

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОБНАРУЖЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ РАЗРЕЖЕННЫХ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМОВ, ОСНОВАННЫХ НА ПРИНЦИПАХ ТЕОРИИ COMPRESSIVE SENSING

В. И. Парфенов, Д. Ю. Голованов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 31.08.2017 г.

Аннотация. В статье предложены алгоритмы обнаружения дискретных разреженных сигналов с неизвестными положениями и значениями ненулевых отсчетов, построенные на принципах новой теории Compressive Sensing. Представлены результаты компьютерного моделирования этих алгоритмов и на их основе проведен анализ эффективности обнаружения. Исследовано поведение полной вероятности ошибки в зависимости от таких параметров как отношение сигнал/шум, степень сжатия и количество ненулевых отсчетов в исходном сигнале. Было установлено, что полная вероятность ошибки для предложенных алгоритмов убывает с увеличением отношения сигнал/шум и возрастает с ростом степени сжатия и числа ненулевых отсчетов в исходном сигнале.

Ключевые слова: Compressive Sensing, сверхкороткий импульс, алгоритм обнаружения, разреженный сигнал, отношение правдоподобия, Orthogonal Matching Pursuit, полная вероятность ошибки, отношение сигнал/шум.

DETECTION EFFICIENCY OF DISCRETE SPARSE SIGNALS USING ALGORITHMS BASED ON PRINCIPLES OF THE COMPRESSIVE SENSING THEORY

V. I. Parfenov, D. Y. Golovanov

Abstract. In the article detection algorithms of discrete sparse signals with unknown locations and values of nonzero samples based on principles of the new Compressive Sensing theory were proposed. The results of computer modeling of these algorithms were presented. Based on these results, analysis of detection effectiveness was implemented. Behavior of total probability of error depending on signal to noise ratio, compression level and number of nonzero elements in original signal was investigated. It was found, that total probability of error for proposed algorithms decreases with increasing signal to noise ratio and increases with increasing compression level and number of nonzero elements in original signal.

Keywords: Compressive Sensing, ultrashort pulse, detection algorithm, sparse signal, likelihood ratio, Orthogonal Matching Pursuit, total probability of error, signal to noise ratio.

ВВЕДЕНИЕ

Задача обнаружения сигналов на фоне шумов является классической задачей статистической радиофизики [1–5]. К настоящему времени разработано огромное количество алгоритмов обнаружения для различных условий наблюдения, а также предложены методики расчета характеристик их эффективности. В тоже время в некоторых случаях практическая реализация известных алгоритмов встречает существенные затруднения. Рассмотрим, например, сигнал, представляющий собой неупорядоченную последовательность K сверхкоротких импульсов (в

В. И. Парфенов, Д. Ю. Голованов

пределе, дельта-импульсов) с неизвестным временем прихода каждого из них. Применение существующих методик приводит к необходимости построения многоканального устройства, в каждом из каналов которого необходимо вычислять корреляционные интегралы. Причем количество этих каналов будет огромным – определяться числом сочетаний K импульсов из N возможных временных положений. При больших значениях N требуемое количество каналов становится настолько большим, что не позволяет осуществить практическую реализацию подобных алгоритмов. В связи с этим возникает необходимость разработки таких алгоритмов обнаружения подобных сигналов, которые бы не требовали перебора всех возможных комбинаций временных положений отдельных импульсов. И здесь полезными оказываются методы и алгоритмы, разработанные в рамках активно развивающейся в последнее время теории “сжатых измерений” (*Compressive Sensing (CS)*) [6–14].

ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ COMPRESSIVE SENSING

Рассмотрим кратко основы теории Compressive Sensing. Предположим, что у нас имеется разреженный вектор \mathbf{s} размера $N \times 1$. Под термином “разреженный” понимается следующее: сигнал $\mathbf{s} \in R^N$ является разреженным, если большинство из его элементов равны нулю, то есть $\|\mathbf{s}\|_0 \ll N$, где $\|\cdot\|_0$ – l_0 -норма, то есть количество отличных от нуля элементов. Это число ненулевых компонент, то есть величина $\|\mathbf{s}\|_0$, называется “разреженностью” сигнала \mathbf{s} . В теории *CS* решается задача

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{s}, \quad (1)$$

где $\mathbf{A} \in R^{M \times N}$, $\mathbf{s} \in R^N$, $\mathbf{y} \in R^M$, в предположении, что матрица \mathbf{A} (матрица измерений) и вектор наблюдений \mathbf{y} известны, причем $M < N$. В этом случае естественным подходом является получение разреженного решения системы (1) с использованием l_0 -нормы:

$$\hat{\mathbf{s}}_{l_0} = \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{s}\|_0, \text{ при условии, что } \mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{y}. \quad (2)$$

Однако задача (2) является слишком сложной, в частности, из-за невыпуклости l_0 -нормы. Поэтому l_0 -норму заменяют на l_1 -норму, которая уже является выпуклой, и задача превращается в следующую:

$$\hat{\mathbf{s}}_{l_1} = \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{s}\|_1, \text{ при условии, что } \mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{y}. \quad (3)$$

Подобная задача может решаться методами линейного программирования. Если присутствует шум \mathbf{n} , то в (1) необходимо \mathbf{s} заменить на $\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$ и решение (3) трансформируется известным образом [8, 9].

Отметим, что в теории *CS* матрица измерений \mathbf{A} не может быть произвольной, она должна удовлетворять определенным условиям. Наиболее часто они формулируются в виде так называемых RIP условий [8, 9]. Однако эти условия сложно проверяемы на практике. В связи с чем, было показано, что в качестве матрицы \mathbf{A} целесообразно выбирать матрицу со случайными элементами, распределенными, например, по нормальному закону, закону Бернулли и другим законам распределения.

Подчеркнем, что для решения оптимизационной задачи типа (3) наряду с методами линейного программирования [8–10], требующими большого числа вычислений, могут применяться и так называемые “грубые” алгоритмы (greedy algorithms), позволяющие существенно сократить количество используемых математических операций. К ним относятся, например, *Orthogonal Matching Pursuit (OMP)* [15, 16], *Regularized Orthogonal Matching Pursuit (ROMP)* [17], *Compressive Sensing Matching Pursuit (CoSaMP)* [18] и другие.

АЛГОРИТМЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ РАЗРЕЖЕННЫХ СИГНАЛОВ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПОЛОЖЕНИЯМИ И ЗНАЧЕНИЯМИ НЕНУЛЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПОВ ТЕОРИИ COMPRESSIVE SENSING

Итак, рассмотрим, каким образом можно применить теорию “сжатых измерений” к задаче обнаружения сигнала на фоне шума. Положим, что сигнал \mathbf{s} (размера $N \times 1$) разрежен, причем положения его ненулевых элементов (l_1, \dots, l_K) и сами эти значения априори неизвестны. Под шумом будем понимать вектор \mathbf{n} (размера $N \times 1$), элементы которого представляют собой независимые гауссовские центрированные случайные величины с дисперсией D . Введем в рассмотрение две гипотезы: H_0 , которая предполагает отсутствие сигнала, то есть входная реализация определяется как $\mathbf{x} = \mathbf{n}$, и гипотезу H_1 , при которой предполагается, что $\mathbf{x} = \mathbf{n} + \mathbf{s}$, причем у вектора \mathbf{s} неизвестны как положения, так и сами величины его ненулевых элементов. Необходимо вынести решение в пользу одной из этих гипотез. Прежде чем решать задачу обнаружения, введем в рассмотрение матрицу измерений \mathbf{A} (размера $M \times N$) со случайными элементами, строки которой являются ортонормированными. Тогда вместо вектора x получим так называемый вектор “сжатых” данных

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

размера $M \times 1$, причем $M \ll N$. Этот вектор и используется в качестве наблюдаемых данных (число элементов в нем M меньше числа элементов в исходном векторе \mathbf{x} , то есть N). Для решения сформулированной задачи воспользуемся следующим подходом. Восстановим вначале ненулевые отсчеты сигнала, а затем на их основе вынесем решение об обнаружении.

