



# РАДИОТЕХНИКА

Включен в перечень ВАК XXI век

Radioengineering

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Л.П. Андрианова, д.т.н., проф. П.А.Бакулев, д.ф.-м.н., проф. О.В. Бецкий, д.т.н., проф. А.В. Богословский, д.т.н., проф. А.Л. Бузов, д.т.н., проф. С.А. Букашкин, д.т.н., проф. Р.П. Быстров, чл.-корр. РАН В.С. Верба, д.т.н., проф. В.В. Витязев, д.т.н., проф. Э.А. Засовин, д.т.н., доцент А.В. Иванов, д.т.н., проф. Ю.Л. Козирацкий, д.ф.-м.н., проф. А.Г. Козорезов (Великобритания), к.ф.-м.н., с.н.с. В.В. Колесов (зам. главного редактора), д.ф.-м.н., проф. И.Н. Компанец, д.т.н., проф. Г.С. Кондратенков, д.т.н., проф. А.В. Коренной, д.ф.-м.н., проф. Б.Г. Кутуза, д.т.н., проф. В.И. Меркулов, д.т.н., проф. В.П. Мешанов, д.т.н., проф. В.А. Обуховец, д.т.н., проф. А.И. Перов, д.ф.-м.н. В.П. Плесский (Швейцария), д.ф.-м.н., проф. В.В. Проклов, акад. РАН В.И. Пустовойт, д.т.н., проф. В.Г. Радзиевский, д.т.н., проф. Е.М. Сухарев, д.т.н., проф. Е.Ф. Толстов, д.т.н., проф. В.Н. Ушаков, д.т.н., проф. В.Е. Фарбер, акад. РАН И.Б. Фёдоров, д.т.н., проф. В.А. Цимбал, д.т.н., проф. Ю.С. Шинаков, в.н.с. Энрико Верона (Италия), д.т.н., проф. С.В. Ягольников, д.т.н., проф. М.С. Ярлыков.

Главный редактор  
академик РАН  
Ю. В. Гуляев

## EDITORIAL BOARD:

L.P. Andrianova, Academician RAS I.B. Fedorov, Academician RAS V.I. Pustovoit, Dr.Sc. (Eng.), Corresponding Member RAS V.S. Verba, Prof. P.A. Bakulev, Dr.Sc. (Phys.-Math.), Prof. O.V. Betskii, Dr.Sc. (Eng.), Prof. A.V. Bogoslovskii, Dr.Sc. (Eng.), Prof. A.L. Buzov, Dr.Sc. (Eng.), Prof. S.A. Bukashkin, Dr.Sc. (Eng.), Prof. R.P. Bystrov, Dr.Sc. (Eng.), Prof. V.Ye. Farber, Dr.Sc. (Phys.-Math.), Prof. I.N. Kompanets, Dr.Sc. (Eng.), Prof. G.S. Kondratenkov, Dr.Sc. (Eng.), Prof. A.V. Korennoi, Dr.Sc. (Eng.), Prof. Yu.L. Koziratskii, Dr. Sc. (Phys.-Math), Prof. A.G. Kozorezov (Great Britain), Dr.Sc. (Phys.-Math.), Prof. B.G. Kutuza, Dr.Sc. (Eng.), Prof. V.I. Merkulov, Dr.Sc. (Eng.), Prof. V.P. Meshchanov, Dr.Sc. (Eng.), Prof. V.A. Obukhovets, Dr.Sc. (Eng.), Prof. V.P. Plessky (Switzerland), Dr.Sc. (Eng.), Prof. A.I. Perov, Dr.Sc. (Phys.-Math.), Prof. V.V. Proklov, Dr.Sc. (Eng.), Prof. V.G. Radzievskii, Dr.Sc. (Eng.), Prof. Yu.S. Shinakov, Dr.Sc. (Eng.), Prof. Ye.M. Sukharev, Dr.Sc. (Eng.), Prof. Ye.F. Tolstov, Dr.Sc. (Eng.), Prof. V.A. Tsimbal, Dr.Sc. (Eng.), Prof. V.N. Ushakov, Dr.Sc. (Eng.), Dr.Sc. (Eng.), Dr.Sc. (Eng.), Prof. V.V. Vityazev, Dr.Sc. (Eng.), Prof. S.V. Yagolnikov, Dr.Sc. (Eng.), Prof. M.S. Yarlykov, Dr.Sc. (Eng.), Prof. E.A. Zasovin, Dr.Sc. (Eng.), Associate Prof. A.V. Ivanov, associate researcher Enrico Verona (Italy), Ph.D. (Phys.-Math.), Senior Research Scientist V.V. Kolesov (Deputy Editor).

Editor-in-Chief,  
Academician RAS,  
Yu.V. Gulyaev

## Содержание

№ 3 март 2018 г.

### Радиосистемы: СИНТЕЗ И АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ И УСТРОЙСТВ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ (Журнал в журнале. Главный редактор – д.т.н., проф. В.Г. Карташевский)

#### Синтез и анализ систем и устройств обработки сигналов

- |  |    |
|--|----|
| Оценка длительности регулярного радиосигнала с частично неизвестными амплитудой и начальной фазой<br>Корчагин Ю.Э., Овчинникова Н.С.                         | 5  |
| Оценка величины спектральной плотности случайного сигнала с неизвестной шириной полосы частот<br>Корчагин Ю.Э., Турбин М.М.                                  | 12 |
| Синтез адаптивных блоков нелинейного преобразования следящих измерителей с учетом конечного отношения сигнал/помеха на входе<br>Артюшенко В.М., Воловач В.И. | 19 |
| Алгоритмы адаптивной нелинейной обработки сигналов блоков нелинейного преобразования с квадратурными генераторами<br>Артюшенко В.М., Воловач В.И.            | 32 |

