ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНКИ ШИРИНЫ СПЕКТРА СВЕРХШИРОКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

В.К. Бутейко

Получены формулы для расчета точности измерений ширины прямоугольного спектра сверширокополосного сигнала с неизвестной интенсивностью с учетом влияния величины априорного интервала значений ширины спектра.

CHARACTERISTICS ESTIMATIONS WIDTH OF THE SPECTRUM OF ULTRA-WIDEBAND SIGNAL WITH UNKNOWN INTENSITY

V.K. Buteyko

The formulas for calculating of the measurement accuracy of the rectangular spectrum width of the ultra-wideband signal with unknown intensity with allowance for influences of size of a prior interval of values of spectrum width were obtained.

ВВЕДЕНИЕ. В [1,2] представлена методика расчета потенциальной точности измерения ширины спектра импульсного сигнала. Однако, как будет показано ниже, эти соотношения справедливы, если только относительная величина априорного интервала возможных значений ширины спектра невелика. Поэтому, представляет интерес рассчитать потенциальную точность измерителей при больших значениях относительной величины априорного интервала.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. В [2,3] показано, что при относительно небольших отношениях сигнал/шум лучшее соответствие экспериментальным результатам обеспечивают "разрывные" модели сигналов. Поэтому ограничимся предположением, что на входе измерителя наблюдается реализация

$$x(t) = s(t, G_0, \Omega_0) + n(t), \ t \in [-T/2; T/2], \quad (1)$$

где $n(t)$ - гауссовский шум с односторонней спектральной плотностью N_0, а $s(t, G_0, \Omega_0)$ имеет спектр

$$G(\omega, G_0, \Omega_0) = \begin{cases} G_0, \Omega_n \le |\omega| \le \Omega_n + \Omega_0, \\ 0, |\omega| < \Omega_n, |\omega| > \Omega_n + \Omega_0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $s(t, G_0, \Omega_0)$ - полезный сигнал с априори неизвестными интенсивностью G_0 и шириной спектра $\Omega_0 \in [\Omega_1; \Omega_2]$. Полагаем, что $T > 2\pi \cdot B/(\Omega_n + \Omega_1)$, где B - база сигнала, а относительная величина априорного интервала возможных значений ширины спектра полезного сигнала $\Omega_2 / \Omega_1 >> 1$ - велика. В соответствии с определением сверхширокполосных сигналов [4] отношение $(\Omega_0 - \Omega_n)/(\Omega_0 + \Omega_n)$ может быть близко к 1.

СИНТЕЗ ИЗМЕРИТЕЛЯ. На практике как правило отсутствуют сведения об априорных распределениях неизвестных параметров и возможных потерях из-за ошибок измерений. Поэтому, для построения структуры измерителя воспользуемся методом максимального правдоподобия [1,2]. С этой целью обозначем $x(\omega)$ - спектр наблюдаемых данных и запишем логарифм функционала отношения правдоподобия (ЛФОП) неизвестных параметров [1,2]

$$M(G, \Omega) = \frac{G}{\pi N_0} \int_{\Omega_n}^{\Omega_n + \Omega} x(\omega) \cdot d\omega - \frac{G^2 \Omega}{2\pi N_0}. \quad (3)$$

Максимизируя (3) по A, получаем, что ЛФОП достигает максимума, когда

$$G = G(\Omega) = \int_{\Omega_n}^{\Omega_n+\Omega} x(\omega)\cdot d\omega / \Omega. \qquad (4)$$

При этом

$$\max M(G,\Omega) = M(\Omega) = \left(\int_{\Omega_n}^{\Omega_n+\Omega} x(\omega)\cdot d\omega \right)^2 / (2\pi N_0 \Omega). \qquad (5)$$

Таким образом, измеритель должен вырабатывать ЛФОП (5) для всех $\Omega \in [\Omega_1, \Omega_2]$ и за измеренное значение принимать Ω_m, при котором (5) достигает абсолютного максимума, т.е.

$$\Omega_m = \arg\sup(M(\Omega), \Omega \in [\Omega_1; \Omega_2]) \qquad (6)$$

- оценка максимального правдоподобия (ОМП) неизвестной ширины спектра.