При использовании подобного подхода вначале должна быть выполнена процедура оценки временных положений и самих значений K ненулевых компонент сигнала. Для этого могут быть использованы разнообразные разработанные в теории *CS* алгоритмы. В дальнейшем был использован алгоритм *OMP* (алгоритм ортогонального согласованного поиска). Как упоминалось выше, этот алгоритм относится к широкому классу “грубых” алгоритмов восстановления и был выбран вследствие простоты реализации и невысоких вычислительных затрат при функционировании. Он является итерационным, на каждом шаге восстанавливается одно значение из числа ненулевых составляющих в исходном разреженном сигнале \mathbf{s} . Для работы алгоритма требуется знание вектора “сжатых” данных \mathbf{y} , матрицы измерений \mathbf{A} , а также критерия останова алгоритма. Условием останова алгоритма может являться достижение им в цикле заданного числа итераций. Если количество ненулевых компонент в исходном разреженном сигнале является известным, то целесообразно число итераций алгоритма выбрать равным этому количеству отличных от нуля компонент. Если же “разреженность” исходного сигнала неизвестна, то используются другие критерии останова [16]. Результатом применения подобного алгоритма будет набор оцененных индексов \hat{l}_k и значения $\hat{s}_{\hat{l}_k}$ ($k = \overline{1, K}$) ненулевых компонент вектора \mathbf{s} .

Полученные значения теперь необходимо использовать для решения задачи обнаружения. В работе [19] предложен следующий эмпирический алгоритм. Среди всех найденных оценок $\hat{s}_{\hat{l}_k}$ находится максимальное по модулю значение и далее оно сравнивается с некоторым порогом h_1 :

$$\max \left| \hat{s}_{\hat{l}_k} \right| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} h_1. \quad (4)$$

При превышении порога выносится решение в пользу гипотезы H_1 и наоборот.

Попытаемся повысить эффективность обнаружения, построив алгоритм обнаружения на основе отношения правдоподобия, в предположении, что оценки \hat{l}_k ($k = \overline{1, K}$) известны. Тогда

В. И. Парфенов, Д. Ю. Голованов

несложно показать, что алгоритм обнаружения примет вид

$$\hat{\mathbf{s}}_1^T \hat{\mathbf{s}}_1 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} h_2, \quad (5)$$

где $\hat{\mathbf{s}}_1$ – восстановленный (оцененный) по методу *OMP* вектор ненулевых компонент сигнала размера $K \times 1$, оператор T – оператор транспонирования, $\hat{\mathbf{l}} = (\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_K)$ – вектор оцененных индексов ненулевых компонент вектора \mathbf{s} .

К сожалению, вычислить теоретически вероятности ошибок первого и второго рода, а, следовательно, и пороги h_1 и h_2 для алгоритмов (4) и (5) затруднительно. В связи с этим, в дальнейшем, эти пороги определялись с помощью компьютерного моделирования из условия минимума полной вероятности ошибки [2].

На рис. 1–3 приведены результаты компьютерного моделирования алгоритмов обнаружения сигналов (4) и (5) в различных условиях. Основными параметрами, представляющими интерес, являются: отношение сигнал/шум $z = \sqrt{\sum_{i=1}^N s_i^2} / D$, отношение N/M , характеризующее степень сжатия и количество ненулевых отсчетов сигнала K . Поэтому в дальнейшем расчет полных вероятностей ошибок производился при варьировании в определенных границах именно этих параметров. Кроме того, отметим, что с целью уменьшения влияния шумов на “разреженность” исходных данных (вектора \mathbf{x}), производилось их ограничение по уровню $h_0 = 2\sqrt{D}$. Действительно, как показывают расчеты, при подобном ограничении вектора наблюдаемых данных, этот вектор в большей степени становится похожим на разреженный, а, следовательно, методы теории *CS* будут обеспечивать большую эффективность их обработки. Значение уровня h_0 , естественно, можно менять. Однако, как показывают расчеты, значение $2\sqrt{D}$ приводит в среднем к наименьшим значениям полной вероятности ошибки при всех рассмотренных значениях z , K и N/M .