Синтез и статистический анализ дискриминаторов следящих измерителей при воздействии аддитивных коррелированных негауссовских помех <b>Артюшенко В.М., Воловач В.И.</b>	34
Распределение ошибок синхронизации сверхширокополосных сигналов в измерителях типа дискриминатор-ограничитель <b>Радченко Ю.С.</b>	43
Повышение энергетической эффективности передачи сигналов в нелинейном радиотракте <b>Паршин Ю.Н.</b>	48
<b>Общие вопросы анализа алгоритмов и систем обработки сигналов</b>	
Оценка эффективности компенсации нелинейных искажений сигналов OFDM в нелинейных инерционных устройствах <b>Тихонов В.Ю., Шинаков Ю.С.</b>	54
Электродинамический анализ тонкопроволочных излучающих структур с поворотной симметрией <b>Табакоев Д.П., Морозов С.В., Куприянов Д.А.</b>	60
<b>Алгоритмы функционирования устройств обработки сигналов</b>	
Система OFDM для канала с памятью и быстрыми замираниями <b>Карташевский В.Г., Семенов Е.С., Слипенчук К.С., Филимонов А.А.</b>	65
<b>Схемотехника и элементная база устройств обработки сигналов</b>	
Измерение акустической скорости акустооптического кристалла в широкополосных преобразователях частоты <b>Бобрешов А.М., Коровченко И.С., Олейников А.В.</b>	70
Генератор сверхкоротких импульсов с длительным накоплением и обострителем на основе диода с накоплением заряда <b>Бобрешов А.М., Жабин А.С., Рязанцев А.Д., Степкин В.А., Усков Г.К.</b>	75
Современные методы повышения быстродействия операционных усилителей для систем на кристалле <b>Бугакова А.В., Денисенко Д.Ю., Овсепян Е.В., Прокопенко Н.Н.</b>	80
<b>Функционирование устройств обработки сигналов: прикладные вопросы</b>	
Обработка сигнала в распределенных оптоволоконных датчиках температуры на комбинационном рассеянии света: обзор новых результатов <b>Стукач О.В., Сычѳв И.В.</b>	86
<hr/>	
<b>МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РАДИОТЕХНИКЕ</b>	
Оценивание координат состояния в многодиапазонных РЛС <b>Меркулов В.И., Садовский П.А.</b>	93
<hr/>	
<b>АЛГОРИТМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ: ПЕРЕДАЧА, ПРИЕМ И ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ</b>	
Алгоритм распознавания типа воздушной цели с турбореактивным двигателем на основе модуляционных признаков <b>Надточий В.Н., Аврамов А.В., Антипов В.Н., Янковский В.Т.</b>	101
<hr/>	
<b>АНТЕННЫ, РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН И ТЕХНИКА СВЧ</b>	
Активно-пассивный сканирующий радиометр на коротких миллиметровых волнах для формирования радиоизображений и определения излучающих и отражающих свойств окружающей среды <b>Потапов А.А., Ракуть И.В.</b>	107
<hr/>	
<b>МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ В РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ</b>	
Сессионная модель управления миниатюрными специализированными технологическими комплексами <b>Найдѳнов Е.В.</b>	114
<b>Перечень книг, выпускаемых Издательством «Радиотехника»</b>	125

УДК 621.321

# Оценка величины спектральной плотности случайного сигнала с неизвестной шириной полосы частот

© Авторы, 2018

© ООО «Издательство «Радиотехника», 2018

**Ю.Э. Корчагин** – д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой радиофизики, Воронежский государственный университет  
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru

**М.М. Турбин** – магистрант, кафедра радиофизики, Воронежский государственный университет  
E-mail: turbin94@gmail.com

Рассмотрена задача оценки величины регулярной спектральной плотности гауссовского стационарного стохастического сигнала с априори неизвестной шириной полосы частот. Предложено два варианта преодоления априорной неопределенности: квазиправдоподобный алгоритм и совместная оценка максимального правдоподобия всех неизвестных параметров. Для рассматриваемых алгоритмов синтезированы схемы формирования оценки и найдены ее характеристики. Определены потери в точности оценок, возникающие вследствие априорного незнания ширины спектральной плотности полезного сигнала.

**Ключевые слова:** оценка параметра случайного сигнала, оценка величины спектральной плотности, квазиправдоподобный алгоритм, максимально правдоподобный алгоритм, характеристики оценки.

The problem of estimating the value of the spectral density of the regular spectral density of the the gaussian stationary stochastic signal with a priori unknown bandwidth is considered. Two variants for overcoming a priori uncertainty are proposed: quasi-likelihood algorithm and joint estimation of all unknown parameters. For the algorithms under consideration, structural schemes for estimating were proposed and characteristics of estimation were found. Loses in accuracy of estimation due to priory unknown of the bandwidth were defined.

**Keywords:** estimation of parameter of random signal, estimation of value of PSD, quasi-likelihood algorithm, maximum likelihood algorithm, estimation characteristics.

Задача приема стохастических сигналов, наблюдаемых на фоне шума, актуальна для многих практических приложений теории связи, локации, навигации и не раз обсуждалась в научной литературе [1–7] и др. В частности, существенный интерес вызывает задача оценки параметра спектра мощности случайного сигнала, наблюдаемого на фоне шума. Так, в [1] исследованы алгоритмы оценки ширины спектральной плотности флуктуирующего сигнала и найдены характеристики оценки. Однако довольно часто в практических приложениях неизвестной оказывается мощность принимаемого сигнала. Поэтому целесообразно рассмотреть алгоритмы оценки величины спектра мощности случайного сигнала, ширина спектра мощности которого неизвестна. В работах [3–5] исследовались оценки величины спектральной плотности сигнала, часть сопутствующих параметров которого неизвестна. Однако в них рассматривался случайный процесс, имеющий прямоугольную (разрывную) форму спектральной плотности. В [2] изучена оценка ширины регулярной (дифференцируемой) спектральной плотности сигнала с априори неизвестной величиной спектральной плотности.

