

А.П.ТРИФОНОВ
Е.П.НЕЧАЕВ
В.И.ПАРФЕНОВ

ОБНАРУЖЕНИЕ
СТОХАСТИЧЕСКИХ
СИГНАЛОВ С
НЕИЗВЕСТНЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ

**А.П.ТРИФОНОВ,
Е.П.НЕЧАЕВ,
В.И.ПАРФЕНОВ**

**ОБНАРУЖЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ
СИГНАЛОВ С НЕИЗВЕСТНЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ**

Под ред. проф. А.П.Трифорова

Воронежский государственный университет

1991г.

Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами (Под. ред. А.П.Трифорова). - Воронежский государственный университет, 1991. - 246 с.

Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I. Detection of the stochastic signals with the unknown parameters. Voronezh State University, 1991. - 246 p.

Определены структура и характеристики обнаружителей гауссовских стационарных и импульсных нестационарных сигналов с неизвестными параметрами, такими как математическое ожидание, величина, ширина полосы частот и центральная частота спектральной плотности; время прихода и длительность случайного импульса. Приведены результаты статистического моделирования на ЭВМ синтезированных обнаружителей.

Для инженерно-технических и научных работников в области радио, оптической и гидролокации и связи, а также студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей.

А.П.Трифонов известен широкому кругу специалистов как соавтор книг "Оценка параметров сигналов на фоне помех" - М. 1978; "Теория обнаружения сигналов" - М. 1984; "Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех" - М. 1986. Библиогр. 72 назв. Ил. 26.

Научный редактор - д-р техн. наук проф. А.П.Трифонов

Рецензенты: д-р техн. наук проф. В.В.Быков,
д-р физ. мат. наук проф. В.А.Омельченко

СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

- АМП - алгоритм максимального правдоподобия
 КПО - квазиправдоподобный обнаружитель
 МПО - максимально правдоподобный обнаружитель
 ОМП - оценка максимального правдоподобия
 ОСШ - отношение сигнал-шум
 ФОР - функционал отношения правдоподобия
 ФПК - (уравнение) Фоккера-Планка-Колмогорова
 T - время наблюдения
 $P\{A\}$ - вероятность события A
 $F(x)$ - функция распределения
 $W(x)$ - плотность вероятности
 $\theta(u)$ - характеристическая функция
 a - математическое ожидание
 $\xi(t)$ - стохастический сигнал
 $B(t, u)$ - корреляционная функция случайного процесса
 $R(t, u)$ - коэффициент корреляции случайного процесса
 $G(\omega)$ - спектральная плотность случайного процесса
 N_0 - односторонняя спектральная плотность белого шума
 $n(t)$ - гауссовский белый шум
 γ - величина спектральной плотности сигнала
 Ω - эквивалентная полоса частот сигнала
 ν - центральная частота сигнала
 τ - длительность сигнала
 λ - временное положение сигнала
 $x(t)$ - наблюдаемый процесс
 $I\{\theta\}$ - функционал отношения правдоподобия
 c - пороговое значение
 α - вероятность ложной тревоги
 β - вероятность пропуска сигнала
 $L\{\theta\}$ - логарифм функционала отношения правдоподобия
 θ - вектор неизвестных параметров сигнала

- $\tilde{\theta}$ - оценка величины θ
 $\hat{\theta}$ - оценка максимального правдоподобия величины θ
 $x(\omega)$ - спектр наблюдаемого отрезка реализации случайного процесса
 $H(\omega)$ - передаточная функция линейного фильтра
 $S_T(\omega)$ - периодограмма наблюдаемой реализации
 η - поржированное значение неизвестного параметра сигнала
 ϱ - поржированная величина спектра мощности случайного сигнала
 μ - число степеней свободы случайного сигнала
 $S(\theta)$ - сигнальная составляющая логарифма функционала отношения правдоподобия
 $N(\theta)$ - шумовая составляющая логарифма функционала отношения правдоподобия
 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$ - интеграл вероятности
 z^2 - отношение сигнал-шум (сигнал-помеха)
 u - поржированное пороговое значение
 ξ - приведенная длина априорного интервала неизвестного параметра регулярного сигнала
 m - приведенная длина априорного интервала неизвестного параметра разрывного сигнала
 $\Gamma(x)$ - гамма-функция

ВВЕДЕНИЕ

Задача обнаружения стохастических сигналов встречается достаточно часто: в радиолокации, активной и пассивной, в гидролокации, радиоастрономии, системах связи с шумовой несущей или при использовании каналов связи со случайными параметрами и др. К настоящему времени задачу обнаружения стохастических сигналов с априори известными статистическими характеристиками можно уже назвать классической. Она в той или иной степени затрагивается в работах [7, 8, 22, 25, 33, 37, 45, 61, 65 и др].

Однако до сих пор остается открытой проблема синтеза, анализа и аппаратурной реализации обнаружителей стохастических сигналов с неизвестными параметрами, когда изменением неизвестных параметров в течение времени наблюдения можно пренебречь. Среди стационарных гауссовских случайных сигналов примером может служить узкополосный процесс, наблюдаемый на фоне белого шума. У такого стохастического сигнала могут быть неизвестны величина, ширина полосы частот и центральная частота спектральной плотности.

Число неизвестных параметров обнаруживаемого стохастического сигнала возрастает для нестационарных гауссовских сигналов. Часто возникает необходимость в обнаружении случайного импульса, представляющего собой достаточно длинный отрезок стационарного случайного процесса. В этом случае к неизвестным параметрам спектральной плотности добавляются временное положение и длительность случайного импульса (импульса со случайной субструктурой). Временное положение и длительность случайного импульса являются новыми, по сравнению со стационарными стохастическими сигналами, параметрами, которые могут быть неизвестны при решении задачи обнаружения.

В настоящей книге обобщаются и развиваются имею-

щиеся к настоящему времени частично лишь в периодической печати результаты по прикладным вопросам теории обнаружения стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Основное содержание книги посвящено синтезу и анализу максимально правдоподобных обнаружителей гауссовских стационарных сигналов с неизвестными параметрами корреляционной функции и спектральной плотности и гауссовских нестационарных импульсных сигналов с неизвестными временным положением и длительностью. Предполагается, что гауссовские стационарные и нестационарные случайные сигналы наблюдаются на фоне гауссовского белого шума. На основе математического синтеза обнаружителей определена их структура и рассмотрены возможности аппаратной реализации синтезированных обнаружителей.

Большое внимание уделяется анализу качества функционирования синтезированных обнаружителей. При анализе обнаружителей возникают существенные трудности, связанные с тем, что для нестационарных стохастических сигналов решающие статистики оказываются недифференцируемыми по неизвестным параметрам. Преодолеть эти трудности позволил развитый с участием авторов метод локально-марковской аппроксимации [61]. В результате, удалось во многих случаях найти асимптотически точные выражения для характеристик обнаружения, подавляющее большинство которых приведены к виду, пригодному для непосредственных аналитических расчетов в инженерной практике. Наряду с развитием теоретических методов анализа синтезированных обнаружителей, значительное внимание уделяется исследованию качества функционирования обнаружителей методами статистического моделирования на ЭВМ [6]. Теоретические доказательства и сформулированные рекомендации сопровождаются экспериментальной проверкой посредством статистического моделирования обнаружителей на ЭВМ. Моделирование показало удовлетворительное согласование полученных теоретических зависимостей и выводов с экспериментальными. В результа-

те, продемонстрирована возможность практического использования полученных теоретических результатов и подтверждена работоспособность синтезированных обнаружителей стохастических сигналов с неизвестными параметрами.

В определенной степени книга представляет собой обобщение основных результатов, изложенных в первой главе [45], на стохастические сигналы с неизвестными параметрами. Однако, в отличие от [45], более сложный, с точки зрения математического описания, класс обнаруживаемых сигналов потребовал решения значительного числа новых задач.

ГЛАВА 1.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ И
МЕТОДЫ ИХ ОБНАРУЖЕНИЯ

1.1. Стохастические сигналы и способы их описания

1.1.1. Общие сведения. Любые физические процессы, используемые для передачи (связь) или получения (локация) информации, называют сигналами [23]. Математическая модель сигнала $s(t)$ устанавливает соответствие между любым моментом времени $t \in T$ и значением сигнала $s \in S$. Здесь T - интервал времени, на котором наблюдается сигнал (область определения сигнала), а S - множество возможных значений сигнала. Сигнал $s(t)$ называется аналоговым, если множество T континуально, т.е. представляет собой множество точек некоторого отрезка. Для решения задач получения или передачи информации представляют интерес не отдельные сигналы, а целые их классы, определенные в соответствующем пространстве сигналов. Пространством сигналов называют совокупность сигналов, удовлетворяющую некоторым априори (заранее) заданным условиям.

Рассмотрим ситуацию, когда возможно неоднократное наблюдение (измерение) сигнала из заданного пространства сигналов. Причем предполагается, что наблюдения выполняются при неизменном комплексе условий. Сигнал называют детерминированным, если априори (до наблюдения) известно, что результат наблюдения при его неоднократном повторении в неизменных условиях будет один и тот же [23]. Если же априори известно лишь множество возможных исходов многократных наблюдений при неизменных условиях, то сигнал называют стохастическим. Для стохастического сигнала результат

конкретного наблюдения предсказать достоверно невозможно. Однако при анализе длинных серий результатов многократных наблюдений в неизменных условиях для многих реальных сигналов проявляется статистическая закономерность. Суть ее в том, что при возможном существенном различии результатов отдельных наблюдений, их средние значения в достаточно больших сериях наблюдений оказываются устойчивыми. Возникающая ситуация неопределенности результата отдельного наблюдения обычно допускает вероятностное описание. Такое описание включает в себя априори заданное множество случайных событий, причем для каждого события A постулируется существование количественной меры — вероятности $P[A]$ события A [14]. Вероятность является эквивалентом относительной частоты появления события в длинной серии наблюдений при неизменных условиях.

1.1.2. Случайные величины. Результатом заранее непредсказываемого наблюдения может быть численное значение некоторой физической величины. Числовой формой представления случайного результата наблюдения является случайная величина [14]. Случайная величина ξ характеризуется множеством возможных значений X и распределением вероятности $F(x)$, заданным на этом множестве. Случайная величина — это простейший пример стохастического сигнала

$$s(t) = \xi, \quad t \in T. \quad (1.1.1)$$

Такой стохастический сигнал остается постоянным в течение интервала наблюдения T , но изменяется непредсказываемым точно образом от наблюдения к наблюдению.

Полной (в вероятностном смысле) характеристикой стохастического сигнала (1.1.1) является функция распределения вероятности

$$F(x) = P[\xi < x]. \quad (1.1.2)$$

Для того, чтобы эта функция описывала случайную величину, $F(x)$ должна быть неотрицательной и неубы-

ващей функцией, а так же удовлетворять условиям: $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ [14].

Если функция (1.1.2) дифференцируема, случайную величину можно описывать плотностью распределения вероятности

$$W(x) = dF(x)/dx. \quad (1.1.3)$$

Плотность вероятности неотрицательна и удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = 1. \quad (1.1.4)$$

Вероятностные свойства стохастического сигнала (1.1.1) можно также описывать характеристической функцией, представляющей собой математическое ожидание случайной величины $\exp(ju\xi)$

$$\begin{aligned} \theta_{\xi}(u) &= \langle \exp(ju\xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jux)dF(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jux)W(x)dx. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

По заданной характеристической функции можно определить плотность вероятности (1.1.4) (если она существует)

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-jux) \theta_{\xi}(u)du/2\pi. \quad (1.1.6)$$

Функция распределения вероятности (1.1.2) также однозначно определяется характеристической функцией (1.1.5) [14]. Следовательно, рассмотренные способы описания стохастического сигнала (1.1.1) посредством (1.1.2), (1.1.3) или (1.1.5) эквивалентны. Еще один эквивалентный способ описания возможен при использовании кумулянтной функции [23, 25]

$$\Psi_{\xi}(u) = \ln \theta_{\xi}(u). \quad (1.1.7)$$

Для менее полного, но и более простого, чем с помощью (1.1.2), (1.1.3), (1.1.5) или (1.1.6) вероят-

ностного описания случайной величины, целесообразно использовать моменты и кумулянты конечного порядка [14, 16, 22, 23, 25, 37, 39]. Момент n -го порядка определяется соотношением

$$m_n = \langle \xi^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n W(x) dx, \quad (1.1.8)$$

если эти интегралы существуют. Момент n -го порядка можно так же найти, дифференцируя характеристическую функцию (1.1.5)

$$m_n = (-j)^n d^n \theta_{\xi}(u)/du^n \Big|_{u=0}. \quad (1.1.9)$$

Особенно часто используется и играет особую роль момент первого порядка

$$a = m_1 = \langle \xi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \quad (1.1.10)$$

- математическое ожидание стохастического сигнала (1.1.1).

Кумулянт n -го порядка определяется по кумулянтной функции (1.1.7)

$$c_n = (-j)^n d^n \Psi_{\xi}(u)/du^n \Big|_{u=0}. \quad (1.1.11)$$

Наиболее часто используются кумулянты первого и второго порядков

$$c_1 = m_1 = a,$$

$$c_2 = \sigma^2 = \langle [\xi - \langle \xi \rangle]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 dF(x),$$

где σ^2 - дисперсия случайной величины ξ . Отметим, что моменты (1.1.9) могут быть выражены через кумулянты (1.1.11). Аналогично, кумулянты (1.1.11) могут быть выражены через моменты (1.1.9) [25]. В частности, для моментов и кумулянт первых двух порядков имеем

$$m_1 = c_1, \quad m_2 = c_2 + c_1^2, \quad c_2 = m_2 - m_1^2.$$

Часто оказывается удобным использование безразмерных кумулянтов - кумулянтных коэффициентов [25]

$$\gamma_n = \mu_n / \mu_2^{n/2} = \mu_n / \sigma^n. \quad (1.1.12)$$

Коэффициенты γ_3 и γ_4 называются коэффициентами асимметрии и эксцесса соответственно [16].

1.1.3. Случайные процессы. Более сложным, но и более реалистическим, чем (1.1.1), стохастическим сигналом может служить случайный процесс $\xi(t)$

$$s(t) = \xi(t), \quad t \in T. \quad (1.1.13)$$

Такой стохастический сигнал является широко используемой в прикладных задачах математической моделию как информационных (полезных) сигналов, так и мешающих сигналов - помех и шумов [22, 23, 25, 37, 39, 41].

Существуют различные способы определения (и, соответственно - описания) случайного процесса $\xi(t)$. В прикладных задачах обычно используется способ, основанный на понятии случайной величины [14]. Именно: функция $\xi(t)$ называется случайным процессом, если при каждом фиксированном значении $t \in T$ она является случайной величиной. Как известно, детерминированный процесс описывает такое изменение физического явления или объекта во времени, которое априори точно может быть предсказано. В отличие от детерминированного, случайный процесс описывает такое изменение во времени физического явления или состояния физического объекта, которое априори точно предсказать невозможно. Конкретный вид, который принимает случайный процесс в результате некоторого эксперимента (наблюдения), называют выборочной функцией, траекторией или реализацией случайного процесса. Множество X всех возможных реализаций случайного процесса $\xi(t)$ называют его фазовым пространством [37] или пространством значений процесса [22].

В соответствии с приведенным определением случайного процесса, при каждом фиксированном $t \in T$ функ-

ция $\xi(t)$ является случайной величиной. Аналогично (1.1.2), она полностью характеризуется функцией распределения вероятности

$$F_1(x; t) = P\{\xi(t) < x\}. \quad (1.1.14)$$

Эту функцию интерпретируют как одномерную функцию распределения вероятности стохастического сигнала (1.1.13). Одномерная функция распределения вероятности является важной, но далеко не полной характеристикой случайного процесса. Действительно, она дает представление о свойствах случайного процесса лишь в один, фиксированный момент времени.

Полное в вероятностном смысле описание стохастического сигнала дает последовательность n -мерных ($n = 1, 2, \dots$) функций распределения вероятности

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n\}, \\ x_k \in X, \quad t_k \in T, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.1.15)$$

Эта функция определяет вероятность совместного выполнения неравенств: $\xi(t_k) < x_k$, $k = \overline{1, n}$. Для того, чтобы последовательность n -мерных функций $F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ при $n = 1, 2, \dots$ характеризовала некоторый стохастический сигнал, она, кроме очевидных условий неотрицательности и нормировки, должна удовлетворять условиям согласованности и симметрии [41]

$$F_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \infty; t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) = \\ = F_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1}), \quad (1.1.16)$$

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \\ = F_n(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}; t_{i_1}, \dots, t_{i_n}), \quad (1.1.17)$$

где $i_1 \dots i_n$ - любая перестановка индексов $1, 2, \dots, n$.

Если функция (1.1.15) дифференцируема по x_1, \dots, x_n , то полное описание стохастического сигнала (1.1.13) можно так же дать с помощью последовательности n -мерных плотностей распределения вероятности

$$W_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \quad (1.1.18)$$

Плотность вероятности неотрицательна, удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n = 1 \quad (1.1.19)$$

а так же условиям согласованности и симметрии, следующим из (1.1.16) и (1.1.17).

Вероятностные свойства стохастического сигнала (1.1.13) можно также описать посредством n -мерной характеристической функции

$$\begin{aligned} \theta_{\xi_n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) &= \langle \exp [j \sum_{k=1}^n u_k \xi(t_k)] \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp [j \sum_{k=1}^n u_k x_k] dF_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp [j \sum_{k=1}^n u_k x_k] W_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n \quad (1.1.20) \end{aligned}$$

По заданной характеристической функции (1.1.20), аналогично (1.1.6), можно определить n -мерную плотность вероятности (1.1.18) (если она существует)

$$W_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j \sum_{k=1}^n u_k x_k] \times \\ \times \theta_{\xi_n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n / (2\pi)^n \quad (1.1.21)$$

Многомерная функция распределения вероятности (1.1.15) также однозначно определяется через характеристическую функцию (1.1.20) [14]. Следовательно, рассмотренные способы описания стохастического сигнала (1.1.13) с помощью последовательностей n -мерных функций (1.1.15), (1.1.18) или (1.1.20) эквивалентны. Кроме того, в ряде задач, вместо характеристической функции (1.1.20) целесообразно использовать кумулянтную функцию

$$\Psi_{\xi_n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) = \ln \theta_{\xi_n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n). \quad (1.1.22)$$

Рассматриваемый стохастический сигнал (1.1.13) — аналоговый, т.е. является случайным процессом с непрерывным временем. Поэтому исчерпывающее полное вероятностное описание этого сигнала посредством конечномерных распределений (n — конечно), в общем случае невозможно [22, 37, 41]. Тем не менее, если: 1) интервал наблюдения T конечен; 2) n , хотя и конечно, но велико; 3) точки $t_1, \dots, t_1, \dots, t_n$ близки друг к другу; то, с достаточной для многих прикладных задач точностью [37], можно аппроксимировать аналоговый стохастический сигнал $\xi(t)$ при $t \in T$ последовательностью случайных величин $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$. В этом частном случае, для приближенного описания аналогового стохастического сигнала можно использовать конечномерные функции (1.1.15), (1.1.18), (1.1.20) или (1.1.22).

В общем случае, полное вероятностное описание аналогового стохастического сигнала возможно при переходе от конечномерных к континуальным распределениям [1, 37]. Для этого необходимо в (1.1.15) или (1.1.18) устремить $n \rightarrow \infty$ и $\max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$.

Континуальные распределения могут существовать при соответствующей нормировке, что используется в дальнейшем при рассмотрении функционалов отношения правдоподобия. Аналогичный предельный переход в (1.1.20)

или (1.1.22) приводит к характеристическому или кумулянтному функционалу соответственно [23].

Для описания стохастического сигнала можно использовать моментные и корреляционные функции [23, 25, 39]. Эти функции являются обобщением моментов (1.1.8) и кумулянтов (1.1.11) случайной величины.

Моментная функция n -го порядка стохастического сигнала (1.1.13) определяется выражением

$$\begin{aligned} m_n(t_1, \dots, t_n) &= \langle \xi(t_1) \dots \xi(t_n) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \dots x_n dF_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \dots x_n W_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

Моментные функции так же выражаются через производные характеристической функции (1.1.20)

$$\begin{aligned} m_n(t_1, \dots, t_n) &= \\ &= (-j)^n \frac{\partial^n \theta_{\xi_n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \Big|_{u_1 = \dots = u_n = 0}. \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

Как и для случайной величины (1.1.10), особую роль играет моментная функция первого порядка

$$a(t) = m_1(t) = \langle \xi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_1(x, t) \quad (1.1.25)$$

- математическое ожидание стохастического сигнала (1.1.13).

Корреляционные функции n -го порядка стохастического сигнала (1.1.13) определяются по кумулянтной функции (1.1.22)

$$k_n(t_1, \dots, t_n) =$$

$$= (-j)^n \frac{\partial^n \Psi_{\xi_n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \Big|_{u_1 = \dots = u_n = 0}. \quad (1.1.26)$$

Наиболее часто используются корреляционные функции первых двух порядков

$$\mathfrak{z}_1(t) = m_1(t) = a(t), \quad \mathfrak{z}_2(t_1, t_2) = B(t_1, t_2). \quad (1.1.27)$$

Они связаны с моментными функциями (1.1.23) простыми соотношениями

$$\mathfrak{z}_1(t) = m_1(t), \quad \mathfrak{z}_2(t_1, t_2) = m_2(t_1, t_2) - m_1(t_1)m_1(t_2),$$

$$m_2(t_1, t_2) = \mathfrak{z}_2(t_1, t_2) + \mathfrak{z}_1(t_1)\mathfrak{z}_1(t_2).$$

Корреляционная функция второго порядка (1.1.27) (далее - корреляционная функция) может быть непосредственно выражена через функции или плотности распределения вероятности

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2) &= \langle [\xi(t_1) - \langle \xi(t_1) \rangle] [\xi(t_2) - \langle \xi(t_2) \rangle] \rangle = \\ &= \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle - \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] dF_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] W_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

Для того, чтобы функция двух переменных $B(t_1, t_2)$ была корреляционной функцией некоторого стохастического сигнала, необходимо и достаточно, чтобы она была симметричной и неотрицательно определенной [22, 41]. Это означает, что должны выполняться соотношения

$$B(t_1, t_2) = B(t_2, t_1), \quad B(t, t) = \sigma^2(t) \geq 0;$$

$$\sum_{i, k=1}^n B(t_i, t_k) x_i x_k \geq 0$$

— для любых n ; $t_k \in T$ и действительных x_k , $k = \overline{1, n}$.

Таким образом, полное в статистическом смысле описание стохастического сигнала (1.1.13) задано, если для $n = 1, 2, \dots$ известны последовательности функций распределения вероятности (1.1.15) или плотностей распределения вероятности (1.1.18) или характеристических функций (1.1.20) или кумулянтных функций (1.1.22) или моментных функций (1.1.23) или корреляционных функций (1.1.26), если соответствующие функции существуют.

1.2. Гауссовские сигналы и их параметры

1.2.1. Определение и основные свойства. Одной из наиболее распространенных и широко используемых моделей стохастических сигналов является гауссовский (нормальный) стохастический сигнал. Стохастический сигнал является гауссовским, если все его корреляционные функции (1.1.26) третьего и более высоких порядков равны нулю, т.е.

$$x_n(t_1, \dots, t_n) = 0 \quad (1.2.1)$$

для любых $t_k \in T$ и $n \geq 3$. При этом, очевидно, и для кумулянтных коэффициентов (1.1.12) справедливо аналогичное соотношение

$$\gamma_n = 0, \quad n \geq 3.$$

Разложим кумулянтную функцию (1.1.22) в n -мерный ряд Маклорена. Выразим коэффициенты этого разложения через корреляционные функции (1.1.26). Учитывая (1.2.1) и используя обозначения (1.1.27), получаем кумулянтную функцию гауссовского стохастического сигнала

$$\Psi_{\xi_n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) = j \sum_{k=1}^n a(t_k) u_k -$$

$$- \sum_{i, k=1}^n B(t_i, t_k) u_i u_k / 2. \quad (1.2.2)$$

Используя (1.1.22), выразим характеристическую функцию (1.1.20) через кумулянтную и подставим ее значение из (1.2.2). Находим, что характеристическая функция гауссовского стохастического сигнала имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_{\xi^n}(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) = \exp \left[j \sum_{k=1}^n a(t_k) u_k - \right. \\ \left. - \sum_{i, k=1}^n B(t_i, t_k) u_i u_k / 2 \right]. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Подставляя (1.2.3) в (1.1.24), видим, что у гауссовского стохастического сигнала все моментные функции выражаются через математическое ожидание (1.1.25) и корреляционную функцию (1.1.28).

