивности фона. Кривые 2 показывают зависимости $r_\chi(\delta_\chi) = r(\delta_k, \delta_\chi)|_{\delta_k=0}$, т. е. при $k=1$.

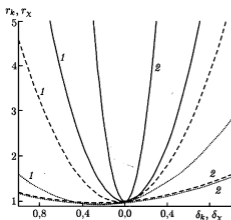


Рис. 4

ное незнание интенсивности фона, если отношение сигнал/фон больше единицы. При значениях отношения сигнал/фон, меньших единицы, в большей степени на точность квазиправдоподобной оценки влияет априорное незнание интенсивности фона.

Таким образом установлено, что априорное незнание интенсивностей импульса β и фона α может привести к существенному проигрышу в точности оценки длительности. Уменьшить этот проигрыш можно, если использовать метод максимального правдоподобия.

2. МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Согласно методу максимального правдоподобия [7], неизвестные интенсивности импульса и фона в выражении (4) необходимо заменить на их максимально правдоподобные оценки $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$.

Функционал плотности вероятности пуассоновского процесса с интенсивностью (1) при нали-

Эти кривые характеризуют проигрыш в точности квазиправдоподобной оценки вследствие априорного незнания интенсивности фона при априори известной интенсивности импульса. Из рис. 4 следует, что априорное незнание интенсивностей импульса (кривые 1) и фона (кривые 2) может привести к существенному снижению точности квазиправдоподобной оценки по сравнению с точностью максимально правдоподобной оценки при априори известных значениях интенсивностей сигнала и фона. Отметим, что с ростом отношения сигнал/фон q влияние априорного незнания интенсивностей импульса и фона на точность квазиправдоподобной оценки несколько снижается. Априорное незнание интенсивности импульса в большей степени влияет на точность квазиправдоподобной оценки, чем априорное незнание интенсивности фона, если отношение сигнал/фон больше единицы. При значениях отношения сигнал/фон, меньших единицы, в большей степени на точность квазиправдоподобной оценки влияет априорное незнание интенсивности фона.

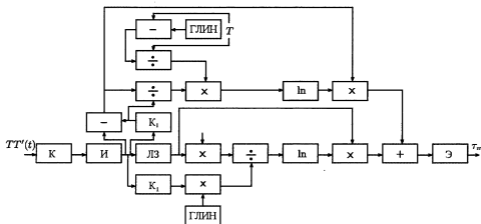


Рис. 5

чий оптического импульса имеет вид [8]

$$F[\pi(t)|\tau, \alpha, \beta] = \exp[\pi_T \ln(\alpha + \beta) + (\pi_T - \pi_\tau) \ln \alpha - \beta\tau - \alpha T]. \quad (37)$$

Соответственно, функционал плотности вероятности пуассоновского процесса при отсутствии оптического импульса, когда $\lambda(t) = \alpha$, записывается в виде

$$F_0[\pi(t)|\alpha] = F[\pi(t)|\tau, \alpha, \beta = 0] = \exp(\pi_T \ln \alpha - \alpha T). \quad (38)$$

Максимизируя функционал (37) по интенсивностям импульса и фона, а функционал (38) — по интенсивности фона и логарифмируя их отношение, получаем логарифм ФОП

$$L(\tau) = \ln\{\sup_{\alpha, \beta} F[\pi(t)|\tau, \alpha, \beta] / \sup_{\alpha} F_0[\pi(t)|\alpha]\} = \ln\{F[\pi(t)|\tau, \hat{\alpha}, \hat{\beta}] / F_0[\pi(t)|\hat{\alpha}_N]\}. \quad (39)$$

Найти максимально правдоподобные оценки $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ и $\hat{\alpha}_N$ неизвестных интенсивностей импульса и фона можно, решая систему уравнений правдоподобия

$$\begin{aligned} [\partial \ln F[\pi(t)|\tau, \alpha, \beta] / \partial \alpha]_{\alpha=\hat{\alpha}, \beta=\hat{\beta}} &= 0, & [\partial \ln F(\tau, \alpha, \beta) / \partial \beta]_{\alpha=\hat{\alpha}, \beta=\hat{\beta}} &= 0, \\ [\partial \ln F_0[\pi(t)|\alpha] / \partial \alpha]_{\alpha=\hat{\alpha}_N} &= 0. \end{aligned}$$