Ц е л ь д а н н о й р а б о т ы – решить задачу синтеза и анализа ряда алгоритмов оценки величины регулярной спектральной плотности сигнала с неизвестной шириной спектра мощности.

## Квазиправдоподобный алгоритм

Пусть наблюдается аддитивная смесь стохастического сигнала и помехи

$$x(t) = \xi(t) + n(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где  $\xi(t)$  – гауссовский стохастический стационарный сигнал с нулевым математическим ожиданием;  $n(t)$  – гауссовский белый шум с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ .

Процесс  $\xi(t)$  имеет спектральную плотность (СП) вида  $G(\omega, \gamma_0, \Omega_0) = \gamma_0 f(\omega/\Omega_0)/2$ , где  $\gamma_0$  и  $\Omega_0$  – соответственно неизвестные величина и ширина СП сигнала;  $f(x)$  – функция, описывающая форму СП и удовлетворяющая условиям

$$f(x) \geq 0, \quad f(x) = f(-x), \quad \max_x f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = 1.$$

Положим, что ширина спектра  $\Omega_0$  принимает значения из априорного интервала  $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$  и вычисляется по формуле  $\Omega_0 = \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega, \gamma_0, \Omega_0) d\omega / \left[ \max_{\omega} G(\omega, \gamma_0, \Omega_0) \right]^2$ , представляет собой эквивалентную полосу частот стохастического сигнала, а величина СП принимает значения из априорного интервала  $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ .

Располагая наблюдаемой реализацией  $x(t)$  (1), необходимо сформировать оценку величины СП  $\gamma_0$  случайного процесса  $\xi(t)$ .

Согласно алгоритму максимального правдоподобия (МП) [1, 6], оценка величины спектральной плотности  $\gamma_m$  совпадает с положением наибольшего максимума логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОП). Однако, когда неизвестны и величина, и ширина СП, логарифм ФОП зависит от двух неизвестных параметров [1, 6]:

$$L(\gamma, \Omega) = \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_0^T x(t_1)x(t_2)\hat{Q}(t_2 - t_1, \gamma, \Omega) dt_1 dt_2 - \frac{T}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ 1 + \frac{\gamma}{N_0} f\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) \right] d\omega, \quad (2)$$

где  $\hat{Q}(t, \gamma, \Omega)$  – обратное преобразование Фурье от функции

$$Q(\omega, \gamma, \Omega) = \frac{\gamma f(\omega/\Omega) / N_0}{\gamma f(\omega/\Omega) / N_0 + 1}. \quad (3)$$

Следовательно, согласно (2) имеется априорная параметрическая неопределенность относительно ширины СП  $\Omega$ . Для преодоления этой неопределенности можно предложить два подхода: 1) использовать вместо неизвестной ширины СП  $\Omega$  некоторое ожидаемое (прогнозируемое) значение  $\Omega^*$  – полученный таким образом алгоритм будет являться квазиправдоподобным (КП) [8]; 2) максимизировать логарифм ФОП по обоим неизвестным параметрам  $\gamma$  и  $\Omega$ , то есть находить совместные оценки МП [1] неизвестных параметров  $\gamma$  и  $\Omega$ , а затем использовать только оценку величины СП.

КП-приемник формирует решающую статистику, представляющую собой логарифм ФОП (2) для некоторой ожидаемой ширины СП  $\Omega^*$  и всех возможных значений величины СП  $\gamma \in [\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ :

$$L^*(\gamma) = L(\gamma, \Omega^*) = \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_0^T x(t_1)x(t_2)\hat{Q}^*(t_2 - t_1, \gamma) dt_1 dt_2 - \frac{T}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ 1 + \frac{\gamma}{N_0} f\left(\frac{\omega}{\Omega^*}\right) \right] d\omega, \quad (4)$$

где функция  $\hat{Q}^*(t, \gamma)$  – обратное преобразование Фурье от функции  $Q^*(\omega, \gamma) = Q(\omega, \gamma, \Omega^*)$  (3).

Приемник определяет положение абсолютного максимума решающей статистики (4) и использует его в качестве КП-оценки:

$$\gamma_q = \arg \sup L^*(\gamma). \quad (5)$$

Структура КП-приемника совпадает со структурой МП-приемника при известной величине спектральной плотности с тем отличием, что величина СП  $\gamma^*$ , на которую настроен КП-приемник, не равна истинному значению величины СП  $\gamma_0$  принимаемого сигнала.

Преобразуем аналогично [6] логарифм ФОП (2) к виду  $L(\gamma, \Omega) = L_x(\gamma, \Omega) - L_c(\gamma, \Omega)$ , в котором

$$L_x(\gamma, \Omega) = \frac{1}{N_0} \int_0^T y^2(t, \gamma, \Omega) dt, \quad L_c(\gamma, \Omega) = \frac{T\Omega}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ 1 + \frac{\gamma}{N_0} f(x) \right] dx.$$

Функция  $y(t, \gamma, \Omega)$  представляет собой сигнал на выходе линейного фильтра, на вход которого подается реализация наблюдаемых данных  $x(t)$ . Передаточная функция этого фильтра  $H(\omega, \gamma, \Omega)$  удовлетворяет условию  $|H(\omega, \gamma, \Omega)|^2 = Q(\omega, \gamma, \Omega)$ . Тогда при использовании КП-алгоритма решающая статистика может быть представлена в виде  $L^*(\gamma) = L(\gamma, \Omega^*) = L_x(\gamma, \Omega^*) + L_c(\gamma, \Omega^*)$ .