На рис. 1–3 приведены зависимости полной вероятности ошибки для алгоритмов (4) (пунктирные линии) и (5) (сплошные линии) от параметров z , N/M и K соответственно. Эти зависимости были получены с помощью сплайн-аппроксимации найденных с помощью компьютерного моделирования экспериментальных значений рассматриваемых вероятностей. Рассмотрим более подробно приведенные графические зависимости.

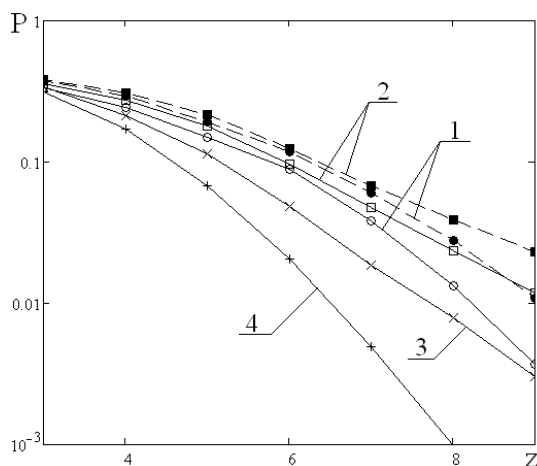


Рис. 1. Зависимость полной вероятности ошибки от отношения сигнал/шум.

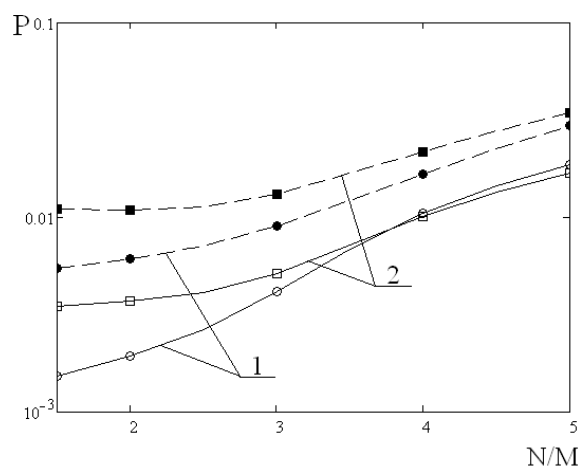


Рис. 2. Зависимость полной вероятности ошибки от степени сжатия.

На рис. 1 представлена зависимость полной вероятности ошибки от отношения сигнал/шум z . Кривые линии 1–4 получены для различных значений степени сжатия N/M и

Эффективность обнаружения дискретных разреженных сигналов...

количества ненулевых отсчетов сигнала K : кривые 1 построены при $N/M = 2$, $K = 8$, кривые 2 – при $N/M = 4$, $K = 8$, кривая 3 – при $N/M = 4$, $K = 1$ и кривая 4 – при $N/M = 2$, $K = 1$.

На рис. 2 приведена зависимость полной вероятности ошибки от степени сжатия N/M . Представленные на рисунке кривые получены для различных значений ОСШ z и количества ненулевых отсчетов сигнала K : кривые 1 построены при $z = 9$ и $K = 5$, кривые 2 – при $z = 9$, $K = 8$.

На рис. 3 приведена зависимость полной вероятности ошибки от числа ненулевых элементов в исходном сигнале K . На рисунке представлены кривые, полученные для разных значений ОСШ z и степени сжатия N/M : кривые 1 построены при $z = 7$, $N/M = 4$, кривые 2 – при $z = 7$, $N/M = 2$.

Анализ приведенных зависимостей свидетельствует о следующем. Для обоих предложенных алгоритмов полная вероятность ошибки убывает с увеличением отношения сигнал/шум, и возрастает с увеличением степени сжатия и числа ненулевых отсчетов в исходном сигнале. Отметим также, что алгоритм (5) дает равные или меньшие значения полной вероятности ошибки по сравнению с алгоритмом (4) при всех исследуемых в работе значениях z , N/M и K , тем самым обеспечивая выигрыш в эффективности обнаружения. При малых значениях K (в работе исследовался случай $K = 1$), независимо от того, какие значения принимают два других параметра (z и N/M) оба алгоритма дают примерно одинаковые значения полной вероятности ошибки. С ростом числа ненулевых элементов в сигнале K этот выигрыш наблюдается, однако не при всех значениях z и N/M . Выигрыш в эффективности алгоритма (5) по сравнению с алгоритмом (4) увеличивается с ростом отношения сигнал/шум z и числа ненулевых отсчетов K и уменьшается с ростом степени сжатия N/M при прочих равных значениях двух других параметров.