АНАЛИЗ ИЗМЕРИТЕЛЯ . Методика расчета характеристик оценки (6) в условиях, когда отношение Ω_2/Ω_1 не очень велико, приведена в [2]. В частности, для смещения (систематической ошибки) d_0 и рассеяния (среднего квадрата ошибки) V_0 оценки (6) имеем асимптотически (с ростом z)

$$d_0 = 0,\ V_0 = \frac{26\Omega_0^{\ 2}}{z^4}, \qquad (7)$$

где

$$z^2 = G_0^2 \Omega_0 / \pi N_0$$

- отношение сигнал/шум для принятого колебания. Найдем характеристики ОМП (6) при условии, что $\Omega_2/\Omega_1 >> 1$. С этой целью подставим в (5) реализацию наблюдаемых данных (1):

$$M(\tau) = \frac{z^2}{2}\frac{[\min(1,l)]^2}{l} + z\frac{\min(1,l)}{l}w(l) + \frac{w^2(l)}{2l}. \qquad (8)$$

Здесь $l = \Omega/\Omega_0$ - нормированная ширина спектра сигнала (2), $w(l)$ - стандартный винеровский процесс [5]. Перейдем от l к новой переменной

$$\theta = \ln(l) = \ln(\Omega/\Omega_0).$$

Тогда для процесса $M(\theta) = M(\tau(\theta))$ (8) можно записать

$$M(\theta) = z^2 S\ \ (\theta-\theta_0)/2 + z\cdot S(\theta-\theta_0)y(\theta) + y^2(\theta)/2, \qquad (9)$$

где $\theta_0 = 0$,

$$S(\theta-\theta_0) = \exp(-|\theta-\theta_0|/2), \qquad (10)$$

а

$$y(\theta) = w(\exp(\theta))\exp(-\theta/2)$$

- стационарный гауссовский марковский процесс с моментами

$$\langle y(\theta)\rangle = 0,$$

$$K(\theta_1,\theta_2) = K(\theta_1-\theta_2) = \langle (y(\theta_1) - \langle y(\theta_1)\rangle)\cdot(y(\theta_2) - \langle y(\theta_2)\rangle)\rangle = \exp(-|\theta_1-\theta_2|/2). \qquad (11)$$

Априорный интервал возможных значений θ составит

$$\theta \in [\Theta_1, \Theta_2],\ \Theta_1 = \ln(\Omega_1/\Omega_0),\ \Theta_2 = \ln(\Omega_2/\Omega_0),$$

и его величина

$\Theta_2 - \Theta_1 = \ln(\Omega_2/\Omega_1)$ очевидно может достигать больших значений при $\Omega_2 > \Omega_1 > 0$.При этом из (11) следует, что интервал корреляции Δ процесса $y(\theta)$ ограничен и может быть много меньше величины интервала $[\Theta_1;\Theta_2]$.

Положим далее, что отношение Ω_2/Ω_1 настолько велико, что $\Delta << \Theta_2 - \Theta_1$ и разобьем область $[\Theta_1;\Theta_2]$ на две подобласти L_S и L_N. К подобласти L_S отнесем все значения $\theta \in [\Theta_1;\Theta_2]$, удовлетворяющие неравенству

$|\theta_0 - \vartheta| \le \Delta$,

а к подобласти L_N - значения $\theta \in [\Theta_1;\Theta_2]$, для которых

$|\theta_0 - \vartheta| > \Delta$.

Поскольку интервал корреляции процесса $y(\theta)$ приближенно равен длительности функции (10), то $S(\theta - \theta_0) \approx 0$ для $\theta \in L_N$, и можно приближенно положить

$$M(\theta|\theta \in L_N) = y^2(\theta)/2 = N_N(\theta),\ \theta \in L_N, \tag{12}$$

где $N_N(\theta)$ - стационарный марковский случайный процесс, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dN_N(\theta) = -N_N(\theta)\cdot d\theta + \sqrt{2N_N(\theta)}\cdot dw(\theta),$$

записанному в симметризованной форме. Здесь $w(\theta)$ - стандартный винеровский процесс. С другой стороны, если отношение сигнал/шум z не очень мало и $\theta \in L_S$, в сумме (8) можно пренебречь последним слагаемым и записать приближенно

$$M(\theta) \approx z^2 S\ \ (\theta - \theta_0)/2 + z\cdot S(\theta - \theta_0)y(\theta) = M_S(\theta),\ \theta \in L_S \tag{13}$$

Возвращаясь в этой формуле к исходной переменной $\Omega = \Omega_0 \exp(\theta)$, имеем процесс, подробно исследованный в [2,6].