Сформировать решающую статистику  $L^*(\gamma)$  на всем интервале возможных значений величины СП как непрерывную функцию  $\gamma$  не удастся. В связи с этим приходится использовать многоканальную схему приемного устройства, то есть формировать  $L^*(\gamma)$  только в конечном числе  $n_\gamma$  значений величины СП из априорного интервала  $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ . Однако такая реализация будет лишь приближенно соответствовать КП-алгоритму (или МП-алгоритму при  $\Omega^* = \Omega_0$ ). Приемник строится по многоканальной схеме, в которой каждый канал настроен на свое значение неизвестной величины СП  $\gamma_j = \gamma_{\min} + j\Delta\gamma$ ,  $\Delta\gamma = (\gamma_{\max} - \gamma_{\min}) / (n_\gamma - 1)$ ,  $j = 0, n_\gamma - 1$ , где  $n_\gamma$  – число каналов. Схема одного канала приведена на рис. 1.

В качестве оценки величины СП  $\gamma_q$  принимаются значения  $\gamma_k$ , где  $k$  – номер канала, сигнал на выходе

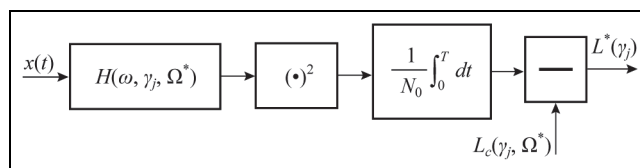


Рис. 1. Схема одного канала КП-приемника

которого максимален. Для определения характеристик КП-оценки исследуем свойства решающей статистики  $L^*(\gamma)$ . Введем в рассмотрение сигнальную составляющую [6]

$$S^*(\gamma) = \langle L^*(\gamma) \rangle = \mu_0 \chi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma f(x)}{\gamma f(x) + N_0} \left[ 1 + \frac{\gamma_0}{N_0} f(\chi x) \right] - \ln \left( 1 + \frac{\gamma_0}{N_0} f(x) \right) \right\} dx$$

и шумовую составляющую решающей статистики  $N^*(\gamma) = L^*(\gamma) - S^*(\gamma)$ , а также соответствующую ей корреляционную функцию

$$B^*(\gamma_1, \gamma_2) = \langle N^*(\gamma_1) N^*(\gamma_2) \rangle = \mu_0 \chi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1}{(\gamma_1 f(x) + N_0)} \frac{\gamma_2}{(\gamma_2 f(x) + N_0)} \left[ 1 + \frac{\gamma_0}{N_0} f(\chi x) \right]^2 dx,$$

где  $\chi = \Omega^* / \Omega_0$ ;

$$\mu_0 = T \Omega_0 / (4\pi). \tag{6}$$

Перейдем к новой переменной  $q = \gamma / N_0$  – нормированной величине СП. Так как величина  $N_0$  предполагается известной, то, зная характеристики случайной величины  $q = \gamma / N_0$ , можно найти характеристики оценки  $\gamma_q$ . При этом величина  $q$  лежит в априорном интервале  $[q_{\min}, q_{\max}]$ , где  $q_{\min} = \gamma_{\min} / N_0$ ,  $q_{\max} = \gamma_{\max} / N_0$ , а истинному значению  $\gamma_0$  соответствует величина  $q_0 = \gamma_0 / N_0$ . С учетом замены переменной, перепишем сигнальную составляющую и корреляционную функцию решающей статистики:

$$S^*(q) = \mu_0 \chi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{qf(x)}{qf(x) + 1} [1 + q_0 f(\chi x)] - \ln [1 + q_0 f(x)] \right\} dx, \tag{7}$$

$$B^*(q_1, q_2) = \mu_0 \chi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_1}{(q_1 f(x) + 1)} \cdot \frac{q_2}{(q_2 f(x) + 1)} [1 + q_0 f(\chi x)]^2 dx. \tag{8}$$

В [6] показано, что при выполнении условия  $\mu_{\min} = T \Omega_{\min} / 4\pi \gg 1$ , а, следовательно, и при  $\mu_0 \gg 1$ , решающая статистика (4) является асимптотически гауссовским случайным процессом. В этом случае для асимптотически полного вероятностного описания решающей статистики достаточно знать ее математическое ожидание (сигнальную составляющую) (7) и корреляционную функцию (8). Необходимо заметить, что ввиду неоптимальности построения приемного устройства максимум сигнальной функции  $S^*(q)$  в общем случае не совпадает с истинным значением  $q_0$ , то есть

$$\tilde{q} = \arg \sup S^*(q) \neq q_0. \tag{9}$$

Положение максимума сигнальной составляющей может быть найдено из решения уравнения

$$S_1(q) \Big|_{\tilde{q}} = 0, \tag{10}$$

где

$$S_1(q) = \frac{dS^*(q)}{dq} = \mu_0 \chi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{[1 + qf(x)]^2} [q_0 f(\chi x) - qf(x)] dx. \tag{11}$$

При этом из (10) и (11) видно, что при фиксированном  $q_0$  положение максимума сигнальной функции зависит от величины расстройки  $\chi$ :

$$\tilde{q} = \tilde{q}(\chi | q_0), \tag{12}$$

а при  $\chi = 1$  совпадает с истинным значением  $\tilde{q} = q_0$ .

Приближенное выражение для положения максимума сигнальной функции можно получить, разложив функцию (7) в ряд Тейлора по  $q$  в окрестности точки  $q_0$ . Ограничившись первыми тремя членами разложения, получим

$$S^*(q) = S^*(q_0) + S_1(q_0)(q - q_0) + S_2(q_0)(q - q_0)^2 / 2, \text{ где } S_2(q) = \frac{d^2 S^*(q)}{dq^2} = \mu_0 \chi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) \frac{qf(x) - 2q_0 f(\chi x) - 1}{[1 + qf(x)]^3} dx.$$

Следовательно, с учетом (10) имеем приближенное положение максимума функции  $S^*(q)$ :

$$\tilde{q}_a = q_0 - S_1(q_0) / S_2(q_0). \tag{13}$$

Для нахождения характеристик оценки применим метод малого параметра [1, 6], заключающийся в поиске решения уравнения

$$\left[ dL^*(q)/dq \right]_{q_q} = \left[ dS^*(q)/dq + dN^*(q)/dq \right]_{q_q} = 0 \tag{14}$$