Выполняя затем дифференцирование в (1.1.24), для моментных функций 3-го и 4-го порядков гауссовского стохастического сигнала можем записать

$$\begin{aligned} m_3(t_1, t_2, t_3) &= a(t_1)B(t_2, t_3) + a(t_2)B(t_1, t_3) + \\ &+ a(t_3)B(t_1, t_2) + a(t_1)a(t_2)a(t_3); \\ m_4(t_1, t_2, t_3, t_4) &= B(t_1, t_2)[B(t_3, t_4) + a(t_3)a(t_4)] + \\ &+ B(t_1, t_3)[B(t_2, t_4) + a(t_2)a(t_4)] + B(t_1, t_4)[B(t_2, t_3) + \\ &+ a(t_2)a(t_3)] + a(t_1)a(t_2)B(t_3, t_4) + \\ &+ a(t_1)a(t_3)B(t_2, t_4) + a(t_1)a(t_4)B(t_2, t_3) + \\ &+ a(t_1)a(t_2)a(t_3)a(t_4). \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Подставим (1.2.3) в (1.1.21) и вычислим интеграл. Получим n -мерную плотность вероятности гауссовского стохастического сигнала

$$W_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = (2\pi)^{-n/2} \det^{-1/2} \| B(t_i, t_k) \| \times$$

$$\text{хехр} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k, i=1}^n C_{ik} [x_i - a(t_i)] [x_k - a(t_k)] \right\}, \quad (1.2.5)$$

где $\| C_{ik} \|$ - матрица, обратная корреляционной матрице:

$$\| C_{ik} \| = \| B(t_i, t_k) \|^{-1}, \quad k, i = \overline{1, n}.$$

Одномерная и двумерная плотности вероятности гауссовского стохастического сигнала, согласно (1.2.5), определяются выражениями:

$$W_1(x, t) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[x-a(t)]^2}{2\sigma^2(t)} \right\}, \quad (1.2.6)$$

$$W_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma(t_1)\sigma(t_2)\sqrt{1-R^2(t_1, t_2)}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2[1-R^2(t_1, t_2)]} \left[\left(\frac{x_1 - a(t_1)}{\sigma(t_1)} \right)^2 - \right. \right.$$

$$\left. -2R(t_1, t_2) \frac{x_1 - a(t_1)}{\sigma(t_1)} \cdot \frac{x_2 - a(t_2)}{\sigma(t_2)} + \right.$$

$$\left. \left. \left(\frac{x_2 - a(t_2)}{\sigma(t_2)} \right)^2 \right] \right\}, \quad (1.2.7)$$

где $\sigma^2(t) = B(t, t)$ - дисперсия,

$$R(t_1, t_2) = B(t_1, t_2) / \sqrt{B(t_1, t_1)B(t_2, t_2)} =$$

$$= B(t_1, t_2) / \sigma(t_1)\sigma(t_2) \quad (1.2.8)$$

- нормированная корреляционная функция (коэффициент корреляции).

Гауссовский стохастический сигнал обладает полез-

ними во многих прикладных задачах свойствами [22, 41 и др.]. Так, гауссовский случайный процесс инвариантен к любым линейным преобразованиям. Следовательно, в результате любого линейного преобразования гауссовского процесса опять получаем гауссовский процесс. Кроме того, из некоррелированности значений гауссовского процесса следует их статистическая независимость. Действительно, пусть значения гауссовского процесса $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ некоррелированы, т.е. коэффициент корреляции (1.2.8) для них равен нулю. Тогда, подставляя в (1.2.7) $R(t_1, t_2) = 0$, получаем, что двумерная плотность вероятности факторизуется, т.е. может быть представлена в виде произведения одномерных плотностей вероятности (1.2.6).

Модель стохастического сигнала в виде гауссовского случайного процесса широко используется в естествознании в целом и в технике в частности. В радиофизике, локации, связи гауссовский случайный процесс является достаточно адекватной математической моделью активных и пассивных помех, атмосферных и космических шумов, каналов с замираниями, с многолучевым распространением и т.д. Флуктуационные шумы устройств обработки информации, обусловленные дробовым эффектом и тепловым движением электронов, также подчиняются гауссовскому распределению. Адекватность модели гауссовского случайного процесса многим реальным помехам и стохастическим сигналам объясняется во многих случаях действием центральной предельной теоремы [14]. Действительно, большинство встречающихся в реальных условиях радиофизических случайных процессов представляют собой результирующий эффект (сумму) большого числа сравнительно слабых элементарных импульсов, возникающих в случайные моменты времени. Оказывается, что распределение суммы приближается к гауссовскому с увеличением числа слагаемых, практически независимо от того, какие распределения вероятности имеют отдельные слагаемые. При этом важно лишь, чтобы влияние отдельных слагае-

емых с негауссовским распределением на сумму было равномерно малым (приблизительно одинаковым).

1.2.2. Стационарные гауссовские сигналы. Гауссовский стохастический сигнал называют стационарным, если его математическое ожидание (1.1.25) постоянно, а корреляционная функция (1.1.28) зависит только от разности своих аргументов так, что

$$a(t) = a, \quad B(t_1, t_2) = B(t_1 - t_2) = B(t_2 - t_1) \quad (1.2.9)$$

при всех $t, t_1, t_2 \in T$. Из (1.2.3), (1.2.5) следует, что при выполнении (1.2.9) все вероятностные характеристики стационарного гауссовского сигнала не зависят от начала отсчета времени, т.е. инвариантны относительно сдвига интервала T . Поэтому, для стационарного гауссовского сигнала, без потери общности, начало интервала наблюдения T можно совместить с началом отсчета времени, полагая интервал наблюдения

$$t \in T = [0; T]. \quad (1.2.10)$$

Важной характеристикой стационарного гауссовского сигнала является спектральная плотность [22, 41].

Обозначим $\xi(t) = \xi(t) - a$ - центрированный сигнал и

$$Z_T(\omega) = \int_0^T \exp(-j\omega t) \xi(t) dt$$

- спектр усеченного на интервале $[0; T]$ центрированного стохастического сигнала. Тогда спектральная плотность определяется выражением [22, 41]

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |Z_T(\omega)|^2 \rangle. \quad (1.2.11)$$

Введенная таким образом спектральная плотность связана с корреляционной функцией преобразованием Фурье

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega\Delta) B(\Delta) d\Delta. \quad (1.2.12)$$

В свою очередь корреляционная функция может быть выражена через спектральную плотность

$$B(t_2 - t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\omega(t_2 - t_1)] G(\omega) d\omega / 2\pi. \quad (1.2.13)$$

Простейшим примером стационарного гауссовского процесса может служить процесс с постоянной на всех частотах спектральной плотностью

$$G(\omega) = N_0 / 2, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (1.2.14)$$

Такой случайный процесс называют белым шумом [22, 41]. Подставляя (1.2.14) в (1.2.13), получаем корреляционную функцию белого шума

$$B(t_2 - t_1) = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\omega(t_2 - t_1)] d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1), \quad (1.2.15)$$

где $\delta(\cdot)$ - дельта-функция [22, 41]. Далее гауссовский белый шум будем обозначать $n(t)$. Согласно (1.2.15) гауссовский белый шум характеризуется тем, что значения его в любые два, даже сколь угодно близкие, момента времени статистически независимы. Белый шум представляет собой обобщенный случайный процесс [23, 37] так, что распределение вероятностей белого шума в обычном смысле не существует. Он является идеализацией, поскольку достаточно близкие значения реального случайного процесса практически всегда зависимы. Кроме того, реальные процессы имеют конечную дисперсию, а дисперсия белого шума бесконечна. Поэтому использовать гауссовский белый шум в качестве модели реального случайного процесса можно лишь, когда представляет интерес результат воздействия белого шума на некоторые линейные системы. Выходным эффектом в этом случае будет линейный функционал от белого шума. Если распределение любого линейного функционала от процесса со спектральной плотностью (1.2.14) и корреляционной функцией (1.2.15) является гауссовским, то процесс $n(t)$ называют гауссовским

белым шумом [22, 41].

При качественном рассмотрении формы различных спектральных плотностей гауссовских стационарных сигналов целесообразно выделить два широко распространенных класса - низкочастотные (широкополосные) и высокочастотные (узкополосные) сигналы.

С этой целью обозначим

$$\gamma = \sup G(\omega) \quad (1.2.16)$$

- величина спектральной плотности и

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega) d\omega [\sup G(\omega)]^{-2} \quad (1.2.17)$$

- эквивалентная полоса частот стохастического сигнала. Будем называть сигнал широкополосным (низкочастотным), если основная масса его спектральной плотности (1.2.11) сосредоточена в окрестности начала оси частот, т.е. в окрестности точки $\omega = 0$, так, что

$$G(\omega) \ll \gamma, \quad |\omega| > \Omega.$$

Спектральную плотность широкополосного процесса удобно представить в виде

$$G(\omega) = \gamma g(\omega/\Omega). \quad (1.2.18)$$

Здесь функция $g(\cdot)$ описывает форму спектральной плотности и обладает свойствами

$$g(x) \geq 0, \quad g(x) = g(-x), \quad \sup g(x) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx = 1. \quad (1.2.19)$$

Таким образом, полное описание широкополосного гауссовского стационарного сигнала задано, если известны: 1. Функция $g(\cdot)$, определяющая форму спектральной плотности; 2. Параметр γ (1.2.16), определяющий величину спектральной плотности; 3. Параметр Ω (1.2.17), определяющий ширину спектральной плотности; 4. Математическое ожидание стохастического сигнала.

ла a (1.2.9).

В дальнейшем будет рассматриваться задача обнаружения широкополосного гауссовского стационарного стохастического сигнала со спектральной плотностью (1.2.18) на фоне белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0 (1.2.14). При этом могут быть неизвестны часть или все параметры широкополосного сигнала: a , γ , Ω .

Частным случаем широкополосного сигнала является полосовой сигнал, для которого

$$g(x) = I(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases} \quad (1.2.20)$$

Такого вида аппроксимацию формы спектральной плотности целесообразно использовать, если реальная спектральная плотность быстро убывает за пределами полосы частот Ω . Хорошо известно [63], что разрешающая способность любого спектроанализатора имеет порядок величины $2\pi/T$. Обозначим $\Delta\Omega$ - полоса частот, в которой реальная спектральная плотность спадает от своего максимального значения практически до нуля. Тогда условия применимости аппроксимации (1.2.20) можно записать как

$$\Delta\Omega \ll (2\pi/T) \ll \Omega.$$

Определим теперь класс узкополосных (высокочастотных) гауссовских стационарных стохастических сигналов. У этих сигналов основная масса спектральной плотности сосредоточена в некоторой полосе в окрестности центральной частоты, много большей полосы частот сигнала [22, 41]. Полагая, что $G(\omega)$ - спектральная плотность узкополосного процесса, обозначим

$$\gamma = 2 \sup G(\omega), \quad (1.2.21)$$

$$\Omega = \int_0^{\infty} G^2(\omega) d\omega [\sup G(\omega)]^{-2}. \quad (1.2.22)$$

и ν - центральная частота узкополосного процесса. В

соответствии с определением, основная масса спектральной плотности $G(\omega)$ сосредоточена в окрестности частот $\pm \nu$, причем

$$\nu \gg \Omega, \quad (1.2.23)$$

$$G(\omega) \ll \gamma, \quad |\omega \pm \nu| > \Omega. \quad (1.2.24)$$

В частности,

$$G(0) \ll \gamma. \quad (1.2.25)$$

Поэтому без потери общности можно ограничиться рассмотрением гауссовских стационарных узкополосных стохастических сигналов с нулевым математическим ожиданием

$$a \equiv 0. \quad (1.2.26)$$

Действительно, спектр математического ожидания стационарного сигнала (1.2.9) сосредоточен на нулевой частоте, где спектральная плотность узкополосного сигнала практически равна нулю (1.2.25).

Ограничимся далее рассмотрением узкополосных сигналов, спектральные плотности которых симметричны относительно центральной частоты [22, 41]. Тогда, учитывая (1.2.21) + (1.2.25), спектральную плотность узкополосного стохастического сигнала можно представить как

$$G(\omega) = \frac{\gamma}{2} \left[g\left(\frac{\nu - \omega}{\Omega}\right) + g\left(\frac{\nu + \omega}{\Omega}\right) \right]. \quad (1.2.27)$$

Здесь функция $g(\cdot)$ обладает свойствами (1.2.19) и определяет форму спектральной плотности узкополосного сигнала. Отметим, что формально вырожденный вариант узкополосного сигнала при $\nu = 0$ имеет спектральную плотность (1.2.27), совпадающую со спектральной плотностью широкополосного сигнала (1.2.18). Однако ограничения (1.2.23) + (1.2.25), отражающие физические особенности узкополосных процессов, не позволяют рассматривать широкополосный процесс, как частный случай узкополосного.

Таким образом, полное описание узкополосного гауссовского стационарного стохастического сигнала задано, если известны: 1. функция $g(\cdot)$, определяющая форму спектральной плотности; 2. параметр γ (1.2.21), определяющий величину спектральной плотности; 3. эквивалентная полоса Ω (1.2.22), определяющая ширину спектральной плотности; 4. центральная частота ν , определяющая положение спектральной плотности на оси частот.

В дальнейшем будет рассматриваться задача обнаружения узкополосного гауссовского стационарного стохастического сигнала со спектральной плотностью (1.2.27) на фоне гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0 (1.2.14). При этом могут быть неизвестны часть или все из параметров узкополосного сигнала: ν, γ, Ω .

Так же как для широкополосных сигналов, для узкополосных сигналов часто оказывается полезной аппроксимация формы спектральной плотности вида (1.2.20). Узкополосный сигнал со спектральной плотностью прямоугольной формы (1.2.20) также будем называть полосовым.

Введенная классификация гауссовских стационарных стохастических сигналов - широкополосные и узкополосные, не является исчерпывающей. В общем случае возможны формы спектральной плотности, которые не относятся ни к одному из этих двух классов. Однако в практических приложениях такие стохастические сигналы встречаются относительно редко. Поэтому в дальнейшем, как правило, будут рассматриваться алгоритмы обнаружения гауссовских стационарных широкополосных или узкополосных сигналов, содержащих неизвестные параметры, перечисленные выше.

1.2.3. Импульсные гауссовские сигналы. Полагая $\xi(t)$ стационарным гауссовским случайным процессом (1.2.9), определим гауссовский импульсный стохастический сигнал как случайную функцию вида

$$s(t) = \xi(t) I [(t-\lambda)/\tau], \quad (1.2.28)$$

где $I(\cdot)$ - индикатор единичной длительности (1.2.20), τ - длительность сигнала, а λ определяет временное положение импульса.

Используя (1.2.9) и (1.2.28), находим математическое ожидание

$$a_s(t) = \langle s(t) \rangle = a I [(t-\lambda)/\tau] \quad (1.2.29)$$

и корреляционную функцию

$$\begin{aligned} B_s(t_1, t_2) &= \langle [s(t_1) - a_s(t_1)] [s(t_2) - a_s(t_2)] \rangle = \\ &= I [(t_1-\lambda)/\tau] I [(t_2-\lambda)/\tau] B(t_2-t_1) \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

гауссовского стохастического импульса. Согласно (1.2.29) и (1.2.30) импульсный гауссовский сигнал является нестационарным процессом.

К числу неизвестных параметров импульсного гауссовского сигнала (1.2.28), кроме возможно неизвестных параметров процесса $\xi(t)$ (п.1.2.2), могут относиться временное положение λ и длительность τ . В случае, когда временное положение λ импульса (1.2.28) априори известно, а длительность τ неизвестна, целесообразно совместить передний фронт импульса с началом интервала наблюдения (1.2.10). Тогда импульсный гауссовский сигнал (1.2.28) можно переписать как

$$s(t) = \xi(t) I [(t-\tau/2)/\tau]. \quad (1.2.31)$$

Соответственно его математическое ожидание и корреляционная функция примут вид

$$\begin{aligned} a_s(t) &= a I [(t-\tau/2)/\tau], \quad B_s(t_1, t_2) = \\ &= I [(t_1-\tau/2)/\tau] I [(t_2-\tau/2)/\tau] B(t_2-t_1). \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

Импульсный гауссовский сигнал (1.2.28) является определенной идеализацией реальных импульсов со случайной субструктурой [2, 22, 35, 41]. Действительно, модель (1.2.28) предполагает скачкообразное измене-

ние параметров стохастического сигнала в моменты времени $t = \lambda - \tau/2$ и $t = \lambda + \tau/2$. У реальных случайных импульсов параметры изменяются хотя и быстро, но на некотором конечном интервале времени $\Delta\tau$. Тем не менее, при решении задач обнаружения допустимо использование аппроксимации (1.2.28), если $\Delta\tau \ll \tau$ [61] и

$$2\pi/\Omega \ll \tau \quad (1.2.33)$$

где Ω – эквивалентная полюса частот (1.2.17) или (1.2.22) процесса $\xi(t)$.

1.3. Оптимальные алгоритмы обнаружения

1.3.1. Постановка задачи. Пусть на интервале времени $[0, T]$ доступна наблюдению реализация случайного процесса $x(t)$, которая может быть только шумом (помехой) $n(t)$ или комбинацией стохастического сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$. По наблюдаемой реализации $x(t)$ необходимо вынести решение о наличии или отсутствии реализации стохастического сигнала $s(t)$ в наблюдаемых данных. Решение о наличии или отсутствии сигнала выносится в результате обработки реализации наблюдаемых данных в соответствии с некоторым алгоритмом обнаружения. Естественно, желательно синтезировать алгоритм обнаружения, оптимальный в смысле некоторого критерия. Задачу обнаружения сигнала на фоне шума удобно сформулировать в терминах проверки статистических гипотез [22, 24, 27] в силу случайного характера наблюдаемых данных, сигнала и шума. Именно, подлежит проверке гипотеза

$$H_0: x(t) = n(t) \quad (1.3.1)$$

против альтернативы

$$H_1: x(t) = n(t) \oplus s(t) \quad (1.3.2)$$

Символ \oplus означает произвольную комбинацию сигнала и шума. Теперь синтез алгоритма обнаружения сводится к отысканию правила выбора решения по наблюдаемым дан-

ным $x(t)$ в пользу одной из гипотез H_0 или H_1 .

Воспользуемся в начале дискретным представлением наблюдаемого процесса $x(t)$, обозначив $x = \|x(t_1) \dots x(t_n)\|$ - n -мерная выборка в моменты времени $t_k \in T$, где $k = \overline{1, n}$, а T - интервал наблюдения.

Полагаем, что выборка $x \in X$, X - n -мерное выборочное пространство наблюдаемых данных. Любой непарализованный алгоритм обнаружения при фиксированном интервале наблюдения [22, 24, 27 и др.] выносит одно из двух возможных решений - верна гипотеза H_0 (1.3.1) или альтернатива H_1 (1.3.2). Следовательно,

синтез алгоритма обнаружения сводится к разбиению выборочного пространства X на две непересекающиеся подобласти X_0 и X_1 , такие, что

$$X_0 \cup X_1 = X. \quad (1.3.3)$$

Затем, если

$$x \in X_0,$$

то принимается решение в пользу гипотезы H_0 (1.3.1), а если

$$x \in X_1$$

- то решение в пользу альтернативы H_1 (1.3.2). При синтезе оптимального алгоритма обнаружения, разбиение выборочного пространства X на подобласти X_0 и X_1 производится в соответствии с выбранным критерием оптимальности.

1.3.2. Проверка простых гипотез. Пусть имеется полная априорная информация о сигнале и шуме, т.е. задано полное в статистическом смысле описание наблюдаемых данных при обеих гипотезах и известны априорные вероятности P_i каждой из гипотез H_i , $i=0,1$. В этом случае можно использовать критерий минимума среднего риска (байесовский критерий) оптимальности

обнаружения: Оптимальное байесовское правило обнаружения основывается на минимизации среднего риска [7, 22, 27]

$$R = \sum_{i, k=0}^1 P_i \Pi_{ik} \int_{X_k} W(x | H_i) dx. \quad (1.3.4)$$

Здесь Π_{ik} – матрица потерь, а $W(x|H_i)$ – условная плотность вероятности (функция правдоподобия) выборки наблюдаемых данных в предположении, что верна гипотеза H_i .

Положим, как это обычно делается, что потери неотрицательны

$$\Pi_{ik} \geq 0 \quad (1.3.5)$$

и что неправильным решениям соответствуют потери большие, чем правильным

$$\Pi_{00} < \Pi_{01}, \quad \Pi_{11} < \Pi_{10}. \quad (1.3.6)$$

Учитывая, что в силу условия нормировки (1.1.19)

$$\int_X W(x | H_i) dx = 1$$

и, используя (1.3.3), можем записать

$$\int_{X_1} W(x | H_1) dx = 1 - \int_{X_0} W(x | H_1) dx, \quad (1.3.7)$$

$i = 0, 1$. Подставляя (1.3.7) в (1.3.4), перепишем средний риск в виде

$$R = P_0 \Pi_{01} + P_1 \Pi_{11} + \int_{X_0} [P_1 (\Pi_{10} - \Pi_{11}) W(x | H_1) - P_0 (\Pi_{01} - \Pi_{00}) W(x | H_0)] dx. \quad (1.3.8)$$

Отметим, что в силу (1.3.5) и (1.3.6) первые два слагаемые в правой части (1.3.8) и множители при условных плотностях вероятности под знаком интеграла неотрицательны. Обозначим X_0^* – подобласть выборочно-

го пространства X , для которой

$$P_1(\pi_{10} - \pi_{11})W(x|H_1) - P_0(\pi_{01} - \pi_{00})W(x|H_0) < 0, \quad (1.3.9)$$

а X_1^* - подобласть выборочного пространства X , для которой

$$P_1(\pi_{10} - \pi_{11})W(x|H_1) - P_0(\pi_{01} - \pi_{00})W(x|H_0) > 0. \quad (1.3.10)$$

Таким образом, к X_0^* отнесены все точки $x \in X$, для которых подынтегральное выражение в (1.3.8) отрицательно. В результате, разбиение выборочного пространства на подобласти X_0^* и X_1^* согласно (1.3.9) и (1.3.10) обеспечивает минимум среднего риска (1.3.4). Байесовский алгоритм обнаружения можно переписать в более удобной для дальнейшего использования форме, вводя в рассмотрение отношение правдоподобия [7, 22, 27, 37]

$$l[x] = W(x|H_1) / W(x|H_0). \quad (1.3.11)$$

Тогда решение о наличии сигнала будет приниматься, если

$$l[x] > c^*, \quad (1.3.12)$$

где

$$c^* = P_0(\pi_{01} - \pi_{00}) / P_1(\pi_{10} - \pi_{11}).$$

Очевидно, найти структуру байесовского обнаружителя (1.3.12) посредством минимизации (1.3.4) можно лишь при наличии довольно большого числа априорных сведений. Должны быть заданы матрица потерь, априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала, статистические модели сигнала и шума и способ их комбинации, определяющие функцию или отношение правдоподобия. Поэтому в задачах обнаружения находят применение критерии оптимальности, отличные от байесовского.

Так, при неизвестных априорных вероятностях наличия и отсутствия сигнала может быть использован мини-

максный критерий. Минимаксный алгоритм обнаружения представляет собой частный случай байесовского алгоритма для наименее предпочтительных значений априорных вероятностей P_0^* и P_1^* , при которых байесовский (минимальный) средний риск $R(P_0^*, P_1^*) \geq R(P_0, P_1)$ при любых $P_0 + P_1 = 1$. Отметим, что минимаксный подход может быть использован и при других формах априорной неопределенности [7, 27, 37 и др.]. Когда известны априорные вероятности P_0 и P_1 , но неизвестна матрица потерь, может быть использован критерий максимума апостериорной вероятности. В соответствии с этим критерием решение выносится в пользу гипотезы которая обладает максимальной апостериорной вероятностью $P\{H_i | x\} = P_i W(x | H_i) \cdot [P_0 W(x | H_0) + P_1 W(x | H_1)]^{-1}$, $i = 0, 1$.

Кроме перечисленных критериев обнаружения широкое применение находит критерий Неймана-Пирсона [24, 37]. Для этого критерия фиксируется вероятность ложной тревоги

$$\alpha = \int_{x_1} W(x | H_0) dx \quad (1.3.13)$$

и минимизируется вероятность пропуска сигнала

$$\beta = \int_{x_0} W(x | H_1) dx \quad (1.3.14)$$

Критерий Неймана-Пирсона не требует знания априорных вероятностей наличия и отсутствия сигнала, а так же матрицы потерь.

