

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

Лабораторный практикум

Составители:  
А.П. Трифонов,  
В.К. Маршаков,  
Ю.Э. Корчагин,  
К.А. Зимовец

Издательско-полиграфический центр  
Воронежского государственного университета  
2011

Утверждено научно-методическим советом физического факультета 16 декабря 2010 г., протокол №12

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор Е.Н. Бормонтов

Практикум подготовлен на кафедре радиофизики физического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 4 курса очной формы обучения и 5 курса очно-заочной формы обучения.

Для специальности 010801 – Радиофизика и электроника, направления 011800 – Радиофизика

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Лабораторная работа № 1	
Исследование законов распределений случайных сигналов . . . . .	4
2. Лабораторная работа № 2	
Исследование статистических характеристик выбросов случайных процессов . . . . .	20
3. Лабораторная работа № 3	
Воздействие сигнала и шума на линейные системы	33
4. Лабораторная работа № 4	
Взаимная корреляция шумов на выходах фильтров с перекрывающимися частотными характеристиками . . . . .	51
5. Лабораторная работа № 5	
Экспериментальное исследование корреляционного приёмника . . . . .	68
Литература . . . . .	93

**Лабораторная работа №1.**  
**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ**  
**СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ**

**Цель работы:** ознакомление с методикой измерения одномерных законов распределения по реализациям эргодических случайных процессов.

**Основные соотношения и определения**

Пусть  $\xi(t)$  — стационарный случайный процесс, для которого необходимо найти одномерный закон распределения. Разобьём интервал возможных значений случайного процесса  $\xi(t)$  на дифференциальные коридоры шириной  $\Delta x$ , тогда при малой величине  $\Delta x$  для одномерных функций распределения и плотности вероятности стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  можно записать

$$F_1(x) \approx \sum_{k=1}^j P_{\Delta}(x_k), W_1(x) \approx \frac{P_{\Delta}(x_j)}{\Delta x}, x \in [x_j; x_j + \Delta x), j = 1, 2, 3, \dots \quad (1.1)$$

Здесь  $P_{\Delta}(x_j) = P\{x_j \leq \xi(t) \leq x_j + \Delta x\}$  — вероятность того, что случайный процесс  $\xi(t)$  в момент времени  $t$  примет значение из  $j$ -го дифференциального коридора  $[x_j; x_j + \Delta x)$ .

Введём вспомогательные случайные функции

$$\eta_j(t) = \begin{cases} 1, & x_j \leq \xi(t) \leq x_j + \Delta x, \\ 0, & \xi(t) < 0 \text{ или } \xi(t) > x_j + \Delta x, \end{cases}$$

Рис. 1.1 иллюстрирует формирование реализаций  $y_j(t)$  случайных функций  $\eta_j(t)$  из реализации  $x(t)$  случайного процесса  $\xi(t)$ . Вероятности  $P_{\Delta}(x_j)$  при этом можно определить как

$$P_{\Delta}(x_j) = \langle \eta_j(t) \rangle, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

— статистические средние случайных функций  $\eta_j(t)$ . Для эргодических случайных процессов статистическое усреднение (1.2)



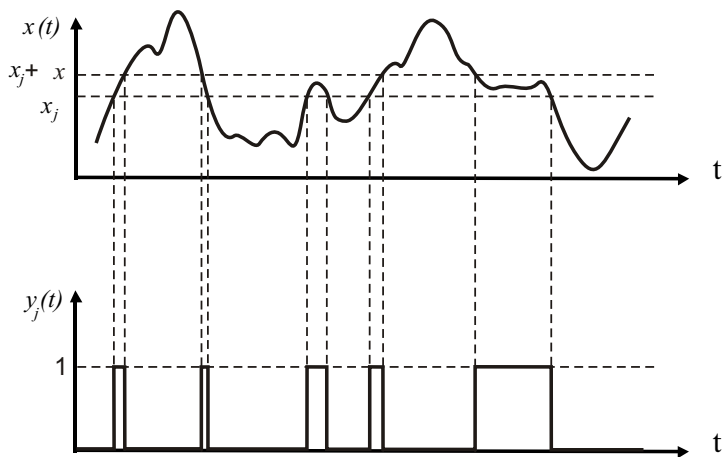


Рис. 1.1

можно заменить на усреднение по времени реализаций  $y_j(t)$  процессов  $\eta_j(t)$  и для вероятностей  $P_\Delta(x_j)$  получить оценки

$$P_\Delta^*(x_j) = \frac{1}{T_{0j}} \int_{t_{0j}}^{t_{0j}+T_{0j}} y_j(t) dt, \quad (1.3)$$

где  $t_{0j}$  и  $T_{0j}$  — начало и длительность усреднения реализации  $y_j(t)$ . Подставляя в (1.1) вместо вероятностей  $P_\Delta(x_j)$  их оценки (1.3), имеем

$$F_1^*(x) \approx \sum_{k=1}^j P_\Delta^*(x_k), \quad x \in [x_j, x_j + \Delta x), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

$$W_1^*(x) \approx \frac{P_\Delta^*(x_j)}{\Delta x}, \quad x \in [x_j, x_j + \Delta x), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (1.5)$$

Соотношения (1.4) и (1.5) определяют оценки одномерных функций распределения и плотности вероятности стационарного эр-

голического процесса  $\xi(t)$ . Эти оценки обычно называют эмпирической функцией распределения и гистограммой процесса  $\xi(t)$  соответственно.

Как следует из формулы (1.4), для формирования оценки  $F_1^*(x)$  необходимо иметь оценки всех вероятностей  $P_\Delta^*(x_j)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , на основе которых строится и гистограмма (1.5). Поэтому считается, что оценка  $F_1^*(x)$  (1.4) формируется на основе гистограммы случайного процесса  $\xi(t)$ . В то же время, в некоторых случаях удобнее сначала произвести оценку функции распределения, и уже по ней строить гистограмму. Для получения алгоритмов таких оценок  $F_1^*(x)$  и  $W_1^*(x)$  заметим, что

$$F_1(x) = P(x), \quad W_1(x) = \frac{F_1(x + \Delta x) - F_1(x)}{\Delta x} = \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x}, \quad (1.6)$$

где  $P(x) = P\{\xi(t) \leq x\}$  — вероятность того, что значение случайного процесса  $\xi(t)$  в момент времени  $t$  не превосходит порог  $x$ . В (1.6) так же как и в(1.1) предполагается, что величина  $\Delta x$  мала. Введём вспомогательную случайную функцию

$$\gamma_j(t) = \begin{cases} 1, & \xi(t) < x_j, \\ 0, & \xi(t) \geq x_j, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Рис. 1.2 иллюстрирует формирование реализаций  $z_j(t)$  случайных функций  $\gamma_j(t)$  из реализации  $x(t)$  случайного процесса  $\xi(t)$ . Тогда  $P(x_j) = \langle \gamma_j(t) \rangle$  — статистическое среднее случайных функций  $\gamma_j(t)$ . Используя эргодическое свойство случайного процесса  $\xi(t)$  имеем

$$P^*(x_j) = \frac{1}{T_{0j}} \int_{t_{0j}}^{t_{0j} + T_{0j}} z_j(t) dt, \quad (1.7)$$

где  $z_j(t)$  — реализации случайных процессов  $\gamma_j(t)$ , временное усреднение которых начинается в момент времени  $t_{0j}$  и заканчивается в  $t_{0j} + T_{0j}$ . Используя оценки (1.7), из (1.6) получаем

$$F_1^*(x) \approx P^*(x_j) \quad x \in [x_j, x_{j+1}), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (1.8)$$

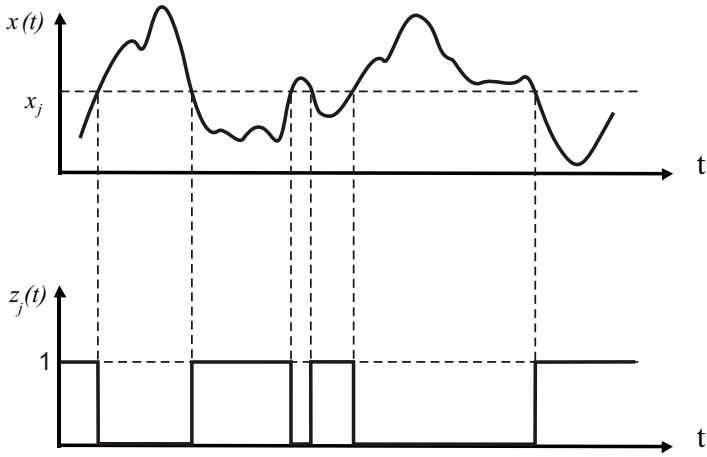


Рис. 1.2

$$W_1^*(x) \approx \frac{P^*(x_{j+1}) - P^*(x_j)}{\Delta x}, \quad x \in [x_j, x_{j+1}), \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (1.9)$$

Выражения (1.8) и (1.9) определяют алгоритмы оценок одномерных функций распределения и плотности вероятности эргодического случайного процесса  $\xi(t)$ , когда гистограмма  $W_1^*(x)$  строится по данным эмпирической функции распределения  $F_1^*(x)$ .

Согласно (1.4), (1.5) и (1.8), (1.9), для получения  $F_1^*(x)$  и  $W_1^*(x)$  необходимо:

- знать диапазон возможных значений случайного процесса  $\xi(t)$ ;
- задать ширину дифференциальных коридоров  $\Delta x$  или их число  $n$ ;
- измерить по реализации случайного процесса  $\xi(t)$  величины  $P_\Delta^*(x_j)$  или  $P^*(x_j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Если интервал возможных значений процесса  $\xi(t)$  неизвестен либо бесконечен, как, например, для гауссовского случайного процесса, то его оценкой может служить интервал  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , в пределах которого сосредоточено основное множество (в вероятностном

смысле) мгновенных значений процесса  $\xi(t)$ . При этом  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  выбираются так, чтобы, например, выполнялись условия

$$F_1^*(x_{\min}) = P^*(x_{\min}) \leq \beta, \quad 1 - F_1^*(x_{\max}) = 1 - P^*(x_{\max}) \leq \beta, \quad (1.10)$$

где  $\beta$  — заранее выбранное число, такое что  $0 < \beta \ll 1$ , а  $P^*(x)$  — оценка вероятности  $P\{\xi(t) < x\}$ , формируемая в соответствии с (1.7).

Если исходить из выражений (1.1) и (1.6), то ширину дифференциальных коридоров  $\Delta x$  следует задавать как можно меньшей. Действительно, точность формул (1.1) и (1.6) повышается с ростом числа дифференциальных коридоров  $n$ , и тем больше, казалось бы, должно быть соответствие между гистограммой и истинной кривой  $W(x)$ . Однако это не происходит в силу того, что с уменьшением  $\Delta x$  уменьшается относительное время пребывания реализации случайного процесса внутри дифференциального коридора. При фиксированном времени анализа  $T_{0j}$  это приводит к большему разбросу значений  $P_{\Delta}^*(x_j)$  (1.3) и  $P^*(x_{j+1}) - P^*(x_j)$  (1.7) от опыта к опыту. Анализ точности оценок  $F_1^*(x)$  и  $W_1^*(x)$  показывает, что ширину дифференциальных коридоров следует выбирать так, чтобы их число  $n$  на интервале  $[x_{\min}, x_{\max}]$  было порядка  $10 \div 20$ .

Построенный на основании соотношений (1.4), (1.5) или (1.8), (1.9) эмпирический одномерный закон распределения случайного процесса  $\xi(t)$  необходимо сопоставить с каким-либо теоретическим законом распределения. Чтобы количественно оценить, насколько хорошо выбранный теоретический закон распределения согласуется с результатами наблюдений, используют критерии согласия. Однако, на практике, довольно часто ограничиваются лишь качественным сопоставлением выбранного теоретического закона с полученным эмпирическим законом распределения. С этой целью по результатам наблюдений оценивают параметры теоретического закона распределения. Затем по теоретическим формулам, где вместо параметров используют их оценки, рассчитывают графики функций распределения и плотности вероятности. Эти графики сопоставляют с эмпирической функцией

ей распределения и гистограммой случайного процесса. Большинство теоретических одномерных законов распределения, используемых на практике, являются двухпараметрическими. При этом их параметры, как правило, определяются через математическое ожидание и дисперсию случайного процесса. Поэтому рассмотрим один из возможных способов расчёта математического ожидания и дисперсии процесса по его гистограмме.

Используя данные гистограммы  $W_1^*(x)$  можно получить оценки для математического ожидания и дисперсии случайного процесса либо вычислив соответствующие интегралы

$$M^*[\xi(t)] = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x W_1^*(x) dx,$$

$$D^*[\xi(t)] = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - M^*[\xi(t)])^2 W_1^*(x) dx, \quad (1.11)$$

либо воспользовавшись методом группировки наблюдений. Этот метод заключается в том, что когда случайная величина  $\xi$  попадает в  $j$ -ый коридор  $(x_j, x_j + \Delta x]$ , то ей приписывается значение  $x_j^* = x_j + \Delta x/2$ . Оценкой вероятности такого события считается величина  $P_{\Delta}^*(x_j)$  (1.3). Таким образом, по результатам эксперимента строится вариационный ряд

$$x_1^*, P_{\Delta}^*(x_1), x_2^*, P_{\Delta}^*(x_2), \dots, x_n^*, P_{\Delta}^*(x_n),$$

а затем вычисляют оценки для математического ожидания и дисперсии путём статистического усреднения:

$$M^*[\xi(t)] = \sum_{j=1}^n x_j^* P_{\Delta}^*(x_j), \quad D^*[\xi(t)] = \sum_{j=1}^n (x_j^* - M^*[\xi(t)])^2 P_{\Delta}^*(x_j).$$

В работе исследуются одномерные статистические характеристики следующих сигналов.

1. Гауссовский шум  $n(t)$  с плотностью вероятности и функцией распределения соответственно

$$W_n(x) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - m_n)^2}{2\sigma_n^2} \right], \quad F_n(x) = \Phi \left( \frac{x - m_n}{\sigma_n} \right), \quad (1.12)$$

где  $m_n$  — математическое ожидание,  $\sigma_n^2$  — дисперсия,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) / \sqrt{2\pi} \, dt \text{ — интеграл вероятности.}$$

2. Гармонический сигнал  $s(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$  с постоянной амплитудой  $A$  и случайной, равномерно распределённой на интервале  $[-\pi, \pi]$ , начальной фазой  $\varphi$ . Плотность вероятности и функция распределения такого сигнала имеют вид

$$W_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}, & |x| \leq A, \\ 0, & |x| > A, \end{cases} \quad F_s(x) = \begin{cases} 0, & x < -A, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{A}, & |x| \leq A, \\ 1, & |x| > A. \end{cases} \quad (1.13)$$

3. пилообразное периодическое напряжение  $r(t) = r(A, \varepsilon, t)$  с постоянной амплитудой  $A$  и случайным, равновероятно распределённым параметром сдвига  $\varepsilon$ . Плотность вероятности и функция распределения такого сигнала имеют вид

$$W_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A}, & |x| \leq A, \\ 0, & |x| > A, \end{cases} \quad F_r(x) = \begin{cases} 0, & x < -A, \\ \frac{x+A}{2A}, & |x| \leq A, \\ 1, & |x| > A. \end{cases} \quad (1.14)$$

4. Аддитивная смесь  $n(t) + s(t)$  гауссовского шума  $n(t)$  (1.12) с нулевым математическим ожиданием  $m_n = 0$  и гармонического сигнала  $s(t)$  со случайной начальной фазой (1.13). Плотность вероятности такого сигнала имеет вид [1]

$$W_{n+s}(x) = \frac{1}{\pi \sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \exp \left[ -\frac{(x - A \cos \varphi)^2}{2\sigma_n^2} \right] d\varphi. \quad (1.15)$$

5. Аддитивная смесь  $n(t) + r(t)$  гауссовского шума  $n(t)$  (1.12) с нулевым математическим ожиданием  $m_n = 0$  и пилообразного напряжения со случайным параметром сдвига (1.14). Плотность вероятности и функция распределения такого сигнала имеют вид

$$W_{n+r}(x) = \frac{1}{2A} \left[ \Phi \left( \frac{x+A}{\sigma_n} \right) - \Phi \left( \frac{x-A}{\sigma_n} \right) \right],$$

$$F_{n+r}(x) = \frac{\sigma_n}{2A\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp \left[ -\frac{(x+A)^2}{2\sigma_n^2} \right] - \exp \left[ -\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{A} \right) \Phi \left( \frac{x+A}{\sigma_n} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x}{A} \right) \Phi \left( \frac{x-A}{\sigma_n} \right). \quad (1.16)$$

Экспериментальное исследование законов распределений данных случайных процессов выполняется на лабораторной установке, внешний вид основных блоков которой изображен на рис. 1.3, 1.4.

### Описание лабораторной установки

Лабораторная установка состоит из генератора случайных сигналов, анализатора их законов распределения, вольтметра эффективных напряжений и осциллографа.

**Генератор** случайных сигналов содержит три независимых источника случайных напряжений:

- 1) источник гауссовского шума  $n(t)$ , в качестве которого используется полупроводниковый стабилитрон;
- 2) источник гармонического сигнала  $s(t)$  со случайной начальной фазой, в качестве которого используется RC-генератор;
- 3) источник пилообразного напряжения  $r(t)$  со случайным параметром сдвига, в качестве которого используется генератор на операционном усилителе.

Выходным каскадом генератора является усилитель-сумматор. На его вход могут подаваться любые из генерируемых случайных напряжений. При этом на выходе генератора формируются реализации случайного напряжения — либо гауссовского шума  $n(t)$ ,

либо синусоидального напряжения  $s(t)$ , либо пилообразного напряжения  $r(t)$ , либо их аддитивных смесей. Уровни генерируемых напряжений  $n(t)$ ,  $s(t)$ ,  $r(t)$ , задаются независимо регулировками «уровень шум», «уровень синус» и «уровень пила» и измеряются вольтметром эффективных напряжений, который подключается к выходу генератора. При формировании аддитивных смесей генерируемых случайных напряжений это позволяет задавать необходимые соотношения между уровнями слагаемых. К выходу генератора также можно подключить осциллограф для наблюдения за формой реализаций генерируемого случайного напряжения.

**Анализатор** законов распределений лабораторного макета позволяет определять эмпирические функции распределения (1.8) и гистограммы (1.5) исследуемых случайных процессов. Функционально анализатор состоит из двух блоков. Блок 1 позволяет получать численные оценки  $F(x)$  и  $W(x)$  в ручном режиме измерения, а блок 2 формирует качественные оценки  $F(x)$  и  $W(x)$  и представляет их в наглядном виде на экране осциллографа, который подключается к выходу блока 2. Внешний вид передней панели блока 1 изображён на рис. 1.3, а передняя панель блока 2 представлена на рис. 1.4.

Блок-схема анализатора изображена на рис. 1.5, где обозначено:

- 1 – амплитудный селектор (компаратор) с порогом  $x_j$ , формирующий напряжение  $z_j(t)$  (см. рис. 1.2) первого канала;
- 2 – амплитудный селектор (компаратор) с порогом  $x_{j+1}$ , формирующий напряжение  $z_{j+1}(t)$  второго канала;
- 3 – вычитающее устройство;
- 4 – усредняющее устройство;
- 5 – индикатор (для блока 1);
- 6 – генератор пилообразного напряжения (для блока 2);
- 7 – осциллограф.

При измерении функции распределения используют один канал представленной схемы. В этом режиме напряжение  $z_j(t)$  подается непосредственно на усредняющее устройство 4 и на его выходе формируется напряжение, пропорциональное  $F^*(x_j)$  (1.8).



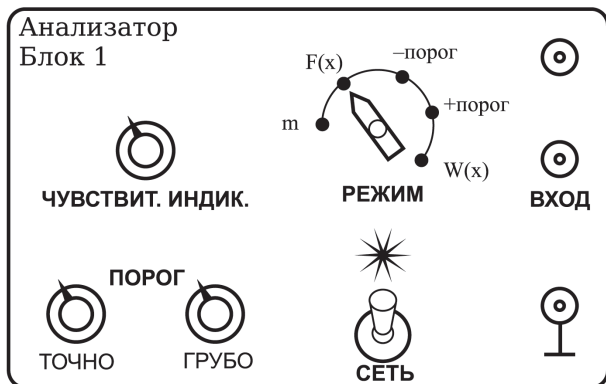


Рис. 1.3

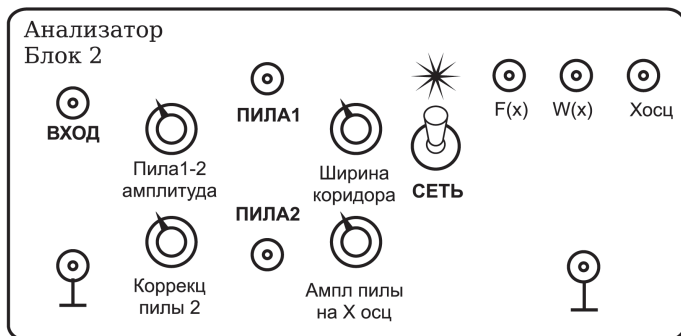


Рис. 1.4

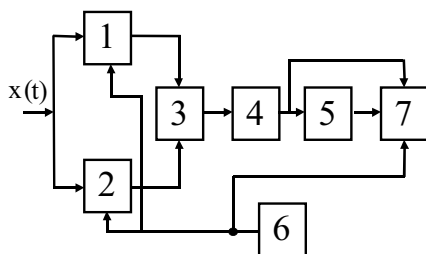


Рис. 1.5

При измерении плотности вероятности используются оба канала схемы рис. 1.5. На выходе вычитающего устройства 3 в этом случае будет напряжение  $y_j(t) = z_{j+1}(t) - z_j(t)$  (см. рис. 1.1, 1.2), которое после усреднения пропорционально  $W^*(x_j)$  (1.5).