в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon = 1/z$ , где  $z^2 = S^{*2}(\tilde{q})/B^*(\tilde{q}, \tilde{q})$  – отношение сигнал/шум (ОСШ). Полагая  $z^2$  достаточно большим (что можно обеспечить увеличением  $\mu_0$ ), разложим левую часть уравнения (14) в ряд по  $q$  в окрестности точки  $\tilde{q}$ . Группируя члены с одинаковой степенью  $\varepsilon$  и ограничиваясь первым приближением, получим  $q_q = q_0 + q_1$ , где  $q_1 = -\left( \frac{dN^*(q)}{dq} \right)_{\tilde{q}} / \left( \frac{d^2S^*(q)}{dq^2} \right)_{\tilde{q}}$ .

В результате для условных смещения и дисперсии КП-оценки получим

$$b(q_q | q_0, \Omega_0) = \langle q_q - q_0 \rangle = \tilde{q} - q_0, \quad D(q_q | q_0, \Omega_0) = \langle (q_q - \langle q_q \rangle)^2 \rangle = m^2(\tilde{q}) / S_2^2(\tilde{q}) \tag{15}, (16)$$

где

$$m^2(q) = \left( \frac{\partial^2 B^*(q_1, q_2)}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_{q_1=q_2=q} = \mu_0 \chi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) \frac{[1 + q_0 f(\chi x)]^2}{[1 + qf(x)]^4} dx.$$

Согласно (15) оценка  $q_q$  является несостоятельной. Для расчета смещения и дисперсии КП-оценки  $\gamma_q$  необходимо полученные выражения  $b(q_q | q_0)$  (15) и  $D(q_q | q_0)$  (16) для КП-оценки нормированной величины СП  $q_q$  умножить соответственно на  $N_0$  и  $N_0^2$ .

Рассмотренный КП-алгоритм оценки величины СП при неизвестной ширине СП переходит в алгоритм МП при известной ширине СП, если выбранное предполагаемое значение ширины СП совпадает с истинным значением, то есть  $\gamma_{m0} = \arg \sup L(\gamma, \Omega_0)$ ,  $\Omega^* = \Omega_0$ . При этом положение максимума сигнальной составляющей совпадает с истинным значением. Поэтому оценка МП  $\gamma_{m0}$  величины СП является несмещенной. Для дисперсии и рассеяния оценки нормированной величины СП  $q_{m0} = \gamma_{m0} / N_0$ , положив в (16)  $\chi = 1$ ,  $\tilde{q} = q_0$ , получим  $D(q_{m0} | q_0) = V(q_{m0} | q_0) = m_0^{-2}$ , где

$$m_0^2 = \mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(x)}{[1 + q_0 f(x)]^2} dx.$$

В качестве примера рассмотрим оценку величины СП сигнала, форма СП которого имеет вид

$$f(x) = [1 + (\pi x/2)^2]^{-1}. \tag{17}$$

Отличие ожидаемой ширины СП  $\Omega^*$  от истинного значения будем характеризовать величиной относительной расстройки  $\delta\Omega = (\Omega^* - \Omega_0) / \Omega_0 = \chi - 1$ . Рассмотрим зависимость относительного смещения оценки

$$\delta\gamma = b(\gamma_q | \gamma_0) / \gamma_0 = b(q_q | q_0) / q_0 \tag{18}$$

от величины расстройки приемника  $\chi$ . Положение максимума сигнальной составляющей  $\tilde{q}$  может быть найдено либо по приближенной формуле (13), либо из решения уравнения (10). В первом случае, подставляя полученное значение положения максимума сигнальной составляющей в (15) и (18), получим приближенное значение относительного смещения  $\delta\gamma_a$ . Во втором случае получим точное значение относительного смещения  $\delta\gamma$ .

На рис. 2 и 3 построены графики зависимости величин  $\delta\gamma$  и  $\delta\gamma_a$  от расстройки  $\delta\Omega$  для значений  $q_0 = 0,2$  и  $q_0 = 2$  соответственно, из которых следует, что положение максимума сигнальной функции смещается с ростом величины расстройки  $\delta\Omega$  тем сильнее, чем больше  $q_0$ . Кроме того, область возможных значений рас-

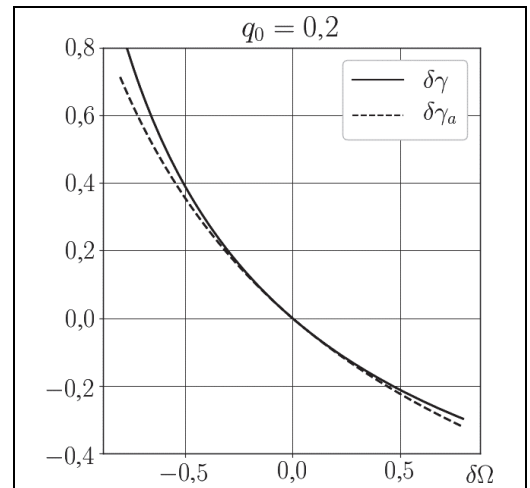


Рис. 2. Графики смещения КП-оценки при  $q_0 = 0,2$

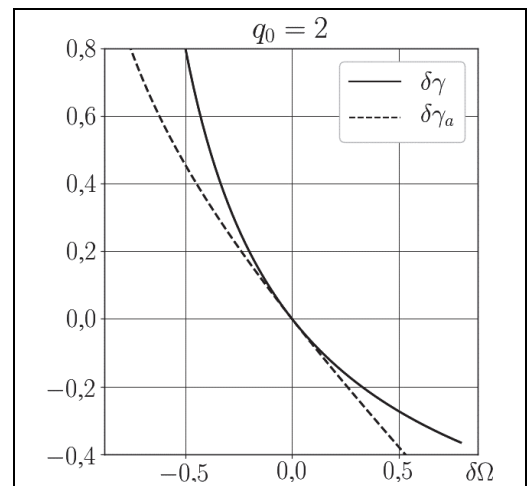


Рис. 3. Графики смещения КП-оценки при  $q_0 = 2$

стройки, в которой точное и приближенное значения смещений дают примерно одинаковый результат, уменьшается с ростом  $q_0$ . Так, при  $q_0 = 0,2$  приближенная формула отличается от точной не более чем на 10%, если  $\Omega^*$  отклоняется от  $\Omega_0$  не более чем на 50%. В то же время при  $q_0 = 2$  такую же точность можно получить, если  $\delta\Omega < 25\%$ .