Все алгоритмы обнаружения, оптимальные в смысле перечисленных критериев, сводятся к вычислению отношения правдоподобия (1.3.11) по выборке наблюдаемых данных и последующему сравнению его с порогом, аналогично (1.3.12). Для критерия максимума апостериор-

ной вероятности порог равен отношению априорных вероятностей P_0/P_1 , а для критерия Неймана-Пирсона порог c_α выбирается из условия обеспечения требуемого значения вероятности ложной тревоги (1.3.13).

Таким образом, синтез обнаружителя, оптимального в смысле любого из упомянутых критериев, требует, как минимум, наличия априорных данных; позволяющих построить функции правдоподобия $W(x|H_1)$ и $W(x|H_0)$ или отношение правдоподобия (1.3.11). Более подробный обзор приведенных здесь и других критериев оптимальности обнаружения можно найти в [7, 22, 24, 37 и др.].

Ранее предполагалось, что обрабатывается дискретная выборка x из реализации аналогового случайного процесса $x(t)$. Это, как уже отмечалось (п.1.1.3), позволяет лишь приближенно представить случайный процесс. Если же для обнаружения используется реализация $x(t)$ (а не дискретная выборка x), то с порогом сравнивается функционал отношения правдоподобия (ФОР) [1, 7, 22, 37]

$$I = I[x(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} I[x] \cdot \max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$$

Часто оказывается более удобным использовать логарифм ФОР

$$L = \ln I[x(t)], \quad (1.3.15)$$

сравнивая его с порогом $c = \ln C$, где C определяется выбранным критерием оптимальности.

1.3.3. Проверка сложных гипотез. Задача обнаружения стохастического сигнала, все статистические характеристики которого априори известны, встречается весьма редко. Реальные условия приема сигнала на фоне шума, как правило, приводят к необходимости решения задачи обнаружения в условиях априорной неопределенности. Априорная неопределенность относительно сигнала и шума может иметь различную форму.

Соответственно, весьма разнообразными оказываются методы преодоления априорной неопределенности [7, 22, 34, 37 и др.].

Рассмотрим случай параметрической априорной неопределенности относительно обнаруживаемого стохастического сигнала. Положим, что полное статистическое описание сигнала известно с точностью до неизвестных параметров $\theta = \|\theta_1, \dots, \theta_m\|$, постоянных в течение интервала наблюдения $[0; T]$ и распределенных с плотностью вероятности $W(\theta|H_1)$ в области $\theta \in \Theta$. При известной априорной плотности вероятности $W(\theta|H_1)$ неизвестных параметров стохастического сигнала, используем классический байесовский подход. Тогда не трудно найти алгоритм обнаружения, оптимальный в смысле какого-либо из рассмотренных в п.1.3.2 критериев. Действительно, записав средний риск при неизвестных случайных параметрах стохастического сигнала, опять приходим к формуле (1.3.4), куда надо подставить функцию правдоподобия

$$W(x|H_1) = \int_{\Theta} W(x|\theta, H_1) W(\theta|H_1) d\theta. \quad (1.3.16)$$

Здесь $W(x|\theta, H_1)$ - условная плотность вероятности выборки в предположении, что сигнал присутствует и его неизвестные параметры приняли значение θ . Таким образом, усреднение в (1.3.16) исключает случайные параметры и делает гипотезу H_1 простой. Повторяя далее выкладки п.1.3.2, получаем, что оптимальный обнаружитель стохастического сигнала должен вместо (1.3.15) вырабатывать логарифм усредненного ФОП

$$L = \ln \int_{\Theta} \exp [L(\theta)] W(\theta|H_1) d\theta \quad (1.3.17)$$

и сравнивать его с порогом c . Здесь

$$L(\theta) = \ln l(\theta) \quad (1.3.18)$$

- логарифм, а

$$I(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W(x|\theta, H_1)}{W(x|H_0)} \quad (1.3.19)$$

$$\max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$$

- ФОР стохастического сигнала с неизвестными параметрами θ .

Перейдем к случаю, когда имеет место параметрическая априорная неопределенность не только относительно обнаруживаемого стохастического сигнала, но и относительно помехи. Пусть подлежит проверке сложная гипотеза

$$H_{01}: x(t) = n(t) \oplus n_1(t) \quad (1.3.20)$$

против сложной альтернативы

$$H_{11}: x(t) = n(t) \oplus n_1(t) \oplus s(t). \quad (1.3.21)$$

Здесь $n(t)$, как и в (1.3.1), (1.3.2) - шум, полное статистическое описание которого априори известно; $n_1(t)$ - помеха, статистическое описание которой известно с точностью до m_1 параметров $v = \|v_1, \dots, v_{m_1}\|$, $s(t)$ - стохастический сигнал, полное статистическое описание которого известно с точностью до параметров $\theta \in \Theta$. Положим, что неизвестные параметры помехи v распределены с априорной плотностью вероятности $W(v|H_{11})$ в области $v \in V$, когда верна гипотеза H_{11} ($i = 0, 1$). Будем считать, что неизвестные параметры помехи и стохастического сигнала статистически независимы, причем последние распределены с априорной плотностью вероятности $W(\theta|H_{11})$ в области $\theta \in \Theta$.

При известных априорных плотностях вероятности параметров сигнала и помехи опять используем классический байесовский подход. Тогда нетрудно найти алгоритм обнаружения, оптимальный в смысле какого-либо из критериев, рассмотренных в п.1.3.2. Действительно, записав средний риск при проверке гипотез (1.3.20) и (1.3.21), опять приходим к выражению (1.3.4), куда

следует подставить функции правдоподобия

$$W(x|H_{11}) = \int_{\Theta} \int_V W(x|\theta, v, H_{11}) W(\theta|H_{11}) W(v|H_{11}) d\theta dv, \quad (1.3.22)$$

$$W(x|H_{01}) = \int_V W(x|v, H_{01}) W(v|H_{01}) dv. \quad (1.3.23)$$

Здесь $W(x|\theta, v, H_{11})$ - условная плотность вероятности выборки в предположении, что верна гипотеза (1.3.21), а неизвестные параметры сигнала и помехи имеют значения θ и v соответственно; $W(x|v, H_{01})$ - условная плотность вероятности выборки в предположении, что верна гипотеза (1.3.20), а неизвестные параметры помехи приняли значение v . Очевидно усреднение в (1.3.22), (1.3.23) исключает неизвестные параметры сигнала и помехи и делает проверяемые гипотезы простыми. Повторяя далее выкладки п.1.3.2, получаем, что оптимальный обнаружитель при неизвестных параметрах сигнала и помехи должен вместо (1.3.11) вырабатывать отношение правдоподобия вида

$$I[x] = \frac{\int_{\Theta} \int_V W(x|\theta, v, H_{11}) W(\theta|H_{11}) W(v|H_{11}) d\theta dv}{\int_V W(x|v, H_{01}) W(v|H_{01}) dv}. \quad (1.3.24)$$

Чтобы представить (1.3.24) в более удобной форме обозначим

$$I_1[x] = W(x|\theta, v, H_{11})/W(x|H_0),$$

$$I_0[x] = W(x|v, H_{01})/W(x|H_0).$$

Здесь $W(x|H_0)$ - условная плотность вероятности выборки наблюдаемых данных в предположении, что верна гипотеза H_0 (1.3.1). Теперь (1.3.24) переписется как

$$l[x] = \frac{\int_{\Theta} \int_V l_1[x] W(\theta|H_{11}) W(v|H_{11}) d\theta dv}{\int_V l_0[x] W(v|H_{01}) dv} \quad (1.3.25)$$

Переходя в (1.3.25) к пределу при $n \rightarrow \infty$, $\max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$, получаем, что для обнаружения по непрерывной реализации $x(t)$, оптимальный обнаружитель должен вырабатывать усредненный логарифм ФОП вида

$$L_{10} = L_1 - L_0, \quad (1.3.26)$$

где

$$L_1 = \ln \int_{\Theta} \int_V \exp[L_1(\theta, v)] W(\theta|H_{11}) W(v|H_{11}) d\theta dv,$$

$$L_0 = \ln \int_V \exp[L_0(v)] W(v|H_{01}) dv,$$

$$L_1(\theta, v) = \ln l_1(\theta, v), \quad L_0(v) = \ln l_0(v),$$

$$l_1(\theta, v) = \lim l_1[x], \quad l_0[v] = \lim l_0[x] \quad (1.3.27)$$

при $n \rightarrow \infty$ и $\max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$. Решение о наличии сигнала принимается, если усредненный логарифм ФОП (1.3.26) превышает порог c , определяемый выбранным критерием оптимальности.

Классический байесовский подход, примененный здесь для преодоления параметрической априорной неопределенности относительно стохастического сигнала и помехи, обладает известными недостатками. Во-первых, далеко не всегда может быть обоснована концепция случайности неизвестных параметров, следовательно, не всегда существуют или могут быть обоснованно предложены априорные распределения неизвестных параметров; во-вторых, даже если концепция случайности неизвестных параметров обоснована, их априорные распределения чаще всего неизвестны; в третьих, даже при известных априорных распределениях неиз-

вестных параметров байесовский подход не всегда может быть применен, так как возникают трудности в выполнении интегрирования по неизвестным параметрам (как аналитически, так и аппаратурно); в четвертых, существенные трудности вызывает анализ байесовских обнаружителей, т.е. определение их рабочих характеристик. Отметим, что в качестве рабочих характеристик алгоритма обнаружения (в зависимости от выбора критерия оптимальности) могут использоваться зависимости среднего риска (1.3.4) или вероятностей ложной тревоги (1.3.13) и пропуска сигнала (1.3.14) от исходных параметров сигнала и шума. Чаще всего качество обнаружения характеризуют вероятностями ошибочных решений (1.3.13) и (1.3.14). Действительно, средний риск всегда можно выразить через эти вероятности [7, 27 и др.]. Кроме того, для их расчета нет необходимости в знании априорных вероятностей наличия и отсутствия сигнала и в задании матрицы потерь, что необходимо для расчета среднего риска (1.3.4).

1.4. Обнаружение по методу максимального правдоподобия

1.4.1. Метод максимального правдоподобия. В ряде задач преодоление параметрической априорной неопределенности на основе классического байесовского подхода нецелесообразно или не возможно. Тогда используют другие подходы, среди которых заметное место занимает адаптивный подход [23, 34, 45, 61 и др.]. Рассмотрим его суть на примере обнаружения стохастического сигнала с неизвестными параметрами. Если априорное распределение неизвестных параметров стохастического сигнала известно, то оптимальный обнаружитель должен вырабатывать логарифм усредненного ФОР (1.3.17). Рассмотрим изменение структуры обнаружителя (1.3.17); если априори точно известно истинное значение параметров θ_0 . В этом случае априорная

плотность вероятности параметров стохастического сигнала вырождается в дельта-функцию и принимает вид

$$W(\theta|H_1) = \delta(\theta - \theta_0). \quad (1.4.1)$$

Подставляя (1.4.1) в (1.3.17) и выполняя интегрирование, получаем структуру оптимального обнаружителя стохастического сигнала с априори известными параметрами. Этот обнаружитель должен вырабатывать величину

$$L_{\theta_0} = L(\theta_0), \quad (1.4.2)$$

где $L(\theta)$ - логарифм ФОП (1.3.18).

Решение о наличии или отсутствии стохастического сигнала принимается в результате сравнения (1.4.2) с порогом c , определяемым выбранным критерием оптимальности.

Адаптивный подход к обнаружению сигнала с неизвестными параметрами заключается в том, что при незнании истинного значения параметров сигнала θ_0 , для приближенного определения (1.4.2), в (1.3.18) подставляют вместо θ_0 некоторую оценку неизвестных параметров. Таким образом, адаптация заключается в замене неизвестного истинного значения параметров θ_0 в (1.4.2) на результат их измерения (оценку). Итак, если $\tilde{\theta} \in \Theta$ - некоторая оценка θ_0 , то адаптивный обнаружитель вырабатывает величину

$$L_{\tilde{\theta}} = L(\tilde{\theta}) \quad (1.4.3)$$

и сравнивает ее с порогом c . Оценка $\tilde{\theta}$ может определяться в результате некоторых предварительных наблюдений смеси сигнала и помехи, а может определяться по той же реализации $x(t)$, по которой производится обнаружение. Ограничимся рассмотрением последнего случая.

Существует ряд методов оценивания параметров стохастического сигнала [7, 16, 19, 22, 23, 27, 34, 45, 61 и др.]. Среди них одним из наиболее распространенных и широко используемых является метод максимального

правдоподобия. Свойствам получаемых этим методом оценок максимального правдоподобия (ОМП) посвящена обширная литература, начиная с ранних работ по классической математической статистике. Согласно определению, ОМП неизвестных параметров стохастического сигнала определяется соотношением

$$\hat{\theta} = \arg \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta) . \quad (1.4.4)$$

Отсюда следует, что для получения ОМП достаточно знать логарифм ФОП (1.3.18) и область возможных значений неизвестных параметров Θ . Оценки максимального правдоподобия можно, в отличие от байесовских оценок [7, 27, 34] использовать, когда параметры хотя и неизвестны, но и не случайны. Перечислим кратко некоторые полезные свойства ОМП: она совпадает с эффективной (имеющей наименьшее рассеяние) оценкой, если последняя существует; с ростом апостериорной точности ОМП сходится к истинному значению оцениваемого параметра и часто является асимптотически эффективной и асимптотически гауссовской; ОМП является асимптотически байесовской для широкого класса функций потерь и априорных распределений; ОМП инвариантна к взаимно однозначному безинерционному преобразованию логарифма ФОП (1.3.18), что в ряде задач существенно облегчает техническую реализацию оценки; аналитическое определение качества ОМП связано, как правило, с меньшими математическими трудностями, чем при использовании других методов оценки. Перечисленные здесь и более частные достоинства метода максимального правдоподобия обусловили его широкое применение в задачах обнаружения и оценки. Учитывая высокие достоинства ОМП, а также универсальность и относительную простоту метода максимального правдоподобия, благодаря которым могут быть разработаны довольно простые процедуры получения ОМП $\hat{\theta}$ (1.4.4), ограничимся использованием ОМП при синтезе адаптивного обнаружителя стохастического сигнала с неизвестными параметрами.

Итак, алгоритм максимального правдоподобия (АМП)

обнаружения стохастического сигнала с неизвестными параметрами получаем, заменяя в (1.4.3) оценку $\bar{\theta}$ на ОМП $\hat{\theta}$. Учитывая (1.4.4), находим, что АМП формирует величину

$$\hat{L} = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta) \quad (1.4.5)$$

и принимает решение, сравнивая (1.4.5) с порогом c .

В некоторых случаях реализация процедуры отыскания максимума логарифма ФОП в (1.4.5) наталкивается на аналитические или аппаратные трудности. Кроме того, возможны ситуации, когда отсутствует достоверная информация о размерах области возможных значений неизвестных параметров Θ . В этих и некоторых других случаях может оказаться полезным вырожденный вариант адаптивного обнаружителя - квазиправдоподобный обнаружитель (КПО). Этот обнаружитель формирует логарифм ФОП (1.3.18) в некоторой фиксированной точке $\theta^* \in \Theta$

$$L^* = L(\theta^*) \quad (1.4.6)$$

и принимает решение, сравнивая L^* с порогом c . Этот алгоритм обнаружения переходит в АМП, если положить $\theta^* = \hat{\theta}$ (1.4.4).

Очевидным образом (1.4.5) и (1.4.6) обобщаются на случай обнаружения при неизвестных параметрах стохастического сигнала и помехи. Для этого подставим в (1.3.27) ОМП неизвестных параметров

$$(\hat{\theta}, \hat{v}) = \arg \sup_{\theta \in \Theta, v \in V} L_1(\theta, v) \quad (1.4.7)$$

- при гипотезе H_{11} (1.3.21) и

$$\hat{v}_0 = \arg \sup_{v \in V} L_0(v) \quad (1.4.8)$$

- при гипотезе H_{01} (1.3.20). Подставляя затем результат в (1.3.26) вместо L_1 и L_0 , находим, что АМП

обнаружения при неизвестных параметрах стохастического сигнала и помехи должен вырабатывать величину

$$\hat{L}_{10} = \sup_{\theta \in \Theta, v \in V} L_1(\theta, v) - \sup_{v \in V} L_0(v) \quad (1.4.9)$$

и сравнивать ее с порогом c . Аналогичным образом получаем, что КПО в этом случае вырабатывает величину

$$L_{10}^* = L_1(\theta^*, v^*) - L_0(v^*),$$

где θ^* , v^* - некоторые фиксированные значения неизвестных параметров сигнала и помехи.

Синтезированные АМП обнаружения стохастического сигнала с неизвестными параметрами (1.4.5) и (1.4.9) строго говоря не являются оптимальными в смысле какого-либо общепризнанного критерия. Тем не менее, эти АМП обладают рядом полезных свойств. Именно: (1.4.5) и (1.4.9) являются функциями достаточных статистик, если они существуют [24]; формируемые АМП сигналы являются также минимально достаточными статистиками [34]; АМП обладает хорошими асимптотическими свойствами - по мере увеличения апостериорной точности ОМП (1.4.4), (1.4.7), (1.4.8), АМП сходится к байесовскому обнаружителю для широкого класса стохастических сигналов и их параметров. Структура АМП относительно проста с точки зрения технической реализации. Кроме того, анализ АМП, т.е. определение качества функционирования обнаружителя, связан с меньшими математическими трудностями, чем анализ оптимальных обнаружителей. Естественно, для решения вопроса о целесообразности применения АМП необходимо определить его характеристики. Окончательный выбор между АМП, оптимальным обнаружителем и КПО очевидно зависит от имеющейся априорной информации, а также от требований, предъявляемых к качеству функционирования и к степени простоты его технической реализации.

1.4.2. Функционал отношения правдоподобия. Для реализации АМП обнаружения стохастического сигнала с

неизвестными параметрами необходимо формировать ФОН (1.3.19) или его логарифм (1.3.18). Рассмотрим ФОН при проверке гипотезы

$$H_0: x(t) = n(t), \quad t \in [0; T] \quad (1.4.10)$$

против альтернативы

$$H_1: x(t) = n(t) + s(t), \quad t \in [0; T], \quad (1.4.11)$$

где $s(t)$ - стохастический гауссовский сигнал. Полагаем, что математическое ожидание и корреляционная функция сигнала $s(t)$ в общем случае известны с точностью до параметров $\theta \in \Theta$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle s(t) \rangle &= a_s(t, \theta), \quad \langle [s(t_1) - a_s(t_1)] [s(t_2) - \\ &- a_s(t_2)] \rangle = B_s(t_1, t_2, \theta). \end{aligned}$$

Помеху $n(t)$ в (1.4.10), (1.4.11) будем считать гауссовским белым шумом с односторонней спектральной плотностью N_0 (1.2.14).

Задача проверки гипотезы H_0 (1.4.10) против альтернативы (1.4.11) для гауссовского стохастического сигнала с известными параметрами рассматривалась в [8, 11, 22, 27 и др.]. При этом были получены различные формулы для логарифма ФОН. Следуя [8], логарифм ФОН для гауссовского сигнала запишем в виде

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_0^T x(t_1) x(t_2) Q(t_1, t_2, \theta) dt_1 dt_2 + \\ &+ \int_0^T x(t) V(t, \theta) dt - \frac{1}{2} \int_0^T a_s(t, \theta) V(t, \theta) dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^T d\chi \int_0^T \tilde{Q}(t, t, \theta, \chi) dt. \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Здесь $Q(t_1, t_2, \theta) = \tilde{Q}(t_1, t_2, \theta, 1)$, а функция

$\bar{Q}(t_1, t_2, \theta, \chi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{2} \bar{Q}(t_1, t_2, \theta, \chi) + \chi \int_0^T \bar{Q}(t_1, t, \theta, \chi) B_s(t, t_2, \theta) dt = \\ = B_s(t_1, t_2, \theta), \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

$$V(t, \theta) = 2[a_s(t, \theta) - \int_0^T a_s(t_1, \theta) Q(t, t_1, \theta) dt_1] / N_0. \quad (1.4.14)$$

Различные способы решения интегрального уравнения (1.4.13), а так же возможности реализации устройства для формирования логарифма ФОП в виде (1.4.12) достаточно подробно обсуждаются в [8, 11, 66, 71].

С точки зрения исследования свойств логарифма ФОП аналитическими методами в ряде задач более предпочтительной, чем (1.4.12), оказывается запись его в форме

$$\begin{aligned} L(\theta) = \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_0^T [x(t_1) - a_s(t_1, \theta)] [x(t_2) - a_s(t_2, \theta)] \times \\ \times Q(t_1, t_2, \theta) dt_1 dt_2 + \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) a_s(t, \theta) dt - \\ - \frac{1}{N_0} \int_0^T a_s^2(t, \theta) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 d\chi \int_0^T \bar{Q}(t, t, \theta, \chi) dt. \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Эта форма записи логарифма ФОП не требует введения вспомогательной функции (1.4.14).

Обе формы представления логарифма ФОП (1.4.12) и (1.4.15) совпадают, если

$$a_s(t, \theta) = 0.$$

Тогда логарифм ФОП переписывается как

$$L(\theta) = \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_0^T x(t_1) x(t_2) Q(t_1, t_2, \theta) dt_1 dt_2 -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^T \bar{Q}(t, t, \theta, x) dt. \quad (1.4.16)$$

Очевидно с помощью (1.4.12), (1.4.15), (1.4.16) можно достаточно просто найти логарифмы ФОР (1.3.27), формирование которых, согласно (1.4.9), необходимо для реализации АП обнаружения при неизвестных параметрах гауссовского стохастического сигнала и гауссовской помехи.

ГЛАВА 2.

СТАЦИОНАРНЫЕ СИГНАЛЫ С НЕИЗВЕСТНОЙ
ПОЛОСОЙ ЧАСТОТ

2.1. Синтез алгоритмов обнаружения

2.1.1. **Неизвестные параметры спектральной плотности.** Найдем структуру АМП обнаружения стационарного гауссовского стохастического сигнала, корреляционная функция (или спектральная плотность) которого известна с точностью до параметров $\theta \in \Theta$. Так как стохастический сигнал предполагается стационарным, его математическое ожидание постоянно (1.2.9) и не может зависеть от неизвестных параметров. Поэтому, не снижая общности, можно положить $\langle s(t) \rangle = a = 0$, так что логарифм ФОП определяется из (1.4.16). При этом, в силу (1.2.9), интегральное уравнение (1.4.13) перепишется как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{N_0}{\sigma^2} \tilde{Q}(t_1, t_2, \theta, \chi) + \chi \int_0^T \tilde{Q}(t_1, t, \theta, \chi) B_s(t_2 - t, \theta) dt = \\ = B_s(t_2 - t_1, \theta). \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Интервал наблюдения (1.2.10) полагаем достаточно большим так, что

$$2\pi/\Omega \ll T, \quad (2.1.2)$$

где Ω - минимальное возможное значение эквивалентной полосы частот (1.2.17), (1.2.22) обнаруживаемого стохастического сигнала. Тогда, как это следует из [7, 8, 11 и др.],

$$\tilde{Q}(t_1, t_2, \theta, \chi) \approx \tilde{Q}(t_2 - t_1, \theta, \chi). \quad (2.1.3)$$

Подставляя (2.1.3) в (2.1.1) и заменяя в силу (2.1.2) пределы интегрирования на бесконечные, получаем интегральное уравнение типа свертки [12]

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{2} \bar{Q}(t_2 - t_1, \theta, \chi) + \chi \int_{-\infty}^{\infty} \bar{Q}(t - t_1, \theta, \chi) B_s(t_2 - t, \theta) dt = \\ = B_s(t_2 - t_1, \theta). \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Для того, чтобы решить это уравнение, выразим входящие в него функции через их преобразования Фурье

$$\bar{Q}(t_2 - t_1, \theta, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [j\omega(t_2 - t_1)] \bar{Q}_1(\omega, \theta, \chi) d\omega, \quad (2.1.5)$$

$$B_s(t_2 - t_1, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [j\omega(t_2 - t_1)] G(\omega, \theta) d\omega. \quad (2.1.6)$$

Здесь

$$\bar{Q}_1(\omega, \theta, \chi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-j\omega\Delta] \bar{Q}(\Delta, \theta, \chi) d\Delta,$$

а $G(\omega, \theta)$ - спектральная плотность сигнала (1.2.12). Подставляя (2.1.5) и (2.1.6) в (2.1.4), имеем

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [j\omega(t_2 - t_1)] \bar{Q}_1(\omega, \theta, \chi) d\omega + \\ + \frac{\chi}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp [j(\omega_2 t_2 - \omega_1 t_1) + j(\omega_1 - \omega_2)t] \times \\ \times \bar{Q}_1(\omega_1, \theta, \chi) G(\omega_2, \theta) dt d\omega_1 d\omega_2 = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [j\omega(t_2 - t_1)] G(\omega, \theta) d\omega. \end{aligned}$$

В соответствии с одним из определений дельта-функции [13], можем записать

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [j(\omega_1 - \omega_2)t] dt = \delta(\omega_1 - \omega_2).$$

В результате, используя фильтрующее свойство дельта-функции, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [j\omega(t_2 - t_1)] \left\{ \left[\frac{N_0}{2} + \chi G(\omega, \theta) \right] \bar{Q}(\omega, \theta, \chi) - G(\omega, \theta) \right\} d\omega = 0.$$

Последнее равенство выполняется при всех $t_1, t_2 \in [0; T]$, только если

$$\bar{Q}(\omega, \theta, \chi) = G(\omega, \theta) / \left[\frac{N_0}{2} + \chi G(\omega, \theta) \right]. \quad (2.1.7)$$

Подставляя (2.1.7) в (2.1.5), находим решение интегрального уравнения (2.1.4)

$$\bar{Q}(t_2 - t_1, \theta, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[j\omega(t_2 - t_1)] G(\omega, \theta)}{N_0/2 + \chi G(\omega, \theta)} d\omega. \quad (2.1.8)$$

Соответственно выражение для логарифма ФОР (1.4.16) принимает вид

$$L(\theta) = \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_0^T x(t_1) x(t_2) \bar{Q}(t_2 - t_1, \theta) dt_1 dt_2 - \frac{T}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{2 G(\omega, \theta)}{N_0} \right] d\omega, \quad (2.1.9)$$

где

$$Q(t_2 - t_1, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[j\omega(t_2 - t_1)] G(\omega, \theta)}{N_0/2 + G(\omega, \theta)} d\omega. \quad (2.1.10)$$

Согласно АМП, обнаружитель должен вырабатывать логарифм ФОР (2.1.9) для всех возможных значений $\theta \in \Theta$,

определять величину его абсолютного (наибольшего) максимума (1.4.5) и сравнивать ее с порогом.