В блоке 1 величины пороговых напряжений  $x_j$  и  $x_{j+1}$  компараторов 1, 2 задаются экспериментатором. При этом на индикаторе 5 блока 1 отображается значение измеряемой статистической характеристики для выбранного порога  $x_j$ . В блоке 2 пороги  $x_j$  и  $x_{j+1}$  задаются управляющим сигналом, вырабатываемым генератором 6. Поскольку этот управляющий сигнал изменяется во времени по пилообразному закону, то и пороги компараторов 1, 2 также за время анализа изменяются по пилообразному закону. Следовательно, выходное напряжение усредняющего устройства 4 блока 2 в каждый момент времени анализа будет пропорционально измеряемой статистической характеристике для определённого значения порога  $x_j$ . Это напряжение затем подаётся на вход «У» осциллографа, на вход «Х» которого поступает пилообразный сигнал с генератора 6. В результате этого на экране осциллографа формируется зависимость исследуемой статистической характеристики от величины порога.

## Экспериментальная часть

1. *Определение эмпирической функции распределения и гистограммы гауссовского шума  $n(t)$  с использованием блока 1 анализатора.* Задание выполняется для двух значений эффективного напряжения шума на выходе генератора  $U_{эф} = 1В$ ,  $U_{эф} = 2В$ .

К выходу генератора случайных сигналов подключается вольтметр эффективных напряжений и блок 1 анализатора. При этом тумблер «Шум» на генераторе следует поставить в верхнее положение, а тумблеры «синус» и «пила» — в нижнее положение. Ручкой «Уровень шума» устанавливается требуемое эффективное напряжение шума. Далее определяется **диапазон возможных мгновенных значений исследуемого процесса**. Для этого ручки блока 1 (рис. 1.3) «Чувств. инд.», «Порог грубо» и «Порог

плавно» устанавливаются в крайние левые положения. Переключатель «Режим» устанавливается в положение «W(x)». Вращением ручки «Порог грубо» добиваются максимального отклонения стрелки индикатора, после чего ручкой «Чувств. инд.» стрелку индикатора устанавливают наиболее близко к правому краю шкалы. В дальнейшем положение ручки «Чувств. инд.» не меняется до конца всех измерений при фиксированном значении  $U_{эф}$ . Затем переключатель «Режим» ставится в положение «F(x)» и вращением ручек «Порог грубо» и «Порог точно» добиваются отклонения стрелки индикатора на 2-3 малых деления шкалы от нуля. После этого переключатель «Режим» ставится в положение «Порог-». Индикатор блока 1 при этом показывает величину модуля порога, которая с учётом знака определяет нижнюю границу диапазона мгновенных значений исследуемого процесса  $x_{\min}$  (1.10). Далее переключатель «Режим» снова переводится в положение «F(x)» и регулировкой ручек «Порог грубо» и «Порог точно» добиваются, чтобы стрелка индикатора не доходила 2-3 малых деления до конца шкалы. Затем переключатель «Режим» переводится в положение «Порог+» и по индикатору измеряется верхняя граница диапазона мгновенных значений  $x_{\max}$  (1.10) исследуемого процесса. После этого находится величина  $\Delta x' = (x_{\max} - x_{\min})/n$ , где  $n$  полагается равным  $10 \div 12$ .

**Определение эмпирических функций распределения и гистограмм.** Переключатель «Режим» блока 1 анализатора устанавливается в положение «Порог-» и ручками «Порог» выставляется  $x = x_{\min}$ . Затем при соответствующих положениях переключателя «Режим» с индикатора считываются в условных делениях значения  $F^*(x_{\min})$  и  $W^*(x_{\min})$ . Далее величина порога увеличивается на  $\Delta x'$ ,  $2\Delta x'$  и т.д. и по индикатору фиксируются значения  $F^*(x_j)$  и  $W^*(x_j)$ . В процессе выполнения этих измерений следует помнить, что при достижении положительных порогов необходимо устанавливать их величину в положении «Порог+» переключателя «Режим». Данные измерений сводятся в таблицу, по которой затем строятся эмпирические функции распределения и гистограммы.

## 2. Анализ законов распределений случайных процессов с использованием блока 2 анализатора.

При выполнении этого задания вначале необходимо установить нужные режимы работы осциллографа, подключаемого на выход блока 2, и откалибровать блок 2 анализатора. С этой целью вход «Х» осциллографа соединяется с клеммой «Хосц» блока 2. Осциллограф переводится в режим работы через вход «Х», для чего следует нажать на левой и правой панели осциллографа кнопки «Х-У». При этом на экране осциллографа появляется горизонтальная развёртка. Ручка «Ампл. пилы на Х осц.» блока 2 позволяет установить горизонтальный пробег луча равным ширине экрана осциллографа. Далее к открытому входу осциллографа «У» подключается клемма «Пила 1» блока 2. пилообразное напряжение, снимаемое с этой клеммы, задаёт величину порога компаратора 1 рис. 1.5. Переключатель усиление осциллографа рекомендуется поставить в положение  $0,1 \div 0,2$  в/см. Ручкой «Пила 1-2» следует выставить амплитуду пилы таким образом, чтобы пробег луча осциллографа по вертикали укладывался в рамки экрана, а с помощью ручек  $\leftrightarrow, \updownarrow$  добиться симметричного относительно центра экрана пробега луча. Далее необходимо провести коррекцию амплитуды пилообразного напряжения, снимаемого с клеммы «Пила 2». Это напряжение определяет порог компаратора 2, который должен отличаться от порога компаратора 1 на величину дифференциального коридора  $\Delta x$  — постоянную для всех значений порогов анализа. При  $\Delta x = 0$  (ручка «Ширина коридора» находится в крайнем левом положении) пороги компараторов 1 и 2 должны совпадать и, следовательно, должны совпадать управляющие напряжения этих компараторов, снимаемые с клемм «Пила 1» и «Пила 2». Для проверки этого при  $\Delta x = 0$  (ручка «Ширина коридора» находится в крайнем левом положении) вход «У» осциллографа подключают к клемме «Пила 2» и ручкой «Коррекц. пилы 2» устанавливают амплитуду второй пилы равной амплитуде первой. Затем ручку ширина коридора ставят в среднее положение, при котором  $\Delta x$  не равно нулю. В дальнейшем, изменяя ширину  $\Delta x$ , можно при изменении уровня

анализируемого случайного напряжения корректировать величину напряжения, пропорционального  $W^*(x)$ , снимаемого с клеммы « $W(x)$ ».

Для выполнения задания по анализу законов распределения случайных процессов на вход блока 2 подаётся случайное напряжение с генератора случайных сигналов, а вход « $Y$ » осциллографа подключается к клеммам « $F(x)$ » или « $W(x)$ » блока 2. При этом на экране осциллографа будут изображаться зависимости  $F^*(x)$  или  $W^*(x)$ . Эти зависимости следует зарисовать.

Анализ законов распределения выполняется для случайных процессов:

- 1) гауссовский шум  $n(t)$  (1.12);
- 2) синусоидальное напряжение  $s(t)$  (1.13);
- 3) пилообразное напряжение  $r(t)$  (1.14);
- 4) аддитивная смесь  $n(t) + s(t)$  (1.15);
- 5) аддитивная смесь  $n(t) + r(t)$  (1.16).

Законы распределения случайных процессов 1) – 3) исследуются для двух значений эффективных напряжений  $U_{эф} = 1В$ ,  $U_{эф} = 2В$ . Анализ законов распределения аддитивных смесей 4) – 5) выполняется при отношениях сигнал/шум (отношение эффективного напряжения синусоидального или пилообразного сигнала к эффективному напряжению шума) равных  $1/3$ ,  $1$  и  $3$ . Измерение отношения сигнал/шум осуществляется измерением  $U_{эф}$  шума при неизменном эффективном напряжении сигнала равном одному вольту.

## Оформление отчёта о лабораторной работе

Отчет должен содержать:

1. Таблицы с экспериментальными данными, полученными с помощью блока 1 лабораторной установки для гауссовского шума  $n(t)$ . Таблицы со значениями эмпирических функций распределения и гистограмм. Значения оценок математических ожиданий и дисперсий. Алгоритмы используемых

- преобразований. Графики найденных эмпирических функций распределения и гистограмм.
2. Сопоставление эмпирических законов распределений гауссовского шума  $n(t)$  с теоретическими законами, параметры которых определены по экспериментальным данным.
  3. Качественные графики законов распределений, снятые с экрана осциллографа для всех типов, рассмотренных в работе случайных процессов.
  4. Выводы и оценку полученных результатов.

### Контрольные вопросы

1. Многомерные законы распределения случайных процессов и их свойства. Экспериментальное определение одномерных законов распределения в общем случае.
2. Эргодическое свойство случайных процессов. Усреднение по времени и усреднение по реализациям. Экспериментальное определение одномерных законов распределения и их параметров эргодических случайных процессов.
3. Описание функционирования анализатора законов распределения по блок-схеме рис. 1.5.
4. Выбор параметров блоков рис. 1.5 и их связь с параметрами анализируемых случайных процессов: диапазон изменения значений пороговых напряжений компараторов 1 и 2, величина дифференциального коридора  $\Delta x$ , постоянная времени усредняющего устройства 3, амплитуда и период пилообразного напряжения, формируемого в блоке 6.
5. Обосновать и нарисовать изображение на экране осциллографа (блок 7 на рис. 1.5), если на вход соответствующей части макета будет подаваться периодическая последовательность импульсов, изображённая на рис. 1.6.
6. Выполнить вывод соотношений (1.13), (1.15), (1.16).
7. Задана плотность вероятности  $W(x) = C \exp(-\lambda|x|)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , где  $C$  — неизвестная постоянная. Найти функцию распределения и характеристическую функцию.

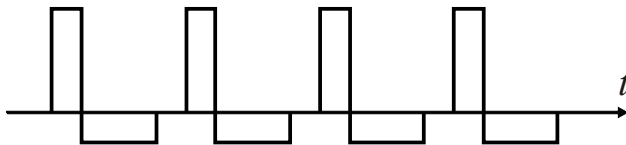


Рис. 1.6

8. Задана двумерная плотность вероятности

$$W_2(x_1, x_2, \tau) = \begin{cases} C, & |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, \\ 0, & |x_1| > 1, |x_2| > 1. \end{cases}$$

Найти двумерную и одномерные функции распределения.

9. Случайный процесс задан в виде  $\xi(t) = b + vt$ , где  $b$  — известная постоянная,  $v$  — гауссовская случайная величина с параметрами  $(m, \sigma^2)$ . Найти одномерную плотность вероятности процесса  $\xi(t)$ .
10. Имеются два случайных процесса  $\xi(t)$  и  $\eta(t) = a\xi(t)$ , где  $a$  — постоянный коэффициент. Считая процесс  $\xi(t)$  гауссовским с параметрами  $(0, \sigma^2)$ , найти совместную плотность вероятности  $W(x, y, t)$  процессов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$ .

**Литература:** [1] и [8].

**Лабораторная работа №2.**  
**ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ**  
**ХАРАКТЕРИСТИК ВЫБРОСОВ СЛУЧАЙНЫХ**  
**ПРОЦЕССОВ**

**Цель работы:** познакомиться с методикой экспериментального определения характеристик выбросов стационарного случайного процесса.

**Основные соотношения и определения**

Рассмотрим реализацию  $x(t)$  случайного процесса  $\xi(t)$  (рис. 2.1) длительностью  $T$ .

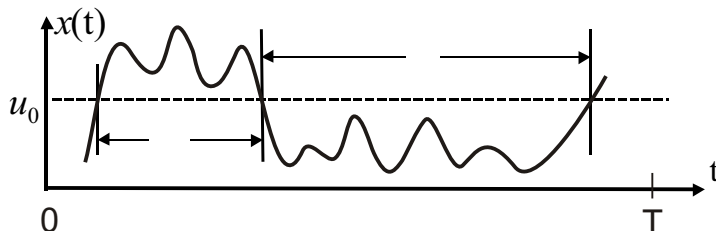


Рис. 2.1

Поскольку все реальные физические процессы являются непрерывными функциями своих аргументов, то реализация процесса  $\xi(t)$  на интервале  $T$  имеет конечное число максимумов, минимумов, пересечений некоторого уровня  $u_0$ .

Когда случайный процесс  $\xi(t)$  пересекает  $u_0$  снизу вверх, то говорят, что имеет место положительный выброс. Если же уровень  $u_0$  пересекается сверху вниз, то можно говорить об отрицательном выбросе. Величину  $\tau$  называют длительностью положительного выброса, величину  $\theta$  — длительностью интервала между выбросами (длительностью отрицательного выброса). На конечном интервале наблюдения  $T$  реализации  $x(t)$  число положительных выбросов обозначим  $n^+$ , а число отрицательных выбросов —  $n^-$ .



Величины  $n^+$ ,  $n^-$ ,  $\tau$ ,  $\theta$  в пределах одной реализации могут иметь различные значения (в зависимости от уровня  $u_0$  и интервала  $T$ ) и изменяться случайным образом от одной реализации к другой.

Наиболее простой статистической характеристикой перечисленных случайных величин являются их средние значения (математические ожидания).

Рассмотрим сначала среднее число положительных выбросов случайного процесса  $\xi(t)$  за уровень  $u_0$  в единицу времени. Будем считать случайный процесс  $\xi(t)$  и его производную  $\xi'(t)$  непрерывными в среднеквадратическом функциями времени. Тогда среднее число положительных выбросов за уровень  $u_0$  на интервале времени  $[0, T]$  может быть определено по формуле

$$N^+(u_0, T) = \langle n^+ \rangle = \int_0^T dt \int_0^\infty y W(u_0, y, t) dy, \quad (2.1)$$

где  $W(x, y, t)$  — совместная плотность вероятности случайного процесса  $\xi(t)$  и его производной  $\xi'(t)$  в один и тот же момент времени  $t$ , т.е.

$$W(x, y, t) = \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial x \partial y}, \quad F(x, y, t) = P \{ \xi(t) < x, \xi'(t) < y \}.$$

Если случайный процесс  $\xi(t)$  является стационарным, то  $W(x, y, t) = W(x, y)$  и внутренний интеграл в выражении (2.1) не зависит от времени. Поэтому для стационарных случайных процессов среднее число положительных выбросов за уровень  $u_0$  в единицу времени определяется как

$$N_1^+(u_0) = \frac{N^+(u_0, T)}{T} = \int_0^\infty y W(u_0, y) dy. \quad (2.2)$$

Как следует из (2.1) и (2.2) для расчёта среднего числа выбросов, необходимо знать совместную плотность вероятности  $W(x, y, t)$

для самого процесса  $\xi(t)$  и его производной  $\xi'(t)$  в совпадающие моменты времени. Эта совместная плотность вероятности может быть вычислена для достаточно большого числа случайных процессов. Рассмотрим здесь случай гауссовского стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  с нулевым математическим ожиданием и функцией корреляции  $K_\xi(\tau) = \sigma^2 R_\xi(\tau)$ . Как известно, стационарный случайный процесс и его производная в совпадающие моменты времени некоррелированы, а при гауссовском распределении – статистически независимы. Следовательно, в этом случае

$$W(x, y) = W_1(x)\tilde{W}_1(y), \quad (2.3)$$

где  $W_1(x)$  и  $\tilde{W}_1(y)$  – одномерные гауссовские плотности вероятности с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями  $\sigma^2$  и  $-K_\xi''(0)$  соответственно. Подставляя (2.3) в (2.2) и выполняя интегрирование, получаем

$$N_1^+(u_0) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-R_\xi''(0)} \exp \left[ -\frac{u_0^2}{2\sigma^2} \right], \quad (2.4)$$

где  $R_\xi''(0) = [d^2 R_\xi(\tau) / d\tau^2]_{\tau=0}$ .

В практических приложениях часто удобно рассчитывать величину  $N_1^+(u_0)$  через спектральную плотность  $K_\xi(\omega)$  процесса  $\xi(t)$ . Представляя  $K_\xi(\omega)$  как Фурье преобразование  $K_\xi(\tau)$ , нетрудно получить, что

$$-R_\xi''(0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 K_\xi(\omega) d\omega$$

или, вводя понятие физической спектральной плотности

$$G_\xi(f) = \begin{cases} 2K_\xi(2\pi f), & f \geq 0, \\ 0, & f < 0, \end{cases}$$

имеем

$$-R_\xi''(0) = \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \int_0^{\infty} f^2 G_\xi(f) df. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.4), находим

$$N_1^+(u_0) = \exp \left[ -\frac{u_0^2}{2\sigma^2} \right] \left( \int_0^\infty f^2 \frac{G_\xi(f)}{\sigma^2} df \right)^{1/2}. \quad (2.6)$$

Согласно (2.6), среднее число положительных выбросов за уровень  $u_0$  в единицу времени зависит от нормированного порога  $u_0/\sigma$  и от параметров нормированного энергетического спектра  $G_\xi(f)/\sigma^2$  случайного процесса  $\xi(t)$ .

Определим далее среднее значение длительности выбросов и среднюю величину интервала времени между выбросами случайного процесса  $\xi(t)$ . Эти статистические характеристики выбросов наиболее просто находятся, когда  $\xi(t)$  — эргодический случайный процесс. Согласно эргодическому свойству, относительное время пребывания реализации такого случайного процесса над уровнем  $u_0$  за время  $T$  при неограниченном увеличении  $T$  стремится к вероятности

$$P \{ \xi(t) > u_0 \} = 1 - F(u_0), \quad (2.7)$$

где  $F(x)$  — одномерная функция распределения процесса  $\xi(t)$ .

Суммарное время пребывания реализации  $x(t)$  эргодического процесса  $\xi(t)$  над уровнем  $u_0$  асимптотически с увеличением  $T$  приближается к  $[1 - F(u_0)]T$ . Кроме того, за достаточно длительное время  $T$  общее число интервалов, на которых  $x(t) > u_0$ , равно среднему числу положительных выбросов за это время, то есть равно  $N_1^+(u_0)T$ . Следовательно, средняя длительность положительного выброса эргодического случайного процесса за уровень  $u_0$  может быть определена как

$$\bar{\tau}(u_0) = \frac{1 - F(u_0)}{N_1^*(u_0)}. \quad (2.8)$$

Аналогично получается выражение для средней длительности интервалов времени между положительными выбросами эргодического случайного процесса:

$$\bar{\theta}(u_0) = \frac{F(u_0)}{N_1^*(u_0)}. \quad (2.9)$$

Для экспериментального исследования характеристик выбросов случайных процессов в работе используется лабораторная установка, внешний вид основных блоков которой изображен на рис. 2.3, 2.4.

### Описание лабораторной установки

Блок-схема лабораторной установки для экспериментально исследования характеристик выбросов эргодических случайных процессов представлена на рис. 2.2.

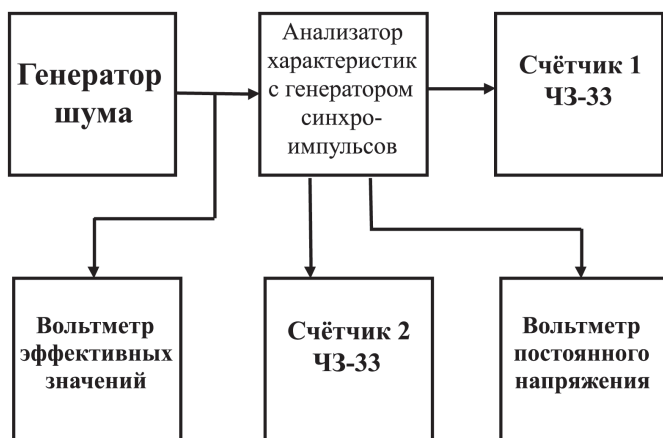


Рис. 2.2

Генератор шума макета включает в себя источник широкополосного гауссовского шума, выполненного на полупроводниковом стабилитроне, и избирательный усилитель с регулируемым коэффициентом усиления с изменяемой центральной частотой  $f_{0i}$  и шириной полосы пропускания  $\Pi_i$ . Избирательный усилитель функционально выполнен в виде многокаскадного резонансного усилителя на LC контурах. Поэтому частотную характеристику усилителя с достаточной для практики точностью можно аппроксимировать гауссовой кривой.