Введем в рассмотрение величину нормированного рассеяния  $v_q(\delta\Omega, q_0, \mu_0) = \frac{V(\gamma_q | \gamma_0, \Omega_0)}{V(\gamma_{m0} | \gamma_0)} = \frac{q_0^2 \delta\gamma^2 + D(q_q | q_0, \Omega_0)}{D(q_{m0} | q_0)^*}$ ,

которая характеризует точность КП-оценки  $\gamma_q$  (5) по сравнению с точностью МП-оценки  $\gamma_{m0}$ . Дисперсии КП и МП оценок величины СП  $D(q_q | q_0, \Omega_0)$  (16) и  $D(q_{m0} | q_0)$  для сигнала, форма СП которого имеет вид (17), будут определяться формулами

$$D(q_q | q_0, \Omega_0) = \frac{\pi}{2\mu_0 \chi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \frac{\alpha^2(x, q_0, 0, \chi)}{\alpha^4(x, q_0, \delta\gamma, 0)} dx \right] \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \frac{2\alpha(x, q_0, 0, \chi) - \alpha(x, q_0, \delta\gamma, 0)}{\alpha^3(x, q_0, \delta\gamma, 0)} dx \right]^{-2}, \quad (19)$$

$$D(q_{m0} | q_0) = \frac{\pi}{2\mu_0} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \alpha^{-2}(x, q_0, 0, 0) dx \right]^{-1} = \frac{(1+q_0)^{3/2}}{\mu_0}, \quad (20)$$

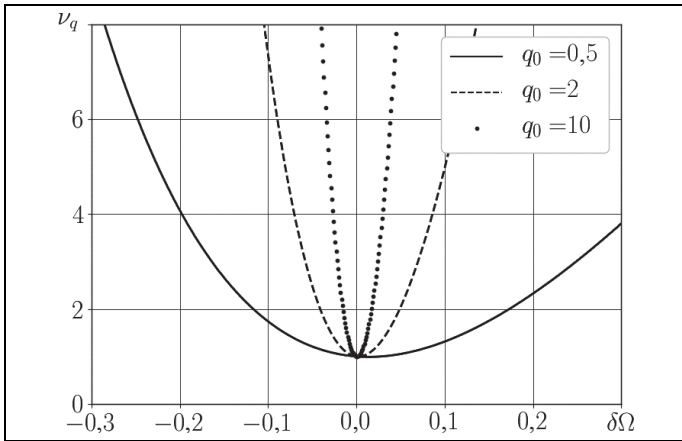


Рис. 4. Графики нормированного рассеяния КП-оценки

где  $\alpha(x, q_0, \delta\gamma, \chi) = 1 + q_0(\delta\gamma + 1) / [1 + (\delta\Omega + 1)^2 x^2]$ .

На рис. 4 показана зависимость нормированного рассеяния  $v_q$  от величины расстройки  $\delta\Omega$  при  $\mu_0 = 100$  для значений  $q_0 = 0,5$ ,  $q_0 = 2$  и  $q_0 = 10$ . Из рис. 4 видно, что с увеличением расстройки приемника быстро растет рассеяние оценки. При этом чем больше  $q_0$ , тем рассеяние растет быстрее. Кроме того, в случае  $\Omega^* > \Omega_0$  рассеяние растет медленнее, чем при  $\Omega^* < \Omega_0$ . Наличие отклонения значения ожидаемой ширины СП от ее истинного значения приводит к существенному ухудшению точности оценки величины СП стохастического сигнала.

### Максимально правдоподобный алгоритм

Для улучшения точности оценки величины СП можно применить МП-алгоритм, основанный на замене неизвестной ширины СП ее оценкой МП [1]. Тогда МП-алгоритм должен определять положение абсолютного (наибольшего) максимума логарифма ФОП  $\gamma_m = \arg \sup L(\gamma)$ , где функция

$$L(\gamma) = L(\gamma, \Omega_m) = \sup_{\Omega} L(\gamma, \Omega) \quad (21)$$

представляет собой логарифм ФОП (2), в котором вместо неизвестной ширины СП используется ее оценка МП  $\Omega_m$ , что равносильно максимизации (2) по  $\Omega$ .

Получить функцию (21) в явном виде в общем случае не удастся. Поэтому приемник должен определять положение максимума случайного поля  $L(\gamma, \Omega)$ , что приводит к необходимости использования многоканальной схемы не только по  $\gamma$ , но и по  $\Omega$ . Многоканальный приемник должен формировать логарифм ФОП для  $n_\Omega$  значений  $\Omega$  при постоянной величине СП  $\gamma$  и для  $n_\gamma$  значений  $\gamma$  при постоянной ширине СП  $\Omega$ . Таким образом, МП измеритель величины СП имеет  $n_\gamma n_\Omega$  каналов. В каждом канале формируется логарифм ФОП для дискретных значений  $\gamma_j$  и  $\Omega_i$  из априорных интервалов  $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$  и  $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$ , где

$$\gamma_j = \gamma_{\min} + j\Delta\gamma, \Delta\gamma = (\gamma_{\max} - \gamma_{\min}) / (n_\gamma - 1), j = \overline{0, n_\gamma - 1}, \quad \Omega_i = \Omega_{\min} + i\Delta\Omega, \Delta\Omega = (\Omega_{\max} - \Omega_{\min}) / (n_\Omega - 1), i = \overline{0, n_\Omega - 1}.$$