Формировать логарифм ФОР (2.1.9) можно различными способами [8,11]. Рассмотрим наиболее простой из них. Для этого обозначим

$$Q(\omega, \theta) = \frac{2 G(\omega, \theta)/N_0}{1 + 2 G(\omega, \theta)/N_0} \quad (2.1.11)$$

- спектр функции (2.1.10) и

$$\tilde{x}(t) = I[(t - T/2)/T] x(t), \quad (2.1.12)$$

где $I(\cdot)$ - индикатор единичной длительности (1.2.20). Подставим (2.1.10) + (2.1.12) в первое слагаемое в правой части (2.1.9) и преобразуем его

$$\begin{aligned} L_x(\theta) &= \frac{1}{N_0} \int_0^T \int_0^T x(t_1) x(t_2) Q(t_2 - t_1, \theta) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t_1) \tilde{x}(t_2) Q(t_2 - t_1, \theta) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi N_0} \iiint \exp[j\omega(t_2 - t_1)] \tilde{x}(t_1) \tilde{x}(t_2) \times \\ &\times Q(\omega, \theta) dt_1 dt_2 d\omega = \frac{1}{2\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(\omega)|^2 Q(\omega, \theta) d\omega. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) \tilde{x}(t) dt = \\ &= \int_0^T \exp(-j\omega t) x(t) dt = x(\omega) \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

- спектр усеченной на интервале наблюдения (1.2.10) реализации наблюдаемых данных $x(t)$. Обозначим далее

$$\tilde{y}(\omega, \theta) = \tilde{x}(\omega) H(\omega, \theta), \quad (2.1.15)$$

где функция $H(\omega, \theta)$ удовлетворяет условию

$$|H(\omega, \theta)|^2 = Q(\omega, \theta). \quad (2.1.16)$$

Подставляя (2.1.15) в (2.1.13) и используя свойства преобразования Фурье, получаем

$$\begin{aligned} L_x(\theta) &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{y}(\omega, \theta)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2(t, \theta) dt, \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t) \tilde{y}(\omega, \theta) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t) \tilde{x}(\omega) H(\omega, \theta) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t') H(t - t', \theta) dt' = * \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} I[(t' - T/2)/T] x(t') H(t - t', \theta) dt', \quad (2.1.18)$$

$$H(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t) H(\omega, \theta) d\omega. \quad (2.1.19)$$

Положим для определенности, что обнаруживаемый сигнал является широкополосным и, аналогично (1.2.17), обозначим

$$\Omega_H = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega, \theta)|^2 d\omega [\sup_{\omega} |H(\omega, \theta)|^2]^{-1} \quad (2.1.20)$$

- эквивалентная полоса частот функции (2.1.19). Если стохастический сигнал будет узкополосным, то эквивалентную полосу частот для $H(t, \theta)$ следует определять аналогично (1.2.22). Согласно (2.1.11) и (2.1.16) всегда

$$\Omega \leq \Omega_H. \quad (2.1.21)$$

Действительно, подставляя (1.2.18) в (2.1.11), а

(2.1.11), как это следует из (2.1.16), в (2.1.20) и учитывая (1.2.19), получаем

$$\Omega_H = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} \{g(x)(1+q)/[1+qg(x)]\} dx,$$

где

$$q = 2\gamma/N_0. \quad (2.1.22)$$

Из (1.2.19) следует, что всегда

$$g(x) \leq 1.$$

Значит

$$g^2(x) \leq g(x) \leq g(x)(1+q)/[1+qg(x)].$$

Интегрируя правую и левую части этого неравенства и учитывая свойства функции $g(x)$ (1.2.19), находим, что

$$1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \{g(x)(1+q)/[1+qg(x)]\} dx,$$

что доказывает справедливость (2.1.21). Для узкополосного стохастического сигнала (1.2.27) доказательство неравенства (2.1.21) аналогично. По порядку величины, длительность функции (2.1.19) обратно пропорциональна ее эквивалентной полосе частот. Из (2.1.21) следует, что при выполнении (2.1.2) длительность функции (2.1.19) много меньше величины интервала наблюдения T . На этом основании в (2.1.18) можно вынести индикатор из под интеграла

$$\tilde{y}(t, \theta) = I [(t-T/2)/T] y(t, \theta), \quad (2.1.23)$$

$$y(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') H(t-t', \theta) dt'. \quad (2.1.24)$$

Последнюю функцию можно интерпретировать как сигнал на выходе линейного фильтра с импульсной переходной функцией (2.1.19), на вход которого подается реализация наблюдаемых данных $x(t)$. Отметим, что соотношение (2.1.16) не определяет однозначно функцию $H(\omega, \theta)$, а следовательно и $H(t, \theta)$. В

частности, всегда можно подобрать функцию $H(\omega, \theta)$ (2.1.16) такую, что фильтр с импульсной переходной функцией (2.1.19) будет физически реализуем [8, 11]. Длительность переходных процессов в фильтре с импульсной переходной функцией (2.1.19) имеет порядок величины $2\pi/\Omega_H$ [22, 41], где Ω_H (2.1.20) удовлетворяет (2.1.21). Следовательно, правая и левая части приближенного равенства (2.1.23) могут существенно отличаться лишь на интервалах времени порядка $2\pi/\Omega_H$ в окрестности точек $t = 0$ и $t = T$. Учитывая, что в силу (2.1.2) и (2.1.21) величина $2\pi/\Omega_H \ll T$ и (2.1.23) входит в логарифм ФОР под знаком интеграла, этим отличием будем в дальнейшем пренебрегать. Итак, если пренебречь переходными процессами в фильтре (2.1.19), что всегда возможно при выполнении (2.1.2), то выражение для логарифма ФОР переписывается как

$$L(\theta) = L_x(\theta) - L_c(\theta), \quad (2.1.25)$$

где

$$L_x(\theta) = \frac{1}{N_0} \int_0^T y^2(t, \theta) dt, \quad (2.1.26)$$

$$L_c(\theta) = \frac{T}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln [1 + 2G(\omega, \theta)/N_0] d\omega. \quad (2.1.27)$$

Соотношения (1.4.5) и (2.1.25) + (2.1.27) определяют структуру максимально правдоподобного обнаружителя (МПО), реализующего АМП обнаружения стационарного гауссовского стохастического сигнала с неизвестными параметрами на фоне гауссовского белого шума.

Функциональная n -канальная схема МПО стохастического сигнала с одним неизвестным параметром $\theta \in [\theta_{\min}; \theta_{\max}]$ приведена на рис. 2.1. Каждый канал МПО состоит из последовательно включенных фильтра с передаточной функцией $H(\omega, \theta_k)$, квадратора, интегратора и сумматора. На рис. 2.1 обозначено: $L_{ck} = L_c(\theta_k)$,

$$\vartheta_{k+1} - \vartheta_k = \Delta\vartheta, \quad \Delta\vartheta = (\Theta_{\max} - \Theta_{\min}) / (n-1), \quad \vartheta_1 = \Theta_{\min},$$

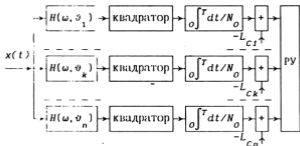


Рис. 2.1. Максимально правдоподобный обнаружитель : РУ-решающее устройство.

$\vartheta_n = \Theta_{\max}$. РУ - решающее устройство, n - число каналов. Решающее устройство на рис. 2.1, согласно (1.4.5), выбирает наибольший из n входных сигналов и сравнивает его с порогом c , задаваемым критерием оптимальности.

Решающее устройство может быть реализовано в различных вариантах, два из которых представлены на рис. 2.2. Первый из них (рис. 2.2 а) содержит блок

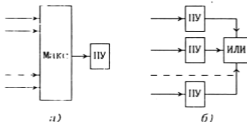


Рис. 2.2. Решающее устройство: ПУ-пороговое устройство.

"Макс", который выделяет наибольший из n входных

сигналов и пороговое устройство с порогом c . Сигнал на выходе порогового устройства (решение о наличии сигнала) появляется, если превышен порог c . Второй (рис. 2.2 б) содержит n пороговых устройств с одинаковыми порогами c . Выходы пороговых устройств подаются на логическую ячейку "ИЛИ". Сигнал на выходе ячейки ИЛИ (решение о наличии сигнала) появляется, если превышен порог хотя бы в одном из n пороговых устройств.

Функциональная схема рис. 2.1 лишь приближенно реализует МПО, поскольку логарифм ФПН вырабатывается в конечном числе дискретных точек θ_k , а не на всем интервале возможных значений неизвестного параметра $[\theta_{\min}; \theta_{\max}]$. Для точной реализации МПО необходимо в схеме рис. 2.1 использовать бесконечно большое число каналов, передаточные функции фильтров которых отличаются значениями θ_k , сдвинутых на бесконечно малую величину. Техническая реализация такого устройства в общем случае вряд ли возможна.

Функциональная схема МПО рис. 2.1 очевидным образом модифицируется для обнаружения стохастического сигнала, содержащего m неизвестных параметров $\theta \in \Theta$. Если при этом точки θ_k равномерно располагаются в области возможных значений неизвестных параметров Θ и для каждого параметра выбирается n дискретных значений, то необходимое число каналов функциональной схемы МПО возрастает до n^m .

2.1.2. Неизвестная ширина спектральной плотности. Конкретизируем структуру МПО для стохастического широкополосного сигнала с неизвестной эквивалентной полосой частот (1.2.17), которая определяет ширину спектральной плотности. Полагая, что неизвестная эквивалентная полоса частот

$$\Omega \in [\Omega_{\min}; \Omega_{\max}], \quad (2.1.28)$$

подставим (1.2.18) в (2.1.11) и (2.1.27). Получаем, что передаточные функции фильтров функциональной

схемы рис. 2.1 должны удовлетворять соотношению

$$|H(\omega, \Omega_k)|^2 = g_1(\omega/\Omega_k), \quad (2.1.29)$$

где

$$g_1(x) = qg(x)/[1 + qg(x)], \quad (2.1.30)$$

q определяется из (2.1.22), а

$$L_{ck} = \frac{T\Omega_k}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln [1 + qg(x)] dx, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.1.31)$$

Пусть обнаруживаемый стохастический широкополосный сигнал является полосовым (1.2.20). Тогда (2.1.29) и (2.1.31) принимают вид

$$|H(\omega, \Omega_k)|^2 = q I(\omega/\Omega_k)/(1 + q), \quad (2.1.32)$$

$$L_{ck} = T\Omega_k \ln(1 + q)/4\pi. \quad (2.1.33)$$

Таким образом, согласно (2.1.29), (2.1.32), при обнаружении сигнала с неизвестной шириной спектральной плотности, фильтры в каналах функциональной схемы МПО рис. 2.1 отличаются только шириной полосы пропускания.

Для случая обнаружения полосового сигнала с неизвестной шириной спектральной плотности можно предложить, кроме рис. 2.1, еще один вариант реализации МПО. Подставим (1.2.20) в (1.2.18), (1.2.18) в (2.1.11) и (2.1.27), а (2.1.11) в (2.1.13). Учитывая свойства преобразования Фурье и подставляя (2.1.13) в (2.1.25), получаем логарифм ФОП в спектральной форме

$$L(\Omega) = \frac{q}{\pi N_0(1+q)} \int_0^{\Omega/2} |x(\omega)|^2 d\omega - \frac{T\Omega}{4\pi} \ln(1+q). \quad (2.1.34)$$

Устройство, вырабатывающее (2.1.34), можно реализовать в одноканальном варианте с помощью последовательного спектрального анализатора [28]. Такой спектральный

затор на интервале времени $[0; \Delta t]$, $\Delta t \gg T$, анализирует диапазон частот $[0; \omega_{\max}]$ и формирует в этом диапазоне периодограмму

$$S_T(\omega) = |x(\omega)|^2 / T, \quad (2.1.35)$$

где $x(\omega)$ определяется из (2.1.14). Периодограмма формируется как функция текущего времени $t \in [0; \Delta t]$ [28]. При этом $S_T(\omega) = S_T[\omega(t)]$, $\omega(t) = \omega_{\max} t / \Delta t$. Спектраллизаторы последовательного действия обычно содержат один узкополосный фильтр, центральная частота которого перестраивается по заданному закону $\omega(t)$, а также квадратор и интегратор. Вместо того, чтобы перестраивать центральную частоту фильтра, можно перемещать спектральную плотность исследуемого сигнала по оси частот относительно фиксированной частоты фильтра. Перемещение спектральной плотности в этом случае обеспечивается гетеродинным преобразованием частоты исследуемого сигнала [28].

Полагая, что периодограмма (2.1.35) вырабатывается последовательным спектраллизатором, можем переписать (2.1.34) как

$$L[\Omega(t)] = A \int_0^{\Omega(t)/2} (S_T[\omega(t)] - A_1) d\omega(t),$$

$$A = q T / \pi N_0 (1+q), \quad A_1 = N_0 (1+q) \ln(1+q) / 2q,$$

$$\Omega(t) = \Omega_{\max} t / \Delta t. \quad (2.1.36)$$

Выражение (2.1.36) дает возможность представить функциональную схему МПО полосового сигнала в виде рис. 2.3. Здесь ПС - последовательный спектраллизатор, анализирующий в течение времени $[0; \Delta t]$ диапазон частот $[0; \Omega_{\max} / 2]$ и формирующий периодограмму (2.1.35) как функцию текущего времени t при $\omega(t) = \omega_{\max} t / \Delta t$; ПД-пиковый детектор [64], выходной сиг-

нал которого равен наибольшему максимуму входного сигнала на интервале времени $[\eta_s \Delta t; \Delta t]$,

$$\eta_s = \Omega_{\min} / \Omega_{\max}, \quad (2.1.37)$$

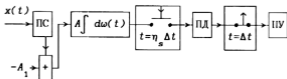


Рис. 2.3. Обнаружитель полосового сигнала: ПС-последовательный спектральный анализатор; ПД-пиковый детектор; ПУ-пороговое устройство.

ПУ - пороговое устройство, сигнал на выходе которого (решение о наличии стохастического сигнала) появляется, если превышен порог ϵ .

Функциональная схема МПО рис. 2.3 полосового сигнала является одноканальной и формирует логарифм ФАП как непрерывную функцию неизвестной эквивалентной полосы частот. В этом ее преимущество по сравнению с функциональной схемой МПО рис. 2.1. Однако применение функциональной схемы рис. 2.1 позволяет вынести решение о наличии или отсутствии сигнала в конце интервала наблюдения (1.2.10), т.е. за время T . Применение функциональной схемы рис. 2.3 требует для вынесения решения времени $\Delta t \gg T$.

Положим теперь, что стохастический сигнал со спектральной плотностью (1.2.18) зависит от двух неизвестных параметров: эквивалентной полосы частот Ω и величины спектральной плотности γ . Тогда МПО должен вырабатывать логарифм ФАП как функцию неизвестных параметров $\Phi = \|\gamma, \Omega\|$. Отметим, что согласно (2.1.22) незнание величины спектральной плотности γ равносильно незнанию параметра q в (2.1.29) и (2.1.31). Следовательно, при неизвестных величине и ширине спектральной плотности стохастического сигнала МПО можно опять реализовать посредством функци-

ональной схемы рис. 2.1. Для этого необходимо использовать фильтры с передаточными функциями $H(\omega, \Omega_k, q_i)$, которые удовлетворяют соотношению

$$|H(\omega, \Omega_k, q_i)|^2 = q_i g(\omega/\Omega_k) / [1 + q_i g(\omega/\Omega_k)], \quad (2.1.38)$$

а на сумматоры вместо (2.1.31) подавать сигналы

$$L_{cki} = \frac{T\Omega_k}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln [1 + q_i g(x)] dx. \quad (2.1.39)$$

В (2.1.38) и (2.1.39) как и ранее $k = \overline{1, n}$, а $i = \overline{1, n_i}$, где n_i - количество дискретных значений параметра q . Очевидно, общее число каналов МПО стохастического сигнала с неизвестными величиной и шириной спектральной плотности будет равно $n \cdot n_i$. Следовательно, наличие второго неизвестного параметра (кроме эквивалентной полосы частот) приводит к заметному увеличению числа каналов функциональной схемы рис. 2.1. Это обстоятельство существенно затрудняет техническую реализацию МПО.

Упростить функциональную схему МПО в этом случае, сократив число каналов в n_i раз, можно при обнаружении полосового стохастического сигнала со спектральной плотностью (1.2.18), (1.2.20). Используя (2.1.32), (2.1.33), перепишем (2.1.25) как

$$L(\Omega, q) = \frac{q}{N_o(1+q)} \int_0^T y_I^2(t, \Omega) dt - \frac{T\Omega}{4\pi} \ln(1+q). \quad (2.1.40)$$

Здесь $y_I(t, \Omega)$ - отклик фильтра с передаточной функцией $H_I(\omega, \Omega)$ на реализацию наблюдаемых данных $x(t)$, причем

$$|H_I(\omega, \Omega)|^2 = I(\omega/\Omega).$$

Согласно (1.4.5), МПО должен вырабатывать наибольший максимум логарифма ФОР (2.1.40), т.е. определять

$$\hat{L} = \sup_{\Omega, q} L(\Omega, q) = \sup_{\Omega} \hat{L}(\Omega),$$

где

$$\hat{L}(\Omega) = \sup_q L(\Omega, q) = L[\Omega, \tilde{q}(\Omega)], \quad (2.1.41)$$

а $\tilde{q}(\Omega)$ можно найти из решения уравнения [19]

$$[\partial L(\Omega, q)/\partial q]_{\tilde{q}(\Omega)} = 0. \quad (2.1.42)$$

Подставляя (2.1.40) в (2.1.42) и решая полученное уравнение, находим

$$\tilde{q}(\Omega) = 4\pi \int_0^T y_I^2(t, \Omega) dt / N_0 T \Omega - 1. \quad (2.1.43)$$

Подставляя затем (2.1.43) в (2.1.40), имеем для (2.1.41)

$$\begin{aligned} \hat{L}(\Omega) = & \frac{1}{N_0} \int_0^T y_I^2(t, \Omega) dt - \frac{T\Omega}{4\pi} \left\{ 1 + \right. \\ & \left. + \ln \left[\frac{4\pi}{T\Omega N_0} \int_0^T y_I^2(t, \Omega) dt \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.44)$$

Эта форма представления логарифма ФОН позволяет при неизвестных величине и ширине спектральной плотности сигнала реализовать МПО в виде многоканальной функциональной схемы, которая содержит столько же каналов, как и при известной величине спектральной плотности (рис. 2.1). На рис. 2.4 представлена функциональная схема одного канала МПО, где обозначено ЛН - нелинейный элемент с логарифмической характеристикой, $H_I(\omega, \Omega_k)$ удовлетворяет соотношению

$$|H_I(\omega, \Omega_k)| = I(\omega/\Omega_k), \quad k = \overline{1, n},$$

$$A_k = T\Omega_k/4\pi.$$

Для рассматриваемого случая можно предложить еще один вариант реализации МПО. С этой целью, аналогич-

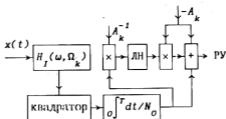


Рис. 2.4. Канал многоканального обнаружителя полосового сигнала с неизвестными величинами и шириной спектральной плотности: ЛН — нелинейный преобразователь с логарифмической характеристикой; РУ — решающее устройство.

по (2.1.41)+(2.1.43), максимизируем (2.1.34) по q . Получим (2.1.41) в виде

$$\hat{L}(\Omega) = \sup_q L(\Omega, q) = \frac{1}{\pi N_0} \int_0^{\Omega/2} |x(\omega)|^2 d\omega - \frac{T\Omega}{4\pi} \left\{ 1 + \ln \left[\frac{4}{T\Omega N_0} \int_0^{\Omega/2} |x(\omega)|^2 d\omega \right] \right\}. \quad (2.1.45)$$

Опять используем для реализации МПО последовательный спектральный анализатор [28] и перепишем (2.1.45) как

$$\hat{L}[\Omega(t)] = \frac{T}{\pi N_0} \int_0^{\Omega(t)/2} S_T[\omega(t)] d\omega(t) - \frac{T\Omega(t)}{4\pi} \left\{ 1 + \ln \left[\frac{4}{N_0 \Omega(t)} \int_0^{\Omega(t)/2} S_T[\omega(t)] d\omega(t) \right] \right\}, \quad (2.1.46)$$

где $S_T[\omega(t)]$ — периодограмма (2.1.35), вырабатываемая последовательным спектральным анализатором как функция времени, $\Omega(t) = \Omega_{\max} t / \Delta t$, Δt — время анализа в спектральном анализаторе, причем $\Delta t \gg T$. На основе (2.1.46)

функциональную схему МПО полосового сигнала с неизвестными величиной и шириной спектральной плотности

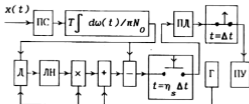


Рис. 2.5. Обнаружитель полосового сигнала с неизвестными величиной и шириной спектральной плотности: ПС – последовательный спектральный анализатор; Д – делитель; ЛН – нелинейный преобразователь с логарифмической характеристикой; ПД – пиковый детектор; Г – генератор линейно изменяющегося сигнала; ПУ – пороговое устройство.

можно представить, как показано на рис. 2.5. Здесь Д – делитель, Г – генератор, вырабатывающий линейно изменяющийся сигнал $tT\Omega_{\max}/4\pi\Delta t$; а остальные обозначения такие же как на рис. 2.3, 2.4.

Функциональная схема МПО рис. 2.5, аналогично рис. 2.3, – одноканальная и формирует логарифм ФСИ, как непрерывную функцию эквивалентной полосы частот. Однако, при большей простоте технической реализации, функциональная схема рис. 2.5 выходит решение за время $\Delta t \gg T$, где T – время принятия решения при использовании многоканального МПО, один канал которого показан на рис. 2.4.

Рассмотрим кратко структуру МПО гауссовского стационарного узкополосного стохастического сигнала с неизвестными величиной и шириной спектральной плотности (1.2.27).

Положим вначале, что неизвестна лишь эквивалентная полоса частот спектральной плотности (1.2.27), которая принимает значения из интервала (2.1.28).