Передняя панель генератора шума изображена на рис. 2.3.

Переключатель « $F_0$  полоса» задаёт одну из четырёх резонансных

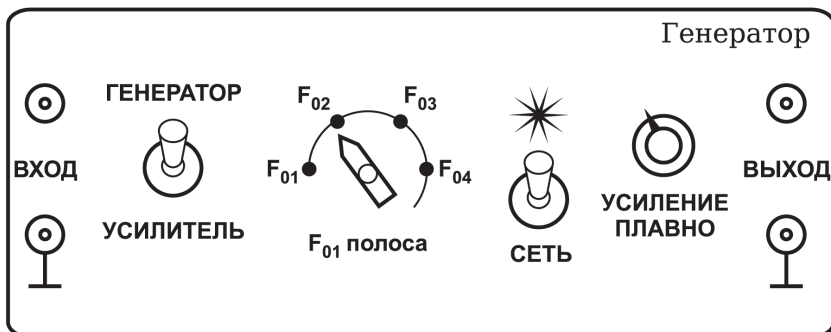


Рис. 2.3

частот усилителя  $f_{01} \approx 3\text{кГц}$ ,  $f_{02} \approx 6\text{кГц}$ ,  $f_{03} \approx 9\text{кГц}$ ,  $f_{04} \approx 12\text{кГц}$ . Для каждой из этих резонансной частот тем же переключателем устанавливается одна из двух полос пропускания усилителя «У» или «Ш». Среднеквадратическое значение (эффективное напряжение) шума на выходе генератора устанавливается ручкой «Усиление плавно» и контролируется вольтметром эффективных напряжений, подключаемым к гнездам «Выход» генератора.

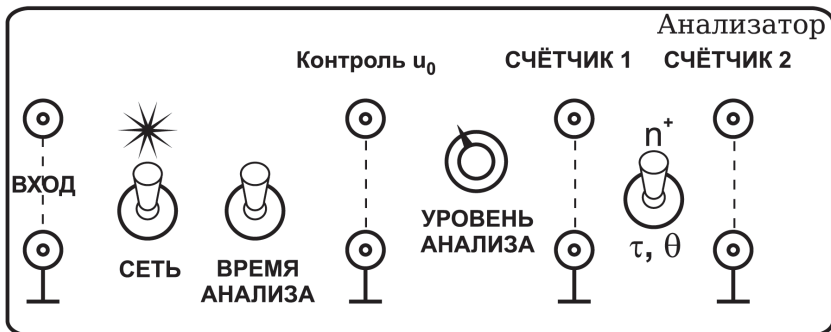


Рис. 2.4

Анализатор характеристик выбросов состоит из:

- 1) компаратора с изменяемым порогом  $u_0$ ;

- 2) генератора тактовых импульсов, период следования которых существенно меньше времени корреляции исследуемых процессов;
- 3) схемы совпадений.

Передняя панель анализатора представлена на рис. 2.4. На вход компаратора поступает реализация случайного напряжения с выхода избирательного усилителя генератора шума. На выходе компаратора формируются прямоугольные видеоимпульсы, длительности которых совпадают с длительностями выбросов входной реализации компаратора над порогом  $u_0$ . В режиме измерения среднего числа выбросов « $n^+$ » импульсы с компаратора поступают на счётчик 1, который фиксирует число выбросов за время анализа. В режиме измерения средней длительности выбросов  $\bar{\tau}$  и средней длительности интервала между выбросами  $\bar{\theta}$  импульсы с выхода компаратора поступают на один из входов схемы совпадений. На другой вход схемы совпадений подаются импульсы с тактового генератора. В результате на выход схемы совпадений проходят тактовые импульсы только в те интервалы времени, когда случайное напряжение, поступающее на вход компаратора, превосходит его порог. Следовательно, число тактовых импульсов на выходе схемы совпадений, которые регистрируются в этом случае счётчиком 1, пропорционально времени нахождения случайного процесса над заданным порогом за время анализа. Время анализа задаётся общим числом тактовых импульсов, регистрируемых счётчиком 2.

### Экспериментальная часть

В процессе выполнения экспериментальной части работы проводится анализ зависимостей среднего числа положительных выбросов, средней длительности выбросов и средней длительности интервала между выбросами эргодических случайных процессов от величины порога  $u_0$ . Экспериментальное определение этих зависимостей осуществляется для гауссовских случайных напряжений, формируемых генератором шума на выходе резонансно-

го усилителя. Значения центральных частот и полос пропускания (положения переключателя « $F_0$  полоса») задаются преподавателем. Для того чтобы иметь возможность сравнить экспериментальные данные с теоретическими зависимостями, определяются параметры статистического описания гауссовских процессов на выходе резонансного усилителя. С этой целью измеряются амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) резонансного усилителя.

1. Измерение АЧХ резонансного усилителя и определение спектральной плотности случайного напряжения на выходе генератора шума.

Переключатель « $F_0$  полоса» генератора шума устанавливается в одно из заданных преподавателем положений, а тумблер «Режим» генератора шума — в положение «Усилитель». На клеммы «Вход» генератора подаётся гармоническое напряжение с низкочастотного генератора величиной  $\leq 150\text{ мВ}$  для полосы «У» и  $\leq 1\text{ В}$  для «Ш». К клеммам «Выход» генератора подключается вольтметр. АЧХ снимают для двух значений центральной частоты  $f_{0i}$  и двух значений  $\Pi_i$  полосы пропускания. Полученные экспериментальные зависимости аппроксимируются гауссовскими кривыми

$$|H(jf)| = H_0 \exp \left[ -\frac{\pi(f - f_0)^2}{2\Pi_3} \right], \quad (2.10)$$

где  $H_0$  — максимум модуля передаточной функции (АЧХ) на центральной частоте  $f_0$ ,  $\Pi_3$  — энергетическая полоса пропускания, определяемая выражением

$$\Pi_3 = \frac{1}{H_0^2} \int_0^{\infty} |H(jf)|^2 df.$$

Как известно, физическая спектральная плотность случайного процесса на выходе линейной системы, имеющей передаточную функцию  $H(jf)$ , равна  $G(f) = G_{\text{вх}}(f)|H(jf)|^2$ , где  $G_{\text{вх}}(f)$  — физическая спектральная плотность случайного процесса на входе линейной системы. Поскольку на вход резонансного усилителя

макета поступает широкополосный случайный процесс, то в пределах его полосы пропускания спектральную плотность можно полагать постоянной  $N_0$ . При этом

$$G(f) = N_0 |H(jf)|^2 = N_0 H_0^2 \exp \left[ -\frac{\pi(f - f_0)^2}{\Pi_3^2} \right]. \quad (2.11)$$

Неизвестное значение произведения  $N_0 H_0^2$  в (3.19) можно выразить через среднеквадратическое значение шума  $\sigma$  на выходе резонансного усилителя. Действительно, при  $\Pi_3 \ll f_0$

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} G(f) df = N_0 H_0^2 \int_0^{\infty} \exp \left[ -\frac{\pi(f - f_0)^2}{\Pi_3^2} \right] df = N_0 H_0^2 \Pi_3.$$

Откуда

$$G(f) = \frac{\sigma^2}{\Pi_3} \exp \left[ -\frac{\pi(f - f_0)^2}{\Pi_3^2} \right]. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.2) и учитывая, что  $\Pi_3 \ll f_0$ , нетрудно получить аналитическое выражение для среднего числа выбросов  $N_1^+(u_0)$ . В это выражение входят величины  $f_0$  и  $\Pi_3$ . Значения  $f_0$  и  $\Pi_3$  определяются по результатам измерения АЧХ резонансного усилителя. При этом значение энергетической полосы пропускания  $\Pi_3$  удобнее измерять исходя из соотношения  $\Pi_3 = 1,065\Pi_{0,5}$ , где  $\Pi_{0,5}$  — ширина полосы пропускания по уровню 0,5 нормированной АЧХ.

2. Измерение зависимостей среднего числа выбросов  $N_1^+(a_i)$  от величины относительного уровня анализа  $a_i = u_{0i}/\sigma$ ,  $a_i = i/2$ ,  $i = \overline{0,6}$ .

- Переключатель «Режим» генератора шума ставится в положение «Генератор».
- Выход генератора шума подключается к клеммам «Вход» анализатора характеристик выбросов. Одновременно к выходу генератора шума подключается вольтметр эффективных значений.



- К клеммам «Счётчик 1» анализатора следует подключить электронный счётчик и тумблер «Режим» анализатора переключить в положение « $n^+$ ».
- После включения всей схемы приборов ручкой генератора шума «Усиление плавно» устанавливается эффективное напряжение шума  $\sigma = 2\text{В}$ .
- К клеммам анализатора «Контроль  $u_0$ » подключается вольтметр постоянного напряжения и с помощью ручки « $u_0$ » устанавливается требуемый порог  $u_{0i}$  компаратора.
- Тумблер «Время анализа» ставится в положение «выкл» и производится сброс счётчика на ноль. Затем тумблер «Время анализа» переводится в положение «вкл». При этом подбирается режим работы счётчика ручкой «Уровень канала А» так, чтобы производился устойчивый счёт выбросов при изменении относительного уровня анализа  $a_i$  от 0 до 3.

Измерение среднего числа положительных выбросов  $N_1^+(a_i)$  при заданном пороге производят в следующем порядке.

- 1) Устанавливается значение порога  $u_{0i}$ , соответствующее  $a_i$ .
- 2) Тумблер «Время анализа» ставится в положение «выкл» и производится сброс счётчика.
- 3) Переключатель «Время анализа» переводят в положение «вкл» на время  $T$  (не менее 50 секунд), а затем — в положение «выкл».
- 4) Среднее число положительных выбросов за относительный уровень  $a_i$  в единицу времени определяется как

$$\tilde{N}_1^+(a_i) = N/T,$$

где  $N$  — показание счётчика 1 в данном измерении.

Зависимости  $N_1^+(a_i)$ ,  $a_i = u_{0i}/\sigma$ ,  $0 \leq a_i \leq 3$  снимаются для двух значений  $f_{0k}$  — резонансной частоты усилителя генератора при узкой и широкой полосе его пропускания.

3. Измерение зависимостей средней длительности положительных выбросов  $\bar{\tau}$  и средней длительности интервалов между выбросами  $\bar{\theta}$  от величины относительного порога  $a_i = u_{0i}/\sigma$ ,  $a_i = i/2$ ,

$i = \overline{0, 6}$ . Эти зависимости как и зависимости  $N_1^+(a)$ , определяются для двух значений  $f_{0k}$  и для двух значений  $\Pi_\varepsilon$ . Эффективное напряжение устанавливается равным  $\sigma = 2В$ .

- К клеммам «Счётчик 2» анализатора подключают второй счётчик.
- Тумблер «Режим» анализатора переводится в положение « $\bar{\tau}, \bar{\theta}$ ».
- Ручкой генератора шума «Усиление плавно» устанавливают требуемое значение  $\sigma = 2В$ .
- Тумблер «Время анализа» ставится в положение «выкл» и производится сброс счётчиков на нуль.
- После установки необходимого порога  $u_{0i}$  тумблер «Время анализа» переводится в положение «вкл».
- При достижении показаний счётчика 2 некоторого значения  $N_2$  (удобно выбрать  $N_2 = 10^6 \div 10^5$ ) тумблер «Время анализа» ставится в положение «выкл». При этом счётчик 1 фиксирует некоторое число  $N_1$  тактовых импульсов, которое пропорционально времени пребывания реализации исследуемого случайного процесса над порогом  $u_{0i}$  за время анализа, которое пропорционально  $N_2$ . Следовательно, отношение  $N_1/N_2$  можно использовать для получения оценки значения функции распределения

$$\tilde{F}(u_{0i}) = 1 - N_1/N_2.$$

Используя последнее выражение, а также найденные значения  $N_1^+(a_i)$  и выражения (2.8), (2.9), можно получить оценки средних  $\bar{\tau}(a_i)$  и  $\bar{\theta}(a_i)$  для  $0 \leq a_i \leq 3$  при заданных значениях  $f_{0k}$  и  $\Pi_{\varepsilon m}$ .

## Оформление отчёта о лабораторной работе

Отчёт должен содержать:

1. Сведённые в таблицы экспериментальные данные.

2. Экспериментально полученные нормированные на  $H_0$  (2.10) амплитудно-частотные характеристики резонансного усилителя генератора шума с нанесёнными на них аппроксимирующими зависимостями.
3. Теоретические графики зависимостей среднего числа положительных выбросов  $N_1^+(a)$  в единицу времени от относительного уровня анализа  $a = u_0/\sigma$  с нанесёнными на них экспериментальными данными.
4. Теоретические графики зависимостей относительных средних длительностей  $\bar{\tau}f_{0k}$  положительных выбросов и относительных интервалов между выбросами  $\bar{\theta}f_{0k}$  как функции относительного уровня анализа  $a = u_0/\sigma$  с нанесёнными на них экспериментальными данными. Данные графики целесообразно построить в полулогарифмическом масштабе.

### Контрольные вопросы

1. Выполнить вывод формулы (2.4) для среднего числа выбросов гауссовского стационарного случайного процесса.
2. Получить аналитическое выражение для  $N_1^+(u_0)$  при подстановке (2.12) в (2.6), если  $\Pi_s \ll f_0$ . Провести анализ полученного асимптотического соотношения
3. Найти среднее число выбросов низкочастотного гауссовского стационарного случайного процесса с нулевым средним значением и спектральной плотностью, определяемой правой частью выражения (2.12), где  $f_0 = 0$ .
4. Найти среднее число положительных выбросов в единицу времени за уровень  $< A_m$  для колебания  $\xi(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ,  $A_m$  и  $\omega_0$  — известные постоянные, а  $\varphi$  — случайная фаза, распределённая равномерно в интервале  $[-\pi; \pi]$ .
5. Найти среднее число положительных выбросов за уровень для центрированного гауссовского процесса с корреляционной функцией  $R(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \gamma(\tau)]$ ,  $\rho(0) = 1$ .
6. Найти и сравнить среднее число положительных выбросов за уровень  $s$  для двух центрированных гауссовских процес-

сов с корреляционными функциями:  $R_1(\tau) = \sigma^2 \exp(-\beta^2 \tau^2)$ ;  
 $R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\beta^2 \tau^2) \cos(\omega_0 \tau)$ ,  $\omega_0/\beta \gg 1$ .

7. Обосновать использование формул (2.8) и (2.9) для эргодических случайных процессов.
8. Работа лабораторного макета в режиме измерения  $N_1^+(u_0)$ .
9. Работа лабораторного макета в режиме измерения  $\bar{\tau}(u_0)$  и  $\bar{\theta}(u_0)$ . Выбор периода следования импульсов тактового генератора.

**Литература:** [1] или [6] или [10].

**Лабораторная работа №3.**  
**ВОЗДЕЙСТВИЕ СИГНАЛА И ШУМА**  
**НА ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ**

**Цель работы:** Анализ изменения величины отношения сигнал/шум при прохождении аддитивной смеси полезного сигнала и шума через линейные системы.

**Основные соотношения и определения**

Всякое устройство (систему) для преобразования сигнала можно описать с помощью дифференциальных уравнений, связывающих сигналы на входе и на выходе этой системы. Соответственно, по этим уравнениям производится классификация систем. Обычно физические системы описываются следующими тремя типами дифференциальных уравнений:

- 1) линейные уравнения с постоянными коэффициентами;
- 2) линейные уравнения с переменными коэффициентами;
- 3) нелинейные уравнения.

Соответственно различают системы:

- 1) линейные с постоянными параметрами;
- 2) линейные с переменными параметрами;
- 3) нелинейные.

Кроме определения линейной системы с помощью вида уравнения, описывающего систему, можно дать следующие, эквивалентные определения:

- а) линейной является та система, к которой применим принцип суперпозиции;
- б) линейной является система, сигнал на выходе которой можно представить в виде

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t, \tau)d\tau. \quad (3.1)$$

Здесь  $x(t)$  — входное воздействие, а  $h(t, \tau)$  — импульсная переходная функция, полностью характеризующая систему. Импульсная переходная функция представляет собой функцию Грина соответствующего дифференциального уравнения, описывающего рассматриваемую систему. Иначе  $h(t, \tau)$  можно определить как выходной сигнал системы в момент времени  $t$ , если в момент времени  $\tau$  на вход системы действовал импульс в виде дельта функции. Для линейных систем с постоянными параметрами

$$h(t, \tau) = h(t - \tau) \quad (3.2)$$

и, следовательно, для описания системы достаточно задать  $h(t)$  как функцию одного аргумента. При этом, для физически реализуемых систем

$$h(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad (3.3)$$

что отражает справедливость принципа причинности: выходной сигнал не может появиться раньше воздействия входного сигнала. Полагая, что, входной сигнал начинает действовать в момент времени  $t = 0$ , т.е.  $x(t) = 0$  при  $t \leq 0$ , согласно (3.1) – (3.3) для сигнала на выходе линейной системы получаем выражения

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^t x(t - \tau)h(\tau)d\tau. \quad (3.4)$$

Линейную систему с постоянными параметрами можно также охарактеризовать её передаточной функцией (коэффициентом передачи)

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt. \quad (3.5)$$

Очевидно, что

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \quad (3.6)$$

Обозначим

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.7)$$

— спектр входного сигнала, тогда выходной сигнал (3.4) можно представить в виде

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.8)$$

Пусть входной сигнал  $x(t)$  представляет собой аддитивную смесь некоторой детерминированной функции  $s(t)$  и реализации случайного процесса  $n(t)$ , т.е.

$$x(t) = s(t) + n(t). \quad (3.9)$$

Детерминированную функцию  $s(t)$  будем интерпретировать как «полезный сигнал», а  $n(t)$  — как шум, т.е. как некоторое мешающее воздействие. Положим, что  $n(t)$  — реализация стационарного гауссовского процесса  $\xi(t)$  с математическим ожиданием  $m_\xi$  и функцией корреляции  $K_\xi(\tau)$ , так что

$$\langle \xi(t) \rangle = m_\xi, \quad \langle [\xi(t) - m_\xi][\xi(t + \tau) - m_\xi] \rangle = K_\xi(\tau). \quad (3.10)$$

Здесь угловые скобки обозначают статистическое усреднение (усреднение по ансамблю реализаций).

Рассмотрим прохождение суммы полезного сигнала и шума (3.9) через линейную систему с постоянными параметрами. Подставляя (3.9) в (3.4), имеем для выходного сигнала

$$y(t) = s_y(t) + n_y(t), \quad (3.11)$$

где

$$s_y(t) = \int_0^t s(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (3.12)$$

— полезный выходной сигнал,

$$n_y(t) = \int_0^t n(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (3.13)$$

— реализация шума  $\eta(t)$  на выходе линейной системы. Последний интеграл следует понимать как интеграл Римана в среднеквадратическом. Найдем статистические характеристики случайного процесса  $\eta(t)$ . Так как  $\eta(t)$  представляет собой результат линейного преобразования гауссова шума  $\xi(t)$ , то  $\eta(t)$  — тоже гауссовский случайный процесс. Следовательно, его статистические свойства полностью определены, если известны математическое ожидание  $m_\eta(t)$  и функция корреляции

$$K_\eta(t_1, t_2) = \langle [\eta(t_1) - m_\eta(t_1)][\eta(t_2) - m_\eta(t_2)] \rangle. \quad (3.14)$$

Вычислим математическое ожидание выходного шума

$$m_\eta(t) = \left\langle \int_0^t \xi(t-\tau)h(\tau)d\tau \right\rangle = \int_0^t \langle \xi(t-\tau) \rangle h(\tau)d\tau = m_\xi \int_0^t h(\tau)d\tau \quad (3.15)$$

и его функцию корреляции

$$K_\eta(t_1, t_2) = \left\langle \int_0^{t_1} h(\tau)[\xi(t_1-\tau) - m_\xi]d\tau \int_0^{t_2} h(\tau)[\xi(t_2-\tau) - m_\xi]d\tau \right\rangle.$$

Заменяя повторное интегрирование двойным и внося операцию математического ожидания под знак интеграла, получим

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(u)h(v) \langle [\xi(t_1-u) - m_\xi][\xi(t_2-v) - m_\xi] \rangle dudv.$$

Используя определение корреляционной функции и предположение о стационарности случайного процесса  $\xi(t)$ , из последнего на-



ХОДИМ

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(u)h(v)K_{\xi}(t_1 - t_2 + v - u)dudv. \quad (3.16)$$

Из (3.15), (3.16) следует, что в общем случае шум на выходе линейной системы нестационарный, даже если входной случайный процесс является стационарным. Однако, в случае линейных пассивных систем, которые, как правило, обладают конечной памятью, по истечении достаточно большого времени от момента включения выходного сигнала  $t = 0$  случайный процесс  $n_y(t)$  будет приближаться к стационарному. Действительно, пусть  $T_m$  — время, характеризующее память системы так, что для всех  $t > T_m$ ,  $h(t) = 0$ . Рассматривая выходной шум по истечении достаточно большого времени ( $t > T_m, t_1 > T_m, t_2 > T_m$ ), в формулах (3.15), (3.16) пределы интегрирования можно заменить на бесконечные. Тогда для характеристик выходного шума получаются следующие выражения

$$m_{\eta}(t) = m_{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = m_{\eta}$$

$$K_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)K_{\xi}(\tau + v - u)dudv, \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (3.17)$$

Таким образом, когда линейная система работает в стационарном режиме и на ее вход действует стационарный случайный процесс, выходной процесс также будет стационарным. Обычно говорят, что линейная система работает в стационарном режиме, если с момента подачи сигнала на вход системы прошло время, значительно большее длительности переходных процессов в этой системе или, что тоже самое, прошло время, значительно большее памяти системы.