При фиксированном значении τ будем иметь

$$\hat{\alpha} = (\pi_T - \pi_\tau) / (T - \tau), \quad \hat{\alpha}_N = \pi_T / T, \quad \hat{\beta} = \pi_\tau / \tau - (\pi_T - \pi_\tau) / (T - \tau),$$

где $\pi_T = \int_0^T d\pi(t)$.

Тогда логарифм ФОП (39) примет вид

$$L(\tau) = \pi_\tau \ln[\pi_\tau T / (\pi_T \tau)] + (\pi_T - \pi_\tau) \ln\{(\pi_T - \pi_\tau) T / [(T - \tau) \pi_T]\}. \quad (40)$$

Следовательно, максимально правдоподобная оценка длительности оптического импульса при априори неизвестных интенсивностях импульса и фона запишется в виде

$$\tau_m : L(\tau_m) = \sup_{\tau} L(\tau), \tau \in [T_1, T_2]. \quad (41)$$

Блок-схема измерителя, реализующего максимально правдоподобную оценку длительности импульса при неизвестных интенсивностях импульса и фона, представлена на рис. 5. Здесь \ln — нелинейный преобразователь с логарифмической характеристикой $y = \ln x$, ЛЗ — линия задержки на время T , ГЛИН — генератор линейно изменяющегося напряжения, пропорционального времени t . Остальные обозначения соответствуют рис. 1.

Последовательность коротких импульсов $\pi'(t)$ поступает на измеритель, на входе которого расположен ключ, открывающийся на время анализа $[0, T]$. Сигнал с выхода ключа поступает на вход интегратора, где интегрируется в интервале от 0 до $t \in [0, T]$. Сигнал с выхода интегратора поступает на вход вычитающего устройства, на второй вход которого поступает сигнал с выхода ключа, открытого в интервале от T до $2T$. Сигнал с выхода вычитающего устройства поступает на вход делителя, на второй вход которого подаётся сигнал с выхода ключа K_1 , открытого в интервале от T до $2T$. Сигнал, величина которого пропорциональна τ , поступает с ГЛИН на один из входов вычитающего устройства, на второй вход которого подаётся постоянный сигнал, величина которого пропорциональна T . Сигнал с выхода вычитающего устройства подаётся на делитель напряжения, на второй вход которого также поступает постоянный сигнал, величина которого

пропорциональна T . Сигналы с делителей подаются на перемножитель. Сигнал с перемножителя поступает на нелинейный преобразователь с логарифмической характеристикой $y = \ln x$ и затем подаётся на один из входов перемножителя, на второй вход которого подаётся сигнал с выхода вычитающего устройства. Сигнал с выхода интегратора подаётся на ЛЗ. Сигнал с выхода ЛЗ поступает на один из входов перемножителя, на второй вход которого подаётся постоянный сигнал, пропорциональный T . Сигнал с выхода интегратора поступает на ключ K_1 , открытый в интервале от T до $2T$. Сигнал с выхода ключа подаётся на один из входов перемножителя, на второй вход которого подаётся с ГЛИН сигнал, пропорциональный τ . Сигналы с выходов перемножителей подаются на делитель. Сигнал с делителя поступает на нелинейный преобразователь с логарифмической характеристикой $y = \ln x$ и затем поступает на один из входов перемножителя, на второй вход которого подаётся сигнал с выхода ЛЗ. Сигналы с выходов перемножителей поступают на сумматор. В результате, на выходе сумматора формируется решающая статистика $L(t)$ (40), которая подаётся на экстрематор Э. Он определяет положение наибольшего максимума решающей статистики при $t \in [T + T_1, T + T_2]$ и момент $\hat{t} = T + \tau_m$ (41), при котором решающая статистика максимальна.