Перечисленные выше свойства процесса $M(\Omega)$ (5) позволяют подобно [1,2] ввести понятия нормальных и аномальных ошибок при измерении ширины спектра сигнала (2). Обозначим L_{1S} и L_{2S} - границы области $L_S \equiv [\Theta_{1S};\Theta_{2S}]$. Этому интервалу будет соответствовать подинтервал

$$[\Omega_{1S};\Omega_{2S}] \in [\Omega_1;\Omega_2],\ \Omega_{1S} = \Omega_0 \exp(\Theta_{1S}),\ \Omega_{21S} = \Omega_0 \exp(\Theta_{2S})$$

возможных значений ширины спектра Ω. При этом оценку будем называть надежной (ошибку нормальной), если $\Omega_m \in [\Omega_{1S};\Omega_{2S}]$ - положение абсолютного максимума (6) не выходит за пределы "сигнальной" области, и ненадежной (ошибку аномальной), если $\Omega_m \notin [\Omega_{1S};\Omega_{2S}],\ \Omega_m \in [\Omega_1;\Omega_2]$. Далее, подобно [1,2], запишем смещение и рассеяние оценки ширины спектра сигнала (2) в виде

$$d(\Omega_m | \Omega_0) = P_0 \cdot d_0(\Omega_m | \Omega_0) + P_N \cdot d_N(\Omega_m | \Omega_0), \tag{14}$$

$$V(\Omega_m | \Omega_0) = P_0 \cdot V_0(\Omega_m | \Omega_0) + P_N \cdot V_N(\Omega_m | \Omega_0).. \tag{15}$$

Здесь P_0 и P_N, $(P_0 + P_N = 1)$ обозначают вероятности нормальных и аномальных ошибок соответственно, а d_0, V_0 и d_N, V_N - соответствующие смещения и рассеяния надежной и аномальной оценок. В области нормальных ошибок L_S, согласно сделанным предположениям, для d_0 и V_0 воспользуемся найденными согласно [2] формулами (7).

Перейдем далее к расчету смещения и рассеяния ненадежной оценки. Если выполняется $L_S << \Theta_2 - \Theta_1$,

то положим приближенно

$$L_N \approx \Theta_2 - \Theta_1. \tag{16}$$

Поскольку в L_N выполняется (12), и процесс $N_N(\theta)$ - стационарный, для плотности вероятности положения его абсолютного максимума получаем

$$W_N(\theta) = 1/(\Theta_2 - \Theta_1). \tag{17}$$

Переходя к первоначальной переменной $\Omega = \Omega_0 \exp(\theta)$, находим

$$W_N(\Omega) = \frac{1}{\Omega \ln(\Omega_2/\Omega_1)} \tag{18}$$

- плотность вероятности оценки в шумовой области. Эта плотность вероятности позволяет вычислить смещение и рассеяние аномальной ошибки. Имеем

$$d_N = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\ln(\Omega_2/\Omega_1)} - \Omega_0, \tag{19}$$

$$V_N = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2\ln(\Omega_2/\Omega_1)} \cdot \left(\Omega_2 + \Omega_1 - 4\Omega_0\right) + \Omega_0^2. \tag{20}$$

Найдем теперь вероятность аномальных ошибок при оценке ширины спектра сигнала (2). Пусть H_N - величина абсолютного максимума $M(\theta)$ при $\theta \in L_N$, а H_S - величина абсолютного максимума $M(\theta)$ при $\theta \in L_S$. Если область $[\Theta_1; \Theta_2]$ велика по сравнению с подобластью L_S, то случайные величины H_N и H_S можно считать приближенно независимыми [1,4]. Тогда, следуя [1,4], для вероятностей аномальных и нормальных ошибок можно записать

$$\begin{aligned} P_0 &= \int W_S(H) \cdot P_N(H) \cdot dH, \\ P_N &= \int W_N(H) \cdot P_S(H) \cdot dH, \end{aligned} \tag{21}$$

где $W_S(H)$ и $P_S(H)$ плотность вероятности и функция распределения величины абсолютного максимума в сигнальной области L_S, а $W_N(H)$ и $P_N(H)$ - тоже самое в шумовой области L_N.