Применительно к стационарному режиму работы линейной системы, выражение для функции корреляции выходного шума

(3.17) можно переписать в виде

$$K_{\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 G_{\xi}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (3.18)$$

где

$$G_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.19)$$

— спектральная плотность входного шума, а  $H(j\omega)$  — передаточная функция линейной системы (3.5).

Искажающее (мешающее) действие шума (помехи) можно характеризовать отношением сигнал/шум. Под отношением сигнал/шум (по мощности) часто понимают отношение максимальной (пиковой) мощности полезного сигнала к средней мощности шума. Обозначив отношение сигнал/шум по мощности на входе линейной системы через  $z_x^2$ , в соответствии с определением, получим

$$z_x^2 = \frac{\max |s(t)|^2}{\sigma_{\xi}^2}, \quad (3.20)$$

где  $\sigma_{\xi}^2 = K_{\xi}(0)$  — дисперсия (средняя мощность переменной составляющей) входного шума. Естественно считать, что чем больше отношение сигнал/шум, тем меньше шум искажает полезный сигнал. Аналогично (3.20), отношение сигнал/шум по мощности на выходе линейной системы запишем как

$$z_y^2 = \frac{\max |s_y(t)|^2}{\sigma_{\eta}^2}, \quad \sigma_{\eta}^2 = K_{\eta}(0). \quad (3.21)$$

Чтобы выяснить, как влияет линейная система с постоянными параметрами на отношение сигнал/шум (3.21), введем в рассмотрение величину

$$\rho = \frac{z_y}{z_x} = \frac{\max |s_y(t)|}{\max |s(t)|} \cdot \frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_{\eta}}. \quad (3.22)$$

Величина  $\rho$  показывает, как изменяется отношение сигнал/шум по напряжению, если сумму  $x(t)$  сигнала и шума (3.9) пропустить через линейный фильтр с постоянными параметрами. Очевидно, чем больше  $\rho$ , тем лучше фильтр подавляет помеху. Для вычисления выигрыша в отношении сигнал/шум, который дает линейная фильтрация, иногда удобнее использовать спектральные представления (3.8), (3.18). Тогда

$$\rho = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0} d\omega \right|}{2\pi \max_t |s(t)|} \cdot \left( \frac{\int_{-\infty}^{\infty} G_{\xi}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 G_{\xi}(\omega) d\omega} \right)^{1/2}, \quad (3.23)$$

где  $t_0$  — время достижения выходным полезным сигналом  $s_y(t)$  максимального значения. При выводе формулы (3.23) учтено, что вследствие (3.8) выполняется условие

$$\max_t |s_y(t)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0} d\omega \right|,$$

согласно (3.18) дисперсия  $\sigma_{\eta}^2$  определяется соотношением

$$\sigma_{\eta}^2 = K_{\eta}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 G_{\xi}(\omega) d\omega, \quad (3.24)$$

а из теоремы Винера-Хинчина следует

$$\sigma_{\xi}^2 = K_{\xi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (3.25)$$

Согласно (3.23) при изменении передаточной функции  $H(j\omega)$  величина отношения сигнал/шум на выходе фильтра будет также меняться. Те фильтры, для которых величина  $\rho$  достигает максимального значения, называют оптимальными. Можно показать, что для сигнала  $s(t)$  со спектром  $S(j\omega)$ , принимаемого

на фоне шума со спектральной плотностью  $G_{\xi}(\omega)$  оптимальным будет фильтр с передаточной функцией

$$H_0(j\omega) = K \frac{S^*(j\omega)}{G_{\xi}(\omega)} e^{-j\omega t_0}. \quad (3.26)$$

Здесь  $K$  и  $t_0$  — некоторые постоянные, а «\*» обозначает комплексное сопряжение. Согласно (3.26) передаточная функция оптимального фильтра полностью определяется спектром полезного сигнала  $s(t)$  и спектральной плотностью шума  $G_{\xi}(\omega)$ .

Следует отметить, что техническая реализация оптимального фильтра наталкивается на значительные трудности даже для простейших сигналов. Поэтому во многих практических приложениях ограничиваются тем, что выбрав некоторый, достаточно легко реализуемый фильтр, затем подбирают его параметры таким образом, чтобы величина  $\rho$ , определяемая формулой (3.23), была максимальной. Естественно, получаемый при этом выигрыш в величине отношения сигнал/шум, будет меньше, чем при использовании оптимального фильтра (3.26).

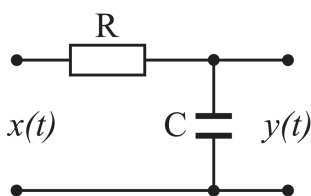


Рис. 3.1

Найдем выигрыш в величине отношения сигнал/шум, который может обеспечить простейший фильтр в виде интегрирующей RC-цепочки (рис. 3.1) при фильтрации прямоугольного импульса

$$s(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \tau_u, \\ 0, & t \leq 0, \quad t \geq \tau_u \end{cases} \quad (3.27)$$

на фоне гауссовского шума, спектральная плотность которого постоянная в некоторой полосе частот, т.е.

$$G_{\xi}(\omega) = \begin{cases} G_0/2, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \quad -\omega_2 \leq \omega \leq -\omega_1, \\ 0, & |\omega| < \omega_1, \quad |\omega| > \omega_2. \end{cases} \quad (3.28)$$

Вычислим вначале отношение сигнал/шум на входе фильтра (рис. 3.1). Из (3.27) следует, что  $\max |s(t)| = A$ , а из (3.25) имеем

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{1}{2\pi} G_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = G_0 \cdot (f_2 - f_1), \quad (3.29)$$

где  $f_i = \omega_i/2\pi$ ,  $i = 1, 2$ . Следовательно, входное отношение сигнал/шум по напряжению равно

$$z_x = \frac{\max |s(t)|}{\sigma_{\xi}} = \frac{A}{\sqrt{G_0(f_2 - f_1)}}. \quad (3.30)$$

Определим теперь отношение сигнал/шум на выходе фильтра рис. 3.1. Для этого вначале надо найти сигнал на выходе RC-цепочки при воздействии на ее вход прямоугольного импульса (3.27). Импульсная переходная функция системы на рис. 3.1 имеет вид

$$h(t) = \begin{cases} \exp(-t/\tau_0), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (3.31)$$

где  $\tau_0 = RC$  — постоянная времени интегрирующей RC-цепочки. Подставляя (3.27) и (3.31) в (3.12), получаем

$$s_y(t) = \begin{cases} A(1 - \exp(-t/\tau_0)), & 0 \leq t \leq \tau_u, \\ A \exp(-(t - \tau_u)/\tau_0) \cdot (1 - \exp(-t/\tau_0)), & \tau_u \leq t \leq \infty, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Отсюда, непосредственно, следует, что  $t_0 = \tau_u$ ,

$$\max |s_y(t)| = s_y(t_0) = A(1 - \exp(-\tau_u/\tau_0)). \quad (3.33)$$

При определении дисперсии шума на выходе интегрирующей RC-цепочки воспользуемся спектральным представлением. Передаточная функция для системы на рис. 3.1 определяется выражением

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_0}. \quad (3.34)$$

Подставляя (3.34) и (3.28) в (3.24), находим среднюю мощность переменной составляющей шума на выходе RC-цепочки

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{G_0}{2\pi\tau_0} [\operatorname{arctg}(2\pi f_2\tau_0) - \operatorname{arctg}(2\pi f_1\tau_0)]. \quad (3.35)$$

Следовательно, отношение сигнал/шум на выходе RC-цепочки равно

$$z_y = \frac{A\sqrt{2\pi\tau_0} [1 - \exp(-\tau_u/\tau_0)]}{\sqrt{G_0[\operatorname{arctg}(2\pi f_2\tau_0) - \operatorname{arctg}(2\pi f_1\tau_0)]}}. \quad (3.36)$$

В большинстве прикладных задач полезный сигнал наблюдается на фоне весьма широкополосного шума, так что обычно выполняются неравенства

$$f_2\tau_0 \gg 1, \quad f_2 \gg f_1. \quad (3.37)$$

При этих предположениях

$$\operatorname{arctg}(2\pi f_2\tau_0) \approx \pi/2, \quad f_2 - f_1 \approx f_2,$$

и выигрыш в величине отношения сигнал/шум за счет фильтрации запишется следующим образом

$$\rho \approx \frac{2\sqrt{f_2\tau_u}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(2\pi f_1\tau_0)}} \cdot \frac{1 - \exp(-\tau_u/\tau_0)}{\sqrt{\tau_u/\tau_0}}. \quad (3.38)$$

Учитывая, что ширина спектра прямоугольного импульса  $\Delta f_u = 1/\tau_u$ , получаем

$$\sqrt{f_2\tau_u} = \sqrt{f_2/\Delta f}. \quad (3.39)$$

То есть выигрыш в величине отношения сигнал/шум пропорционален корню квадратному отношения ширины спектральной плотности входного шума  $f_2 - f_1 \approx f_2$  к ширине спектра полезного сигнала  $\Delta f_u$ . Кроме того, этот выигрыш зависит от соотношения между длительностью импульса  $\tau_u$  и постоянной времени  $\tau_0$  схемы на рис 3.1. Существенное влияние на выигрыш в величине отношения сигнал/шум оказывает также нижняя граница спектральной плотности  $f_1$ . Очевидно, что чем больше  $f_1$ , тем в большей степени можно подавить шум с помощью фильтрации.

Рассмотрим зависимость выигрыша в величине отношения сигнал/шум от постоянной времени RC-цепочки  $\tau_0$  и от нижней границы спектральной плотности шума. Для этого введем нормированные переменные

$$a = \tau_0/\tau_u, \quad b = f_1\tau_u. \quad (3.40)$$

Преобразуем (3.38) к следующему виду

$$\rho \approx \frac{2\sqrt{f_2\tau_u}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi} \arctg(2\pi ab)}} \cdot \sqrt{a}(1 - \exp(-1/a)). \quad (3.41)$$

Зависимость нормированного выигрыша  $\tilde{\rho} = \rho/2\sqrt{f_2\tau_u}$  от  $a$  для нескольких значений  $b$  представлена на рис. 3.2. Кривая 1 на этом графике соответствует  $b = 0$  (т.е.  $f_1 = 0$ ). При выводе формулы (3.41) предполагалось, что  $f_2 \gg 1/\tau_u$ . То есть, ширина полосы частот шума значительно больше полосы частот сигнала  $s(t)$ . Значит кривая 1 на рис. 3.2 описывает величину нормированного выигрыша в отношении сигнал/шум для широкополосной помехи. Эта кривая имеет максимум в точке  $a = 0.8$ , то есть  $\tau_0 = 0.8\tau_u$ . Следовательно, интегрирующая RC-цепь максимально подавляет широкополосный шум, если её постоянная времени составляет, примерно, 80% от длительности полезного прямоугольного импульса на входе цепочки. Естественно, для полезного сигнала другой формы (не прямоугольного) оптимальное значение постоянной времени интегрирующей цепочки будет отличаться от значения  $0.8\tau_u$ .

Кривая 2 на рис. 3.2 соответствует значению  $b = 0.05$ , то есть при  $f_1 = 0.05/\tau_u$ . Это означает, что в полосе частот  $[0, f_1]$ , составляющей всего 5% от полосы частот входного полезного сигнала  $s(t)$  (3.27), спектральная плотность шума на входе равна нулю. Из сравнения кривых 1 и 2 на рис. 3.2 следует, что даже такое незначительное изменение спектральной плотности шума приводит к существенному изменению характера зависимости  $\tilde{\rho}(a)$ . Максимум этой зависимости смещается в сторону больших значений постоянной времени RC-цепочки  $\tau_0$  и этот максимум становится менее выраженным, чем в случае  $b = 0$ .

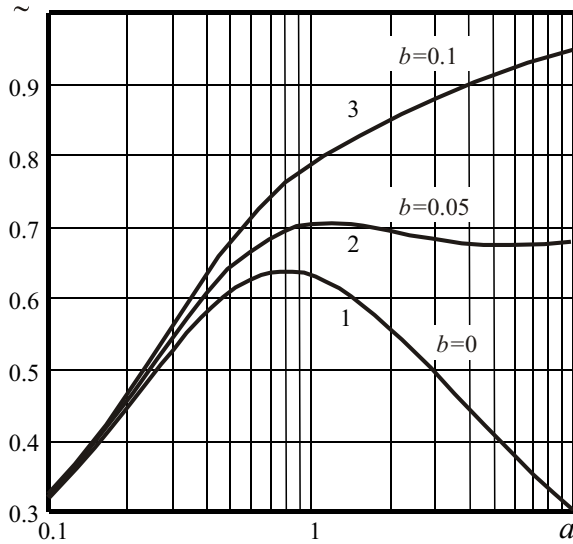


Рис. 3.2

Кривая 3 соответствует значению  $b = 0.1$ , то есть  $f_1 = 0.1/\tau_u$  и спектральная плотность входного шума равна нулю в полосе частот  $[0, f_1]$ , составляющей 10% от полосы частот входного полезного сигнала  $s(t)$ . Теперь относительный выигрыш в величине отношения сигнал/шум монотонно возрастает с увеличением постоянной времени интегрирующей цепочки  $\tau_0$ , что соответствует уменьшению полосы пропускания системы. Кроме того, с увеличением  $f_1$  возрастает абсолютная величина выигрыша в отношении сигнал/шум вследствие фильтрации. Изменение характера зависимости  $\tilde{\rho}(a)$  с увеличением полосы  $[0, f_1]$ , в которой спектральная плотность шума равна нулю, объясняется тем, что спектр сигнала в этой полосе не равен нулю. Следовательно, когда полоса пропускания RC-цепочки становится порядка величины  $f_1$ , этот фильтр, пропуская ненулевые составляющие спектра сигнала в полосе  $[0, f_1]$ , практически не пропускает шума. Поэтому с уменьшением полосы пропускания фильтра, амплитуда полезного сиг-



нала на выходе фильтра убывает, но мощность шума на выходе убывает в еще большей степени. Тем самым выходное отношение сигнал/шум оказывается увеличенным по сравнению с входным отношением сигнал/шум.

### Описание лабораторной установки

Лабораторная установка, используемая в данной работе, предназначена для экспериментального исследования преобразования сигнала и шума в интегрирующей RC-цепочке. На рис. 3.3 приведена блок-схема установки. Лабораторная установка состоит из:

- генератора шума Г2-57,
- вольтметра эффективных значений,
- осциллографа,
- лабораторного макета.

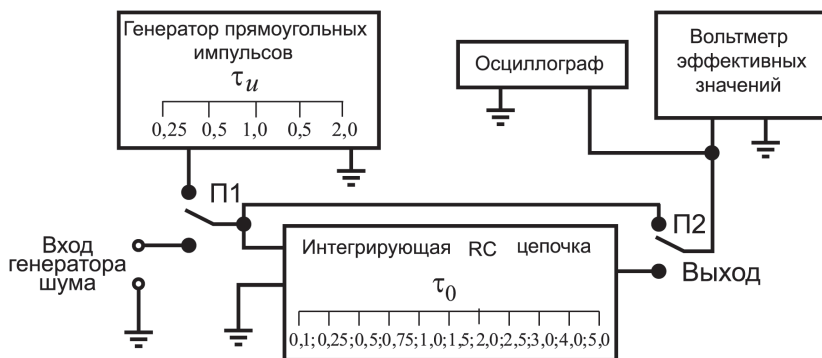


Рис. 3.3

Генератор шума Г2-57 используется в качестве источника реализаций гауссовского случайного процесса с нулевым средним значением. При работе с генератором Г2-57 переключатель диапазонов полосы частот шума должен быть установлен в положение 20кГц. Тогда генератор Г2-57 вырабатывает реализации случайного процесса, спектральная плотность которого приблизительно постоянна в полосе частот от 50 Гц до 20 кГц.

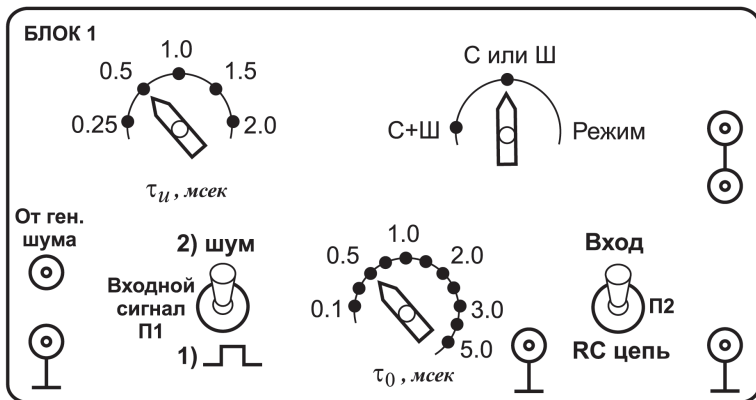


Рис. 3.4

Вольтметр эффективных значений прибора предназначен для измерения эффективного значения шума на входе и выходе RC-цепочки.

Осциллограф, используется для измерения амплитуды сигналов на входе и выходе RC-цепочки.

Лабораторный макет включает в себя генератор прямоугольных импульсов и интегрирующую RC-цепь. Генератор импульсов может вырабатывать прямоугольные импульсы длительностью  $\tau_u = 0.25, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$  миллисекунд ( $10^{-3}$  сек). Величина длительности импульсов устанавливается переключателем макета  $\tau_u$ . Постоянная времени  $\tau_0$  интегрирующей цепочки, используемой в макете, может принимать значения 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 4.0, 5.0 миллисекунд. Требуемая величина постоянной времени RC-цепочки устанавливается переключателем макета  $\tau_0$ .

Осциллограф, подключаемый с помощью переключателя П2 (рис. 3.4) ко входу или выходу RC-цепи, позволяет измерять амплитуду  $A$  прямоугольных импульсов на входе интегрирующей RC-цепочки и амплитуду  $A_y$  сигналов на выходе RC-цепочки. При этом переключатель П1 «Входной сигнал» устанавливается в положение 1, при котором на вход RC-цепочки поступают только прямоугольные импульсы с генератора макета. Если этот

переключатель установить в положение 2, при котором на вход RC-цепочки поступает шум с генератора Г2-57, то вольтметр эффективных значений позволяет измерить эффективное значение шума  $\sigma_\xi$  на входе RC-цепочки (переключатель П2 в положение «Вход») и на выходе RC-цепочки (переключатель П2 в положение «RC-цепь»).

Таким образом, с помощью установки на рис. 3.3 можно получить данные, необходимые для определения экспериментальной зависимости выигрыша в отношении сигнал/шум, который обеспечивается фильтрацией смеси сигнала и шума RC-фильтром.

### Экспериментальная часть

1. Ознакомиться с описанием и инструкцией к приборам: генератор шума, осциллограф, вольтметр.
2. По формуле (3.38) рассчитать зависимости выигрыша в величине отношения сигнал/шум  $\rho(\tau_0)$  от величины постоянной времени интегрирующей RC-цепочки  $\tau_0$  при заданных длительностях прямоугольных импульсов  $\tau_u$ . Расчет произвести для следующих значений  $\tau_0 = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 4.0, 5.0$  миллисекунд,  $\tau_u = 0.25, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$  миллисекунд, нижняя частота спектральной плотности шума  $f_1 = 50$ Гц, а верхняя частота  $f_2 = 15$ кГц.
3. Построить (на миллиметровке) графики теоретических зависимостей для указанных значений  $\tau_u$ . Дать физическую интерпретацию этих зависимостей.
4. Снять экспериментальные зависимости выигрыша в величине отношения сигнал/шум от постоянной времени RC-цепочки  $\tau_0$  для значений длительности прямоугольного импульса  $\tau_u = 0.25, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$  мс. Для этого необходимо включить макет, генератор шума, осциллограф, вольтметр, дать им прогреться не менее 30 мин.
  - а) Измерение амплитуды сигнала на входе и выходе фильтра.