Найдём характеристики оценки (41). Для этого обозначим

$$L_1(\tau) = \pi_\tau / \tau, \quad (42)$$

$$L_2 = \pi_T / T, \quad (43)$$

$$L_3(\tau) = (\pi_T - \pi_\tau) / (T - \tau). \quad (44)$$

Представим вспомогательные функции (42)–(44) в виде суммы регулярной и шумовой составляющих $L_1(\tau) = S_1(\tau) + N_1(\tau)$, $L_2 = S_2 + N_2$ и $L_3(\tau) = S_3(\tau) + N_3(\tau)$. Здесь регулярная и шумовая составляющие имеют вид

$$S_1(\tau) = \langle \pi_\tau \rangle / \tau, \quad (45)$$

$$N_1(\tau) = (\pi_\tau - \langle \pi_\tau \rangle) / \tau, \quad (46)$$

$$S_2 = \langle \pi_T \rangle / T, \quad (47)$$

$$N_2 = (\pi_T - \langle \pi_T \rangle) / T, \quad (48)$$

$$S_3(\tau) = (\langle \pi_T \rangle - \langle \pi_\tau \rangle) / (T - \tau), \quad (49)$$

$$N_3(\tau) = (\pi_T - \langle \pi_T \rangle - (\pi_\tau - \langle \pi_\tau \rangle)) / T. \quad (50)$$

Выразим решающую статистику (40) через вспомогательные функции (45)–(50). Получим

$$\begin{aligned} L(\tau) &= \tau L_1(\tau) \ln[L_1(\tau)/L_2] + (T - \tau)L_3(\tau) \ln[L_3(\tau)/L_2] = \\ &= \tau[S_1(\tau) + N_1(\tau)] \ln\{[S_1(\tau) + N_1(\tau)]/(S_2 + N_2)\} + \\ &+ (T - \tau)[S_3(\tau) + N_3(\tau)] \ln\{[S_3(\tau) + N_3(\tau)]/(S_2 + N_2)\} = \\ &= \tau S_1(\tau)[1 + \delta_1(\tau)] \ln\{S_1(\tau)[1 + \delta_1(\tau)]/[S_2(1 + \delta_2)]\} + \\ &+ (T - \tau)S_3(\tau)[1 + \delta_3(\tau)] \ln\{S_3(\tau)[1 + \delta_3(\tau)]/[S_2(1 + \delta_2)]\}, \end{aligned}$$

где

$$\delta_1(\tau) = N_1(\tau)/S_1(\tau), \quad (51)$$

$$\delta_2 = N_2/S_2, \quad (52)$$

$$\delta_3(\tau) = N_3(\tau)/S_3(\tau). \quad (53)$$

Подставив в (51)–(53) выражения (45)–(50), получим явный вид процессов (51)–(53):

$$\delta_1(\tau) = \pi_\tau / \mu(\tau) - 1, \quad (54)$$

$$\delta_2 = \pi_T / \mu_T - 1, \quad (55)$$

$$\delta_3(\tau) = (\pi_T - \pi_\tau) / [\mu_T - \mu(\tau)] - 1, \quad (56)$$

где

$$\mu_T = \langle \pi_T \rangle = \alpha_0 T + \beta_0 \tau_0. \quad (57)$$

Случайные функции (54)–(56) имеют нулевые математические ожидания и средние квадраты $\langle \delta_1^2(\tau) \rangle = 1/\mu(\tau)$, $\langle \delta_2^2 \rangle = 1/\mu_T$, $\langle \delta_3^2(\tau) \rangle = 1/[\mu_T - \mu(\tau)]$. Следовательно, функции (54)–(56) можно считать малыми, если $\mu(\tau)$ (16), μ_T (57) и $\mu_T - \mu(\tau)$ велики. При высокой апостериорной точности характеристики максимально правдоподобной оценки (41) определяются поведением решающей статистики (40) в окрестности τ_0 . Очевидно, что $\mu_T > \mu_0$ (23), поэтому, если $\mu_0 \gg 1$ и $\mu_{0N} \gg 1$, где

$$\mu_{0N} = \alpha(T - \tau_0), \quad (58)$$

то функции (54)–(56) являются малыми. Разложим решающую статистику в ряд по степеням (54)–(56) и удержим лишь члены разложения первого порядка малости. Получим

$$L(\tau) = \tau S_1(\tau) [1 + \delta_1(\tau)] \{ \ln[S_1(\tau)/S_2] + \delta_1(\tau) - \delta_2 \} + \\ + (T - \tau) S_3(\tau) [1 + \delta_3(\tau)] \{ \ln[S_3(\tau)/S_2] + \delta_3(\tau) - \delta_2 \}. \quad (59)$$