Подставляя (1.2.27) в (2.1.11) и (2.1.27), опять приходим к функциональной схеме МПО рис. 2.1. Теперь передаточные функции фильтров должны удовлетворять соотношению

$$|H(\omega, \Omega_k)|^2 = g_1[(v-\omega)/\Omega_k] + g_1[(v+\omega)/\Omega_k], \quad (2.1.47)$$

где $g_1(x)$ определяется из (2.1.30), при подстановке в эту формулу

$$q = \gamma/N_0. \quad (2.1.48)$$

Кроме того, в функциональной схеме рис. 2.1 при обнаружении узкополосного сигнала надо положить

$$L_{ck} = \frac{T\Omega_k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[1+qg(x)]dx, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.1.49)$$

Пусть у узкополосного сигнала со спектральной плотностью (1.2.27) неизвестны ее величина и ширина. Тогда реализация МПО при произвольной форме спектральной плотности полностью аналогична случаю обнаружения широкополосного сигнала. Необходимо лишь очевидным образом заменить (2.1.38) и (2.1.39) на (2.1.47) и (2.1.49). Для полосового узкополосного сигнала со спектральной плотностью (1.2.27), (1.2.20) структура МПО упрощается, так же как и для широкополосного сигнала. Действительно, используя (2.1.47) и (2.1.49), перепишем (2.1.25) аналогично (2.1.40)

$$L(\Omega, q) = \frac{q}{N_0(1+q)} \int_0^T y_I^2(t, \Omega) dt - \frac{T\Omega}{2\pi} \ln(1+q). \quad (2.1.50)$$

Здесь $y_I(t, \Omega)$ - отклик фильтра с передаточной функцией $H_I(\omega, \Omega)$ на реализацию наблюдаемых данных $x(t)$, причем для узкополосного полосового сигнала

$$|H_I(\omega, \Omega)|^2 = I[(v-\omega)/\Omega] + I[(v+\omega)/\Omega],$$

а $I(\cdot)$ - индикатор единичной длительности (1.2.20). Аналогично (2.1.41)-(2.1.43) максимизируем (2.1.50)

по q . Получим (2.1.41) в виде

$$\hat{L}(\Omega) = \frac{1}{N} \int_0^T y_I^2(t, \Omega) dt - \frac{T\Omega}{2\pi} \left\{ 1 + \ln \left[\frac{2\pi}{T\Omega N} \int_0^T y_I^2(t, \Omega) dt \right] \right\}. \quad (2.1.51)$$

Эта формула позволяет реализовать МПО в виде многоканальной схемы, k -й ($k = \overline{1, n}$) канал которой представлен на рис. 2.4. Отличие от случая обнаружения широкополосного сигнала в том, что теперь $H_I(\omega, \Omega_k)$ удовлетворяет соотношению

$$|H_I(\omega, \Omega_k)|^2 = I[(\nu - \omega)/\Omega_k] + I[(\nu + \omega)/\Omega_k],$$

$$A_k = T\Omega_k / 2\pi.$$

2.2. Регулярные сигналы

2.2.1. Свойства логарифма функционала отношения правдоподобия. Рассмотрим некоторые вероятностные свойства логарифма ФОН (2.1.9) при обнаружении стохастического стационарного сигнала, корреляционная функция (или спектральная плотность) которого известна с точностью до параметров $\theta \in \Theta$. Найдём характеристическую $\theta_L(u)$ (1.1.5) и кумулянтную (1.1.7) функции для логарифма ФОН. Согласно (1.1.5) и (2.1.9),

$$\theta_L(u) = \langle \exp[juL_x(\theta)] \rangle \exp[-juL_c(\theta)], \quad (2.2.1)$$

где усреднение выполняется по реализациям наблюдаемых данных $x(t)$, $L_x(\theta)$ определяется из (2.1.13), а $L_c(\theta)$ - из (2.1.27). Общее выражение для характеристической функции (2.2.1) получено в [11], откуда имеем

$$\theta_L(u) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_0^T \hat{Q}(t, t, \theta, \chi) dx - juL_c(\theta) \right\}. \quad (2.2.2)$$

Здесь функция $\hat{Q}(t_1, t_2, \theta, \chi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \hat{Q}(t_1, t_2, \theta, \chi) - \chi \int_0^T \hat{Q}(t_1, t, \theta, \chi) Q_1(t, t_2, \theta) dt = \\ = Q_1(t_1, t_2, \theta), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$Q_1(t_1, t_2, \theta) = 2 \int_0^T Q(t_1 - t, \theta) B_x(t - t_2) dt / N_0. \quad (2.2.4)$$

Для стационарного гауссовского сигнала функция $Q(t_2 - t_1, \theta)$ определяется формулой (2.1.10), а

$$B_x(t_2 - t_1) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle \quad (2.2.5)$$

— корреляционная функция наблюдаемых данных $x(t)$.

Как и ранее, интервал наблюдения полагаем достаточно большим, так, что выполняется (2.1.2). Тогда, как это следует из [7, 8, 11 и др.],

$$\hat{Q}(t_1, t_2, \theta, \chi) \approx \hat{Q}(t_2 - t_1, \theta, \chi), \quad Q_1(t_1, t_2, \theta) \approx Q_1(t_2 - t_1, \theta). \quad (2.2.6)$$

Подставляя (2.2.6) в (2.2.3), (2.2.4) и, заменяя в силу (2.1.2) пределы интегрирования на бесконечные, получаем интегральное уравнение типа свертки [12]

$$\begin{aligned} \hat{Q}(t_2 - t_1, \theta, \chi) - \chi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Q}(t_2 - t_1 - t, \theta, \chi) Q_1(t_2 - t, \theta) dt = Q_1(t_2 - t_1, \theta), \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

$$Q_1(t_2 - t_1, \theta) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} Q(t_1 - t, \theta) B_x(t - t_2) dt / N_0. \quad (2.2.8)$$

Подставляя (2.2.8) в (2.2.7) и решая полученное уравнение аналогично (2.1.4) с помощью преобразования Фурье, находим

$$\hat{Q}(t_2 - t_1, \theta, \chi) = \frac{1}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[j\omega(t_2 - t_1)] Q(\omega, \theta) G_x(\omega)}{1 - 2\chi Q(\omega, \theta) G_x(\omega) / N_0} d\omega. \quad (2.2.9)$$

Здесь $Q(\omega, \theta)$ определяется из (2.1.11), а

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega\Delta) B_x(\Delta) d\Delta \quad (2.2.10)$$

— спектральная плотность наблюдаемых данных $x(t)$. Подставляя теперь (2.2.9) в (2.2.2), а (2.2.2) в (1.1.7), имеем для кумулянтной функции логарифма ФОР выражение

$$\Psi_L(u) = -\frac{T}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln [1 - 2juQ(\omega, \theta) G_x(\omega) / N_0] d\omega - juL_c(\theta), \quad (2.2.11)$$

Последняя формула позволяет из (1.1.11) найти кумулянты логарифма ФОР (2.1.9)

$$\begin{aligned} \kappa_1(\theta) &= \langle L(\theta) \rangle = S(\theta) = \\ &= \frac{T}{2\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega, \theta) G_x(\omega) d\omega - L_c(\theta), \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

$$\kappa_n(\theta) = \frac{T(n-1)!}{4\pi} \left(\frac{2}{N_0}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} Q^n(\omega, \theta) G_x^n(\omega) d\omega \quad (2.2.13)$$

при $n \geq 2$. Подстановка (2.2.13) в (1.1.12) позволяет записать кумулянтные коэффициенты логарифма ФОР

$$\begin{aligned} \gamma_n(\theta) &= \frac{(n-1)!}{(T/4\pi)^{n/2-1}} \int_{-\infty}^{\infty} Q^n(\omega, \theta) G_x^n(\omega) d\omega \times \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} Q^2(\omega, \theta) G_x^2(\omega) d\omega \right]^{-\frac{n}{2}}. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Здесь при гипотезе H_0 (1.4.10)

$$G_x(\omega) = N_0/2, \quad (2.2.15)$$

а при гипотезе H_1 (1.4.11)

$$G_x(\omega) = N_0/2 + G(\omega, \theta_0), \quad (2.2.16)$$

θ_0 - истинное значение неизвестных параметров обнаруживаемого стохастического сигнала.

Конкретизируем (2.2.14) применительно к обнаружению гауссовского стационарного стохастического сигнала с неизвестной эквивалентной полужой частотой (1.2.17) - для широкополосного или (1.2.22) - для узкополосного сигналов. С этой целью подставим (1.2.18) или (1.2.27) в (2.1.11) и (2.2.16), а затем (2.1.11) и (2.2.15) - при отсутствии сигнала или (2.2.16) - при его наличии в (2.2.14). Учитывая далее свойства функции $g(\cdot)$ (1.2.19), получаем простую верхнюю границу для кумулянтных коэффициентов при $n \geq 3$

$$\gamma_n(\Omega) \leq \frac{(n-1)!(1+q)^{2n}}{\mu_{\min}^{n/2-1}} \int_{-\infty}^{\infty} g^n(x) dx.$$

Здесь

$$\mu_{\min} = T\Omega_{\min} / 4\pi \quad (2.2.17)$$

и q определяется из (2.1.22) при обнаружении широкополосного стохастического сигнала со спектральной плотностью (1.2.18),

$$\mu_{\min} = T\Omega_{\min} / 2\pi \quad (2.2.18)$$

и q определяется из (2.1.48) при обнаружении узкополосного стохастического сигнала со спектральной плотностью (1.2.27).

Таким образом, если

$$\mu_{\min} \rightarrow \infty, \quad (2.2.19)$$

то кумулянтные коэффициенты логарифма ФОН (2.1.9)

$$\gamma_n \rightarrow 0 \quad (2.2.20)$$

при $n \geq 3$. Отсюда следует, что по мере увеличения μ_{\min} , распределение логарифма ФОН сходится к гауссовскому [8, 11, 27, 41, и др.]. На этом основании при выполнении (2.1.2), т.е., когда

$$\mu_{\min} \gg 1, \quad (2.2.21)$$

будем далее считать логарифм ФОН гауссовским случайным процессом.

Поскольку при выполнении (2.2.19) логарифм ФОН (2.1.9) является асимптотически гауссовским процессом, то для его асимптотически полного вероятностного описания достаточно найти математическое ожидание и корреляционную функцию. С этой целью представим (2.1.9) в виде

$$L(\vartheta) = S(\vartheta) + N(\vartheta), \quad (2.2.22)$$

где

$$S(\vartheta) = \langle L(\vartheta) \rangle \quad (2.2.23)$$

- регулярная составляющая логарифма ФОН, а

$$N(\vartheta) = L(\vartheta) - \langle L(\vartheta) \rangle \quad (2.2.24)$$

- шумовая функция (флуктуирующая составляющая).

Так как регулярная составляющая (2.2.23) уже найдена - она совпадает с кумулянтм первого порядка (2.2.12), определим корреляционную функцию шумовой функции (2.2.24)

$$B_N(\vartheta_1, \vartheta_2) = \langle N(\vartheta_1)N(\vartheta_2) \rangle. \quad (2.2.25)$$

Используя (2.1.13) и (2.1.14), перепишем (2.2.25) как

$$B_N(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{i}{(2\pi N_0)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\omega_1, \vartheta_1) Q(\omega_2, \vartheta_2) \times$$

$$\times [\langle |x(\omega_1)|^2 |x(\omega_2)|^2 \rangle - \langle |x(\omega_1)|^2 \rangle \langle |x(\omega_2)|^2 \rangle] d\omega_1 d\omega_2. \quad (2.2.26)$$

Найдем вначале математическое ожидание квадрата модуля случайного процесса $x(\omega)$ (2.1.14)

$$\langle |x(\omega)|^2 \rangle = \int_0^T \int_0^T \exp[-j\omega(t_2 - t_1)] B_x(t_2 - t_1) dt_1 dt_2, \quad (2.2.27)$$

где $B_x(t_2 - t_1)$ - корреляционная функция наблюдаемой реализации (2.2.5). Следуя [22,41], перейдем в (2.2.27) к новым переменным интегрирования Δ и t

$$\Delta = t_2 - t_1, \quad t = t_1. \quad (2.2.28)$$

Получаем

$$\langle |x(\omega)|^2 \rangle = T \int_{-T}^T \exp(-j\omega\Delta) (1 - |\Delta|/T) B_x(\Delta) d\Delta. \quad (2.2.29)$$

В силу (2.1.2) и (2.2.21) в (2.2.29) $|\Delta|/T \ll 1$ на той части интервала интегрирования, где $B_x(\Delta)$ заметно отлична от нуля. Кроме того, соотношения (2.1.2), (2.2.21) позволяют заменить пределы интегрирования в (2.2.29) на бесконечные. В результате получаем

$$\langle |x(\omega)|^2 \rangle \approx T G_x(\omega), \quad (2.2.30)$$

где $G_x(\omega)$ - спектральная плотность наблюдаемых данных (2.2.10). Выполняя далее аналогично (2.2.29), (2.2.30) усреднение под знаком интеграла в (2.2.26), и используя (1.2.4), находим

$$B_N(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{T}{\pi N^2} \int_0^{\infty} Q(\omega, \vartheta_1) Q(\omega, \vartheta_2) G_x^2(\omega) d\omega. \quad (2.2.31)$$

Рассмотрим представление логарифма ФОП в виде (2.2.22) и его характеристики (2.2.23), (2.2.31) при обнаружении стохастического сигнала с неизвестной

шириной спектральной плотности.

Пусть верна гипотеза H_0 (1.4.10), (2.2.15). Подставляя (1.2.18) в (2.1.11), а (2.1.11) и (2.2.15) в (2.2.12) и (2.2.31), получаем

$$S(\Omega|H_0) = S_0(\Omega) \equiv S_0(\eta) = -\mu_{\min} A_0 \eta / \eta_s, \quad (2.2.32)$$

$$\begin{aligned} B_N(\Omega_1, \Omega_2 | H_0) &= B_{N0}(\Omega_1, \Omega_2) \equiv B_{N0}(\eta_1, \eta_2) = \\ &= (\mu_{\min} q^2 / \eta_s) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x/\eta_1)g(x/\eta_2)}{[1+qg(x/\eta_1)][1+qg(x/\eta_2)]} dx. \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

Здесь

$$\eta = \Omega / \Omega_{\max}, \quad \eta_i = \Omega_i / \Omega_{\max}, \quad i = 1, 2,$$

$$A_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \ln[1+qg(x)] - q g(x)[1+qg(x)]^{-1} \} dx,$$

μ_{\min} определяется из (2.2.17), q - из (2.1.22), а η_s - из (2.1.37).

Пусть теперь верна гипотеза H_1 (1.4.11), (2.2.16). Подставляя (1.2.18) в (2.1.11), а (2.1.11) и (2.2.16) в (2.2.12) и (2.2.31), получаем

$$\begin{aligned} S(\Omega|H_1) &= S_1(\Omega) \equiv S_1(\eta) = \\ &= \frac{\mu_{\min}}{\eta_s} \left\{ q^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x/\eta)g(x/\eta_0)}{1+qg(x/\eta)} dx - \eta A_0 \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

$$\begin{aligned} B_N(\Omega_1, \Omega_2 | H_1) &= B_{N1}(\Omega_1, \Omega_2) \equiv B_{N1}(\eta_1, \eta_2) = \\ &= (\mu_{\min} q^2 / \eta_s) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x/\eta_1)g(x/\eta_2)[1+qg(x/\eta_0)]^2}{[1+q g(x/\eta_1)][1+qg(x/\eta_2)]} dx, \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

$$\eta_0 = \Omega_0 / \Omega_{\max}, \quad (2.2.36)$$

где Ω_0 - истинное значение неизвестной эквивалентной полосы частот сигнала.

Формулы (2.2.32), (2.2.33), (2.2.34), (2.2.35) получены для случая обнаружения широкополосного сигнала со спектральной плотностью (1.2.18). Однако их можно использовать и при обнаружении узкополосного сигнала со спектральной плотностью (1.2.27). Для этого достаточно в них подставить (2.2.18) и (2.1.48).

Таким образом, при обнаружении стационарного стохастического сигнала логарифм ФОР, когда верна гипотеза H_i ($i = 0, 1$), можно представить в виде

$$L_i(\eta) = S_i(\eta) + N_i(\eta), \quad \eta \in [\eta_s; 1]. \quad (2.2.37)$$

Здесь $S_i(\eta)$ определяется из (2.2.32), (2.2.34), а $N_i(\eta)$ при выполнении (2.2.21) является гауссовским процессом, у которого математическое ожидание

$$\langle N_i(\eta) \rangle = 0,$$

а корреляционная функция определяется из (2.2.33), (2.2.35).

2.2.2. Характеристики обнаружения. Эффективность МПО стохастического сигнала с неизвестными параметрами $\theta \in \Theta$ будем характеризовать величинами вероятностей ошибки ложной тревоги (1.3.13) и ошибки пропуска сигнала (1.3.14). Применительно к АМП (1.4.5) эти вероятности ошибок можно переписать как

$$\alpha = P[\hat{L} > c | H_0] = P[\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta) > c | H_0], \quad (2.2.38)$$

$$\beta = P[\hat{L} < c | H_1] = P[\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta) < c | H_1]. \quad (2.2.39)$$

Рассмотрим возможность расчета вероятностей ошибок при обнаружении стохастического сигнала со спектральной плотностью (1.2.18) или (1.2.27) при неизвестной эквивалентной полосе частот (1.2.17) или (1.2.22) соответственно. Будем называть гауссовский стохастический стационарный сигнал регулярным, если функция $g(\cdot)$ (1.2.19), описывающая форму спектральной плотности, непрерывно дифференцируема хотя бы дважды.

Согласно (2.2.38), расчет вероятности ложной тревоги сводится к определению вероятности превышения порога c реализацией логарифма ФОР $L_0(\eta)$ при $\eta \in [\eta_s; 1]$. Точных методов расчета этой вероятности пока неизвестно. Можно лишь получить ее приближенное значение для больших порогов c .

Обозначим $\Pi(c, \eta)$ — среднее число выбросов реализации $L_0(\eta)$ за уровень c в элементарном интервале $[\eta; \eta + d\eta]$. Положим, что порог c достаточно велик, т.е.

$$c - S_0(\eta) \gg \sigma_0(\eta), \quad \eta \in [\eta_s; 1],$$

где

$$\sigma_0^2(\eta) = B_{NO}(\eta, \eta) = \eta \mu_{\min} \int_{-\infty}^{\infty} (qg(x)/(1+qg(x)))^2 dx / \eta_s \quad (2.2.40)$$

— дисперсия логарифма ФОР при отсутствии сигнала, а $S_0(\eta)$ определяется из (2.2.32). Тогда поток выбросов реализации $L_0(\eta)$ за уровень c можно приближенно считать пуассоновским. К тому же, выбросы на различных элементарных интервалах будут приближенно статистически независимы [17, 29, 40, 44, 70]. Следовательно, вероятность непревышения порога c приближенно равна

$$P\{L_0(\eta) < c\} = \exp\left[-\int_{\eta_s}^1 \Pi(c, \eta) d\eta\right].$$

$$\eta \in (\eta_s; 1)$$

Значит, согласно (2.2.38), вероятность ложной тревоги при обнаружении сигнала с неизвестной шириной спектральной плотности определяется выражением

$$\alpha = 1 - \exp\left[-\int_{\eta_s}^1 \Pi(c, \eta) d\eta\right]. \quad (2.2.41)$$

Найдем $\Pi(c, \eta)$. Общая формула для среднего числа выбросов нестационарного гауссовского случайного процесса получена в [40, 41]. Применительно к логарифму ФОР $L_0(\eta)$ она переписывается как

$$\Pi(c, \eta) = \frac{\sqrt{M(\eta)}}{2\pi\sigma_0^2(\eta)} \exp\left\{-\frac{[c - S_0(\eta)]^2}{2\sigma_0^2(\eta)}\right\} \times$$

$$\times \left\{ \exp\left[-\frac{M_1^2(\eta)}{2}\right] + \sqrt{2\pi} M_1(\eta) \Phi[M_1(\eta)] \right\}, \quad (2.2.42)$$

$$M(\eta) = \sigma_0^2(\eta) \left[\frac{\partial^2 B_{NO}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \right]_{\eta} - \left[\frac{\partial B_{NO}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right]_{\eta}^2,$$

$$M_1(\eta) = \left\{ \sigma_0^2(\eta) \frac{d S_0(\eta)}{d \eta} + [c - S_0(\eta)] \left[\frac{\partial B_{NO}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right]_{\eta} \right\} \times$$

$$\times [\sigma_0^2(\eta) M(\eta)]^{-1/2}, \quad (2.2.43)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt \quad (2.2.44)$$

- интеграл вероятности, а $S_0(\eta)$ и $B_{NO}(\eta_1, \eta_2)$ определяются из (2.2.32) и (2.2.33) соответственно. Выполняя дифференцирование, для производных в (2.2.43) находим

$$\frac{d S_0(\eta)}{d \eta} = - \mu_{\min} A_0 / \eta_s,$$

$$\left[\frac{\partial B_{NO}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right]_{\eta} = - \frac{\mu_{\min} q^2}{\eta_s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x g(x) [dg(x)/dx]}{[1 + qg(x)]^3} dx,$$

$$\left[\frac{\partial^2 B_{NO}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \right]_{\eta} = \frac{\mu_{\min} q^2}{\eta \eta_s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 [dg(x)/dx]^2}{[1 + qg(x)]^4} dx.$$

Эти формулы существенно упрощаются при

$$q \ll 1 \quad (2.2.45)$$

и принимают вид

$$S_0(\eta) = -2 z_{\min}^2 \eta / \eta_s, \quad \frac{d S_0(\eta)}{d \eta} = -2 z_{\min}^2 / \eta_s,$$

$$\sigma_0^2(\eta) = 4 z_{\min}^2 \eta / \eta_s, \quad (2.2.46)$$

$$\left[\frac{\partial B_{NO}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right]_{\eta} = 2 z_{\min}^2 / \eta_s,$$

$$\left[\frac{\partial^2 B_{NO}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \right]_{\eta} = 4 z_{\min}^2 A / \eta \eta_s,$$

где

$$z_{\min}^2 = \mu_{\min} q^2 / 4, \quad (2.2.47)$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 [dg(x)/dx]^2 dx.$$

Подставляя (2.2.46) в (2.2.41), получаем для вероятности ложной тревоги выражение, справедливое при выполнении (2.2.45)

$$\alpha \approx 1 - \exp \left\{ - \int_1^{\eta_0} \frac{\sqrt{4A-1}}{4\pi x} \exp \left[- \frac{(\tilde{c} + 2z_{\min} x)^2}{8x} \right] \times \right. \\ \times \left\{ \exp \left[- \frac{(\tilde{c} - 2z_{\min} x)^2}{8x(4A-1)} \right] + \frac{(\tilde{c} - 2z_{\min} x)\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{x(4A-1)}} \times \right. \\ \left. \left. \times \Phi \left[\frac{\tilde{c} - 2z_{\min} x}{2\sqrt{x(4A-1)}} \right] \right\} dx \right\}, \\ \tilde{c} = c/z_{\min}. \quad (2.2.48)$$

Таким образом, в общем случае вероятность ложной тревоги при обнаружении сигнала с неизвестной шириной спектральной плотности можно рассчитать, подставляя (2.2.42) в (2.2.41), а при $q \ll 1$ - по формуле (2.2.48).

Найдем вероятность пропуска сигнала. Полагая, что верна гипотеза H_1 (1.4.11), (2.2.16), введем в рассмотрение отношение сигнал/шум (ОШ) для принятого сигнала [19, 45, 61]

$$z^2 = S_1^2(\Omega_0) / \sigma_1^2(\Omega_0), \quad (2.2.49)$$

где, согласно (2.2.34), (2.2.35),

$$S_1(\Omega_0) = S_1(\eta_0) = \frac{\mu_{\min} \eta_0}{\eta_0} \int_{-\infty}^{\infty} (qg(x) - \\ - \ln[1+qg(x)]) dx, \quad (2.2.50)$$

$$\sigma_1^2(\Omega) = \sigma_1^2(\eta) = B_{H1}(\eta, \eta) =$$

$$= (\mu_{\min} \eta q^2 / \eta_s) \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) \left[\frac{1 + qg(x\eta/\eta_0)}{1 + qg(x)} \right]^2 dx, \quad (2.2.51)$$

$$\sigma_1^2(\Omega_0) = \sigma_1^2(\eta_0) = \mu_{\min} \eta_0 q^2 / \eta_s. \quad (2.2.52)$$

Подставляя (2.2.50) и (2.2.52) в (2.2.49), имеем для ОСШ

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{\mu_{\min} \eta_0}{\eta_s q^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [qg(x) - \ln[1 + qg(x)]] dx \right\}^2 = \\ &= \frac{\mu}{q^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} [qg(x) - \ln[1 + qg(x)]] dx \right]^2. \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

Здесь

$$\mu = T\Omega_0/4\pi \quad (2.2.54)$$

и q определяется из (2.1.22) - при обнаружении широкополосного стохастического сигнала со спектральной плотностью (1.2.18);

$$\mu = T\Omega_0/2\pi \quad (2.2.55)$$

и q определяется из (2.1.48) - при обнаружении узкополосного стохастического сигнала со спектральной плотностью (1.2.27). Из (2.2.53) следует, что ОСШ возрастает с увеличением μ или μ_{\min} .