- Поставить переключатель  $\tau_u$  блока 1 в положение 0.25мс, а переключатель  $\tau_0$  в положение 0.1мс.
  - Тумблером П1 «Вх.сигнал» подключить генератор прямоугольных импульсов ко входу интегрирующей RC-цепи (положение 1).
  - Подключить ко входу интегрирующей RC-цепочки осциллограф (переключатель П2 в положение «Вход»).
  - Измерить по экрану осциллографа амплитуду  $A$  сигнала на входе RC-цепи.
  - Подключив осциллограф ко выходу RC-цепи (переключатель П2 «RC-цепь» в положение «Выход»), измерить по экрану осциллографа амплитуду сигнала на выходе  $A_y$ .
- б) Измерение эффективного напряжения шума на входе и выходе.
- Тумблером П1 «Вх.сигнал» отключить генератор прямоугольных импульсов от входа RC-цепи и подключить генератор шума Г2-57.
  - Изменяя уровень шума, вырабатываемого генератором, с помощью вольтметра установить заданное преподавателем эффективное напряжение  $\sigma_\xi$  на входе RC-цепочки (переключатель П2 «RC-цепь» в положение «Вход»).
  - Поставив переключатель П2 «RC-цепь» в положение «Выход», измерить эффективное напряжение шума на выходе RC-цепи.
- в) Выполнить указанные в пунктах а), б) измерения  $A$ ,  $A_y$ ,  $\sigma_\xi$ ,  $\sigma_\eta$  в заданной последовательности для постоянной времени RC-цепочки  $\tau_0 = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 4.0, 5.0$  миллисекунд при длительности прямоугольных импульсов  $\tau_u = 0.25, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ мс.

Результаты измерений занести в таблицу. В эту же таблицу занести значения  $\rho(\tau_0)$ , рассчитанные по формуле (3.38), и значения

$\rho_{\text{эк}}(\tau_0) = A_y \sigma_\eta / A \sigma_\xi$ , где величины  $A_y$ ,  $\sigma_\eta$ ,  $A$ ,  $\sigma_\xi$  измерены при проведении эксперимента. Экспериментальные значения  $\rho_{\text{эк}}(\tau_0)$  следует также нанести на графики, где построены теоретические зависимости  $\rho(\tau_0)$ . Для экспериментальных точек, соответствующих различным длительностям полезного сигнала, желательно использовать различные обозначения (кружки, треугольники, крестики, плюсики и т.д.)

Обсудить согласование теоретических и экспериментальных зависимостей, продумать возможные объяснения физических причин отклонения экспериментальных значений от теоретических.

$\tau_0$ [мс]																			
$\sigma_\xi$ [В]																			
$\sigma_\eta$ [В]																			
$A$ [В]																			
$A_y$ [В]	$\tau_u = 0.25$ мс																		
	$\tau_u = 0.5$ мс																		
	$\tau_u = 1.0$ мс																		
	$\tau_u = 1.5$ мс																		
	$\tau_u = 2.0$ мс																		
$\rho(\tau_0)$																			
$\rho_{\text{эк}}(\tau_0)$																			

### Оформление отчёта о лабораторной работе

В отчет о лабораторной работе включается:

1. Блок-схема лабораторной установки с кратким описанием назначения приборов.
2. Таблица с экспериментальными данными, теоретические и экспериментальные значения величин  $\rho(\tau_0)$  и  $\rho_{\text{эк}}(\tau_0)$ .
3. Графики теоретических зависимостей  $\rho(\tau_0)$  с нанесенными на них экспериментальными данными.
4. Выводы и оценки полученных результатов.

## Контрольные вопросы

1. Оптимальные и согласованные фильтры и их свойства.
2. Квазиоптимальные (согласованные по полосе) фильтры.
3. Примеры квазиоптимальных фильтров.
4. Выполнить вывод выражения  $\rho_{RC} = z_y/z_0$ , где  $z_y$  — отношение сигнал/шум на выходе интегрирующей RC-цепи (3.31), если на её вход поступает импульс (3.27) и белый шум с нулевым средним значением и односторонней спектральной плотностью  $N_0$ , а  $z_0$  — отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра для тех же входных данных. Построить зависимость  $\rho_{RC}(\tau_0/\tau_u)$ . Обосновать наличие максимума у этой зависимости.
5. Провести анализ выигрыша (3.38) в величине отношения сигнал/шум за счёт фильтрации интегрирующей RC-цепи при различных соотношениях между параметрами сигнала, фильтра и граничных частот энергетического спектра шума. Объяснить, почему при одних комбинациях этих параметров зависимость  $\rho(\tau_0)$  имеет максимум, а при других нет.
6. Какими приборами и почему измерялись величины амплитуд полезного сигнала и средняя мощность шума?
7. На фильтр с амплитудно-частотной характеристикой

$$H_0(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \Omega/2, \\ 0, & |\omega| > \Omega/2, \end{cases} \quad (3.42)$$

воздействует стационарный гауссовский марковский случайный процесс. Найти дисперсию процесса на выходе в стационарном режиме.

8. На фильтр с АЧХ  $H_0(\omega)$  (3.42) воздействует белый шум. Найти корреляционную функцию процесса на выходе.
9. На линейную систему с импульсной переходной функцией  $h(t) = 1$  при  $0 \leq t \leq \tau_h$  и  $h(t) = 0$  при  $t < 0$ ,  $t > \tau_h$  поступает белый шум. Найти корреляционную функцию процесса на выходе.

**Литература:** [3], [5-7].

**Лабораторная работа №4.**  
**ВЗАИМНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ШУМОВ НА ВЫХОДАХ**  
**ФИЛЬТРОВ С ПЕРЕКРЫВАЮЩИМИСЯ**  
**ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

**Цель работы:** познакомиться с методикой экспериментального определения коэффициента взаимной корреляции двух случайных процессов, а также исследование зависимости величины коэффициента взаимной корреляции от спектральных параметров этих процессов.

**Основные соотношения и определения**

Для решения многих радиотехнических задач применяются многоканальные системы. Рассмотрим двухканальную систему (рис. 4.1), каждый канал которой состоит из линейного фильтра с передаточной функцией  $H_i(j\omega)$  или соответствующей ей импульсной переходной функцией  $h_i(t)$ . На общий вход этих фильтров поступает стационарный случайный процесс  $\xi(t)$  с нулевым математическим ожиданием и функцией корреляции  $K_\xi(\tau)$ . В установившемся режиме случайные процессы  $\eta_i(t)$  на выходах фильтров формально можно представить в виде

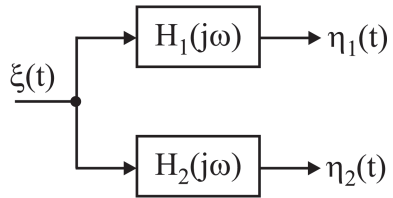


Рис. 4.1

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(t - \tau)\xi(\tau)d\tau. \quad (4.1)$$

Нетрудно показать, что  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  — стационарные и стационарно связанные случайные процессы, для которых функции

корреляции определяются выражением

$$K_i(\tau) = \langle \eta_i(t)\eta_i(t+\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_i(u)h_i(v)K_{\xi}(\tau-u+v)dudv, \quad i = 1, 2, \quad (4.2)$$

а функция взаимной корреляции — соотношением

$$K_{12}(\tau) = \langle \eta_1(t)\eta_2(t+\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h_2(v)K_{\xi}(\tau-u+v)dudv. \quad (4.3)$$

Если в (4.2) и (4.3) от  $h_i(t)$  перейти к передаточным функциям  $H_i(j\omega)$ , а от  $K_{\xi}(\tau)$  — к спектральной плотности  $K_{\xi}(\omega)$ , то получаем

$$K_i(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\omega)|H_i(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega, \quad i = 1, 2, \quad (4.4)$$

$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\omega)H_1(j\omega)H_2^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (4.5)$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение. Представим передаточные функции в виде

$$H_i(j\omega) = H_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)}, \quad i = 1, 2. \quad (4.6)$$

Здесь  $H_i(\omega)$  — амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), а  $\varphi_i(\omega)$  — фазо-частотные характеристики (ФЧХ) фильтров. Как известно,  $H_i(\omega)$  — четные, а  $\varphi_i(\omega)$  — нечетные функции. Учитывая также, что для действительного случайного процесса  $\xi(t)$  его спектральная плотность  $K_{\xi}(\tau)$  — чётная функция, выражения (4.4) и (4.5) можно переписать иначе

$$K_i(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_{\xi}(\omega)H_i^2(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega, \quad i = 1, 2, \quad (4.7)$$



$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_{\xi}(\omega) H_1(\omega) H_2(\omega) \cos(\omega\tau + \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)) d\omega. \quad (4.8)$$

Как следует из (4.7) и (4.8), функции корреляции  $K_i(\tau)$  процессов  $\eta_i(t)$  определяются спектральной плотностью  $K_{\xi}(\omega)$  входного процесса  $\xi(t)$ , АЧХ  $H_i(\omega)$  фильтров каналов и не зависят от ФЧХ фильтров. В то же время функция взаимной корреляции  $K_{12}(\tau)$  зависит от  $K_{\xi}(\omega)$ , АЧХ  $H_i(\omega)$  и ФЧХ  $\varphi_i(\omega)$  фильтров. При этом если  $H_1(\omega)H_2(\omega) \equiv 0$ , то есть АЧХ фильтров не перекрываются, то  $K_{12}(\tau) = 0$  — случайные процессы  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  некоррелированы, а в случае гауссовского процесса  $\xi(t)$  процессы  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  статистически независимы. Используя (4.7) и (4.8), нетрудно также записать выражение для коэффициента взаимной корреляции случайных процессов  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= K_{12}(\tau) / \sigma_1 \sigma_2 = \\ &= \frac{1}{\pi \sigma_1 \sigma_2} \int_0^{\infty} K_{\xi}(\omega) H_1(\omega) H_2(\omega) \cos(\omega\tau + \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)) d\omega, \quad (4.9) \end{aligned}$$

где  $\sigma_i^2$  — дисперсии процессов  $\eta_i(t)$ , определяемые соотношением

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_{\xi}(\omega) H_i^2(\omega) d\omega.$$

Конкретизируем полученное выражение (4.9) для случая, когда линейные фильтры в каналах представляют собой два идентичных колебательных контура с резонансными частотами  $\omega_i$ , а  $\xi(t)$  — белый шум с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ . Полагая для простоты величину максимального усиления резонансных контуров равной единице, для их передаточных функций можно записать

$$H_i(j\omega) = 1 / \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_i} - \frac{\omega_i}{\omega} \right) \right]. \quad (4.10)$$

Здесь  $Q$  — добротность контуров,  $\omega_1 = 2\pi f_0$ ,  $\omega_2 = 2\pi f_0 + 2\pi\Delta f$ ,  $\Delta f$  — расстройка по частоте одного контура относительно другого. Будем считать, что контуры являются узкополосными, а расстройка  $\Delta f$  не очень большая, т.е.

$$\Pi \ll f_0, \quad \Delta f \ll f_0, \quad (4.11)$$

где  $\Pi = f_0/Q$  — ширина полосы контура по уровню половинной мощности. Подставляя выражение (4.10) в (4.9), после упрощений получаем

$$R_{12}(\tau) = \frac{\exp(-\pi\Delta f|\tau|)}{\sqrt{1 + (\Delta f/\Pi)^2}} \cos(2\pi f_0\tau + \varphi) \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \pi N_0\Pi/2, \quad (4.12)$$

где

$$\varphi = \arctg \frac{\Delta f}{\Pi}. \quad (4.13)$$

Как следует из (4.12), огибающая коэффициента взаимной корреляции уменьшается с увеличением  $|\tau|$  и  $\Delta f$  и в пределе стремится к нулю. Если  $\tau = 0$ , то из (4.12), (4.13) имеем

$$R_{12}(0) = 1 / [1 + (\Delta f/\Pi)^2]. \quad (4.14)$$

График зависимости  $R_{12}(0)$  от относительной расстройки  $\Delta f/\Pi$  показан на рис. 4.2. Приведённые соотношения (4.12) – (4.14) и график на рис. 4.2 являются приближёнными, т.к. они получены в предположение (4.11). Поэтому целесообразно также экспериментально исследовать поведение взаимной корреляции случайных процессов на выходе резонансных контуров от расстройки их центральных частот.

Экспериментальное определение взаимной корреляции между случайными процессами можно осуществить достаточно большим числом способов. Приведём здесь один из них.

Пусть на горизонтально и вертикально отклоняющие пластины осциллографа (рис. 4.3) подаются напряжения  $x(t)$  и  $y(t)$ , пропорциональные реализациям стационарных **эргодических** случайных процессов  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$ . Тогда яркость свечения экрана

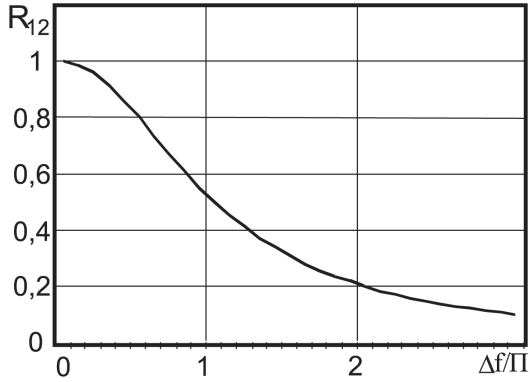


Рис. 4.2

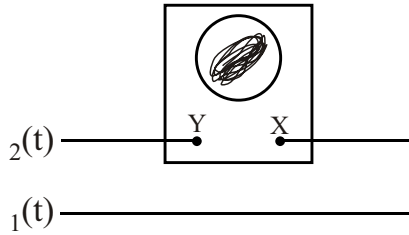


Рис. 4.3

осциллографа будет определяться совместной плотностью вероятности  $W(x, y)$  процессов  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$ . Действительно, яркость свечения любой точки экрана с координатами  $(x, y)$  будет пропорциональна частоте появления луча в окрестности этой точки, которая для эргодических процессов  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  пропорциональна значению совместной плотности вероятности  $W(x, y)$ . Если  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  совместно гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями, то зависимость яркости свечения от

координат точек экрана определяется выражением

$$W_{12}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R_{12}^2}} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2(1-R_{12}^2)} \left[ \frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2R_{12}\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} \right] \right], \quad (4.15)$$

где  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$  — дисперсии, а  $R_{12} = R_{12}(\tau)|_{\tau=0}$  — значение коэффициента взаимной корреляции  $R_{12}(\tau)$  случайных процессов  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$ . Визуально подобное изображение воспринимается как совокупность линий постоянной яркости, то есть линий, для которых  $W(x, y) = \text{const}$ . При гауссовском распределении линиями постоянной яркости являются эллипсы, которые обычно называют эллипсами рассеяния. Уравнения этих эллипсов рассеяния имеют вид

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2R_{12}\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = \text{const}. \quad (4.16)$$

Можно показать, что оси симметрии (главные оси) эллипсов (4.16) составляют с осью  $Ox$  угол  $\alpha$ , определяемый соотношением

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2R_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}. \quad (4.17)$$

Как следует из (4.17), величина  $\alpha$  зависит от дисперсий  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$  и от коэффициента взаимной корреляции  $R_{12}$ . Если дисперсии случайных процессов  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  одинаковы, то оси симметрии эллипсов рассеяния составляют с осью  $Ox$  угол  $\alpha = \pi/4$  при  $R_{12} > 0$  и  $\alpha = \pi/4 + \pi/2$ , когда  $R_{12} < 0$ . Величина коэффициента корреляции  $R_{12}$  при этом определяет соотношение между малой и большой осями эллипсов рассеяния. Действительно, уравнения эллипсов рассеяния в системе координат  $Ox'y'$ , оси которой совпадают с главными осями эллипсов, имеют вид

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = \text{const}, \quad (4.18)$$

где  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси эллипсов. Поскольку система координат  $Ox'y'$  повернута относительно системы координат  $Oxy$

на угол  $\alpha$ , то

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \quad (4.19)$$

Для случая одинаковых дисперсий  $\sigma_1 = \sigma_2$  и  $R_{12} > 0$  в (4.19) полагаем  $\alpha = \pi/4$ . Тогда, подставляя (4.19) в (4.18), получаем

$$x^2 - 2xy \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + y^2 = \text{const}. \quad (4.20)$$

Сопоставляя (4.16), где  $\sigma_1 = \sigma_2$  с (4.20), находим

$$R_{12} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1 - (b/a)^2}{1 + (b/a)^2}. \quad (4.21)$$

Если же  $R_{12} < 0$ , то аналогично

$$R_{12} = -\frac{1 - (b/a)^2}{1 + (b/a)^2}. \quad (4.22)$$

Таким образом, согласно (4.21) и (4.22), измерив большую и малую оси эллипса рассеяния, можно определить коэффициент взаимной корреляции гауссовских эргодических процессов с одинаковыми дисперсиями. Однако практическое измерение величин осей эллипсов рассеяния имеет большую погрешность. Поэтому в работе предлагается для измерения  $R_{12}$  использовать несколько другой подход.

Блок-схема установки для измерения коэффициента взаимной корреляции, используемая в работе, изображена на рис. 4.4.

Существо метода измерения сводится к следующему. Реализации эргодических случайных процессов  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$ , имеющих одинаковые дисперсии, коэффициент взаимной корреляции которых необходимо измерить, подаются на схему вычитания. Причём реализация процесса  $\eta_1(t)$  перед этим проходит через усилитель с регулируемым коэффициентом усиления  $K \leq 1$ . Полученная на выходе схемы вычитания реализация процесса

$$\nu(t) = \eta_2(t) - K\eta_1(t) \quad (4.23)$$

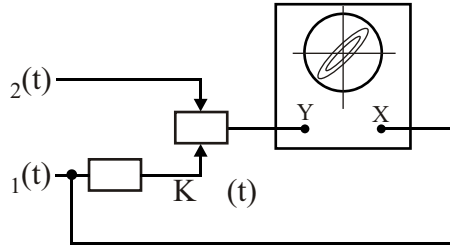


Рис. 4.4

поступает на вертикально отклоняющие пластины осциллографа. На горизонтально отклоняющие пластины подается реализация процесса  $\eta_1(t)$ .

Поскольку исследуемые процессы  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  имеют гауссовские распределения, то и разность (4.23) также подчиняется гауссовскому распределению. Поэтому яркость свечения экрана осциллографа будет пропорциональна совместной гауссовской плотности вероятности процессов  $\eta_1(t)$  и  $\nu(t)$

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1 - R_{12}^2}} \times \exp \left[ -\frac{x^2 - 2R_{12}x(y + Kx) + (y + Kx)^2}{2\sigma^2(1 - R_{12}^2)} \right] \quad (4.24)$$

или

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1 - R_{12}^2}} \times \exp \left[ -\frac{x^2(1 + K^2 - 2KR_{12}) - 2(R_{12} - K)xy + y^2}{2\sigma^2(1 - R_{12}^2)} \right]. \quad (4.25)$$

Таким образом, эллипсы рассеяния в данном случае определяются уравнением

$$x^2(1 + K^2 - 2KR_{12}) - 2(R_{12} - K)xy + y^2 = \text{const.} \quad (4.26)$$

Как следует из (4.26), при  $K = 0$  оси симметрии эллипсов рассеяния повернуты на  $\pi/4$  по отношению к осям координат  $Ox$  и  $Oy$ . Если же  $K \neq 0$ , то дисперсии процессов  $\eta_1(t)$  и  $\nu(t)$  не одинаковы и главные оси эллипсов рассеяния находятся под углом к координатным осям, не равным  $\pi/4$ . Величина этого угла зависит от коэффициента взаимной корреляции  $R_{12}$  и значения  $K$ . При этом, если  $K = R_{12}$ , оси симметрии эллипсов рассеяния совпадают с координатными осями (рис. 4.5) и случайные процессы  $\eta_1(t)$  и  $\nu(t)$  статистически независимы.

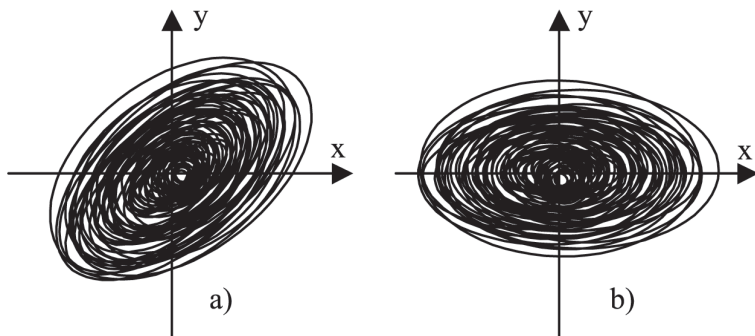


Рис. 4.5

Таким образом, измерение коэффициента взаимной корреляции сводится к подбору коэффициента усиления  $K$ , при котором главные оси эллипсов рассеяния на экране осциллографа совпадают с координатными осями, что соответствует статистической независимости  $\eta_1(t)$  и  $\nu(t)$ . В качестве примера на рис. 4.5 показаны эллипсы рассеяния двух сигналов при  $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $R_{12} = 0.5$ . Рисунок а) соответствует  $\nu(t) = \eta_2(t)$ , рисунок б) —  $\nu(t) = \eta_2(t) - 0.5\eta_1(t)$ .