Представим далее решающую статистику (59) в виде суммы сигнальной и шумовой функции $L(\tau) = S_0(\tau) + N_0(\tau)$, где сигнальная функция

$$S_0(\tau) = \langle L(\tau) \rangle = \tau S_1(\tau) \ln[S_1(\tau)] + (T - \tau) S_3(\tau) \ln[S_3(\tau)] - T S_2 \ln(S_2), \quad (60)$$

а шумовая

$$N_0(\tau) = \tau \delta_1(\tau) S_1(\tau) \{1 + \ln[S_1(\tau)]\} + (T - \tau) \delta_3(\tau) S_3(\tau) \{1 + \ln[S_3(\tau)]\} + T \delta_2 S_2 \{1 + \ln(S_2)\}. \quad (61)$$

Подставим выражения (45), (47), (49), (54) и (55) в (60) и (61) и получим окончательные выражения для сигнальной и шумовой функций

$$S_0(\tau) = \mu(\tau) \ln[\mu(\tau)T/(\mu_T\tau)] + [\mu_T - \mu(\tau)] \ln\{[\mu_T - \mu(\tau)]T/[(T - \tau)\mu_T]\}, \quad (62)$$

$$N_0(\tau) = [\pi_\tau - \mu(\tau)] \ln[\mu(\tau)T/(\mu_T\tau)] + \\ + \{(\pi_T - \mu_T) - [\pi_\tau - \mu(\tau)]\} \ln\{[\mu_T - \mu(\tau)]T/[(T - \tau)\mu_T]\}. \quad (63)$$

Найдём условие состоятельности оценки (41). Для того, чтобы оценка была состоятельна, сигнальная функция (62) должна достигать максимума в точке τ_0 [7]. Для этого необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\left. \frac{dS_0(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_0-0} = \alpha_0[(1+q)\ln(1+q) - q] = \alpha_{01} > 0, \\ - \left. \frac{dS_0(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_0+0} = \alpha_0[q - \ln(1+q)] = \alpha_{02} > 0. \quad (64)$$

Нетрудно убедиться, что эти условия выполняются при любых значениях $q > 0$.

Таким образом, при любых $q > 0$ оценка (41) сходится к истинному значению длительности τ_0 с ростом ОСШ [7].

Используя выражение для шумовой функции (63), найдём её корреляционную функцию

$$K_0(\tau_1, \tau_2) = \langle N_0(\tau_1)N_0(\tau_2) \rangle = [\beta \min(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \alpha_0 \min(\tau_1, \tau_2)]C(\tau_1)C(\tau_2) + \mu(\tau_1)C(\tau_1)G(\tau_2) + \mu(\tau_2)C(\tau_2)G(\tau_1) + \mu_T G(\tau_1)G(\tau_2), \quad (65)$$

где

$$C(\tau) = \ln\{\mu(\tau)[T - \tau] / [\mu_T - \mu(\tau)]\tau\}, G(\tau) = \ln\{[\mu_T - \mu(\tau)]T / [\mu_T(T - \tau)]\}.$$

Соответственно, дисперсия решающей статистики (59) имеет вид

$$\langle N_0^2(\tau) \rangle = \sigma_0^2(\tau) = \mu(\tau)[C^2(\tau) + 2C(\tau)G(\tau)] + \mu_T G^2(\tau). \quad (66)$$

Введём в рассмотрение ОСШ на выходе приёмника максимального правдоподобия [7]

$$z_0^2 = \frac{S_0^2(\tau_0)}{\langle N_0^2(\tau_0) \rangle} = \frac{\alpha_0 T [y(1+q) \ln(1+q) - (1+qy) \ln(1+qy)]^2}{y(1+q)[\ln(1+q)]^2 - 2y(1+q) \ln(1+q) \ln(1+qy) + (1+qy)[\ln(1+qy)]^2}, \quad (67)$$

где $y = \tau_0/T$. В дальнейшем ОСШ (67) предполагается достаточно большим, так что максимально правдоподобная оценка (41) обладает высокой апостериорной точностью.