Обозначим

$$\hat{\Omega} = \arg \sup_{\Omega \in [\Omega_{\min}; \Omega_{\max}]} L(\Omega)$$

- ОМП эквивалентной полосы частот стационарного стохастического сигнала и

$$\hat{\eta} = \hat{\Omega} / \Omega_{\max}$$

- нормированная ОМП. Тогда выражение для вероятности пропуска (2.2.39) можно переписать как

$$\beta = P [L(\hat{\Omega}) < c | H_1] = P [L_1(\hat{\eta}) < c]. \quad (2.2.56)$$

Известно [8, 19 и др.], что с ростом ОСШ (2.2.49), (2.2.53) ОМП $\hat{\eta} \rightarrow \eta_0$ в среднеквадратическом. Очевидно при этом $\hat{\eta} \rightarrow \eta_0$, так же в среднеквадратическом. На этом основании, учитывая регулярность рассматриваемого стохастического сигнала, в (2.2.56) можно приближенно заменить $\hat{\eta}$ на η_0 при выполнении (2.2.21). Тогда из (2.2.56) имеем

$$\beta \approx P [L_1(\eta_0) < c].$$

Согласно (2.2.20), $L_1(\eta_0)$ при выполнении (2.2.21) является гауссовской случайной величиной. Из (2.2.34), (2.2.35) находим математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины

$$\langle L_1(\eta_0) \rangle = S_1(\eta_0), \quad \sigma_1^2(\eta_0) = B_{N1}(\eta_0, \eta_0).$$

В результате имеем приближенное значение вероятности пропуска сигнала

$$\beta = \Phi [c/\sigma_1(\eta_0) - z], \quad (2.2.57)$$

где $\Phi(\cdot)$ - интеграл вероятности (2.2.44). Формула для ОСШ существенно упрощается при обнаружении слабого сигнала, когда выполняется (2.2.45). Действительно, разлагая в (2.2.53) логарифм под интегралом в ряд по q , получаем

$$z^2 = \mu_{\min} \eta_0 q^2 / 4\eta_s = \mu q^2 / 4. \quad (2.2.58)$$

Если истинное значение неизвестного параметра $\eta_0 = \eta_s$, т.е. равно своему минимально возможному значению, то (2.2.58) совпадает с (2.2.47). Следовательно, (2.2.47) - это минимально возможное ОСШ при обнаружении слабого стохастического стационарного сигнала с неизвестной шириной спектральной плотности.

Как уже отмечалось, в ряде задач, реализация МПО оказывается достаточно сложной. В этих случаях может быть полезным использование КПО. Согласно (1.4.6)

КПО выработывает логарифм ФАП в одной точке Ω^* и сравнивает его с порогом. Следовательно, функциональная схема КПО представляет собой один канал из многоканальной схемы МПО, например на рис. 2.1. Обозначая

$$\eta^* = \Omega^* / \Omega_{\max},$$

запишем выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала при использовании КПО

$$\alpha^* = P[L_0(\eta^*) > c], \quad \beta^* = P[L_1(\eta^*) < c]. \quad (2.2.59)$$

Случайные величины $L_i(\eta^*)$ ($i = 0, 1$) при выполнении (2.2.21) являются гауссовскими, а их два первые момента определяются выражениями (2.2.32), (2.2.40) и (2.2.34), (2.2.51). Следовательно, (2.2.59) можно переписать как

$$\alpha^* = 1 - \Phi[(c - S_0^*) / \sigma_0^*]. \quad (2.2.60)$$

$$\beta^* = \Phi[(c - S_1^*) / \sigma_1^*] = \Phi[c / \sigma_1^* - z^*]. \quad (2.2.61)$$

Здесь

$$S_0^* = -\mu_{\min} A_0 \eta^* / \eta_s,$$

$$(\sigma_0^*)^2 = \mu_{\min} \eta^* \int_{-\infty}^{\infty} \{qg(x) / [1 + qg(x)]\}^2 dx / \eta_s,$$

$$S_1^* = \frac{\mu_{\min} \eta^*}{\eta_s} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{qg(x)[1 + qg(x\eta^*/\eta_0)]}{1 + qg(x)} - \ln[1 + qg(x)] \right\} dx,$$

$$(\sigma_1^*)^2 = \frac{\mu_{\min} q^2 \eta^*}{\eta_s} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) \left[\frac{1 + qg(x\eta^*/\eta_0)}{1 + qg(x)} \right]^2 dx,$$

$$z^* = S_1^* / \sigma_1^*.$$

Наконец, если эквивалентная полоса частот Ω_0 обнару-

живаемого стохастического сигнала априори известна, то из (2.2.60), (2.2.61) нетрудно получить характеристики оптимального обнаружителя. Действительно, при априори известном значении $\Omega_0(\eta_0)$ с порогом c сравнивается логарифм ФОП в этой точке (1.4.2) — $L(\Omega_0)$ или $L(\eta_0)$. Следовательно, вероятности ошибок α_0 и β_0 в оптимальном обнаружителе получаем, положив в (2.2.60), (2.2.61) $\eta^* = \eta_0$:

$$\alpha_0 = 1 - \Phi[(c - S_0(\eta_0)) / \sigma_0(\eta_0)], \quad (2.2.62)$$

$$\beta_0 = \Phi[c / \sigma_1(\eta_0) - z]. \quad (2.2.63)$$

Сравнивая (2.2.63) с (2.2.57), видим, что, когда выполняется (2.2.21), вероятности пропуска при использовании МПО и оптимального обнаружителя совпадают.

Отметим, что полученные формулы для характеристик КПО и оптимального обнаружителя справедливы при любой форме спектральной плотности стохастического сигнала. Однако формулы для характеристик МПО (2.2.41), (2.2.42) можно использовать только при обнаружении регулярного сигнала.

2.3. Полосовой сигнал

2.3.1. Неизвестная ширина спектральной плотности.

Полученные в п.2.2.2 выражения для характеристик МПО сигнала с неизвестной шириной спектральной плотности нельзя использовать при обнаружении полосового сигнала со спектральной плотностью (1.2.18), (1.2.27), где $g(\cdot)$ определяется из (1.2.20). Действительно, в этом случае функция $g(\cdot)$ (1.2.20), описывающая форму спектральной плотности, недифференцируема и стохастический сигнал не является регулярным [69].

Найдем характеристики МПО полосового сигнала, полагая по-прежнему, что выполняется (2.2.21).

Если верна гипотеза H_0 (сигнал отсутствует), то согласно (2.2.37) логарифм ФОР

$$L_0(\eta) = S_0(\eta) + N_0(\eta) \quad \eta \in [\eta_s; 1]. \quad (2.3.1)$$

Подставляя (1.2.20) в (2.2.32) и (2.2.33), можем записать регулярную составляющую и корреляционную функцию флуктуирующей составляющей логарифма ФОР при обнаружении полосового сигнала

$$S_0(\eta) = k_N \eta / \eta_s, \quad (2.3.2)$$

$$B_{N0}(\eta_1, \eta_2) = d_N \min(\eta_1, \eta_2) / \eta_s. \quad (2.3.3)$$

Здесь

$$k_N = \mu_{\min} [(1+q)1 \cdot (1+q) - q] / (1+q), \quad (2.3.4)$$

$$d_N = \mu_{\min} q^2 / (1+q)^2. \quad (2.3.5)$$

Из (2.3.3) следует, что при выполнении (2.2.21) флуктуирующую составляющую логарифма ФОР можно приближенно считать винеровским случайным процессом [22, 41, 43 и др.]. Следовательно, сам логарифм ФОР (2.3.1) можно аппроксимировать гауссовским марковским процессом.

Полное в статистическом смысле описание марковского случайного процесса задано, если известны начальная плотность вероятности процесса и вероятность перехода [43]. В рассматриваемом случае начальной плотностью вероятности будет одномерная плотность вероятности логарифма ФОР (2.3.1) при $\eta = \eta_s$. Учитывая асимптотически гауссовский характер логарифма ФОР при выполнении (2.2.21), для начальной плотности вероятности имеем выражение

$$W_N(L; \eta_s) = \frac{1}{\sigma_0(\eta_s) \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ - \frac{[L - S_0(\eta_s)]^2}{2\sigma_0^2(\eta_s)} \right\}. \quad (2.3.6)$$

Согласно (2.3.2) и (2.3.3)

$$S_0(\eta_s) = \mu_{\min} [q - (1+q)\ln(1+q)] / (1+q) = -k_H, \quad (2.3.7)$$

$$\sigma_0^2(\eta_s) = B_{NO}(\eta_s, \eta_s) = \mu_{\min} q^2 / (1+q)^2 = d_H.$$

Вероятность перехода может быть найдена из решения уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) [43]. Определим коэффициенты этих уравнений для случайного процесса (2.2.22), рассматривая его как функцию нормированной переменной η . Итак, имеется гауссовский случайный процесс $L(\eta)$, $\eta \in [\eta_s; 1]$, который, когда верна гипотеза H_i ($i = 0, 1$), определяется из (2.2.37). Коэффициенты уравнений ФПК по определению равны [43]

$$K_n(L, \eta) = \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0+} \frac{\langle [L(\eta+\Delta\eta) - L(\eta)]^n | L(\eta) \rangle}{\Delta\eta}. \quad (2.3.8)$$

Здесь $n = 1, 2, \dots$, а усреднение выполняется при фиксированном значении $L \equiv L(\eta)$ по значениям $L_\Delta \equiv L(\eta+\Delta\eta)$. Следовательно, обозначая $W(L_\Delta | L)$ - условная плотность вероятности L_Δ при фиксированном значении L , моменты в (2.3.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \langle [L(\eta+\Delta\eta) - L(\eta)]^n | L(\eta) \rangle = \\ & = m_n(L_\Delta, \eta+\Delta\eta | L, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} (L_\Delta - L)^n W(L_\Delta | L) dL_\Delta. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Учитывая асимптотически гауссовский характер логарифма ФОП при выполнении (2.2.21) и используя (1.2.6), (1.2.7), для условной плотности вероятности получаем выражение

$$\begin{aligned} W(L_\Delta | L) &= W_2(L_\Delta, L) / W_1(L) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp \left[-\frac{(L_\Delta - m_1)^2}{2D} \right], \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

где

$$m_1 = m_1(L_\Delta, \eta + \Delta\eta | L, \eta) = \\ = S(\eta + \Delta\eta) + B_N(\eta, \eta + \Delta\eta) [L - S(\eta)] / B_N(\eta, \eta), \quad (2.3.11)$$

$$D = [B_N(\eta, \eta) B_N(\eta + \Delta\eta, \eta + \Delta\eta) - B_N^2(\eta, \eta + \Delta\eta)] / B_N(\eta, \eta). \quad (2.3.12)$$

Подставляя (2.3.10) в (2.3.9) и выполняя интегрирование, находим

$$m_n(L_\Delta, \eta + \Delta\eta | L, \eta) = \sum_{k=0}^{\text{int}[n/2]} C_n^{2k} M^{n-2k} D^k (2k-1)!!, \quad (2.3.13)$$

где $\text{int}[\cdot]$ - целая часть числа, $C_n^m = n! / m!(n-m)!$ - биномиальные коэффициенты (число сочетаний из n по m), $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)$, причем $(-1)!! = 1$,

$$M = m_1(L_\Delta, \eta + \Delta\eta | L, \eta) - L.$$

Положим теперь, что регулярная составляющая логарифма ФОР $S(\eta)$ (2.2.23) и функция корреляции шумовой функции $B_N(\eta_1, \eta_2)$ (2.2.25) кусочно-дифференцируемы справа на конечном числе участков интервала возможных значений неизвестного параметра $[\eta_s; 1]$. Иначе говоря, полагаем, что производные справа функций $S(\eta)$ и $B_N(\eta_1, \eta_2)$ непрерывны при всех $\eta, \eta_1, \eta_2 \in [\eta_s; 1]$, исключая конечное число точек, где эти производные имеют разрывы первого рода. Тогда, исключая точки разрыва производных, можем записать при малых $\Delta\eta$

$$S(\eta + \Delta\eta) = S(\eta) + \left. \frac{dS(\eta_1)}{d\eta_1} \right|_{\eta_1 = \eta + 0} \Delta\eta + \dots, \quad (2.3.14)$$

$$B_N(\eta, \eta + \Delta\eta) = B_N(\eta, \eta) + \left. \frac{\partial B_N(\eta, \eta_1)}{\partial \eta_1} \right|_{\eta_1 = \eta + 0} \Delta\eta + \dots, \quad (2.3.15)$$

$$B_N(\eta+\Delta\eta, \eta+\Delta\eta) = B_N(\eta, \eta) + \left. \frac{dB_N(\eta_1, \eta_1)}{d\eta_1} \right|_{\eta_1=\eta+0} \Delta\eta + \dots \quad (2.3.16)$$

Подставляя (2.3.14)...(2.3.16) в (2.3.11), (2.3.12), эти выражения - в (2.3.13), затем (2.3.13) в (2.3.8) и вычисляя предел, получаем

$$K_1(L, \eta) = \left. \frac{dS(\eta_1)}{d\eta_1} \right|_{\eta_1=\eta+0} + \frac{L-S(\eta)}{B_N(\eta, \eta)} \cdot \left. \frac{\partial B_N(\eta, \eta_1)}{\partial \eta_1} \right|_{\eta_1=\eta+0} \quad (2.3.17)$$

$$K_2(L, \eta) = \left. \frac{dB_N(\eta_1, \eta_1)}{d\eta_1} \right|_{\eta_1=\eta+0} - 2 \left. \frac{\partial B_N(\eta, \eta_1)}{\partial \eta_1} \right|_{\eta_1=\eta+0} \quad (2.3.18)$$

$$K_n(L, \eta) = 0, \quad n \geq 3 \quad (2.3.19)$$

Отметим, что условия (2.3.19) и

$$K_2(L, \eta) > 0 \quad (2.3.20)$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы случайный процесс $L(\eta)$ был марковским диффузионным процессом [43]. Для марковского диффузионного процесса коэффициенты (2.3.17) и (2.3.18) называются соответственно коэффициентами сноса и диффузии.

Таким образом, для того чтобы проверить, является ли гауссовский процесс марковским, достаточно убедиться в выполнении (2.3.20), где $K_2(L, \eta)$ определяется из (2.3.18). В частности, если $B_N(\eta_1, \eta_2)$ непрерывно дифференцируема при всех $\eta_1, \eta_2 \in [\eta_s; 1]$, как это имеет место при обнаружении регулярного сигнала, то

$$K_2(L, \eta) = 0$$

и логарифм ФОП не является марковским процессом.

Подставляя (2.3.2), (2.3.3) в (2.3.17), (2.3.18), находим коэффициенты сноса и диффузии логарифма ФОП при отсутствии сигнала

$$K_1(L, \eta | H_0) = -k_N / \eta_s, \quad (2.3.21)$$

$$K_2(L, \eta | H_0) = d_N / \eta_s, \quad (2.3.22)$$

где k_N и d_N определяются из (2.3.4) и (2.3.5) соответственно.

Используя марковские свойства логарифма ФОП и его характеристики (2.3.6), (2.3.21), (2.3.22), найдем вероятность ложной тревоги при обнаружении стохастического полосового сигнала с неизвестной шириной спектральной плотности. Согласно определению (2.2.38) вероятность ложной тревоги

$$\begin{aligned} \alpha &= P\{\sup_{\eta \in [\eta_s; 1]} L(\eta) > c | H_0\} \\ &= 1 - P\{L_0(\eta) < c\} = 1 - P_N(c). \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Здесь

$$P_N(c) = P\{\chi(\eta) > 0\}, \quad \eta \in [\eta_s; 1], \quad (2.3.24)$$

$$\chi(\eta) = c - L_0(\eta). \quad (2.3.25)$$

Этот процесс является гауссовским марковским процессом с коэффициентами сноса и диффузии

$$K_{1N} = k_N / \eta_s, \quad K_{2N} = d_N / \eta_s$$

и начальной плотностью вероятности, как это следует из (2.3.6),

$$W_N(\chi; \eta_s) = \frac{1}{\sigma_0(\eta_s) \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\chi - c + S_0(\eta_s)]^2}{2\sigma_0^2(\eta_s)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi d_N}} \exp\left[-\frac{(\chi - c - k_N)^2}{2d_N}\right]. \quad (2.3.26)$$

Марковские свойства процесса (2.3.25) позволяют записать вероятность (2.3.24) в виде [43, 45, 61 и др.]

$$P_N(c) = \int_0^{\infty} W_N(\chi; 1) d\chi, \quad (2.3.27)$$

$$W_N(\chi; 1) = W_N(\chi; \eta) \Big|_{\eta=1},$$

где $W_N(\chi; \eta)$ – решение второго уравнения ФПК [43]

$$\frac{\partial W_N(\chi; \eta)}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial \chi} [K_{1N} W_N(\chi; \eta)] + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} [K_{2N} W_N(\chi; \eta)] \quad (2.3.28)$$

при начальном условии (2.3.26) и граничном условии

$$W_N(\chi; \eta) \Big|_{\chi=0} = 0, \quad \eta \in [\eta_s; 1].$$

Для решения уравнения (2.3.28) приведем его к каноническому виду. Обозначая

$$W_N(\chi; \eta) = U_N(\chi; \eta) \exp\left[-\frac{k_N^2 \eta}{2d_N \eta_s} + \frac{k_N}{d_N} \chi\right] \quad (2.3.29)$$

и подставляя (2.3.29) в (2.3.28), получаем, что функция $U_N(\chi; \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U_N(\chi; \eta)}{\partial \eta} = \frac{d_N}{2\eta_s} \cdot \frac{\partial^2 U_N(\chi; \eta)}{\partial \chi^2} \quad (2.3.30)$$

при начальном и граничном условиях

$$U_N(\chi; \eta_s) = W_N(\chi; \eta_s) \exp\left[\frac{k_N^2}{2d_N} - \frac{k_N}{d_N} \chi\right],$$

$$U_N(\chi; \eta) \Big|_{\chi=0} = 0. \quad (2.3.31)$$

Согласно [36, 43] решение уравнения (2.3.30) при начальном и граничном условиях (2.3.31) имеет вид

$$U_N(\chi; \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_N (\eta - \eta_s) / \eta_s}} \int_0^{\infty} W_N(\chi_1; \eta_s) \exp \left[\frac{k_N^2}{2d_N} \left(-\frac{k_N}{d_N} \chi_1 \right) \left\{ \exp \left[-\frac{(\chi - \chi_1)^2 \eta_s}{2d_N (\eta - \eta_s)} \right] - \exp \left[-\frac{(\chi + \chi_1)^2 \eta_s}{2d_N (\eta - \eta_s)} \right] \right\} d\chi_1. \quad (2.3.32)$$

Подставляя (2.3.32) в (2.3.29), получаем решение уравнения ФПК (2.3.28)

$$W_N(\chi; \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_N (\eta - \eta_s) / \eta_s}} \int_0^{\infty} W_N(\chi_1; \eta_s) \exp \left[-\frac{k_N^2}{2d_N} (\eta - \eta_s) / \eta_s + \frac{k_N}{d_N} (\chi - \chi_1) \right] \left\{ \exp \left[-\frac{(\chi - \chi_1)^2 \eta_s}{2d_N (\eta - \eta_s)} \right] - \exp \left[-\frac{(\chi + \chi_1)^2 \eta_s}{2d_N (\eta - \eta_s)} \right] \right\} d\chi_1. \quad (2.3.33)$$

Наконец, подставляя (2.3.33) в (2.3.27), а (2.3.27) в (2.3.23), находим вероятность ложной тревоги

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi d_N (1 - \eta_s) / \eta_s}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W_N(\chi_1; \eta_s) \exp \left[-\frac{k_N^2}{2d_N} (1 - \eta_s) / \eta_s + \frac{k_N}{d_N} (\chi - \chi_1) \right] \left\{ \exp \left[-\frac{(\chi - \chi_1)^2 \eta_s}{2d_N (1 - \eta_s)} \right] - \exp \left[-\frac{(\chi + \chi_1)^2 \eta_s}{2d_N (1 - \eta_s)} \right] \right\} d\chi_1 d\chi.$$

$$- \exp \left[- \frac{(\chi + \chi_1)^2 \eta_s}{2d_N(1-\eta_s)} \right] \} d\chi d\chi_1. \quad (2.3.34)$$

Подставим в (2.3.34) начальную плотность вероятности (2.3.26) и преобразуем результат к виду

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[- \frac{(x - \tilde{c} - z_N)^2}{2} \right] \left\{ \Phi \left[z_N \sqrt{\frac{1-\eta_s}{\eta_s}} + x \sqrt{\frac{\eta_s}{1-\eta_s}} \right] - \exp(-2xz_N) \Phi \left[z_N \sqrt{\frac{1-\eta_s}{\eta_s}} - x \sqrt{\frac{\eta_s}{1-\eta_s}} \right] \right\} dx. \quad (2.3.35)$$

Здесь

$$z_N^2 = k_N^2 / d_N = S_0^2(\eta_s) / \sigma_0^2(\eta_s) = \mu_{\min} [(1+q) \ln(1+q) / q - 1]^2 \quad (2.3.36)$$

- отношение мощности регулярной составляющей логарифма ФОР к дисперсии флуктуирующей составляющей при отсутствии сигнала,

$$\tilde{c} = c / \sqrt{d_N} = c / \sigma_0(\eta_s) = c(1+q) / q \sqrt{\mu_{\min}} \quad (2.3.37)$$

- нормированный порог, $\Phi(\cdot)$ - интеграл вероятности (2.2.44).

Полученное выражение для вероятности ложной тревоги несколько упрощается, если $\eta_s \ll 1$ ($\Omega_{\min} \ll \Omega_{\max}$),

но по-прежнему выполняется (2.2.21)

$$\alpha = 1 - \Phi(\tilde{c} + z_N) + \exp(-2\tilde{c}z_N) \Phi(\tilde{c} - z_N). \quad (2.3.38)$$

Если же $\Omega_{\min} \rightarrow \Omega_{\max}$, т.е. априорный интервал возможных значений эквивалентной полосы частот (2.1.28) стягивается в точку, то $\eta_s \rightarrow 1$ и из

(2.3.35) имеем

$$\alpha = \alpha_0 = 1 - \Phi[c/\sigma_0(1) - S_0(1)/\sigma_0(1)]. \quad (2.3.39)$$

Это выражение совпадает с вероятностью ложной тревоги при обнаружении сигнала с априори известной эквивалентной полосой частот (2.2.62) при $\eta_0 = 1$.