Для экспериментального исследования взаимной корреляции случайных процессов можно пользоваться лабораторным макетом, внешний вид которого изображен на рис. 4.6.

## Описание лабораторной установки

Основным узлом лабораторной установки является макет, который включает в себя:

- два узкополосных усилителя на интегральных микросхемах с колебательными LC контурами;
- вычитающее устройство;
- два оконечных усилителя.

Внешний вид лицевой панели макета схематично изображён на рис. 4.6. Колебательный контур в первом канале макета на-

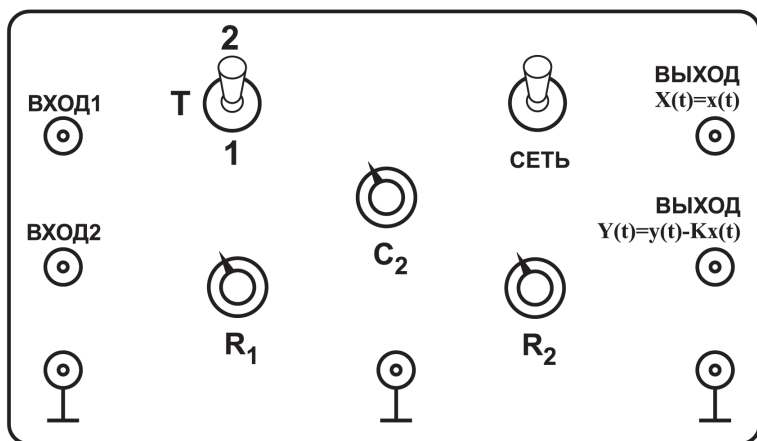


Рис. 4.6

строен на фиксированную частоту  $\approx 11\text{кГц}$ . Резонансная частота колебательного контура во втором канале может перестраиваться в диапазоне  $8 \div 15\text{кГц}$  переменным конденсатором  $C_2$ . Пределы изменения резонансной частоты конденсатором  $C_2$  таковы, что максимальная расстройка между резонансными частотами контуров первого и второго каналов равна примерно четырем полосам пропускания  $\Pi$  этих контуров. Поэтому при максимальной расстройке между резонансными частотами контуров их амплитудно-частотные характеристики практически не перекрываются. Ручка  $C_2$  на лицевой стороне прибора снабжена условны-



ми делениями, которые необходимо предварительно сопоставить с реальными резонансными частотами контура второго канала (выполнить градуировку по частоте).

Узкополосный усилитель 1-го канала имеет регулируемый коэффициент усиления — ручка  $R_1$  на рис. 4.6. Эта регулировка позволяет обеспечить равенство дисперсий случайных процессов на выходах 1-го и 2-го каналов.

Вычитающее устройство макета служит для формирования разности между выходными напряжениями резонансных усилителей каналов. При этом выходное напряжение усилителя 1-го канала поступает на вычитающее устройство через делитель. Регулировка коэффициента деления, осуществляемая ручкой  $R_2$ , эквивалентна изменению коэффициента усиления  $K < 1$  в формуле (4.23). Следовательно, измерение коэффициента взаимной корреляции между выходными процессами резонансных усилителей 1-го и 2-го каналов сводится к подбору такого коэффициента деления (положение ручки  $R_2$ ), при котором выходные напряжения резонансного усилителя 1-го канала и вычитающего устройства статистически независимы — оси симметрии эллипсов рассеяния совпадают с координатными осями.

Два оконечных усилителя макета служат для согласования его выходов с измерительными приборами — вольтметром и осциллографом.

Тумблер Т на лицевой панели макета переключает совместное или раздельное подключение входов резонансных усилителей 1-го и 2-го каналов.

## Экспериментальная часть

1. *Измерение амплитудно-частотной характеристики 1-го канала.* Тумблер Т макета здесь и далее, если не оговорено иное, находится в положении 1, что соответствует раздельному включению входов усилителей 1-го и 2-го каналов. На вход усилителя 1-го канала подключается генератор ГЗ-33, на выходе которого следует установить напряжение 0.1-1В.

Изменяя частоту генератора в пределах от 3кГц до 20кГц (с шагом 1-2кГц) с помощью вольтметра, необходимо измерять напряжение на выходе 1-го канала. При этом нужно следить за постоянством входного напряжения усилителя 1-го канала. По полученным экспериментальным данным следует построить АЧХ 1-го канала (на миллиметровке), определить её центральную частоту  $f_{01}$  и полосу пропускания  $\Pi_1$  (по уровню 0.707 от максимума).

2. Аналогично предыдущему пункту необходимо *измерить АЧХ 2-го канала* для трёх положений ручки регулировки  $C_2$  — вблизи начала, середины и конца шкалы. Нанести эти три зависимости на один график с АЧХ 1-го канала. Определить полосы пропускания  $\Pi_{2k}$  резонансного контура во 2-м канале для каждого  $k$ -го ( $k = 1, 2, 3$ ) положения ручки  $C_2$ . В связи с тем, что элементы резонансных контуров в каналах подобраны так, чтобы полосы пропускания этих контуров были примерно одинаковы и не менялись с изменением центральной частоты, по измеренным значениям  $\Pi_1$  и  $\Pi_{2k}$  находим  $\Pi_{ср}$  — среднюю полосу пропускания резонансных контуров схемы. Величина  $\Pi_{ср}$  является параметром аппроксимации передаточных функций резонансных контуров выражениями (4.10), (4.11).
3. *Градуировка по частоте* — сопоставление условных делений ручки  $C_2$  с резонансными частотами колебательного контура во 2-м канале. Для этого следует:
  - на вход усилителя 2-го канала подключить генератор ГЗ-33 и установить напряжение на выходе генератора 0.1-1В;
  - к клеммам «Выход Y» подключить вольтметр;
  - установить ручку  $C_2$  в крайнее левое положение;
  - изменяя частоту звукового генератора, добиться максимального отклонения стрелки вольтметра, тем самым найти резонансную частоту колебательного контура во 2-м канале;

- повернуть ручку  $C_2$  на 10 делений вправо и опять определить центральную частоту колебательного контура 2-го канала;
  - повторять эти измерения (через 10 делений шкалы) до крайнего правого положения ручки  $C_2$ ;
  - построить градуировочную кривую на миллиметровке, отложив по оси абсцисс количество делений шкалы, а по оси ординат — соответствующие значения центральной частоты колебательного контура 2-го канала.
4. *Градуировка по коэффициенту корреляции* — сопоставление условных делений ручки  $R_2$  с реальными значениями коэффициента взаимной корреляции  $R_{12}$ . Для этого следует:
- подключить ко входу усилителя 1-го канала звуковой генератор.
  - вольтметр подключить к клеммам «Выход У» — это выход вычитающего устройства.
  - настроить генератор на частоту  $f_{01}$  — центральную частоту колебательного контура в 1-м канале.
  - вращением ручки  $R_2$  добиться максимального отклонения стрелки вольтметра.
  - изменяя входное напряжение усилителя 1-го канала, установить напряжение на клеммах «Выход У», равным 1 В. Положение ручки  $R_2$  при этом соответствует значению коэффициента взаимной корреляции 1.
  - вращением ручки  $R_2$  добиться напряжения на клеммах «Выход У» 0.9В. Это положение ручки  $R_2$  соответствует коэффициенту взаимной корреляции  $R_{12} = 0.9$ .
  - продолжить до получения минимального значения напряжения на клеммах «Выход У».
  - построить градуировочную кривую на миллиметровке, отложив по оси абсцисс количество делений шкалы  $R_2$ , а по оси ординат — соответствующее значение коэффициента взаимной корреляции  $R_{12}$ .

5. *Установка коэффициента усиления усилителя 1-го канала, обеспечивающего равенство дисперсий случайных процессов на выходах усилителей 1-го и 2-го каналов. Для этого следует:*

- Подключить на вход усилителя 1-го канала звуковой генератор ГЗ-33, выходное напряжение которого установить в диапазоне 0,1–1В.
- Осциллограф подключить к клеммам «Выход Y».
- Установить коэффициент взаимной корреляции равным 1, с помощью ручки  $R_2$  и градуировочной кривой.
- По максимуму напряжения на «Выходе Y» выставить частоту генератора, равной резонансной частоте контура 1-го канала  $f_{01}$ .
- Не изменяя частоты генератора, подать сигнал на вход усилителя 2-го канала и вращением ручки  $C_2$  настроить колебательный контур во 2-м канале на частоту  $f_{01}$ .
- Подключить оба канала макета к выходу генератора одновременно, переключив тумблер Т в положение «2».
- Вращением ручки  $R_1$  добиться минимального напряжения на клеммах «Выход Y», после чего убедиться, что при изменении коэффициента взаимной корреляции от 1 до 0 напряжение на клеммах «Выход Y» изменяется не менее чем в 10 раз. В случае, если это не выполняется, необходимо произвести подстройку конденсатором  $C_2$ . Затем с помощью осциллографа измерить размах входного напряжения.

6. *Измерение коэффициента взаимной корреляции.*

- Подключить генератор шума Г2-12 ко входу макета.
- Установить тумблер Т в положения «2».
- Подключив осциллограф на вход макета, следует установить такое значение напряжения шума, при котором размах реализации шума примерно равен размаху

гармонического сигнала, определенному в предыдущем пункте.

- Подключить осциллограф к выходу макета, согласно рис. 4.4.
- Изменяя ручкой  $C_2$  расстройку между центральными частотами колебательных контуров в каналах в пределах  $-3\Pi_{\text{ср}} \leq \Delta f \leq 3\Pi_{\text{ср}}$  через интервал частоты  $0.2\Pi_{\text{ср}}$ , в каждой точке ( $\Delta f_i = \pm 0.2i\Pi_{\text{ср}}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 15$ ) измерить коэффициент взаимной корреляции.

Для измерения коэффициента корреляции при некоторой расстройке  $\Delta f_i$  достаточно вращением ручки  $R_2$  добиться совпадения главных осей эллипса рассеяния на экране осциллографа с осями координат. Положение ручки  $R_2$  при этом даёт значение коэффициента взаимной корреляции между входными случайными процессами усилителей 1-го и 2-го каналов. Повторить измерения трижды.

7. Средние по трём измерениям значения коэффициента взаимной корреляции нанести на теоретический график зависимости  $R_{12}$  от нормированной расстройки  $\Delta f / \Pi_{\text{ср}}$  (рис. 4.2) .

## Оформление отчёта о лабораторной работе

Отчёт должен содержать:

1. Блок-схему экспериментальной установки.
2. Таблицы экспериментальных данных.
3. Графические изображения нормированных АЧХ фильтров и калибровочных кривых.
4. График зависимости коэффициента взаимной корреляции от нормированной расстройки  $\Delta f / \Pi_{\text{ср}}$  и нанесенные на него экспериментальные значения.
5. Вывод и оценку полученных результатов.

## Контрольные вопросы

1. Прохождение случайных процессов через линейные фильтры (с учётом переходных процессов и без их учёта).
2. Спектральная плотность случайного процесса на выходе линейных фильтров с постоянными параметрами.
3. Взаимная функция корреляции и коэффициент корреляции случайных процессов на выходе линейных фильтров с постоянными параметрами.
4. Рассчитать взаимные коэффициенты корреляции  $R_{12}(\tau = 0)$  (4.9) при условии, что  $K_{\xi}(\omega) = N_0/2$ , ФЧХ  $\varphi_1(\omega) = \varphi_2(\omega)$ , а АЧХ  $H_i(\omega)$  при  $\omega > 0$  имеют вид:
  - а)  $H_i(\omega) = H_0 I[(\omega - \omega_i)/\Delta\omega]$ , где  $I(x) = 1, |x| \leq 1/2$  и  $I(x) = 0, |x| > 1/2$ , а  $\omega_i > \Delta\omega$ .  
Построить график зависимости  $R_{12}(0) = f(|\omega_1 - \omega_2|/\Delta\omega)$ .
  - б)  $H_i(\omega) = H_0 I[(\omega - \omega_0)/\Delta\omega_i]$ .  
Построить график зависимости  $R_{12}(0) = f(\Delta\omega_1/\Delta\omega_2)$ .
  - в)  $H_i(\omega) = H_0 \exp[-\pi(\omega - \omega_i)^2/2\Delta\omega^2]$ ,  $\omega_i \gg \Delta\omega$ .  
Построить график зависимости  $R_{12}(0) = f(|\omega_1 - \omega_2|/\Delta\omega)$ .
5. Обосновать и аналитически определить условия, при которых выполнение пункта 5 раздела «Экспериментальная часть» обеспечивает равенство дисперсий случайных процессов на выходах усилителей 1-го и 2-го каналов.
6. Даны два финитных сигнала  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  одинаковой длительности и начинающихся одновременно. Форма сигнала  $s_1(t)$  отличается от формы сигнала  $s_2(t)$ . Выяснить, на какое постоянное число следует домножить сигнал  $s_2(t)$  для того, чтобы энергия разности сигналов была минимальной.
7. Используя свойство эргодичности анализируемых случайных процессов объяснить структуру изображения на экране осциллографа.

8. Как будет меняться «картинка» на экране осциллографа при изменении совместного распределения случайных процессов  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  рис. 4.3.
9. Заданы два случайных процесса  $\xi(t) = \xi_1 \cos(\omega t)$ ,  $\eta(t) = \eta_1 \sin(\omega t)$ , у которых  $\omega$  — постоянная величина, а  $\xi_1$  и  $\eta_1$  — случайные величины, не зависящие от времени. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию случайного процесса  $\gamma(t) = \xi(t) + \eta(t)$  и установить условия, при которых процесс  $\gamma(t)$  будет стационарным в широком смысле.

**Литература:** [1] или [6] и [9].

**Лабораторная работа №5.**  
**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ**  
**КОРРЕЛЯЦИОННОГО ПРИЁМНИКА**

**Цель работы:** определение характеристик обнаружения прямоугольного и трапециидального импульсов на фоне гауссовского широкополосного шума при корреляционной обработке.

**Основные соотношения и определения**

Рассмотрим задачу обнаружения полезного сигнала на фоне аддитивного шума [1] и др. При этом входные данные приемного устройства представим в виде:

$$x(t) = n(t) + \lambda s_0(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.1)$$

Здесь  $n(t)$  — реализация случайного процесса (шума),  $s_0(t)$  — полезный сигнал известной формы (детерминированный сигнал), полностью расположенный на интервале наблюдения  $[0, T]$ . Параметр  $\lambda$  в (5.1) является неизвестным и может принимать только одно из двух значений: с вероятностью  $p_1$  — значение  $\lambda = 1$  (полезный сигнал присутствует) и с вероятностью  $p_0$  — значение  $\lambda = 0$  (полезный сигнал отсутствует). В приемном устройстве по принятой конкретной реализации  $x(t)$  должно быть выработано одно из двух решений:  $\gamma_1$  — полезный сигнал присутствует или  $\gamma_0$  — полезный сигнал в принятых данных отсутствует.

При конечном времени наблюдения и ограниченной энергии полезного сигнала  $s_0(t)$  решения  $\gamma_1$  и  $\gamma_0$  могут быть как «правильными», так и ошибочными. Ошибочные решения обычно называют ошибками, которые в случае обнаружения полезного сигнала, могут быть двух видов:

- ошибка первого рода (ложная тревога): принимается решение  $\gamma_1$  о наличии сигнала, когда его нет, т. е. при  $\lambda = 0$ ;
- ошибка второго рода (пропуск сигнала): принимается решение  $\gamma_0$  об отсутствии сигнала, когда он есть, т. е. при  $\lambda = 1$ .



Поскольку в принимаемых данных  $x(t)$  всегда присутствует шум  $n(t)$  решения  $\gamma_1$  и  $\gamma_0$ , вырабатываемые в приемном устройстве, являются случайными событиями. Поэтому для статистического описания ошибочных решений используют их вероятности:  $\alpha = P(\gamma_1|\lambda = 0)$  — вероятность ошибки первого рода (вероятность ложной тревоги),  $\beta = P(\gamma_0|\lambda = 1)$  — вероятность ошибки второго рода (вероятность пропуска сигнала). Кроме вероятностей ошибочных решений  $\alpha$  и  $\beta$  на практике достаточно часто используют также вероятность  $D = 1 - \beta = P(\gamma_1|\lambda = 1)$  — вероятность правильного обнаружения. Следует обратить внимание, что все эти вероятности  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $D$  являются условными вероятностями, т.е. вероятностями решений  $\gamma_1$  и  $\gamma_0$ , выносимых в приемном устройстве при заданных условиях  $\lambda = 0$  или  $\lambda = 1$ .

Зависимости этих вероятностей или их комбинаций от исходных параметров полезного сигнала и шума обычно используются в качестве рабочих характеристик алгоритма вынесения решений в приемном устройстве. Приемное устройство, обеспечивающее наилучшие рабочие характеристики, называется оптимальным. При этом выбор конкретного вида рабочих характеристик определяется характером общей задачи, решаемой при обнаружении полезного сигнала. Так в системах радиосвязи эффективность обнаружения достаточно часто характеризуется полной (средней) вероятностью ошибочных решений, а в радиолокации — вероятностью пропуска или вероятностью правильного обнаружения при заданной вероятности ложной тревоги [1,9,10]. В зависимости от того, чем характеризуется эффективность обнаружения при определении оптимального приемного устройства, следует различать, какому критерию оптимальности соответствует это приемное устройство. Так, если оптимальное обнаружение обеспечивает минимум полной (средней) вероятностей ошибок, то говорят, что оно удовлетворяет *критерию идеального наблюдателя*. В случае, когда оптимальный обнаружитель обеспечивает минимальное значение вероятности пропуска сигнала или максимальное значение вероятности правильного обнаружения при заданной вероятности ложной тревоги — обнаружение производится по *кри-*

терию Неймана-Пирсона.

Таким образом, для того, чтобы определить оптимальный алгоритм обнаружения, следует прежде всего задать критерий оптимальности. Кроме того, также необходимо иметь статистическое описание шума  $n(t)$  (5.1). В простейшем случае шум  $n(t)$  является реализацией белого гауссовского случайного процесса с нулевым средним значением. Согласно [1] и др. оптимальное приемное устройство для обнаружения детерминированного сигнала на фоне такого шума должно формировать корреляционный интеграл

$$M = c \int_0^T x(t)s_0(t)dt, \quad (5.2)$$

где  $c$  — некоторая константа, и сравнивать его с порогом  $h$ . Решение  $\gamma_1$  о наличии сигнала в  $x(t)$  выносится, если  $M > h$ , и решение  $\gamma_0$  об отсутствии сигнала в  $x(t)$  в противоположном случае, т.е. когда  $M < h$ . Величина порога  $h$  при этом определяется исходя из заданного критерия оптимальности. Причем подобный «пороговый» алгоритм обнаружения является оптимальным не только по критерию идеального наблюдателя и критерию Неймана-Пирсона, но и при использовании других критериев оптимальности [10].

Корреляционный интеграл (5.2) в приемном устройстве можно сформировать различными способами. Например, используя согласованный фильтр или корреляционную обработку [11]. В данной работе мы будем рассматривать корреляционный приемник, т.е. приемное устройство, в котором преобразование входных данных производится в соответствии с выражением (5.2). Функциональная схема такого корреляционного обнаружителя представлена на рис. 5.1. На этом рисунке блок 1 осуществляет перемножение реализации  $x(t)$  и опорного сигнала  $cs_0(t)$ ; 2 — интегратор, на выходе которого формируется сигнал  $c \int_0^t x(t)s_0(t)dt$ ; 3 — стробующее устройство, открывающееся в момент времени  $t = T$ ; 4 — пороговое устройство, которое сравнивает выходной сигнал

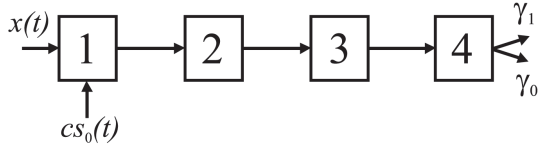


Рис. 5.1

блока 3 с порогом  $h$  и формирует решение  $\gamma_1$ , когда порог превышен, или  $\gamma_0$ , когда превышения порога нет.