Для того, чтобы найти характеристики оценки (41), необходимо исследовать статистические свойства решающей статистики (59). С этой целью получим выражения для коэффициентов асимметрии и эксцесса решающей статистики. Коэффициент асимметрии по определению имеет вид (19). Подставляя выражение (59) в (20), а (20) и (66) в (19), получим формулу для коэффициента асимметрии

$$\gamma_1 = \sqrt{\mu(\tau) / \{\mu_T [\mu_T - \mu(\tau)]\}}.$$

Коэффициент эксцесса по определению имеет вид (21). Подставляя выражение (59) в (22), а (22) и (66) в (21), получим выражение для коэффициента эксцесса

$$\gamma_2 = \mu(\tau) / \{\mu_T [\mu_T - \mu(\tau)]\}.$$

Решающую статистику можно считать гауссовской, если γ_1, γ_2 весьма малы. Это имеет место, когда среднее число наблюдаемых точек на интервале наблюдения велико, т. е. велики μ_0 (23) и μ_{0N} (58).

Установим марковские свойства решающей статистики (59). Гауссовский процесс является марковским [11] тогда и только тогда, когда его коэффициент корреляции $R(\tau_1, \tau_2)$ удовлетворяет условию (24). По определению коэффициент корреляции имеет вид (25). Подставив в числитель выражения (25) корреляционную функцию (65), а в знаменатель — среднеквадратические отклонения $\sigma_0(\tau)$ (66) для каждого значения аргумента, получим коэффициенты корреляции, которые совпадают с коэффициентами (26). Тогда условие (24) выполняется. Следовательно, при больших значениях ОСШ процесс (59) можно считать гауссовским марковским процессом в малой окрестности точки τ_0 . Для коэффициентов сноса A и диффузии B при $|\tau - \tau_0| = \Delta \rightarrow 0$ и $z_0^2 \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические выражения [6]

$$A = A_0 + o(\Delta), \quad B = B_0 + o(\Delta); \quad (68)$$

$$A_0 = \begin{cases} a_{01}, & \tau < \tau_0; \\ -a_{02}, & \tau > \tau_0, \end{cases}$$

$$B_0 = \begin{cases} b_{01}, & \tau < \tau_0; \\ b_{02}, & \tau > \tau_0. \end{cases} \quad (69)$$

Здесь a_{01} и a_{02} определяются выражениями (64):

$$b_{01} = \alpha_0(1+q)[\ln(1+q)]^2, \quad b_{02} = \alpha_0[\ln(1+q)]^2.$$

При этом $a_{01} = a_1(k=1, \chi=1)$, $a_{02} = a_2(k=1, \chi=1)$, а a_1 и a_2 даются выражениями (9) и (10). Соответственно $b_{01} = b_1(k=1, \chi=1)$, $b_{02} = b_2(k=1, \chi=1)$, а b_1 и b_2 определяются (29).

В условиях высокой апостериорной точности максимально правдоподобной оценки τ_m для расчёта характеристик алгоритма максимального правдоподобия необходимо обеспечить высокую точность аппроксимации характеристик логарифма ФОП в малой окрестности истинного значения параметра τ_0 . При этом точность аппроксимации характеристик выходной статистики за пределами этой окрестности не играет существенной роли [6, 7]. В дальнейшем будем аппроксимировать коэффициенты сноса A и диффузии B (68) главными членами их асимптотических разложений на всём интервале возможных значений неизвестного момента разладки, положив $A \equiv A_0$ и $B \equiv B_0$, где A_0 и B_0 определяются выражениями (69).