В частном случае слабого сигнала (2.2.45) из (2.3.36), (2.3.37) имеем

$$z_N^2 = z_{\min}^2 = \mu_{\min} q^2/4, \quad \tilde{c} = 2c/z_{\min}. \quad (2.3.40)$$

Пусть сигнал с неизвестной эквивалентной полосой $\Omega_0 \in [\Omega_{\min}; \Omega_{\max}]$ присутствует на входе МПО (верна гипотеза H_1). Тогда, согласно (2.2.37), логарифм ФОП

$$L_1(\eta) = S_1(\eta) + N_1(\eta), \quad \eta \in [\eta_s; 1]. \quad (2.3.41)$$

Подставляя (1.2.20) в (2.2.34) и (2.2.35), можем записать сигнальную функцию и корреляционную функцию шумовой функции при обнаружении полосового сигнала

$$S_1(\eta) = [(k_{1s} + k_{2s})\min(\eta, \eta_0) - k_{2s}\eta]/\eta_s, \quad (2.3.42)$$

$$B_{N1}(\eta_1, \eta_2) = [d_{2s} \min(\eta_1, \eta_2) + (d_{1s} - d_{2s})\min(\eta_1, \eta_2, \eta_0)]/\eta_s. \quad (2.3.43)$$

Здесь

$$k_{1s} = \mu_{\min} [q - \ln(1+q)], \quad k_{2s} = k_N,$$

$$d_{1s} = \mu_{\min} q^2, \quad d_{2s} = d_N,$$

а k_N и d_N определяются из (2.3.4) и (2.3.5) соответственно. Подставляя (2.3.42) и (2.3.43) в (2.3.17), (2.3.18), получаем, при выполнении (2.3.19), (2.3.20), коэффициенты сноса и диффузии логарифма ФОП при наличии сигнала

$$K_1(L, \eta | H_1) = \frac{1}{\eta_s} \begin{cases} k_{1s}, & \eta_s \leq \eta \leq \eta_0, \\ -k_{2s}, & \eta_0 < \eta \leq 1, \end{cases} \quad (2.3.44)$$

$$K_2(L, \eta | H_1) = \frac{1}{\eta_s} \begin{cases} d_{1s}, & \eta_s \leq \eta \leq \eta_0, \\ d_{2s}, & \eta_0 < \eta \leq 1. \end{cases} \quad (2.3.45)$$

Учитывая асимптотически гауссовский характер логарифма ФОП при выполнении (2.2.21), начальную плотность вероятности при наличии сигнала можем записать как

$$W_s(L; \eta_s) = \frac{1}{\sigma_1(\eta_s) \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[L - S_1(\eta_s)]^2}{2\sigma_1^2(\eta_s)} \right\}. \quad (2.3.46)$$

Согласно (2.3.42) и (2.3.43)

$$S_1(\eta_s) = \mu_{\min} [q - \ln(1+q)] = k_{1s}, \quad (2.3.47)$$

$$\sigma_1^2(\eta_s) = B_{N1}(\eta_s, \eta_s) = \mu_{\min} q^2 = d_{1s}. \quad (2.3.48)$$

Используя марковские свойства логарифма ФОП при наличии сигнала и его характеристики (2.3.44)+(2.3.46), найдем вероятность пропуска полосового стохастического сигнала с неизвестной шириной спектральной плотности. Согласно определению (2.2.39),

$$\begin{aligned} \beta(\eta_0) &= P \left[\sup_{\eta \in [\eta_s; 1]} L(\eta) < c | H_1 \right] = P \left[L(\eta) < c \right] = \\ &= P \left[\chi(\eta) > 0 \right], \\ &\quad \eta \in [\eta_s; 1] \\ &\quad \chi(\eta) = c - L_1(\eta). \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

Этот процесс является гауссовским марковским процессом с коэффициентами сноса и диффузии

$$K_{1s} = \frac{1}{\eta_s} \begin{cases} -k_{1s}, & \eta_s \leq \eta \leq \eta_0, \\ k_{2s}, & \eta_0 < \eta \leq 1, \end{cases} \quad (2.3.50)$$

$$K_{2s} = \frac{1}{\eta_s} \begin{cases} d_{1s}, & \eta_s \leq \eta \leq \eta_0, \\ d_{2s}, & \eta_0 < \eta \leq 1 \end{cases} \quad (2.3.51)$$

и начальной плотностью вероятности, как это следует из (2.3.46),

$$\begin{aligned} W_s(\chi; \eta_s) &= \frac{1}{\sigma_1(\eta_s)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\chi-c+S_1(\eta_s)]^2}{2\sigma_1^2(\eta_s)}\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{1s}}} \exp\left\{-\frac{(\chi-c+k_{1s})^2}{2d_{1s}}\right\}. \end{aligned} \quad (2.3.52)$$

Марковские свойства процесса (2.3.49) позволяют записать вероятность пропуска сигнала в виде [43, 45, 61 и др.]

$$\beta(\eta_0) = \int_0^{\infty} W_s(\chi; 1) d\chi, \quad (2.3.53)$$

$W_s(\chi; 1) = W_s(\chi; \eta)|_{\eta=1}$, $W_s(\chi; \eta)$ - решение второго уравнения ФПК [43]

$$\frac{\partial W_s(\chi; \eta)}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial \chi} [K_{1s} W_s(\chi; \eta)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} [K_{2s} W_s(\chi; \eta)] \quad (2.3.54)$$

при начальном условии (2.3.52) и граничном условии

$$W_s(\chi; \eta)|_{\chi=0} = 0. \quad (2.3.55)$$

Коэффициенты сноса (2.3.50) и диффузии (2.3.51) процесса (2.3.49) постоянны на интервалах $[\eta_s; \eta_0]$ и

$(\eta_0; 1]$. Поэтому на интервале $[\eta_s; \eta_0]$ решение уравнения (2.3.54) можно искать аналогично решению уравнения (2.3.28), а затем использовать это решение в точке η_0 в качестве начального условия для интервала $(\eta_0; 1]$. Найдем вначале $W_s(\chi; \eta_0) = W_s(\chi; \eta)|_{\eta=\eta_0}$.

$\eta \in [\eta_s; \eta_0]$, где $W_s(\chi; \eta)$ - решение уравнения (2.3.54) при коэффициентах (2.3.50), (2.3.51) на соответствующем интервале и при начальном условии (2.3.52). Составляя (2.3.54) и (2.3.28); (2.3.34) и (2.3.50), (2.3.51); видим, что $W_s(\chi; \eta_0)$ будет описываться формулой (2.3.33), если в ней положить $\eta = \eta_0$; заменить $W_N(\chi; \eta_s)$ (2.3.26) на $W_s(\chi; \eta_s)$ (2.3.52), заменить k_N на $-k_{1s}$ и d_N на d_{1s} . В результате получаем

$$\begin{aligned}
 W_s(\chi; \eta_0) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{1s}(\eta_0 - \eta_s)/\eta_s}} \int_0^{\infty} W_s(\chi_1; \eta_s) \times \\
 & \times \exp \left[-\frac{k_{1s}^2}{2d_{1s}} (\eta_0 - \eta_s)/\eta_s - \frac{k_{1s}}{d_{1s}} (\chi - \chi_1) \right] \times \\
 & \times \left\{ \exp \left[-\frac{(\chi - \chi_1)^2 \eta_s}{2d_{1s}(\eta_0 - \eta_s)} \right] - \exp \left[-\frac{(\chi + \chi_1)^2 \eta_s}{2d_{1s}(\eta_0 - \eta_s)} \right] \right\} d\chi_1.
 \end{aligned}
 \tag{2.3.56}$$

Таким образом, это начальная плотность вероятности процесса (2.3.49) для отыскания решения уравнения (2.3.54) на интервале $\eta \in (\eta_0; 1]$. Приведем уравнение (2.3.54) на интервале $(\eta_0; 1]$ к каноническому виду. Для этого введем функцию $U_s(\chi; \eta)$ следующим образом:

$$W_s(\chi; \eta) = U_s(\chi; \eta) \exp \left[-\frac{k_{2s}^2 \eta}{2d_{2s} \eta_s} + \frac{k_{2s}}{d_{2s}} \chi \right]. \quad (2.3.57)$$

Подставляя (2.3.57) в (2.3.54), находим, что функция $U_s(\chi; \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U_s(\chi; \eta)}{\partial \eta} = \frac{d_{2s}}{2\eta_s} \cdot \frac{\partial^2 U_s(\chi; \eta)}{\partial \chi^2} \quad (2.3.58)$$

с граничными и начальными условиями

$$U_s(\chi; \eta)|_{\chi=0} = 0,$$

$$U_s(\chi; \eta)|_{\eta=\eta_0} = W_s(\chi; \eta_0) \exp \left[\frac{k_{2s}^2 \eta_0}{2d_{2s} \eta_s} - \frac{k_{2s}}{d_{2s}} \chi \right], \quad (2.3.59)$$

которые следуют из (2.3.55) и (2.3.57). Решение уравнения (2.3.58), аналогично (2.3.32), имеет вид [36, 43]

$$U_s(\chi; \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{2s} (\eta - \eta_0) / \eta_s}} \int_0^{\infty} U_s(\chi_1; \eta_0) \times \\ \times \left\{ \exp \left[-\frac{(\chi - \chi_1)^2 \eta_s}{2d_{2s} (\eta - \eta_0)} \right] - \exp \left[-\frac{(\chi + \chi_1)^2 \eta_s}{2d_{2s} (\eta - \eta_0)} \right] \right\} d\chi_1. \quad (2.3.60)$$

Подставим (2.3.56) в (2.3.59), затем (2.3.59) в (2.3.60), (2.3.60) - в (2.3.57), а последнее выражение при $\eta = 1$ в (2.3.53). Получаем для вероятности пропуска сигнала выражение

$$\beta(\eta_0) = \frac{\eta_s \exp \left[-\frac{k_{1s}^2 (\eta_0 - \eta_s) / \eta_s - \frac{k_{2s}^2 (1 - \eta_0) / \eta_s}{2d_{2s}} \right]}{2\pi \sqrt{d_{1s} d_{2s} (1 - \eta_0) (\eta_0 - \eta_s)}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \iiint_0^{\infty} W_s(\chi_1; \eta_s) \exp \left[-\frac{k_{1s}}{d_{1s}} (\chi_2 - \chi_1) - \frac{k_{2s}}{d_{2s}} (\chi_2 - \chi) \right] \times \\
& \times \left\{ \exp \left[-\frac{(\chi_2 - \chi_1)^2 \eta_s}{2d_{1s}(\eta_0 - \eta_s)} \right] - \exp \left[-\frac{(\chi_2 + \chi_1)^2 \eta_s}{2d_{1s}(\eta_0 - \eta_s)} \right] \right\} \times \\
& \times \left\{ \exp \left[-\frac{(\chi - \chi_2)^2 \eta_s}{2d_{2s}(1 - \eta_0)} \right] - \exp \left[-\frac{(\chi_2 + \chi)^2 \eta_s}{2d_{2s}(1 - \eta_0)} \right] \right\} d\chi d\chi_1 d\chi_2
\end{aligned} \tag{2.3.61}$$

Подставим теперь в (2.3.61) начальную плотность вероятности (2.3.52) и преобразуем результат к виду

$$\begin{aligned}
\beta(\eta_0) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{(x+z)^2 + \hat{c}^2 - 2cz}{2} \right] \left\{ \Phi \left[z_N \sqrt{\frac{1-\eta_0}{\eta_s}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + xA \sqrt{\frac{\eta_0}{1-\eta_0}} \right] - \exp \left[-2xAz_N \sqrt{\frac{\eta_0}{\eta_s}} \right] \Phi \left[z_N \sqrt{\frac{1-\eta_0}{\eta_s}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - xA \sqrt{\frac{\eta_0}{1-\eta_0}} \right] \right\} \left\{ \exp(\hat{c}x) \Phi \left[\hat{c} \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta_s}{\eta_s}} + x \sqrt{\frac{\eta_s}{\eta_0 - \eta_s}} \right] - \right. \\
& \left. - \exp(-\hat{c}x) \Phi \left[\hat{c} \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta_s}{\eta_s}} - x \sqrt{\frac{\eta_s}{\eta_0 - \eta_s}} \right] \right\} dx. \tag{2.3.62}
\end{aligned}$$

Здесь z_N определяется из (2.3.36), η_s и η_0 — из (2.1.37) и (2.2.36), $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности (2.2.44),

$$A^2 = d_{1s}/d_{2s} = (1+q)^2, \tag{2.3.63}$$

$$z^2 = k_{1s}^2 \eta_0 / \eta_s d_{1s} = S_1^2(\eta_0) / \sigma_1^2(\eta_0) = \mu [1 - \ln(1+q)/q]^2 \quad (2.3.64)$$

- ОСШ для принятого сигнала (2.2.53), а

$$\hat{c} = c / \sigma_1(\eta_0) = c \sqrt{\eta_s / d_{1s} \eta_0} = c / q \sqrt{\mu} = \bar{c} / A \sqrt{\eta_0 / \eta_s} \quad (2.3.65)$$

- нормированный порог, причем \bar{c} определяется из (2.3.37), а μ из (2.2.54) для низкочастотного сигнала и из (2.2.55) для высокочастотного сигнала.

Полученное выражение для вероятности пропуска сигнала с неизвестной шириной спектральной плотности довольно громоздкое. Его можно несколько упростить в частных случаях $\eta_s \ll 1$, $1 - \eta_0 \ll \eta_0$ и т.д. Укажем лишь, что при $\Omega_{\min} \rightarrow \Omega_{\max}$, т.е. когда априорный интервал возможных значений неизвестной эквивалентной полосы частот стягивается в точку, (2.3.62) принимает вид

$$\beta(1) = \beta_0 = \Phi[c / \sigma_1(1) - z], \quad (2.3.66)$$

что совпадает с вероятностью пропуска сигнала с априори известной эквивалентной полосой частот (2.2.63) при $\eta_0 = 1$. Формулу (2.3.66) легко получить из (2.3.62), положив в ней $\eta_s = 1$, $\eta_0 \rightarrow 1$. В частном случае слабого сигнала (2.2.45) в (2.3.62) следует положить

$$A \approx 1, \quad z_N \approx z \sqrt{\eta_s / \eta_0}, \quad \hat{c} = c / 2z \approx \bar{c} / \sqrt{\eta_0 / \eta_s},$$

и подставить ОСШ z из (2.2.58). В этом приближении вероятность пропуска зависит только от порога c и параметров z , η_s , η_0 .

2.3.2. Неизвестные величина и ширина спектральной плотности. Найдем характеристики МПО центрированного полосового сигнала с неизвестными величиной γ (1.2.16), (1.2.21) и эквивалентной полосой частот Ω (1.2.17), (1.2.22) спектральной плотности. По-прежнему полагаем, что спектральная плотность сигнала имеет вид (1.2.18) или (1.2.27) при подстановке в эти формулы (1.2.20) и кроме того, выполняется

(2.2.21).

В соответствии с определением, МПО должен вырабатывать максимизированный по γ логарифм ФОП (2.1.44), (2.1.45), (2.1.51). Опять используя нормированную эквивалентную полосу частот (2.3.33), логарифм ФОП представим в виде

$$\hat{L}(\eta) = \mu_{\min} \eta [L_I(\eta) - \ln L_I(\eta) - 1] / \eta_s, \quad \eta \in [\eta_s; 1]. \quad (2.3.67)$$

Здесь

$$L_I(\eta) = L_I(\Omega) \Big|_{\Omega=\eta\Omega_{\max}}, \quad (2.3.68)$$

а μ_{\min} определяется из (2.2.17) для широкополосного, и из (2.2.18) - для узкополосного сигналов. В (2.3.68), согласно (2.1.44), (2.1.45),

$$L_I(\Omega) = \frac{4}{T\Omega N_0} \int_0^{\Omega/2} |x(\omega)|^2 d\omega = \frac{4\pi}{T\Omega N_0} \int_0^T y_I^2(t, \Omega) dt$$

- для широкополосного сигнала и, согласно (2.1.51),

$$L_I(\Omega) = \frac{2}{T\Omega N_0} \int_{\nu-\Omega/2}^{\nu+\Omega/2} |x(\omega)|^2 d\omega = \frac{2\pi}{T\Omega N_0} \int_0^T y_I^2(t, \Omega) dt$$

- для узкополосного сигнала.

Положим, что верна гипотеза H_0 (сигнал отсутствует) и обозначим

$$\hat{L}_0(\eta) = \hat{L}(\eta|H_0), \quad L_{0I}(\eta) = L_I(\eta|H_0). \quad (2.3.69)$$

При выполнении (2.2.21), случайный процесс $L_{0I}(\eta)$ приближенно гауссовский, причем его регулярная составляющая

$$\langle L_{0I}(\eta) \rangle = 1. \quad (2.3.70)$$

Обозначая

$$N_{0I}(\eta) = L_{0I}(\eta) - 1 \quad (2.3.71)$$

- шумовая функция, найдем для нее корреляционную функцию. Аналогично (2.2.33) и (2.3.3) получим

$$B_{NOI}(\eta_1, \eta_2) = \langle N_{OI}(\eta_1) N_{OI}(\eta_2) \rangle = \eta_s \min(\eta_1, \eta_2) / \eta_1 \eta_2 \mu_{\min} \quad (2.3.72)$$

Введем в рассмотрение величину

$$\epsilon = 1/\sqrt{\mu_{\min}}, \quad (2.3.73)$$

которая при выполнении (2.2.21) является малым параметром. Используя (2.3.70)+(2.3.73), перепишем (2.3.69) как

$$L_{OI}(\eta) = 1 + \epsilon N_O(\eta). \quad (2.3.74)$$

Здесь $N_O(\eta) = N_{OI}(\eta) \sqrt{\mu_{\min}}$ - нормированная шумовая функция, первые два момента которой

$$\langle N_O(\eta) \rangle = 0, \quad \langle N_O^2(\eta) \rangle = \eta_s / \eta \leq 1. \quad (2.3.75)$$

Подставляя (2.3.74) в выражение для логарифма ФОП (2.3.67), получаем (2.3.69) в форме

$$\hat{L}_O(\eta) = \mu_{\min} \eta (\epsilon N_O(\eta) - \ln[1 + \epsilon N_O(\eta)]) / \eta_s. \quad (2.3.76)$$

Учитывая (2.2.21) и (2.3.75), разложим (2.3.76) в ряд Маклорена по ϵ до первого члена разложения, зависящего от реализации наблюдаемых данных включительно. Имеем

$$\hat{L}_O(\eta) = \eta N_O^2(\eta) / 2\eta_s + O(\epsilon) = \eta N_{OI}^2(\eta) \mu_{\min} / 2\eta_s + O(\epsilon).$$

Отбрасывая члены разложения порядка ϵ и менее, учитывая асимптотически гауссовский характер $N_{OI}(\eta)$ и (2.3.72), можем аппроксимировать логарифм ФОП выражением

$$\hat{L}_O(\eta) \approx w^2(\eta) / 2\eta = \chi(\eta). \quad (2.3.77)$$

Здесь $w(\eta)$ - стандартный винеровский процесс [37, 41, 43 и др.], т.е. $w(\eta)$ - гауссовский случайный процесс, для которого

$$\langle w(\eta) \rangle = 0, \quad \langle w(\eta_1) w(\eta_2) \rangle = \min(\eta_1, \eta_2). \quad (2.3.78)$$

Из (2.3.78) и (2.3.77) получаем, что случайный процесс $\chi(\eta)$ обладает плотностью вероятности [41]

$$W(\chi) = \exp(-\chi) / \sqrt{\pi\chi}, \quad \chi \geq 0 \quad (2.3.79)$$

и коэффициентом корреляции (1.2.8)

$$R_\chi = [\min(\eta_1, \eta_2)]^2 / \eta_1 \eta_2. \quad (2.3.80)$$

Перейдем в (2.3.77) и (2.3.80) от η к новому аргументу

$$t = \ln(\eta).$$

Тогда случайный процесс

$$x(t) = \chi[\exp(t)], \quad t \in [\ln(\eta_s); 0] \quad (2.3.81)$$

описывается плотностью вероятности (2.3.79) и обладает коэффициентом корреляции вида

$$R_x(t_1, t_2) = \exp(-|t_1 - t_2|). \quad (2.3.82)$$

Учитывая (2.3.77), (2.3.81) и определение вероятности ложной тревоги (2.2.38), можем записать

$$\alpha = P[\sup_{\eta \in [\eta_s; 1]} \hat{L}_0(\eta) > c] = P[\sup_{t \in [\ln(\eta_s); 0]} x(t) > c] = 1 - P_N(c), \quad (2.3.83)$$

где

$$P_N(c) = P[x(t) < c], \quad t \in [\ln(\eta_s); 0]. \quad (2.3.84)$$

Асимптотически точное (при $c \rightarrow \infty$) выражение для вероятности (2.3.84) можно получить как частный случай более общей задачи, рассмотренной в [45, 48].

Пусть $x(t), t \in [T_1; T_2]$ - стационарный случайный процесс с плотностью вероятности

$$W(x) = x^{v-1} \exp(-x) / \Gamma(v), \quad v > 0 \quad (2.3.85)$$

и коэффициентом корреляции $R(\Delta)$, который при $\Delta \rightarrow 0$ допускает представление

$$R(\Delta) = 1 - \delta|\Delta| + o(|\Delta|), \quad \delta > 0. \quad (2.3.86)$$

Тогда для вероятности

$$P_v(c) = P[x(t) < c], \quad t \in [T_1; T_2]$$

имеет место аппроксимация [45, 48]

$$P_v(c) = \begin{cases} \exp[-\tilde{m}^v \exp(-c)/\Gamma(v)], & c > v, \\ 0, & c < v, \end{cases} \quad (2.3.87)$$

где $\tilde{m} = \delta(T_2 - T_1)$, а $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция [15].

Точность этой аппроксимации возрастает с увеличением c и \tilde{m} . Полагая в (2.3.87), как это следует из (2.3.79), (2.3.81) и (2.3.82), $v=1/2$, $\delta=1$, $\tilde{m} = -\ln(\eta_s)$, получаем приближенное выражение для вероятности (2.3.84). Подставив это выражение в (2.3.83), имеем для вероятности ложной тревоги аппроксимацию

$$\alpha \approx \begin{cases} 1 - \eta_s^{\sqrt{c/\pi} \exp(-c)}, & c > 1/2, \\ 1, & c < 1/2. \end{cases} \quad (2.3.88)$$

Точность этой аппроксимации возрастает с уменьшением η_s (2.1.37) и увеличением порога c , т.е. с уменьшением величины вероятности ложной тревоги. Отметим также, что в рассматриваемом приближении вероятность ложной тревоги (2.3.88) не зависит от величины μ_{\min} (2.2.17), (2.2.18), если только выполняется (2.2.21), а также от типа обнаруживаемого сигнала - широкополосный или узкополосный.

При $c \gg 1$ (2.3.88) несколько упрощается и принимает вид

$$\alpha \approx -\sqrt{c/\pi} \exp(-c) \ln(\eta_s). \quad (2.3.89)$$

Положим теперь, что полосовой стохастический сигнал с неизвестными величиной γ_0 и эквивалентной полосой частот Ω_0 спектральной плотности присутствует

на входе МПО (верна гипотеза H_1). Обозначим

$$\hat{L}(\eta|H_1) = \hat{L}_I(\eta), \quad L_I(\eta|H_1) = L_{II}(\eta) \quad (2.3.90)$$

и представим последнюю функцию аналогично (2.2.22) в виде

$$L_{II}(\eta) = S_{II}(\eta) + N_{II}(\eta). \quad (2.3.91)$$

Здесь

$$S_{II}(\eta) = \langle L_{II}(\eta) \rangle = 1 + q_0 \min(\eta, \eta_0) / \eta \quad (2.3.92)$$

- сигнальная функция, а шумовая функция

$$N_{II}(\eta) = L_{II}(\eta) - \langle L_{II}(\eta) \rangle \quad (2.3.93)$$

обладает корреляционной функцией

$$B_{N_{II}}(\eta_1, \eta_2) = \eta_s [\min(\eta_1, \eta_2, \eta_0) q_0 (2 + q_0) + \min(\eta_1, \eta_2)] / \eta_1 \eta_2 \mu_{\min}. \quad (2.3.94)$$

В (2.3.92), (2.3.94)

$$q_0 = 2\gamma_0 / N_0 \quad (2.3.95)$$

- для широкополосного сигнала и

$$q_0 = \gamma_0 / N_0 \quad (2.3.96)$$

- для узкополосного сигнала, где γ_0 - величина спектральной плотности (1.2.16) или (1.2.21) для принятого сигнала. Введем нормированную шумовую функцию

$N_I(\eta) = N_{II}(\eta) \sqrt{\mu_{\min}}$, два первых момента которой

$$\langle N_I(\eta) \rangle = 0, \quad \langle N_I^2(\eta_0) \rangle = \eta_s (1 + q_0)^2 / \eta_0. \quad (2.3.97)$$

Полагаем, что величина q_0 конечна, т.к. в противном случае задача обнаружения становится сингулярной

[22, 37, 45 и др.]. Выразим (2.3.91) через нормированную шумовую функцию $L_{II}(\eta) = S_{II}(\eta) + \epsilon N_I(\eta)$ и подставим в (2.3.67). Получим (2.3.90) как функцию малого параметра (2.3.73)

$$\hat{L}_I(\eta) = \mu_{\min} \eta \left\{ S_{II}(\eta) - 1 + \epsilon N_I(\eta) - \right. \\ \left. - \ln \left[S_{II}(\eta) + \epsilon N_I(\eta) \right] \right\} / \eta_s. \quad (2.3.98)$$

Учитывая (2.2.21) и (2.3.97), разложим (2.3.98) в ряд Маклорена по ϵ до первого члена разложения, зависящего от реализации наблюдаемых данных включительно. Возвращаясь к ненормированной шумовой функции (2.3.93), имеем

$$\hat{L}_I(\eta) = \hat{S}_I(\eta) + \hat{N}_I(\eta), \quad (2.3.99)$$

где

$$\hat{S}_I(\eta) = \langle \hat{L}_I(\eta) \rangle = \mu_{\min} \eta \left[S_{II}(\eta) - 1 - \ln S_{II}(\eta) \right] / \eta_s = \\ = \mu_{\min} \left\{ q_0 \min(\eta, \eta_0) - \eta \ln \left[1 + q_0 \min(\eta, \eta_0) / \eta \right] \right\} / \eta_s \quad (2.3.100)$$

- сигнальная функция, а шумовая функция

$$\hat{N}_I(\eta) = \mu_{\min} \eta \left[S_{II}(\eta) - 1 \right] N_{II}(\eta) / S_{II}(\eta) \eta_s.$$

Эта шумовая функция при выполнении (2.2.21) является приближенно гауссовской и обладает корреляционной функцией

$$B_{N_I}(\eta_1, \eta_2) = (1 + q_0)^2 B_{N_{II}}(\eta_1, \eta_2) \min(\eta_1, \eta_0) \min(\eta_2, \eta_0) \times \\ \times \left\{ \left[\eta_1 + q_0 \min(\eta_1, \eta_0) \right] \left[\eta_2 + q_0 \min(\eta_2, \eta_0) \right] \right\}^{-1}. \quad (2.3.101)$$

Здесь $B_{N1}(\eta_1, \eta_2)$ определяется формулой (2.3.43) при замене в ней q на q_0 .