Определим теперь вероятности ошибочных решений при обнаружении полезного сигнала корреляционным приемником, изображенном на рис.5.1. Если полезный сигнал отсутствует ( $\lambda = 0$ ), то принимаемые данные (5.1) имеют вид  $x(t) = n(t)$ . Тогда  $M = c \int_0^T n(t)s_0(t)dt$  — гауссовская случайная величина с нулевым средним значением и дисперсией

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \langle M^2 \rangle &= \left\langle \left[ c \int_0^T n(t)s_0(t)dt \right]^2 \right\rangle = \\ &= c^2 \int_0^T \int_0^T \langle n(t_1)n(t_2) \rangle s_0(t_1)s_0(t_2)dt_1dt_2 = \\ &= c^2 \frac{N_0}{2} \int_0^T s_0^2(t)dt = \frac{c^2 N_0 E_0}{2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь  $N_0$  — односторонняя спектральная плотность белого гауссовского шума  $n(t)$ ,  $E_0 = \int_0^T s_0^2(t)dt$  — энергия сигнала  $s_0(t)$ . Веро-

ятность ложной тревоги при этом равна

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\gamma_1 | \lambda = 0) = P(M > h | \lambda = 0) = \int_h^{\infty} W(M | \lambda = 0) dM = \\ &= \int_h^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{M^2}{2\sigma^2}\right] dM = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(H), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $W(M | \lambda = 0)$  — условная плотность вероятности корреляционного интеграла (5.2) при отсутствии в  $x(t)$  полезного сигнала;  $H = h/\sigma$  — нормированный порог;  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$  — интеграл вероятности.

Если полезный сигнал в наблюдаемых данных присутствует ( $\lambda = 1$ ), то  $x(t) = n(t) + s_0(t)$  и  $M = c \int_0^T [n(t) + s_0(t)] s_0(t) dt$  — гауссовская случайная величина с математическим ожиданием  $m_0 = \langle M \rangle = c \int_0^T s_0^2(t) dt = cE_0$  и дисперсией  $\langle (M - m_0)^2 \rangle$ , совпадающей с (5.3). Вероятность пропуска сигнала при этом может быть записана как

$$\begin{aligned} \beta &= P(\gamma_0 | \lambda = 1) = P(M < h | \lambda = 1) = \int_{-\infty}^h W(M | \lambda = 1) dM = \\ &= \int_{-\infty}^h \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(M - m_0)^2}{2\sigma^2}\right] dM = \\ &= \Phi\left(\frac{h - m_0}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(H - z_0), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где

$$z_0^2 = \frac{m_0^2}{\sigma^2} = \frac{2E_0}{N_0} \quad (5.6)$$

— отношение сигнал/шум на выходе коррелятора, формирующего величину  $M$  (5.2).

Выражения (5.4) и (5.5) определяют вероятности ошибочных решений в корреляционном обнаружителе (рис. 5.1), когда опорный сигнал  $cs_0(t)$  коррелятора с точностью до множителя  $c$  совпадает с обнаруживаемым сигналом в принимаемых данных (5.1). Однако, на практике достаточно часто форма обнаруживаемого полезного сигнала и (или) его некоторые параметры могут отличаться от формы и соответствующих параметров опорного сигнала. При этом наблюдаемые данные, поступающие на вход приемного устройства, представим в виде

$$x(t) = n(t) + \lambda s(t), \quad (5.7)$$

где используются обозначения, аналогичные обозначениям в (5.1), но полезный сигнал  $s(t)$  в общем случае не совпадает с  $s_0(t)$  из (5.1). Корреляционный обнаружитель, представленный на рис. 5.1, в данной ситуации можно рассматривать как квазиоптимальный обнаружитель полезного сигнала  $s(t)$ . Определим характеристики подобного квазиоптимального приема.

Если полезный сигнал в (5.7) отсутствует ( $\lambda = 0$ ), то  $M$  (5.2) является гауссовской случайной величиной с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma^2$  (5.3). Следовательно, вероятность ложной тревоги при квазиоптимальном, также как и при оптимальном приеме, определяется выражением (5.4). Если полезный сигнал в наблюдаемых данных  $x(t)$  (5.7) присутствует ( $\lambda = 1$ ), то величина  $M$  (5.2) является гауссовской с математическим ожиданием  $m_1 = \langle M \rangle = c \int_0^T s(t)s_0(t)dt$  и дисперсией  $\sigma^2$  (5.3). Аналогично (5.5), находим вероятность пропуска сигнала при квазиоптимальном приеме:

$$\beta = \Phi\left(\frac{h - m_1}{\sigma}\right) = \Phi(H - z_1), \quad (5.8)$$

где

$$z_1^2 = \frac{m_1^2}{\sigma^2} \quad (5.9)$$

— отношение сигнал/шум на выходе коррелятора. Таким образом, как при оптимальном, так и при квазиоптимальном обнаружении,

эффективность обнаружения зависит от нормированного порога  $H$  и отношения сигнал/шум  $z_0$  или  $z_1$  на выходе коррелятора. Причем нетрудно показать, что отношение сигнал/шум  $z_1$  не может быть больше отношения сигнал/шум  $z_0$ .

Приведем теперь соотношения, определяющие величины порогов в оптимальных и квазиоптимальных обнаружителях, при использовании разных критериев оптимальности. Для критерия идеального наблюдателя следует оптимизировать полную (среднюю) вероятность ошибки

$$P_e = p_0\alpha + p_1\beta = (1 - p_1)[1 - \Phi(H)] + p_1\Phi(H - z), \quad (5.10)$$

которая зависит от априорной вероятности  $p_1$  наличия в наблюдаемых данных  $x(t)$  полезного сигнала, нормированного порога  $H = h/\sigma$  и отношения сигнал/шум  $z$  ( $z_0$  или  $z_1$ ) на выходе коррелятора. Следовательно, оптимальный порог  $h_0$ , который обеспечивает  $\min P_e$ , является функцией  $p_1$ ,  $z$  и дисперсии  $\sigma^2$ . В частном случае, когда  $p_1 = 1/2$ , т.е. события наличия и отсутствия полезного сигнала равновероятны,  $h_0 = m/2$ , где  $m = m_0$  или  $m = m_1$ , в зависимости от того, какой из сигналов  $s_0(t)$  или  $s_1(t)$  обнаруживается в корреляционном приемнике с опорным сигналом  $s_0(t)$ . Минимальное значение полной вероятности ошибки при этом равно:

$$P_{e \min} = 1 - \Phi(z/2). \quad (5.11)$$

В случае использования критерия Неймана-Пирсона величина порога  $h_0$  определяется исходя из минимума вероятности пропуска сигнала  $\beta$  при заданном значении вероятности ложной тревоги  $\alpha^*$ . В результате этого порог  $h_0$  находится из уравнения

$$1 - \Phi(h_0/\sigma) = \alpha^*. \quad (5.12)$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде  $h_0 = \sigma\Phi^{-1}(1 - \alpha^*)$ , где  $\Phi^{-1}(\cdot)$  — обратная функция к интегралу вероятности  $\Phi(x)$ . Таким образом,  $h_0$  по критерию Неймана-Пирсона зависит только от заданного значения  $\alpha^*$  и уровня шума на выходе коррелятора  $\sigma$ . Минимальное значение вероятности пропуска

сигнала в этом случае находится как

$$\beta_{\min}(z) = \Phi [\Phi^{-1}(1 - \alpha^*) - z]. \quad (5.13)$$

Конкретизируем далее выражения, определяющие отношения сигнал/шум (5.6) и (5.9) на выходе коррелятора приемного устройства, используемого в лабораторном макете для исследования характеристик обнаружения. В качестве опорного сигнала коррелятора в лабораторном макете служит прямоугольный видеоимпульс

$$cs_0(t) = c[I(t) - I(t - \tau_u)], \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Полезный сигнал при этом может быть двух типов:

I.

$$s(t) = A[I(t - \tau_0) - I(t - \tau_u - \tau_0)] \quad (5.15)$$

— прямоугольный видеоимпульс амплитуды  $A$  и длительности  $\tau_u$ , задержанный относительно опорного сигнала на величину  $\tau_0$ .

II.

$$s(t) = A\{I(t - \tau_0)[1 - \exp(-(t - \tau_0)/\tau_c)] - I(t - \tau_u - \tau_0)[1 - \exp(-(t - \tau_u - \tau_0)/\tau_c)]\} \quad (5.16)$$

— видеоимпульс трапециидального вида, сформированный интегрирующей RC-цепочкой с постоянной времени  $\tau_c = RC$  при подаче на ее вход сигнала (5.15).

Если  $0 \leq \tau_0 \leq \tau_u$ , то нетрудно получить, что выражение для отношения сигнал/шум на выходе коррелятора с опорным сигналом (5.14) для полезного сигнала I-го типа имеет вид:

$$z_1^2 = z_0^2 \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_u}\right) \quad (5.17)$$

и для сигнала II-го типа

$$z_1^2 = z_0^2 \left[ 1 - \frac{\tau_0 + \tau_c}{\tau_u} + \frac{\tau_c}{\tau_u} \exp\left(-\frac{\tau_u - \tau_0}{\tau_c}\right) \right]. \quad (5.18)$$

Здесь  $z_0^2 = 2A^2\tau_u/N_0$  — отношение сигнал/шум на выходе коррелятора, когда его опорный сигнал с точностью до постоянного множителя совпадает с обнаруживаемым полезным сигналом, т.е. если в (5.15)  $\tau_0 = 0$ , а в (5.16)  $\tau_0 = \tau_c = 0$ . Следует отметить, что соотношения (5.17) и (5.18) получены в предположении, что амплитуды  $A$  сигналов в (5.15) и (5.16) одинаковы. В противном случае выражения для  $z_1^2$  будут иметь иной вид.

### Описание лабораторной установки

Лабораторная установка, используемая в данной работе, предназначена для исследования характеристик обнаружения прямоугольных и трапецидальных видеоимпульсов, принимаемых на фоне аддитивного гауссовского широкополосного шума. Схема соединений приборов и лабораторного макета установки представлена на рис. 5.2.

Лабораторная установка состоит из:

- генератора шума Г2-12,
- вольтметра типа В7-26,
- осциллографа типа С1-48Б,
- частотомера типа ЧЗ-34,
- лабораторного макета.

Генератор шума Г2-12 используется в качестве источника реализаций гауссовского случайного процесса с нулевым средним значением. При этом спектральная плотность этого процесса может считаться постоянной в полосе частот полезного сигнала. Поэтому математической моделью шума, на фоне которого наблюдается полезный сигнал, служит белый гауссовский шум.

Вольтметр установки предназначен для измерения и контроля напряжения, пропорционального величине порога  $h$  корреляционного обнаружителя.



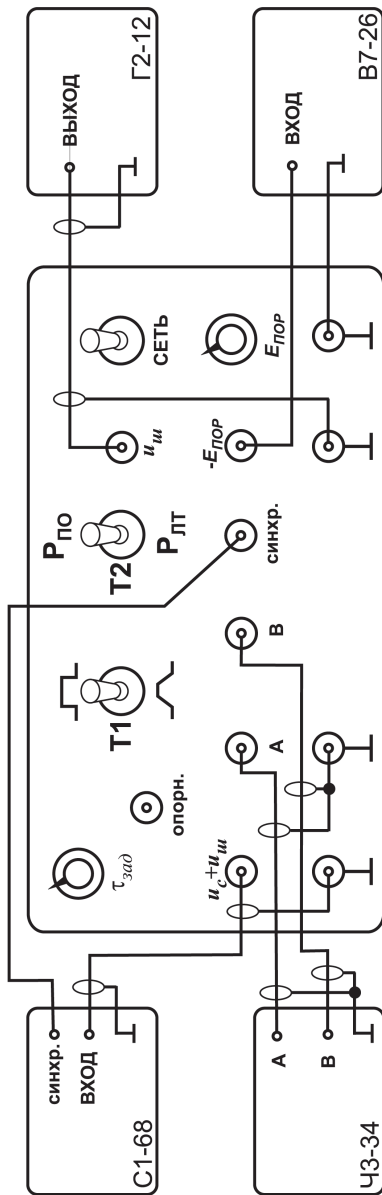


Рис. 5.2

С помощью осциллографа осуществляется визуальное наблюдение полезного и опорного сигналов, аддитивной смеси сигнала и шума, а также измерения величины задержки  $\tau_0$  полезного сигнала относительно опорного.

Частотомер в процессе эксперимента позволяет измерять вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения.

В лабораторном макете установки формируется полезный сигнал I-го (прямоугольный видеоимпульс) и II-го (трапециидальный импульс) типов. Аддитивная смесь этого сигнала и шума или только один шум затем поступает на корреляционный обнаружитель (рис. 5.1). Опорным сигналом этого обнаружителя является прямоугольный видеоимпульс вида (5.14). Пороговое устройство обнаружителя совместно с генератором опорного сигнала вырабатывают импульсные последовательности. Эти последовательности импульсов являются входными сигналами частотомера лабораторной установки.

Блок-схема лабораторного макета изображена на рис. 5.3.

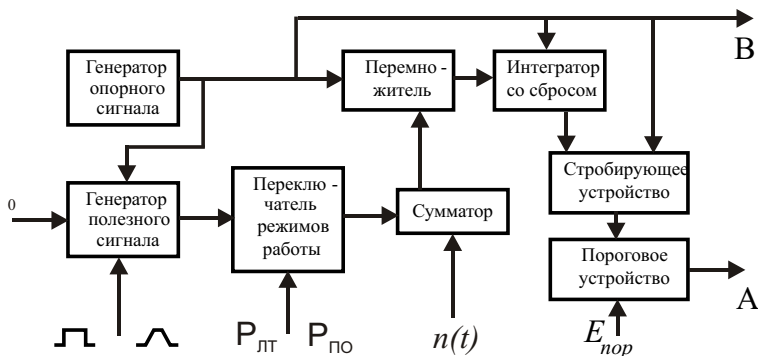


Рис. 5.3

Генератор опорного сигнала лабораторного макета формирует последовательность прямоугольных видеоимпульсов (рис. 5.4) длительностью  $\tau_{и} = 40\text{мкс}$ .

Период повторения этих импульсов составляет  $200\text{мкс}$  и значи-

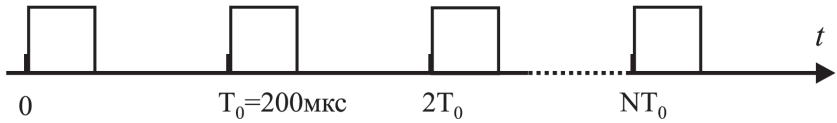


Рис. 5.4

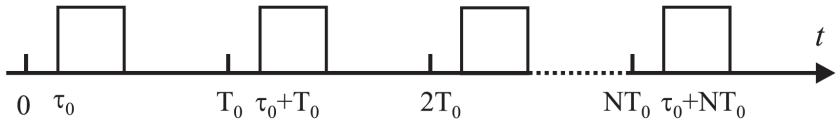


Рис. 5.5

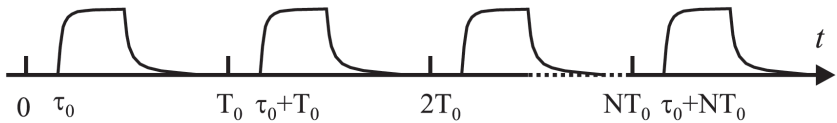


Рис. 5.6

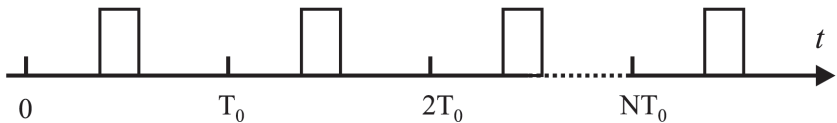


Рис. 5.7

тельно превышает интервал корреляции шума, вырабатываемого генератором Г2-12. Вследствие этого значения шума на каждом периоде повторения импульсов опорного сигнала можно считать статистически независимыми, а результаты обнаружения полезного сигнала в каждом таком периоде — результатами статистически независимых опытов. Импульсная последовательность с генератора опорного сигнала поступает на вход В частотомера. Частота этой последовательности определяет частоту статистически независимых опытов по обнаружению полезного сигнала в лабораторном макете. Кроме этого последовательность импульсов опорных сигналов поступает на генератор полезного сигнала, перемножитель, интегратор со сбросом и стробирующее устрой-

ство. Каждый импульс последовательности опорного сигнала запускает генератор полезного сигнала. В результате этого на его выходе формируется последовательность видеоимпульсов полезных сигналов I-го (рис. 5.5) или II-го (рис. 5.6) типов. При формировании полезного сигнала II-го типа – трапециидальных импульсов – используется интегрирующая RC-цепочка с постоянной времени  $\tau_c = 15\text{мкс}$ . Внутри генератора полезного сигнала также предусмотрена регулировка времени запаздывания  $\tau_0$  импульса полезного сигнала относительно импульса опорного сигнала. Последовательность полезных сигналов через блок переключателя режимов работы, который или пропускает на свой выход входной сигнал (режим  $P_{\text{ПО}}$ ), или не пропускает (режим  $P_{\text{ЛТ}}$ ), поступает на сумматор. На второй вход сумматора подается напряжение с генератора шума. Таким образом, на выходе сумматора имеется последовательность наблюдаемых данных  $x(t)$  (5.7), в которой в зависимости от положения переключателя режимов работы присутствует только шум или и шум и полезный сигнал.

Данные  $x(t)$  с выхода сумматора затем подаются на один из входов перемножителя, на второй вход которого приходит последовательность опорных сигналов. Результат перемножения далее поступает на интегратор со сбросом. Стробирующее устройство, которое соединено с выходом интегратора, снимает данные с интегратора в момент окончания каждого импульса последовательности опорных сигналов. При этом происходит также обнуление (сброс) интегратора. Импульсное напряжение со стробирующего устройства, пропорциональное величине корреляционного интеграла  $M$  (5.2) затем подается на пороговое устройство. Величина порога в нем может регулироваться и контролируется вольтметром. Если входной импульс порогового устройства имеет амплитуду большую, чем значение порога, то пороговое устройство на своем выходе формирует стандартный прямоугольный импульс, что соответствует принятию решения  $\gamma_1$  о наличии полезного сигнала в наблюдаемых данных. В противоположном случае на выходе порогового устройства стандартный прямоугольный импульс отсутствует, что соответствует принятию решения  $\gamma_0$  об отсутствии

полезного сигнала. Таким образом, на выходе порогового устройства имеется случайная последовательность стандартных импульсов (рис. 5.7), каждый импульс которой соответствует опыту по обнаружению полезного сигнала, в котором вынесено решение  $\gamma_1$ . Эта случайная последовательность подается затем на вход А частотомера. Частотомер в процессе эксперимента работает в режиме измерения отношения частот  $F_A/F_B$ . В этом режиме частотомер определяет отношение числа импульсов, поступивших на вход А к числу импульсов, пришедших по входу В за время анализа. Таким образом, показания частотомера являются оценками (результатами измерения) вероятности принятия решения  $\gamma$ . Причём при положении переключателя режимов работы лабораторного макета  $P_{ЛТ}$  — оценкой вероятности ложной тревоги, а при положении этого переключателя  $P_{ПО}$  — оценкой вероятности правильного обнаружения.

Как следует из теоретических соотношений (5.4) и (5.8) характеристики обнаружения зависят от нормированного порога  $H = h/\sigma$  и отношения сигнал/шум  $z = m/\sigma$ . Для того, чтобы устанавливать заданные значения  $H$  и  $z$  нужно иметь возможность измерять уровни порога  $h$  и величин  $m$  и  $\sigma$ . Однако, выполнить прямые измерения этих величин достаточно сложно. Поэтому установка заданных значений  $H$  и  $z$  при выполнении работы производится косвенными методами.

В лабораторном макете имеется клемма « $E_{\text{пор}}$ », на которую подается напряжение  $U_{\text{пор}}$ , пропорциональное величине порога  $h$ , т.е.  $U_{\text{пор}} = c_1 h$ , где  $c_1$  — некоторая отрицательная константа. Т.к.  $c_1$  неизвестна, то показания вольтметра, подключенного к этой клемме, нельзя непосредственно пересчитать в значение порога  $h$ . Поэтому целесообразно использовать следующую методику.

Вначале выставляется такой порог  $h$ , чтобы его величина была равна  $m_0$  — значению сигнала на выходе коррелятора при наличии на его входе только полезного сигнала  $s_0(t)$ . Это можно сделать по показаниям частотомера при положении переключателя режимов работы лабораторного макета  $P_{ПО}$ , полезном сигнале I-го типа с  $\tau_0 = 0$  и отключенном генераторе шума. Затем

в режиме  $P_{ЛТ}$  и подключенном генераторе шума, изменяя уровень шума на выходе генератора шума, устанавливается значение  $\sigma$ , при котором  $\sigma = h = m_0$ . В этом случае показания частотомера должны соответствовать измеряемому значению вероятности ложной тревоги для нормированного порога  $H = 1$ . Таким образом, в лабораторной установке будут выставлены начальные регулировки, обеспечивающие нормированный порог обнаружения равным единице и отношение сигнал/шум  $z_0$  также равным единице. Далее, ослабляя или усиливая шум на выходе генератора шума с помощью аттенюатора ослабления (рис. 5.8), можно устанавливать требуемое отношение сигнал/шум  $z_0$ . Аттенюатор ослабления генератора шума Г2-12 позволяет снижать эффективное напряжение шума на выходе генератора на целое число децибел. Установка требуемой величины ослабления осуществляется при помощи трех регуляторов, причем результирующая величина ослабления равна сумме показаний всех трех шкал. Так, например, на рис. 5.8 установлена величина ослабления 35 дБ. Изменение ослабления на  $S$  дБ соответствует изменению напряжения на выходе генератора в  $10^{S/20}$  раз.