Таким образом, из выражений (68) и (69) следует, что асимптотические значения коэффициентов сноса и диффузии логарифма ФОП при оценке длительности импульса с неизвестными интенсивностями импульса и фона совпадают с коэффициентами сноса и диффузии (28) и (29) решающей статистики (6) при $k=1$ и $\chi=1$. Следовательно, смещение и рассеяние для максимально правдоподобной оценки (41) имеют вид $b(\tau_m) = b_0$ и $V(\tau_m) = V_0$, где b_0 и V_0 – смещения и рассеяния максимально правдоподобной оценки длительности при априори известных интенсивностях импульса и фона, определяемые из выражений (34) и (35). Поэтому характеристики оценки τ_m при неизвестных интенсивностях импульса и фона асимптотически (с ростом ОСШ) инвариантны к априорной информации о значениях интенсивности импульса и фона. Следовательно, выражения для смещения и рассеяния максимально правдоподобной оценки при априори известных (3) и при априори неизвестных (41) интенсивностях импульса и фона асимптотически совпадают для достаточно больших ОСШ (17) и (67) и определяются формулами (34) и (35). Соответственно, приведённые на рис. 4 зависимости показывают выигрыш в точности максимально правдоподобной оценки по сравнению с точностью квазиправдоподобной оценки при априори неизвестных интенсивностях импульса и фона. Так, например, при $q = 0,1$ и $|\delta_\chi| \geq 0,3$ рассеяние максимально правдоподобной оценки (41) более чем в 5 раз меньше, чем рассеяние квазиправдоподобной оценки (6).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Синтезированы квазиправдоподобный и максимально правдоподобный алгоритмы оценки длительности оптического импульса с прямоугольной формой интенсивности при априори известных значениях интенсивностей импульса и пуассоновского фона. Найдены асимптотические характеристики качества функционирования синтезированных алгоритмов. Наибольшей точностью оценки обладает максимально правдоподобный алгоритм, однако его аппаратная или программная реализация является более сложной и требует вдвое большего времени для анализа. Показано, что априорное незнание интенсивностей пуассоновских оптических импульса и фона при больших отношениях сигнал/шум асимптотически не влияет на точность максимально правдоподобной оценки длительности импульса. Полученные результаты позволяют сделать обоснованный выбор алгоритма оценки в зависимости от имеющейся априорной информации об

интенсивностях импульса и фона, а также в зависимости от требований, предъявляемых к точности оценок и степени простоты реализации алгоритма.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 15-11-10022).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шереметьев А. Г. Статистическая теория лазерной связи. М.: Связь, 1971. 264 с.
2. Волохатюк В. А., Кочетков В. М., Красовский Р. Р. Вопросы оптической локации. М.: Сов. радио, 1971. 256 с.
3. Гальярди Р. М., Карп Ш. Оптическая связь. М.: Связь, 1978. 424 с.
4. Воробьев В. И. // Оптико-механическая промышленность. 1978. № 4. С. 14.
5. Воробьев В. И. Оптическая локация для радиоинженеров. М.: Радио и связь, 1983. 176 с.
6. Овчинникова Т. М., Трифонов А. П. // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 66.
7. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978. 296 с.
8. Большаков И. А., Ракошиц В. С. Прикладная теория случайных потоков. М.: Сов. радио, 1978. 248 с.
9. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки. М.: Радио и связь, 1983. 304 с.
10. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 550 с.
11. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978. 320 с.
12. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э., Беспалова М. Б. // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 4. С. 35.

Поступила в редакцию 12 января 2016 г.; принята в печать 25 июля 2016 г.

ESTIMATION OF DURATION OF RECTANGULAR OPTICAL IMPULSE WITH UNKNOWN IMPULSE AND BACKGROUND INTENSITIES

A. P. Trifonov and A. A. Milogorodskii

Synthesis and analysis of quasi-likelihood and maximum likelihood estimation algorithms of duration were completed. Losses in accuracy of estimates due to priori unknown of impulse and background intensities were found.