Схема одного канала с индексами  $(j, i)$  аналогична схеме формирования КП-оценки, показанной на рис. 1, с тем отличием, что передаточную функцию фильтра  $H(\omega, \gamma^*, \Omega_j)$  на рис. 1 необходимо заменить на  $H(\omega, \gamma_j, \Omega_i)$ , а величину  $L_c(\gamma^*, \Omega_i)$  — на  $L_c(\gamma_j, \Omega_i)$ . В качестве МП-оценки величины СП  $\gamma_m$  принимаются значения  $\gamma_j$ , соответствующее каналу, выходной сигнал которого наибольший.

Определим характеристики совместного МП-алгоритма оценки. Сигнальная составляющая в этом случае имеет вид

$$S(\gamma, \Omega) = \langle L(\gamma, \Omega) \rangle = \frac{T\Omega}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma f(x)}{\gamma f(x) + N_0} \left[ 1 + \frac{\gamma_0}{N_0} f\left(\frac{\Omega}{\Omega_0} x\right) \right] - \ln \left[ 1 + \frac{\gamma}{N_0} f(x) \right] \right\} dx.$$

В [1] показано, что оценка МП при увеличении ОСШ является асимптотически несмещенной и эффективной. Определим дисперсию эффективной оценки. Для этого запишем информационную матрицу Фишера [7]

$$\hat{I} = - \begin{pmatrix} S_{2\Omega} & S_{\gamma\Omega} \\ S_{\gamma\Omega} & S_{2\gamma} \end{pmatrix}, \text{ в которой}$$

$$S_{2\gamma} = \left. \frac{\partial^2 S(\gamma, \Omega)}{\partial \gamma^2} \right|_{\gamma_0, \Omega_0} = - \frac{T\Omega_0}{4\pi N_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)^2}{(q_0 f(x) + 1)^2} dx, \tag{22}$$

$$S_{\gamma\Omega} = \left. \frac{\partial^2 S(\gamma, \Omega)}{\partial \gamma \partial \Omega} \right|_{\gamma_0, \Omega_0} = \frac{Tq_0}{4\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{df(x)}{dx} f(x) (q_0 f(x) + 1)^{-2} dx, \tag{23}$$

$$S_{2\Omega} = \left. \frac{\partial^2 S(\gamma, \Omega)}{\partial \Omega^2} \right|_{\gamma_0, \Omega_0} = - \frac{Tq_0^2}{4\pi \Omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left( x \frac{df(x)}{dx} \right)^2 (q_0 f(x) + 1)^{-2} dx. \tag{24}$$

Согласно [1, 7] дисперсия совместной оценки параметра  $\gamma$  определяется как

$$D(\gamma_m | \gamma_0, \Omega_0) = \langle (\gamma_m - \gamma_0)^2 | \gamma_0 \rangle = (\hat{I}^{-1})_{22}, \tag{25}$$

где  $\hat{I}^{-1}$  – матрица, обратная к информационной матрице Фишера.

Вычисляя матрицу  $\hat{I}^{-1}$ , находим дисперсию оценки  $\gamma_m$ :

$$D(\gamma_m | \gamma_0, \Omega_0) = -S_{2\Omega} / [S_{2\Omega} S_{2\gamma} - S_{\gamma\Omega}^2], \tag{26}$$

где  $S_{2\gamma}$ ,  $S_{2\Omega}$ ,  $S_{\gamma\Omega}$  определяются из (22)–(24).

Подставляя (17) в (22)–(25) и (26), получаем выражение для дисперсии МП-оценки величины СП для сигнала, форма СП которого имеет вид (17)

$$D(\gamma_m | \gamma_0, \Omega_0) = N_0^2 (1 + q_0) / \mu_0. \tag{27}$$

Оценка величины СП с неизвестной шириной СП при использовании МП-алгоритма несмещенная. Характеризовать ее точность будем величиной нормированного рассеяния совместной МП-оценки:

$$\nu_m(q_0) = \frac{V(\gamma_m | \gamma_0, \Omega_0)}{V(\gamma_{m0} | \gamma_0)} = \frac{D(\gamma_m | \gamma_0, \Omega_0)}{D(\gamma_{m0} | \gamma_0)} = \sqrt{1 + q_0}, \tag{28}$$

которая представляет собой отношение рассеяния совместной МП-оценки к рассеянию МП-оценки при известной ширине СП  $\Omega_0$  и описывает проигрыш в точности совместной МП-оценки величины СП при априори неизвестной величине  $\Omega_0$  по сравнению с точностью МП-оценки величины СП при априори известной ширине СП. В формуле (28)  $D(\gamma_m | \gamma_0, \Omega_0)$  определяется в соответствии с (27), а  $D(\gamma_{m0} | \gamma_0)$  – в соответствии с (20).

На рис. 5 представлены зависимости нормированных рассеяний КП и совместной МП-оценок величины СП от величины расстройки  $\delta\Omega$ . Из рис. 5 видно, что в некотором интервале значения  $\delta\Omega$  рассеяние КП-оценки меньше рассеяния совместной МП-оценки. При  $q_0 = 0,5$  это верно для значений  $\delta\Omega$  в пределах от  $-5\%$  до  $9\%$ . С увеличением  $q_0$  этот интервал уменьшается. Так, при  $q_0 = 2$  рассеяние КП-оценки меньше рассеяния совместной МП-оценки при  $\delta\Omega = \pm 4\%$ .