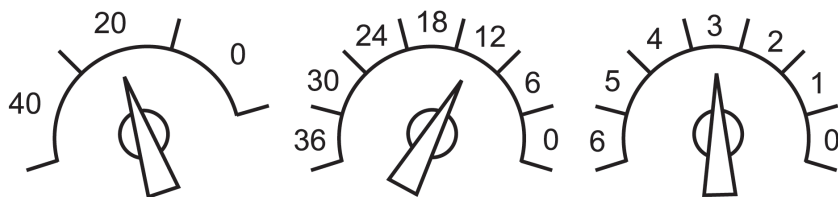


Рис. 5.8

Если при установке начальных регулировок, соответствующих  $z_0 = 1$ , было выставлено ослабление (затухание)  $S_0$ , то получим следующие зависимости между отношением сигнал/шум  $z_0$  и ослаблением  $S$

$$z_0 = 10^{(S-S_0)/20}, \quad S = 20 \lg z_0 + S_0. \quad (5.19)$$

Для экспериментального исследования зависимости вероятности ложной тревоги от нормированного порога  $H$  необходимо бу-

дет устанавливать заданные значения  $H$ . Это можно выполнить следующим образом.

После того, как будут выставлены начальные регулировки, соответствующие  $z_0$  и  $H = 1$ , с помощью вольтметра (тип В7-26) измеряется напряжение  $U_{\text{пор}} = U_n$  на клемме « $E_{\text{пор}}$ », которое как уже отмечалось ранее пропорционально величине порога  $h$ . Следовательно,  $U_n$  соответствует значению нормированного порога  $H = 1$ . Для установки дискретных значений нормированного порога  $H_i = i/n$ ,  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , где  $1/n$  — шаг дискретизации нормированного порога  $H$ , величину напряжения  $U_{\text{пор}}$  следует задавать в соответствии с правилом

$$U_{\text{пор}} = U_n i/n, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.20)$$


### Экспериментальная часть

В процессе выполнения лабораторной работы необходимо экспериментально измерить зависимость вероятности ложной тревоги  $\alpha$  от нормированного порога  $H_i$  и зависимости вероятностей правильного обнаружения  $D$  от отношения сигнал/шум  $z_{0i}$  для сигналов I-го и II-го типов при выборе величины порога обнаружителя по критерию Неймана-Пирсона.

#### 1. Подготовка приборов к работе.

1.1. Собрать лабораторную установку по схеме рис. 5.2.

1.2. Включить частотомер ЧЗ-34, для этого выполнить следующие операции:

- Перевести тумблеры «Сеть» и 8 ◀ (включение термостата) в верхнее положение.
- После прогрева термостатированного блока кварцевого генератора лампа индикации термостата, находящаяся рядом с тумблером включения термостата, периодически загорается и гаснет.
- Установить тумблер « ◻» в положение ◻.
- Поставить переключатель «Род работы» в положение Частота А, В  
« $\frac{\text{Частота А, В}}{\text{Контроль}}$ ». После этого лампочка «Селектор» начина-

ет мигать с частотой, регулируемой ручкой «Время индикации».

- Произвести несколько отсчетов для каждого положения переключателя «Метки времени». При этом изменять положение переключателя «Время измерения» от 1 мс до 10 с. Показания прибора, соответствующие различным положениям переключателей «Метки времени» и «Время измерения» сведены в следующей таблице.

Метки времени	Время измерения				
	1 мс	10 мс	0.1 с	1 с	10 с
10 нс	000100000	00100000,0	0100000,00	100000,000	00000,000
0.1 мкс	000010000	00010000,0	0010000,00	010000,000	10000,000
1 мкс	000001000	00001000,0	0001000,00	001000,000	01000,000
10 мкс	000000100	00000100,0	0000100,00	000100,000	00100,000
0.1 мс	000000010	00000010,0	0000010,00	000010,000	00010,000
1 мс	000000001	00000001,0	0000001,00	000001,000	00001,000

Показания прибора могут отличаться от указанных в таблице не более чем на  $\pm 1$  единицу счета.

1.3. Перевести частотомер ЧЗ-34 в режим измерения отношения частот. Для этого выполнить следующие операции:

- Установить переключатель «Род работы» в положение  $\left\langle \frac{F_{A,B}}{F_B} \right\rangle$ .
- Поставить переключатель «Метки времени» в положение  $\rightarrow A$ , а аттенюатор канала А в положение 1:1 или 1:10.
- Поставить переключатель полярности запуска канала А в положение «II».
- Тумблер «непр.счет А» перевести в нижнее положение.
- Установить переключатель «Время измерения» в положение «1s».
- Установить переключатель «раздельно-совместно» в положение «раздельно».



- Ручку «Уровень» канала В повернуть слева направо до упора. Аттенюатор канала В поставить в положение 1:1.
- Установить ручкой «Время индикации» удобное для отсчета время индикации.
- Установить переключатель «Множитель периода» в положение, определяемое требуемой точностью измерений. В данной работе достаточно производить измерения с точностью до трех знаков после запятой.

1.4. Включить генератор шума Г2-12. Для этого выполнить следующие операции:

- Ручку «Выход плавно» повернуть в крайне левое положение.
- На «аттенюаторе ослабления» установить начальное затухание  $S_0$ дБ. Величину  $S_0$  задает преподаватель. В дальнейшем следует иметь в виду, что нельзя устанавливать ослабление равное 0, т.к. при этом на лабораторный макет будет подан шум большого уровня, что может привести к выходу из строя макета.
- Переключатель «диапазоны» поставить в положение «20-20000» Гц.
- Переключатель «выходное сопротивление» установить на «600» Ом. Эффективное напряжение шума на выходе генератора при этом можно изменять с помощью аттенюатора ослабления ступенями через 1дБ от 0 до 82дБ.
- Переключатель вольтметра генератора поставить в положение 10В.
- Включить тумблер питания сети генератора.
- Ручкой «Выход плавно» установить по вольтметру генератора напряжение около 4 вольт.

1.5. Включить питание макета. Установить переключатель режимов работы « $P_{ЛТ}P_{ПО}$ » в положение  $P_{ПО}$ , тумблер «вид сигнала» в  $\perp$ , а регулятор « $E_{пор}$ » — в среднее положение.

1.6. Включить осциллограф С1-68 для наблюдения смеси сигнала и шума.

1.7. Включить вольтметр В7-26. Установить переключатель «род работы» в положение  $U_-$  или  $U_+$  и выбрать соответствующую шкалу, для того, чтобы можно было измерять напряжение  $U_{\text{пор}}$ , снимаемое с клеммы « $-E_{\text{пор}}$ » и регулируемое ручкой « $E_{\text{пор}}$ » макета.

## 2. Установка времени задержки.

2.1. Переключатель режимов работы лабораторного макета « $P_{\text{ЛТ}}P_{\text{ПО}}$ » поставить в положение « $P_{\text{ПО}}$ ».

2.2. Отключить от лабораторного макета генератор шума Г2-12. Подать на осциллограф сигнал с клеммы « $u_c + u_{ш}$ » лабораторного макета. При этом на осциллографе наблюдается полезный сигнал.

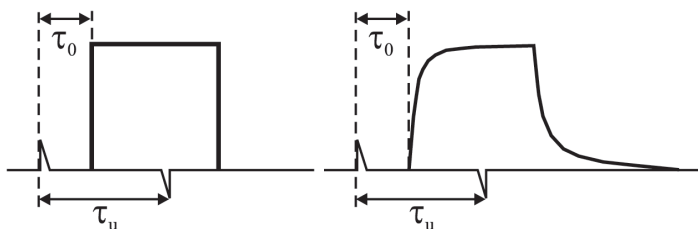


Рис. 5.9

Положение фронтов опорного сигнала относительно полезного отмечено парой коротких импульсов. Амплитуда этих импульсов мала по сравнению с амплитудой полезного сигнала (рис. 5.9). Левая половина рис. 5.9 соответствует случаю, когда полезный сигнал является прямоугольным видеоимпульсом, а правая половина — трапецидальному полезному сигналу.

2.3. Вращением ручки « $\tau_{\text{зад}}$ » лабораторного макета установить необходимое время задержки  $\tau_0$ . Измерение времени задержки производится с помощью шкалы, нанесенной на экран осциллографа. При этом удобно использовать следующий масштаб шкалы осциллографа: 1 см = 20 мкс или 1 см = 50 мкс.

2.4. Подключить генератор шума к лабораторному макету.

**3. Установка начальных регулировок макета**, обеспечивающих значения отношения сигнал/шум  $z_0 = 1$  и нормированного

порога  $H = 1$ .

3.1. Поставить переключатель режимов работы « $P_{ЛТ}P_{ПО}$ » макета в  $P_{ПО}$ , а тумблер «вид сигнала» в положение  $\perp$ . При этом полезный сигнал имеет прямоугольную форму.

3.2. Установить нулевое значение времени задержки полезного сигнала относительно опорного, т.е.  $\tau_0 = 0$  (см. п.2).

3.3. Не подключая к макету генератор шума, вращением ручки « $E_{пор}$ » установить такой порог  $h$  обнаружителя, при котором показания частотомера будут переходить от значения 0,000 к 1,000. При этом  $h \approx m_0$ . Для более точного выполнения этого приближенного равенства следует установить положение ручки « $E_{пор}$ », при котором показания частотомера будут соответствовать  $P_{ПО} = 0.5$ . Величину напряжения  $U_n$  на клемме « $-E_{пор}$ », измеренного при этом вольтметром, следует записать, поскольку она будет в дальнейшем использоваться для вычислений по формуле (5.20).

3.4. Поставить переключатель «Род работы» макета в положение « $P_{ЛТ}$ ».

3.5. Подключить к макету генератор шума, переключатели и регулировки которого выставлены в соответствии с п. 1.4.

3.6. Ручкой «выход плавно» установить такой уровень шума генератора, при котором показания частотомера будут соответствовать измеренному значению вероятности ложной тревоги для нормированного порога  $H = 1$ . Согласно выражению (5.4) это значение должно быть равно  $\alpha(H = 1) = 1 - \Phi(1) \approx 0.16$ . Поскольку показания частотомера являются оценкой вероятности, полученной в результате усреднения по конечному числу опытов, они будут лишь «группироваться» около значения 0.16. В заданных условиях проведения лабораторной работы достаточно, чтобы показания частотомера, как правило, укладывались в диапазон 0.14 - 0.18. При этом регулировки генератора шума и установленный в соответствии с п. 3.3. порог обнаружения будут обеспечивать такое значение параметра  $\sigma$  (5.3) на выходе коррелятора, при котором нормированный порог  $H \approx 1$  и отношение сигнал/шум  $z_0 \approx 1$ . В дальнейшем положение ручки генератора

шума «Выход плавно» должен оставаться неизменным. Показания вольтметра генератора шума после выполненных установок следует записать и отразить в отчете по лабораторной работе.

**4. Измерение зависимости вероятностей ложной тревоги от величины нормированного порога.** При выполнении этого пункта работы следует измерить вероятности ложной тревоги для различных значений нормированного порога  $H_i = i/2$ ,  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6$ .

4.1. После установок начальных регулировок лабораторной установки в соответствии с п. 3 поставить переключатель «род работы» макета в положение  $P_{ЛТ}$ , а переключатель «вид сигнала» – в  $\text{—}\square\text{—}$ .

4.2. Регулятором макета « $E_{\text{пор}}$ » установить на вольтметре одно из напряжений  $U_{\text{пор}i} = U_n i/2$ ,  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6$ , что соответствует нормированному порогу  $H_i$  (с учетом знака между напряжением и величиной порога  $h$ ). Показания частотомера при этом будут определять измеренное значение вероятности ложной тревоги  $\alpha(H_i)$ . Далее подобные измерения выполнить для других значений  $H_i$ .

4.3. Переключатель макета «Вид сигнала» поставить в положение трапециидального импульса  $\text{—}\wedge\text{—}$  и повторить п.4.1 и 4.2.

**5. Измерение зависимостей вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал/шум  $z_{0i}$ .** При выполнении этого пункта работы следует измерить вероятности правильного обнаружения полезных сигналов I-го и II-го типов для различных значений отношения сигнал/шум  $z_{0i}$  и величине порога обнаружителя, определяемым в соответствии с критерием Неймана-Пирсона. Параметры полезных сигналов и допустимые уровни вероятностей ложных тревог задаются таблицей вариантов. Номер варианта определяется преподавателем.

5.1. После установки начальных регулировок лабораторной установки в соответствии с п.3 переключатель «Род работы» макета ставится в положение  $P_{ПО}$ , а переключатель «Вид сигнала» – в положение  $\text{—}\square\text{—}$ .

5.2. С помощью осциллографа при отключенном от макета ге-

нератора шума устанавливается заданное значение времени задержки  $\tau_0$  полезного сигнала относительно опорного. Данная установка производится в соответствии с п. 2. Начинать целесообразно со значения  $\tau_0 = 0$ .

5.3. К лабораторному макету подключается генератор шума. На аттенуаторе ослабления генератора шума при этом стоит заданное преподавателем затухание  $S_0$ , а ручка «Выход плавно» находится в положении, выставленном в соответствии с п.3.6. Эти начальные установки обеспечивают отношение сигнал/шум  $z_0 = 1$ . Далее на аттенуаторе ослабления устанавливается общее затухание  $S_i$ , при котором отношение сигнал/шум определяется выражением (5.19). Величину  $S_i$  следует выбирать из интервалов [10дБ; 30дБ] с шагом 5дБ; [30дБ; 40дБ] с шагом 2дБ (всего 11 значений).

5.4. Переключатель «Род работы» на лабораторном макете ставится в положение  $P_{лт}$ . Затем регулятором « $E_{пор}$ » подбирается такой порог обнаружителя, при котором показания частотомера будут соответствовать измеренному значению допустимой вероятности ложной тревоги  $\alpha^*$  из Вашего варианта. Следует заметить, что величина такого порога будет меняться с изменением общего затухания  $S_i$ , выставленного на генераторе шума, и с изменением допустимой вероятности ложной тревоги  $\alpha^*$ .

5.5. Переключатель «Род работы» лабораторного макета устанавливается в положение  $P_{по}$ . Показания частотомера при этом будут соответствовать измеренному значению вероятности правильного обнаружения полезного сигнала I-го типа с установленным временем запаздывания  $\tau_0$ , отношением сигнал/шум  $z_{0i}$  (общим затуханием  $S_i$ ) и допустимой вероятностью ложной тревоги  $\alpha^*$ .

5.6. Далее выполняются измерения вероятностей правильного обнаружения для всех значений отношения сигнал/шум  $z_{0i}$  (затуханий  $S_i$ ) согласно п.5.3-5.5.

5.7. Аналогичные измерения проводятся для

- другого допустимого уровня вероятности ложной тревоги,
- другого времени запаздывания  $\tau_0$  и двух значений допусти-

- мой вероятности ложной тревоги,
- полезного сигнала трапецевидной формы с двумя значениями времени запаздывания при двух уровнях допустимой вероятности ложной тревоги.

Таким образом, в результате выполнения п. 5 должно быть получено по четыре экспериментальных зависимости  $D = D(z_{0i})$  для каждого типа полезного сигнала.

## 6. Сопоставление теоретических и экспериментальных зависимостей.

6.1. При построении теоретической зависимости вероятности ложной тревоги  $\alpha$  от величины нормированного порога  $H \in [-3, 3]$  используется выражение (5.4). Значения интеграла вероятности  $\Phi(x)$  находятся при помощи программных продуктов MathCad (функция `snorm(x)`) или Maxima (функция `cdf_normal(x,m,s)`). На график теоретической зависимости  $\alpha(H)$  наносятся кружками и крестиками экспериментальные данные по измерению вероятностей ложной тревоги для различных  $H_i$ , полученные в результате выполнения п. 4.

6.2. Построение теоретических зависимостей вероятности правильного обнаружения  $D$  от величины отношения сигнал/шум  $z_0$  при фиксированной вероятности ложной тревоги  $\alpha^*$  производится по формуле  $D(z_0) = 1 - \beta_{\min}(z)$ , где  $\beta_{\min}(z)$  определяется (5.13), а отношение сигнал/шум  $z$  — выражением (5.17) или (5.18) в зависимости от вида полезного сигнала. Для этого с помощью программных продуктов MathCad (функция `qnorm(x,0,1)`) или Maxima (функция `quantile_normal(p,m,s)`) находится значение порога  $H$ , соответствующее заданному уровню вероятности ложной тревоги  $\alpha^*$ . Например, для  $\alpha^* = 0.1$  величина  $H_0 = 1.28$ , а при  $\alpha^* = 0.01$  —  $H = 2.33$ . Далее, используя (5.17) или (5.18) вычисляется  $z$ . Постоянная времени RC-цепочки, которая входит в (5.18), определяется параметрами лабораторного макета и имеет значение  $\tau_c = 15$  мкс.

Расчет зависимостей  $D(z_0)$  выполняется для значений  $z_0$ , при которых (5.17) или (5.18) изменяются от 0 до 10. На теоретические зависимости  $D(z_0)$  наносятся экспериментальные данные по

измерению вероятностей правильного обнаружения, полученные в результате выполнения п. 5. При этом общее затухание  $S_i$  пересчитывается в  $z_{0i}$  согласно (5.19). Зависимости  $D(z_0)$  целесообразно расположить на четырех рисунках: 1-й и 2-й для сигнала I-го типа; 3-й и 4-й — для сигнала II-го типа; 1-й и 3-й для нулевой задержки полезного сигнала; 2-й и 4-й — для полезного сигнала с ненулевым запаздыванием.

Таблица вариантов

Номер варианта	Тип сигнала	Задержка $\tau_0$	Заданная вероятность ложной тревоги $\alpha^*$
1	I-й, II-й	0; 5 мкс	0,14; 0,04
2	I-й, II-й	0; 10 мкс	0,1; 0,01
3	I-й, II-й	0; 5 мкс	0,12; 0,02
4	I-й, II-й	0; 10 мкс	0,16; 0,06

### Оформление отчёта о лабораторной работе

В отчет о лабораторной работе включается:

1. Блок-схема лабораторной установки с кратким описанием назначения приборов.
2. Таблицы экспериментальных значений вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения.
3. Графики теоретических зависимостей вероятности ложной тревоги от  $N$  и правильного обнаружения от  $z_0$ , рассчитанные по теоретическим формулам, с нанесенными на них экспериментальными данными.
4. Выводы и оценку полученных результатов.

### Контрольные вопросы

1. Критерии оптимальности алгоритмов обнаружения.
2. Синтез оптимального алгоритма обнаружения детерминированного сигнала на фоне белого гауссовского шума по критерию Неймана-Пирсона.

3. Вывод соотношений, определяющих вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги для корреляционного обнаружителя при произвольном опорном сигнале, и выражений (5.17), (5.18).
4. Анализ поведения зависимости вероятности правильного обнаружения в корреляционном приёмнике, если опорный и полезный сигналы — прямоугольные видеоимпульсы (5.14) (5.15), от нормированного запаздывания  $\tau_0/\tau_u$  для заданной преподавателем допустимой вероятности ложной тревоги  $\alpha^*$ .
5. Составить описание практической установки величины порога в корреляционном обнаружителе, реализованном в лабораторном макете, если использовать критерий идеального наблюдателя.
6. Объяснить экспериментальные данные, полученные при выполнении п. 4.2 и 4.3 экспериментальной части работы.

**Литература:** [1-4].



## ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Сов.радио, 1982.
2. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
3. Шахтарин Б.И. Случайные процессы в радиотехнике: Цикл лекций. М.: Радио и связь, 2000.
4. Акимов П.С., Секин А.И., Соленов В.И. Сигналы и их обработка в информационных системах. М.: Радио и связь, 1992.
5. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992.
6. Левин Б.Р. Теоретические основы радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
7. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1992.
8. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М.: Энергия, 1972.
9. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
10. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.

*Учебное издание*

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА**  
**Лабораторный практикум**

Учебное пособие

Составители:

**Трифонов** Андрей Павлович,  
**Маршаков** Владимир Кириллович,  
**Корчагин** Юрий Эдуардович,  
**Зимовец** Константин Анатольевич

Подп. в печ. 9.03.2011. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 5,4. Тираж 30 экз. Заказ 292.

Издательско-полиграфический центр  
Воронежского государственного университета.  
394000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел. (факс): +7 (473) 259-80-26  
<http://www.ppc.vsu.ru>; e-mail: [ppc\\_center@ppc.vsu.ru](mailto:ppc_center@ppc.vsu.ru)

Отпечатано в типографии  
Издательско-полиграфического центра  
Воронежского государственного университета.  
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3. Тел. 220-41-33