Представленные в работе графические зависимости отражают работу алгоритмов обнаружения (4) и (5) при использовании процедуры “прореживания” реализации исходных данных (вектора \mathbf{x}). То есть в векторе \mathbf{x} после применения этой процедуры сохранялись лишь те компоненты, значения которых превышали порог h_0 . Однако в работе [14] исследовались аналогичные алгоритмы без применения дополнительной процедуры “прореживания” по заранее заданному уровню. Выполним сравнение алгоритмов (4) и (5) с предварительным ограничением по уровню h_0 и без этого ограничения. Оказывается, алгоритмы (4) и (5) без “прореживания” проигрывают в эффективности тем же алгоритмам, но с применением ограничения практически при всех исследуемых в работе значениях параметров z , N/M и K , причем этот проигрыш иногда является существенным. Например, при $z = 10$, $N/M = 2$ и $K = 8$ этот проигрыш для алгоритма (5) составляет более двух порядков, а для алгоритма (4) при тех же параметрах более 30 раз. При тех же значениях z и N/M , но $K = 1$, для обоих алгоритмов этот проигрыш одинаков и составляет более 200 раз. Кроме того отметим, что проигрыш увеличивается с ростом z и уменьшается с увеличением K и N/M . Отметим также, что проигрыш для алгоритма (5) больше чем проигрыш для алгоритма (4) практически при всех значениях параметров z , N/M и K . При малых значениях K (в частности, при $K = 1$) эти

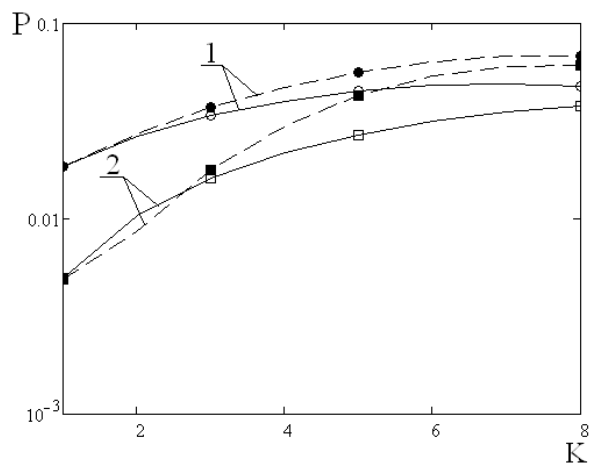


Рис. 3. Зависимость полной вероятности ошибки от числа ненулевых отсчетов сигнала.

В. И. Парфенов, Д. Ю. Голованов

проигрыши для обоих алгоритмов практически совпадают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были предложены алгоритмы обнаружения дискретных разреженных сигналов с неизвестными положениями и значениями ненулевых отсчетов, построенные на принципах новой теории *CS*, с применением процедуры дополнительного “прореживания” реализации исходных данных по заранее заданному уровню, представлены результаты компьютерного моделирования этих алгоритмов и на их основе выполнен анализ эффективности обнаружения таких сигналов. Показано, как полная вероятность ошибки зависит от таких параметров как отношение сигнал/шум, степень сжатия и количество ненулевых отсчетов в исходном сигнале, подлежащем обнаружению. В частности, было установлено, что полная вероятность ошибки для предложенных алгоритмов убывает с увеличением отношения сигнал/шум и возрастает с ростом степени сжатия и числа ненулевых отсчетов в исходном сигнале.