Поскольку функции распределения абсолютных максимумов $P_S(H)$ и $P_N(H)$ есть вероятности не превышения процессами $M(\theta)$ при $\theta \in L_S$ и $N_N(\theta)$ фиксированного порога H на соответствующих интервалах, то для их вычисления можно использовать найденные в [2,6] формулы вероятностей ошибок обнаружения. В результате для вероятностей аномальной и нормальной ошибок можно записать

$$P_N = \int_{1/2}^{\infty} \frac{dH \cdot \ln(\Omega_2/\Omega_1)(H - 1/2)}{z\sqrt{\pi^3 \cdot H}} \cdot \exp\left[-H - \ln(\Omega_2/\Omega_1)\sqrt{\frac{H}{\pi}}\exp(-H)\right] \cdot \int_0^{\infty} d\xi_1 \int_0^H \frac{d\xi}{\sqrt{2(H-\xi)}} \cdot$$
$$\exp\left\{\xi - H - \frac{\left[\xi_1 - \xi + z^2/2\right]^2}{2z^2}\right\}\left\{1 - \exp\left[-\frac{2 \cdot \xi \cdot \xi_1}{z^2}\right]\right\}\left[\Phi\left(\frac{z^2/2 + \xi_1}{z}\right) - \exp(-\xi_1) \cdot \Phi\left(\frac{z^2/2 - \xi_1}{z}\right)\right], \tag{22}$$

$$P_0 = 1 - P_N.$$

Полученные формулы позволяют рассчитать потенциальную точность измерения ширины спектра сигнала с учетом влияния величины априорного интервала ее возможных значения.

В качестве примера на рис. 1 приведены зависимости нормированного рассеяния оценки ширины спектра сигнала от отношения сигнал/шум *z*. Сплошной кривой на рисунке нанесена зависимость рассеяния, рассчитанная по формуле (7), т.е. без учета влияния априорного интервала. Штриховой линией нанесена зависимость, рассчитанная по найденным в работе формулам (14)-(15), (19)-(22) при относительной величине априорного интервала $\Omega_2/\Omega_1 = 2\cdot 10^4$ и $\ln(\Omega_0/\Omega_1) = 5$.

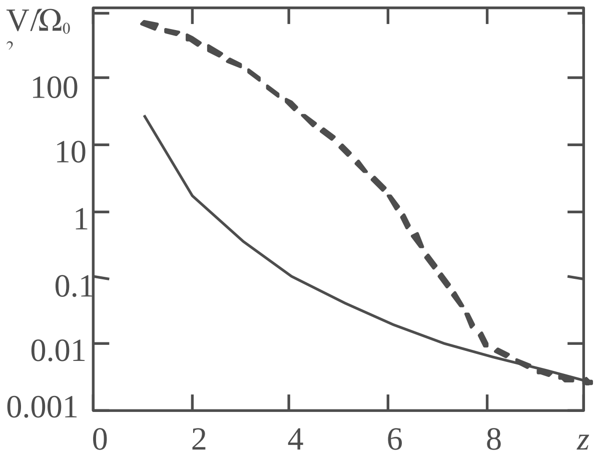

Рис. 1

Как видно из рисунка, пренебрежение величиной априорного интервала при расчете точности оценки ширины спектра приводит к отличию характеристик на порядок уже при z = 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. - М.: Сов. Радио, 1978, 296 с.
2. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. - М.: Радио и связь, 1986, 286 с. (Стат. теория связи. Вып. 26)
3. Бутейко В.К. О применимости разрывных и непрерывных математических моделей импульсных сигналов в задачах обнаружения и оценки. Воронеж, 1984, - 31 с. (Рукопись представлена Воронежским университетом. Деп. в ВИНИТИ 27.04.84 г., № 2732-84).
4. Хармут Х.Ф. Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи. - М.: Радио и связь. 1985, 376 с.
5. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. - М.: Мир, 1969, 398 с.
6. Трифонов А.П., Бутейко В.К. Прием сигнала с неизвестными амплитудой и длительностью на фоне белого шума. - Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника, 1984, т. 27, № 8, с. 28-34.

Сведения об авторе:

1. Год рождения – 1952.
2. В 1978 г. закончил Воронежский государственный университет по специальности радиофизика и электроника.
3. Кандидат физико-математических наук, диплом получил в 1985 г.
4. Доцент кафедры радиофизики Воронежского госуниверситета.
5. Область научных интересов: Применение статистических методов к передаче, приему и обработке информации в радиофизике, исследовании интеллекта.