Из рис. 5 также видно, что увеличение отношения величины СП сигнала к величине СП шума приводит к увеличению нормированного рассеяния  $\nu_m$  (28). Таким образом, чем больше значение  $q_0$ , тем менее точна совместная МП оценка величины СП сигнала с неизвестной шириной СП по сравнению со слу-

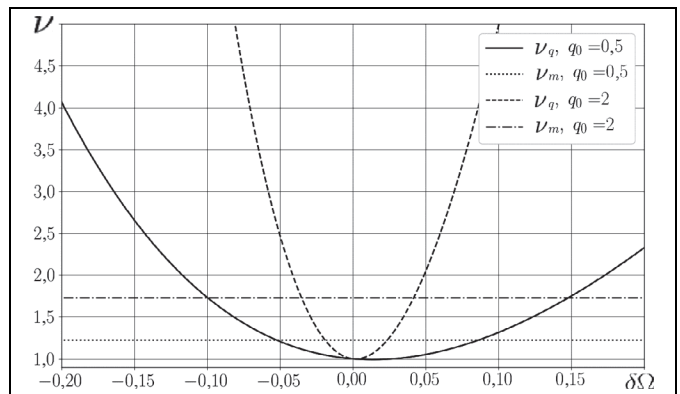


Рис. 5. Графики зависимости проигрыша в точности КП и МП оценок величины СП вследствие незнания ширины СП



чаем, когда ширина СП априори известна. Это означает, что качество оценки сильно зависит от величины отношения истинной величины СП  $\gamma_0$  к величине СП шума  $N_0$ .

- Полученные выражения для характеристик различных алгоритмов оценки величины СП стохастического сигнала с неизвестной шириной СП позволяют сделать обоснованный выбор необходимого алгоритма оценки в зависимости от имеющейся априорной информации о ширине СП, а также от требований, предъявляемых к простоте реализации алгоритма и точности оценки.

Авторы выражают благодарность своему Учителю – Андрею Павловичу Трифонову за постановку и активное участие в решении задач данной статьи.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 14-49-00079).

## Литература

1. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио. 1978. 296 с.
2. Трифонов А.П., Турбин М.М. Характеристики оценок ширины полосы частот случайного сигнала с неизвестной величиной спектральной плотности // Вестник Воронежского государственного ун-та. Сер. Физика, математика. 2017. № 3. С. 66–77.
3. Трифонов А.П., Нечаев Е.П. Совместная оценка величины и ширины спектра мощности случайного процесса // Известия ВУЗов. Сер. Приборостроение. 1987. Т. 30. № 11. С. 7–10.
4. Трифонов А.П., Нечаев Е.П. Совместная оценка величины и центральной частоты спектра мощности случайного процесса // Известия ВУЗов. Сер. Приборостроение. 1988. Т. 31. № 12. С. 3–6.
5. Трифонов А.П., Алексеенко С.А. Совместная оценка параметров спектра мощности случайного сигнала на фоне помехи с неизвестной величиной спектральной плотности // Приборостроение. 1994. № 2. С. 3–8.
6. Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И., Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / Под ред. А.П. Трифонова. Воронеж: ВГУ. 1991. 246 с.
7. Фалькович С.Е., Хомяков Э.Н. Статистическая теория измерительных радиосистем. М.: Радио и связь. 1981. 288 с.
8. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. М.: Радио и связь. 1983. 304 с.

Поступила 18 января 2018 г.

## Estimation of the spectral density value of a random signal with an unknown bandwidth

© Authors, 2018  
© Radiotekhnika, 2018

**Yu.E. Korchagin** – Dr.Sc.(Phys.-Math.), Professor, Head of Department of Radiophysics, Voronezh State University  
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru  
**M.M. Turbin** – Undergraduate, Department of Radiophysics, Voronezh State University  
E-mail: turbin94@gmail.com

The problem of estimating the value of the spectral density of the regular spectral density of the the gaussian stationary stochastic signal with a priori unknown bandwidth is considered. Two variants for overcoming a priory uncertainty are proposed: quasi-likelihood algorithm and joint estimation of all unknown parameters. For the algorithms under consideration, structural schemes for estimating were proposed and characteristics of estimation were found. Loses in accuracy of estimation due to priory unknown of the bandwidth were defined.

## References

1. Kulikov E.I., Trifonov A.P. Oczenka parametrov signalov na fone pomex. M.: Sov. radio. 1978. 296 s.
2. Trifonov A.P., Turbin M.M. Charakteristiki ocenok shiriny' polosy' chastot sluchajnogo signala s neizvestnoj velichinoj spektral'noj plotnosti // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo un-ta. Ser. Fizika, matematika. 2017. № 3. S. 66–77.
3. Trifonov A.P., Nechaev E.P. Sovmestnaya ocenka velichiny' i shiriny' spektra moshhnosti sluchajnogo proczessa // Izvestiya VUZov. Ser. Priborostroenie. 1987. T. 30. № 11. S. 7–10.
4. Trifonov A.P., Nechaev E.P. Sovmestnaya ocenka velichiny' i czentral'noj chastoty' spektra moshhnosti sluchajnogo proczessa // Izvestiya VUZov. Ser. Priborostroenie. 1988. T. 31. № 12. S. 3–6.
5. Trifonov A.P., Alekseenko S.A. Sovmestnaya ocenka parametrov spektra moshhnosti sluchajnogo signala na fone pomexi s neizvestnoj velichinoj spektral'noj plotnosti // Priborostroenie. 1994. № 2. S. 3–8.
6. Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I., Obnaruzhenie stoxasticheskix signalov s neizvestny'mi parametrami / Pod red. A.P. Trifonova. Voronezh: VGU. 1991. 246 s.
7. Fal'kovich S.E., Homjakov E'.N. Statisticheskaya teoriya izmeritel'ny'x radiosistem. M.: Radio i svyaz'. 1981. 288 s.
8. Mudrov V.I., Kushko V.L. Metody' obrabotki izmerenij. M.: Radio i svyaz'. 1983. 304 s.