Таким образом, в работе предложены алгоритмы обнаружения дискретных разреженных сигналов, не требующих применения огромного количества корреляторов, как при использовании оптимальных (по методу максимального правдоподобия) алгоритмов. Действительно, несмотря на то, что оптимальные алгоритмы, естественно, обладают лучшими показателями эффективности обнаружения, чем предложенные, тем не менее они практически не реализуемы (например, если количество отсчетов $N = 128$ и количество сигналов $K = 5$, то требуемое количество каналов обработки должно превышать 17 тысяч, причем, если количество сигналов увеличивается, то резко возрастает и количество требуемых каналов обработки: при $K = 8$ количество таких каналов уже должно превышать $1,4 \cdot 10^{12}$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хелстром, К. Статистическая теория обнаружения сигналов / под ред. Ю. Б. Кобзарева : пер. с англ. Г. Ю. Кобзаревой. — М. : Иностранная литература, 1963. — 432 с.
2. Тихонов, В. И. Оптимальный прием сигналов / В. И. Тихонов. — М. : Радио и связь, 1983. — 320 с.
3. Теория обнаружения сигналов / П. С. Акимов [и др.]; под ред. П. А. Бакута. — М. : Радио и связь, 1984. — 440 с.
4. Трифонов, А. П. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / А. П. Трифонов, Е. П. Нечаев, В. И. Парфенов. — Воронеж : Издательство Воронежского государственного университета, 1991. — 246 с.
5. Шахтарин, Б. И. Обнаружение сигналов : учебное пособие для вузов / Б. И. Шахтарин. — М. : Горячая линия – Телеком, 2014. — 526 с.
6. Candes, E. An introduction to compressive sampling / E. Candes, M. Wakin // IEEE Signal Processing Magazine. — 2008. — V. 25, № 2. — P. 21–30.
7. Donoho, D. Compressed sensing / D. Donoho // IEEE Transaction on Information Theory. — 2006. — V. 52, № 4. — P. 1289–1306.
8. Eldar, S. Compressed sensing : theory and applications / S. Eldar, G. Kutyniok. — Cambridge University Press, 2012. — 555 p.
9. Foucart, S. A mathematical introduction to compressive sensing / S. Foucart, H. Rauhut. — Springer, 2013. — 625 p.
10. Abo-Zahhad, M. Compressive sensing algorithms for signal processing applications : a survey / M. Abo-Zahhad, A. Hussein, A. Mohamed // International journal of communications, network and system sciences. — 2015. — № 8. — P. 197–216.
11. Парфенов, В. И. Эффективность оценки временного положения сверхкороткого сигнала с использованием алгоритма, основанного на теории Compressive Sensing / В. И. Парфенов, Д. Ю. Голованов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 1. —

С. 27–36.

12. Парфенов, В. И. Определение незанятых частотных поддиапазонов по сжатым измерениям / В. И. Парфенов, Д. Ю. Голованов // Инфокоммуникационные технологии. — 2015. — Т. 13, № 3. — С. 305–312.

13. Парфенов, В. И. Принципы построения и анализ эффективности функционирования беспроводных сенсорных сетей на основе теории Compressive Sensing / В. И. Парфенов, Д. Ю. Голованов // Цифровая обработка сигналов. — 2016. — № 2. — С. 14–19.

14. Парфенов, В. И. Обнаружение дискретных разреженных сигналов с частотой дискретизации, не превышающей частоту Найквиста / В. И. Парфенов, Д. Ю. Голованов // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. — 2017. — № 6. — Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jun17/text.pdf> (дата обращения: 20.07.2017).

15. Tropp, J. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit / J. Tropp, A. Gilbert // IEEE Transaction on Information Theory. — 2007. — V. 53, № 12. — P. 4655–4666.

16. Cai, T. Orthogonal matching pursuit for sparse signal recovery with noise / T. Cai, L. Wang // IEEE Transaction on Information Theory. — 2011. — V. 57, № 7. — P. 4680–4688.

17. Needell, D. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit / D. Needell, R. Vershynin // IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing. — 2010. — V. 4, № 2. — P. 310–316.

18. Needell, D. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples / D. Needell, J. Tropp // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 2009. — V. 26, № 3. — P. 301–321.

19. Wang, Y. Sparse signal reconstruction via iterative support detection / Y. Wang, W. Yin // SIAM Journal on Imaging Sciences. — 2010. — V. 3, № 3. — P. 462–491.

REFERENCES

1. Helstrom C. Statistical theory of signal detection. [Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов]. Moscow, 1963, 432 p.

2. Tihonov V.I. Optimal signal reception. [Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов]. Moscow: Radio and communications, 1983, 320 p.

3. Akimov P.S., Bakut P.A., Bogdanovich V.A. Theory of signal detection. [Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. Теория обнаружения сигналов]. Moscow: Radio and communications, 1984, 440 p.

4. Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I. Detection of stochastic signal with unknown parameters. [Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами]. Voronezh: Voronezh State University Publ., 1991, 246 p.

5. Shahtarin B.I. Signal detection. [Шахтарин В.И. Обнаружение сигналов]. Moscow: Gorjachaja linija – Telecom, 2014, 526 p.

6. Candes E., Wakin M. An introduction to compressive sampling. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, vol. 25, no. 2, pp. 21–30.

7. Donoho D. Compressed sensing. IEEE Transaction on Information Theory, 2006, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306.

8. Eldar C., Kutyniok G. Compressed sensing: theory and applications. Cambridge University Press, 2012, 555 p.

9. Foucart S., Rauhut H. A mathematical introduction to compressive sensing. Springer, 2013, 625 p.

10. Abo-Zahhad M., Hussein A., Mohamed A. Compressive sensing algorithms for signal processing applications: a survey. International journal of communications, network and system sciences. 2015, no. 8, pp. 197–216.

11. Parfenov V.I., Golovanov D.Y. Efficiency of time delay estimation of ultrashort signal using algorithm based on the theory of Compressive Sensing.
12. Parfenov V.I., Golovanov D.Y. Detection of unoccupied frequency subbands on the compressed measurements. [Parfenov V.I., Golovanov D.Y. Opredelenie nezanjatyh chastotnyh poddiapazonov po szhatym izmerenijam]. *Infokommunikacionnye tehnologii – Infocommunication technologies*, 2015, vol. 13, no. 3, pp. 305–312.
13. Parfenov V.I., Golovanov D.Y. Principles of construction and effectiveness analysis of operation of wireless sensor networks based on compressive sensing theory. [Parfenov V.I., Golovanov D.Y. Principy postroenija i analiz jeffektivnosti funkcionirovanija besprovodnyh sensoryh setej na osnove teorii Compressive Sensing]. *Cifrovaja obrabotka signalov – Digital signal processing*, 2016, no. 2, pp. 14–19.
14. Parfenov V.I., Golovanov D.Y. Detection of signals with a sampling rate not exceeding the Nyquist frequency. [Parfenov V.I., Golovanov D.Y. Obnaruzhenie diskretnyh razrezhennyh signalov s chastotoj diskretizacii, ne prevyshajushhej chastotu Najkvista]. *Zhurnal radioelektroniki – Journal of radio electronics*, 2017, no. 6. Available at: <http://jre.cplire.ru/jun17/text.pdf> (Accessed 28 September 2017).
15. Tropp J., Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transaction on Information Theory*, 2007, vol. 53, no. 12, pp. 4655–4666.
16. Cai T., Wang L. Orthogonal matching pursuit for sparse signal recovery with noise. *IEEE Transaction on Information Theory*, 2011, vol. 57, no. 7, pp. 4680–4688.
17. Needell D., Vershynin R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, vol. 4, no. 2, pp. 310–316.
18. Needell D., Tropp J. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, vol. 26, no. 3, pp. 301–321.
19. Wang Y., Yin W. Sparse signal reconstruction via iterative support detection. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2010, vol. 3, no. 3, pp. 462–491.

Парфенов В.И., доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиофизики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: vip@phys.vsu.ru
Тел.: 8-908-146-69-96

Parfenov V.I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Radiophysics Chair, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: vip@phys.vsu.ru
Tel.: 8-908-146-69-96

Голованов Д.Ю., аспирант кафедры радиофизики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: golovanov@amm.vsu.ru
Тел.: 8-950-762-35-19

Golovanov D.Y., graduate student of Radiophysics Chair, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: golovanov@amm.vsu.ru
Tel.: 8-950-762-35-19