В соответствии с определением (2.2.39) вероятность пропуска полосового сигнала с неизвестными величиной и шириной спектральной плотности запишем как

$$\beta(\eta_0) = P\left[\sup_{\eta \in [\eta_s; 1]} \hat{L}_1(\eta) < c\right] = P\left[\hat{L}_1(\hat{\eta}) < c\right], \quad (2.3.102)$$

где

$$\hat{\eta} = \arg \sup_{\eta \in [\eta_s; 1]} \hat{L}_1(\eta), \quad (2.3.103)$$

— ОМП нормированной эквивалентной полосы частот η_0 .

Введем в рассмотрение ОСШ для принятого сигнала

$$z^2 = \hat{S}_1^2(\eta_0) / B_{N1}(\eta_0, \eta_0) = \mu [1 - \ln(1 + q_0) / q_0]^2, \quad (2.3.104)$$

которое совпадает с ОСШ (2.3.64) при обнаружении полосового сигнала с известной величиной и неизвестной шириной спектральной плотности, если в (2.3.64) заменить q на q_0 . Из (2.3.104) следует, что при $q_0 > 0$ и $\mu \rightarrow \infty$, ОСШ $z \rightarrow \infty$. Следовательно, условие (2.2.21) при не слишком малых q_0 обеспечивает большую величину ОСШ.

Известно [50, 54], что при $z \rightarrow \infty$, ОМП $\hat{\eta} \rightarrow \eta_0$ в среднеквадратическом. Поэтому при больших ОСШ z (2.3.104) для расчета вероятности пропуска сигнала (2.3.102) достаточно исследовать поведение $\hat{L}_1(\eta)$ (2.3.99) в малой окрестности η_0 [45]. Обозначим

$$\Delta = \max\left\{|\eta_1 - \eta_0|, |\eta_2 - \eta_0|, |\eta - \eta_0|\right\}. \quad (2.3.105)$$

При $\Delta \rightarrow 0$ для функций (2.3.100) и (2.3.101) получаем

асимптотические разложения

$$\hat{S}_1(\eta) = S_1(\eta) + o(\Delta), \quad (2.3.106)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{N1}(\eta_1, \eta_2) = & B_{N1}(\eta_1, \eta_2) - \mu q_0^2 [\eta_1 + \eta_2 - \min(\eta_1, \eta_0) - \\ & - \min(\eta_2, \eta_0)] / \eta_0 (1 + q_0) + o(\Delta), \end{aligned} \quad (2.3.107)$$

где $S_1(\eta)$ и $B_{N1}(\eta_1, \eta_2)$ определяются формулами (2.3.42), (2.3.43) при замене в них q на q_0 .

В силу (2.2.21) логарифм ФОП (2.3.99) является асимптотически гауссовским процессом. Кроме того, главные члены асимптотических разложений (2.3.106), (2.3.107) кусочно-дифференцируемы. Следовательно, в малой окрестности η_0 для логарифма ФОП выполняется (2.3.19). Если к тому же выполняется (2.3.20), то логарифм ФОП в рассматриваемом случае будет гауссовским марковским диффузионным процессом [43, 67]. Найдем его коэффициенты сноса и диффузии и одновременно проверим выполнение (2.3.20). Подставляя главные члены асимптотических разложений (2.3.106) и (2.3.107) в (2.3.17) и (2.3.18), имеем

$$\begin{aligned} & K_1[\hat{L}, \eta | H_1] = \\ & = \frac{\mu_{\min}}{\eta_s} \begin{cases} q_0^{-1} \ln(1 + q_0), & \eta_s \leq \eta \leq \eta_0, \\ -\{[(1 + q_0) \ln(1 + q_0) - q_0] / (1 + q_0)\} \times \\ \times [1 + \kappa(\eta)], & \eta_0 < \eta \leq 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.108)$$

$$K_2[\hat{L}, \eta | H_1] = K_2[L, \eta | H_1]. \quad (2.3.109)$$

Здесь $K_2[L, \eta | H_1]$ определяется формулой (2.3.45) при замене в ней q на q_0 , а

$$\kappa(\eta) = \frac{[\hat{L}_1(\eta) - S_1(\eta)] \eta_0 (1+q_0)^2}{\mu [\eta_0 (1+q_0)^2 - (1+2q_0)(\eta - \eta_0)] [(1+q_0) \ln(1+q_0) - q_0] - q_0^2 (\eta + q_0 \eta_0)^2} \quad (2.3.110)$$

Используя (2.3.100) и (2.3.101), находим два первых момента случайного процесса (2.3.110)

$$\begin{aligned} \langle \kappa(\eta) \rangle &= 0, \quad \langle \kappa^2(\eta) \rangle = \eta_0^3 (1+q_0)^4 q_0^2 [\eta + (q_0^2 + 2q_0) \eta_0] \{ \mu [\eta_0 (1+q_0)^2 - (1+2q_0)(\eta - \eta_0)]^2 [(1+q_0) \ln(1+q_0) - q_0] - q_0^2 (\eta + q_0 \eta_0)^2 \}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.3.111)$$

Согласно (2.3.101) и (2.3.111) при $\mu \rightarrow \infty$, $\langle \kappa^2(\eta) \rangle \rightarrow 0$.

При больших ОСШ (2.3.104) основной интерес представляет поведение характеристик логарифма ФАП в малой окрестности точки η_0 , где

$$\langle \kappa^2(\eta_0) \rangle = q_0^2 / \mu [(1+q_0) \ln(1+q_0) - q_0]^2. \quad (2.3.112)$$

Таким образом, из (2.3.108), (2.3.111) и (2.3.112) следует, что при больших значениях μ и z коэффициент сноса логарифма ФАП (2.3.99) можно аппроксимировать как

$$K_1[\hat{L}, \eta | H_1] = K_1[L, \eta | H_1], \quad (2.3.113)$$

где $K_1[L, \eta | H_1]$ определяется формулой (2.3.44) при замене в ней q на q_0 (2.3.95) или (2.3.96).

Поскольку [50, 54], при $z \rightarrow \infty$ ОМП $\hat{\eta} \rightarrow \eta_0$ в среднеквадратическом, то величина вероятности пропуска (2.3.102) определяется, при больших ОСШ z (2.3.104), поведением характеристик логарифма ФАП в малой окрестности η_0 [45]. Поэтому, при аппроксимации

этих характеристик необходимо обеспечить высокую точность аппроксимации в указанной окрестности. Точность аппроксимации характеристик логарифма ФОН за пределами малой окрестности η_0 не играет большой роли. В сущности, в пределе при $z \rightarrow \infty$, аппроксимация характеристик логарифма ФОН за пределами малой окрестности η_0 может быть произвольной. Естественно, подобная аппроксимация всегда должна быть физически обоснованной и не противоречить физическому смыслу соответствующих характеристик логарифма ФОН.

Аппроксимация сигнальной функции (2.3.100) и корреляционной функции шумовой функции (2.3.101) главными членами асимптотических разложений (2.3.106) и (2.3.107) соответственно, обладают высокой точностью в малой окрестности η_0 . Точность этих аппроксимаций возрастает с уменьшением размеров этой окрестности, т.е. с ростом ОСШ (2.3.104). Аналогичными свойствами обладают аппроксимации коэффициентов сноса и диффузии (2.3.113) и (2.3.109) соответственно. Далее, при выполнении (2.2.21) и больших значениях ОСШ (2.3.104) будем использовать аппроксимации (2.3.106), (2.3.107), (2.3.109), (2.3.113) на всем априорном интервале возможных значений неизвестной нормированной эквивалентной полосы частот $\eta \in \{\eta_s; 1\}$.

Тогда начальная плотность вероятности логарифма ФОН будет определяться формулой (2.3.46) при замене в ней q на q_0 (2.3.95), (2.3.96). В результате, вероятность пропуска полосового сигнала с неизвестными величиной и шириной спектральной плотности получаем в виде (2.3.62), где следует заменить q на q_0 (2.3.95), (2.3.96). Таким образом, при больших μ_{\min} и z , незнание величины спектральной плотности при неизвестной ее ширине, изменяя вероятность ложной тревоги, не влияет на вероятность пропуска сигнала.

ГЛАВА 3.

СТАЦИОНАРНЫЕ УЗКОПОЛОСНЫЕ СИГНАЛЫ С
НЕИЗВЕСТНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТОТОЙ

3.1. Синтез алгоритмов обнаружения

Найдем структуру МПД для узкополосного стационарного гауссовского стохастического сигнала с неизвестной центральной частотой спектральной плотности. Пусть спектральная плотность стохастического сигнала имеет вид (1.2.27), где центральная частота

$$\nu \in [\nu_{\min}; \nu_{\max}] \quad (3.1.1)$$

и априори неизвестна, причем

$$\Omega \ll \nu_{\min}$$

Подставляя (1.2.27) в (2.1.11) и (2.1.27), находим логарифм ФОР

$$L(\nu) = \frac{1}{N} \int_0^T y^2(t, \nu) dt - \frac{T\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[1 + qg(x)] dx. \quad (3.1.2)$$

Здесь $y(t, \nu)$ - отклик на реализацию наблюдаемых данных $x(t)$ фильтра, передаточная функция которого выбирается из соотношения

$$|H(\omega, \nu)|^2 = g_1[(\nu - \omega)/\Omega] + g_2[(\nu + \omega)/\Omega], \quad (3.1.3)$$

$g_1(\cdot)$ определяется формулой (2.1.30) при подстановке в нее (2.1.48). Согласно (3.1.2), МПО узкополосного сигнала с неизвестной частотой опять можно реализовать, как это показано на рис.2.1. Необходимо лишь в этой функциональной схеме использовать фильтры, пе-

редаточные функции которых удовлетворяют условию

$$|H(\omega, \nu_k)|^2 = g_1[(\nu_k - \omega)/\Omega] + g_1[(\nu_k + \omega)/\Omega] \quad (3.1.4)$$

и положить

$$L_{ck} = L_{co} = \frac{\Gamma\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[1 + qg(x)] dx. \quad (3.1.5)$$

В силу (3.1.5) сумматоры на рис. 2.1. при обнаружении сигнала с неизвестной частотой можно исключить, увеличив порог решающего устройства на величину L_{co} .

Центральные частоты ν_k фильтров (3.1.4) обычно предполагают равномерно в интервале (3.1.1).

Еще один вариант реализации МПО сигнала с неизвестной частотой можно получить, используя последовательный спектральный анализатор. Подставляя (1.2.20) в (2.1.11), а (2.1.11) в (2.1.13), получаем

$$L(\nu) = \frac{1}{2\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} [g_1\left(\frac{\nu - \omega}{\Omega}\right) + g_1\left(\frac{\nu + \omega}{\Omega}\right)] |x(\omega)|^2 d\omega - L_{co}. \quad (3.1.6)$$

Или, учитывая (3.1.1) и свойства преобразования Фурье,

$$L(\nu) = \frac{1}{\pi N_0} \int_0^{\infty} g_1\left(\frac{\nu - \omega}{\Omega}\right) |x(\omega)|^2 d\omega - L_{co}. \quad (3.1.7)$$

Как следует из (1.2.19), $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Поэтому всегда существует такое r , что при $|x| > r/2$, $g(x) \ll 1$ и можно считать

$$g(\pm r/2) = 0. \quad (3.1.8)$$

Тогда, очевидно, функция $g[(\nu - \omega)/\Omega]$ при всех ν (3.1.1) может заметно отличаться от нуля только в диапазоне частот

$$\nu_{\min} - r\Omega/2 \leq \omega \leq \nu_{\max} + r\Omega/2. \quad (3.1.9)$$

Полагая, что периодограмма (2.1.35) вырабатывается

последовательным спектральным анализатором, перепишем член в (3.1.7), зависящий от наблюдаемых данных, как

$$L_x(\nu) = \frac{T}{\pi N_0} \int_{\nu_{\min} - r\Omega/2}^{\nu_{\max} + r\Omega/2} g_1 \left[\frac{\nu - \omega(t)}{\Omega} \right] S_T[\omega(t)] d\omega(t). \quad (3.1.10)$$

Это выражение позволяет представить функциональную схему МПО сигнала с неизвестной частотой, как показано на рис. 3.1. Спектральный анализатор (ПС) на рис. 3.1

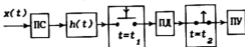


Рис. 3.1. Обнаружитель сигнала с неизвестной частотой: ПС — последовательный спектральный анализатор; ПД — пиковый детектор; ПУ — пороговое устройство.

формирует периодограмму (2.1.35) в диапазоне частот (3.1.9) как функцию текущего времени t при

$$\omega(t) = \nu_{\min} - r\Omega/2 + (\nu_{\max} - \nu_{\min} + r\Omega)t/\Delta t, \quad t \in [0; \Delta t].$$

Периодограмма поступает на линейный фильтр с импульсной переходной функцией

$$h(t) = \frac{T}{\pi N_0} g_1 \left[\frac{(\nu_{\max} - \nu_{\min} + r\Omega)t}{\Omega \Delta t} - \frac{r}{2} \right] \frac{(\nu_{\max} - \nu_{\min} + r\Omega)}{\Delta t},$$

а затем на пиковый детектор (ПД), который определяет наибольший максимум входного сигнала на интервале времени $[t_1; t_2]$

$$t_1 = \frac{\Delta t r \Omega}{(\nu_{\max} - \nu_{\min} + r\Omega)}, \quad t_2 = \Delta t.$$

Порог в пороговом устройстве (ПУ) должен быть увеличен на постоянную величину L_{co} (3.1.5).

Отметим, что логарифм ФОП (3.1.7) с точностью до несущественного постоянного множителя совпадает с оценкой спектральной плотности наблюдаемых данных $x(t)$ методом спектрального окна [28]. При этом форму спектрального окна определяет функция $g_1(\omega/\Omega)$.

Следовательно, для реализации МПО сигнала с неизвестной частотой можно использовать спектранализаторы (последовательные или параллельные) с соответствующей формой спектрального окна, если дополнить их решающим устройством. Однако, как и при обнаружении широкополосного сигнала, применение последовательного спектранализатора существенно увеличивает время принятия решения.

Конкретизируем найденную структуру МПО для полосового узкополосного сигнала со спектральной плотностью (1.2.20), (1.2.27) и неизвестной центральной частотой. Подставляя (1.2.20) в (2.1.30), а (2.1.30) в (3.1.3), перепишем логарифм ФОП (3.1.2) как

$$L(v) = qL_I(v)/(1+q) - T\Omega \ln(1+q)/2\pi \quad (3.1.11)$$

Здесь

$$L_I(v) = \int_0^T y_I^2(t, v) dt / N_0, \quad (3.1.12)$$

а $y_I(t, v)$ - отклик на реализацию наблюдаемых данных $x(t)$ фильтра, передаточная функция $H_I(\omega, v)$ которого удовлетворяет соотношению

$$|H_I(\omega, v)|^2 = I[(v-\omega)/\Omega] + I[(v+\omega)/\Omega]. \quad (3.1.13)$$

Поскольку всегда $q \neq 0$ (2.1.48), то согласно (3.1.11), (3.1.12) многоканальную функциональную схему МПО полосового узкополосного сигнала можно несколько упростить. Один канал такой схемы показан на рис. 3.2, где используется фильтр с передаточной

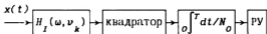


Рис. 3.2. Канал многоканального обнаружителя узкополосного полосового сигнала с неизвестной частотой: РУ — решающее устройство.

функцией $H_I(\omega, \nu_k)$ (3.1.13), а порог в решающем устройстве (РУ) $\bar{c} = (1+q)(c+L_{c0})/q$. Действительно, на вход решающего устройства поступает $L_I(\nu_k)$ (3.1.12), а не (3.1.11) как в функциональной схеме рис.2.1, что требует соответствующего изменения порога \bar{c} . Отметим, так же, что при использовании, например, критерия Неймана-Пирсона, порог \bar{c} в решающем устройстве схемы рис.3.2 не зависит от величины спектральной плотности сигнала $\gamma(q)$ (1.2.27). Действительно, в этом случае, порог выбирается по заданной величине вероятности ложной тревоги (1.3.13). Эта вероятность вычисляется, когда сигнал отсутствует и вероятностные свойства (3.1.12) не зависят от величины спектральной плотности сигнала.

Для полосового узкополосного сигнала (3.1.6) также можно переписать в виде (3.1.11), где теперь

$$L_I(\nu) = \frac{1}{\pi N_0} \int_{\nu-\Omega/2}^{\nu+\Omega/2} |x(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.1.14)$$

Это выражение позволяет преобразовать функциональную схему рис.3.1 к виду, показанному на рис.3.3. Последовательный спектральный анализатор (ПС) на этой схеме работает также как на рис.3.1 при $r=1$; линия задержки (ЛЗ) задерживает сигнал на время

$$\Delta = \Delta t \Omega / (\nu_{\max} - \nu_{\min} + \Omega),$$

а пиковый детектор (ПД) определяет наибольший макси-

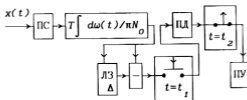


Рис. 3.3. Обнаружитель полосового узкополосного сигнала: ПС — последовательный спектральный анализатор; ЛЗ — линия задержки; ПД — пиковый детектор; ПУ — пороговое устройство.

мум на интервале $[t_1; t_2]$, причем, в отличие от схемы рис. 3.1,

$$t_1 = \frac{\Delta t \Omega}{(\nu_{\max} - \nu_{\min} + \Omega)}, \quad t_2 = \Delta t.$$

В пороговом устройстве (ПУ) порог выбирается так же, как в решающем устройстве схемы рис. 3.2.

Положим далее, что стохастический сигнал со спектральной плотностью (1.2.27) зависит от двух неизвестных параметров: центральной частоты ν и величины спектральной плотности γ . Тогда МПО должен вырабатывать логарифм ФОН как функцию двух неизвестных параметров $\theta = \|\gamma, \nu\|$. При этом, согласно (2.1.48), незнание величины спектральной плотности γ равносильно незнанию параметра q в (3.1.2) и (3.1.7). Следовательно, при неизвестных центральной частоте и величине спектральной плотности (1.2.27) МПО опять можно реализовать с помощью функциональной схемы рис. 2.1. Для этого необходимо использовать фильтры с передаточными функциями $H(\omega, \nu_k, q_k)$, которые удовлетворяют условию

$$|H(\omega, \nu_k, q_k)|^2 = g_{11} [(\nu_k - \omega)/\Omega] + g_{11} [(\nu_k + \omega)/\Omega], \quad (3.1.15)$$

$$g_{1i}(x) = q_i g(x) / [1 + q_i g(x)], \quad (3.1.16)$$

а на сумматоры вместо (3.1.5) подавать сигналы

$$L_{ckl} = \frac{\pi \Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[1 + q_i g(x)] dx. \quad (3.1.17)$$

В (3.1.15)...(3.1.17), так же как в (2.1.38), (2.1.39), $k=1, n$, $l=1, n_1$ и общее число каналов МПО равно $n \cdot n_1$. Существенно сократить требуемое число каналов можно при обнаружении полосового узкополосного сигнала со спектральной плотностью (1.2.20), (1.2.27). В этом случае, МПО, использующий критерий Неймана-Пирсона, может быть реализован посредством n -канальной функциональной схемы. Один канал этой схемы показан на рис. 3.2. Наконец, положим, что допустимо увеличение времени вынесения решения до $\Delta t \gg T$. Тогда МПО полосового узкополосного сигнала с неизвестными центральной частотой и величиной спектральной плотности можно реализовать посредством функциональной схемы рис. 3.3. Таким образом, при использовании критерия Неймана-Пирсона, МПО рис. 3.1 и 3.3 инвариантны к величине спектральной плотности полосового узкополосного стохастического сигнала. Они могут применяться как при известной, так и при неизвестной величине γ спектральной плотности (1.2.20), (1.2.27).

3.2. Регулярный сигнал с неизвестной центральной частотой спектральной плотности

Найдем характеристики МПО стационарного гауссовского узкополосного стохастического сигнала, центральная частота ν спектральной плотности которого (1.2.27) априори неизвестна и принимает значения из интервала (3.1.1). В этом случае, логарифм ФОР имеет вид (3.1.2) или (3.1.7), причем слагаемое (3.1.5) не

зависит от реализации наблюдаемых данных. Поэтому, согласно АМП, с порогом ϵ можно сравнивать абсолютный (наибольший) максимум члена (3.1.10) логарифма ФОП (3.1.2), (3.1.7), зависящего от наблюдаемых данных. Таким образом, здесь в качестве логарифма ФОП рассматривается его член (2.1.26), (3.1.10), зависящий от наблюдаемых данных и неизвестной центральной частоты спектральной плотности узкополосного стохастического сигнала. Как и ранее, полагаем, что выполняется (2.2.21).

Пусть верна гипотеза H_0 (сигнал отсутствует). Аналогично (2.2.37) представим логарифм ФОП как

$$L_x(\nu | H_0) = L_{0x}(\eta) = S_0(\eta) + N_0(\eta). \quad (3.2.1)$$

Здесь

$$S_0(\eta) = \langle L_{0x}(\eta) \rangle$$

— регулярная, а $N_0(\eta)$ (2.2.24) — флуктуирующая составляющая логарифма ФОП. Подставляя (1.2.27) в (2.2.12) и (2.2.31), получаем, опуская последнее слагаемое в (2.2.12) и учитывая (1.2.23)

$$S_0(\eta) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} qg(x) [1 + qg(x)]^{-1} dx = S_0, \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned} B_{H_0}(\eta_1, \eta_2) &= \mu q^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x - \eta_1)g(x - \eta_2) dx}{[1 + qg(x - \eta_1)][1 + qg(x - \eta_2)]} = \\ &= \mu q^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)g(x + \eta_2 - \eta_1) dx}{[1 + qg(x)][1 + qg(x + \eta_2 - \eta_1)]} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\eta = \nu / \Omega \quad (3.2.4)$$

— нормированная частота, которая принимает значения из интервала

$$\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}], \quad (3.2.5)$$

$$\eta_{\min} = \nu_{\min} / \Omega, \quad \eta_{\max} = \nu_{\max} / \Omega,$$

аналогично (2.2.55)

$$\mu = T\Omega / 2\pi, \quad (3.2.6)$$

а q определяется из (2.1.48).

Так же, как в п.2.2, узкополосный стохастический сигнал со спектральной плотностью (1.2.27) будем называть регулярным, если функция $g(\cdot)$ (1.2.20), описывающая форму спектральной плотности, непрерывно дифференцируема хотя бы дважды.

Согласно (2.2.21) и (3.2.2), (3.2.3), логарифм ФОП (3.2.1) представляет собой гауссовский стационарный случайный процесс с математическим ожиданием (3.2.2) и коэффициентом корреляции (1.2.8)

$$R_{NO}(\Delta) = B_{NO}(\eta_2 - \eta_1) / \sigma_0^2 = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)g(x+\Delta)dx}{[1+qg(x)][1+qg(x+\Delta)]} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{g(x)}{1+qg(x)} \right]^2 dx \right\}^{-1}, \quad (3.2.7)$$

где $\Delta = \eta_2 - \eta_1$, а

$$\sigma_0^2 = \mu q^2 \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) / [1+qg(x)]]^2 dx$$

— дисперсия логарифма ФОП (3.2.1). Из (3.2.7) и свойств функции $g(\cdot)$ (1.2.19) следует, что при $\Delta \rightarrow \infty$, $R_{NO}(\Delta) \rightarrow 0$. Поэтому можно считать, аналогично [45], что с увеличением порога c , распределение числа выбросов за уровень c реализаций логарифма ФОП (3.2.1) в интервале (3.2.5) сходится к закону Пуассона [17, 40, 44, 70]. Это позволяет для расчета вероятности ложной тревоги непосредственно использовать результаты [45]. Действительно, запишем согласно определению (2.2.38), вероятность ложной тревоги

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left\{ \sup_{\nu \in [\nu_{\min}; \nu_{\max}]} L_x(\nu) > c \mid H_0 \right\} = P\left\{ \sup_{\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]} L_{0x}(\eta) > c \right\} = \\ &= P\left\{ \sup_{\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]} \tilde{N}_0(\eta) > u \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Здесь

$$u = (c - S_0) / \sigma_0 \quad (3.2.9)$$

- нормированный и центрированный порог,

$$\tilde{N}_0(\eta) = N_0(\eta) / \sigma_0 \quad (3.2.10)$$

- нормированная шумовая функция, для которой $\langle \tilde{N}_0^2(\eta) \rangle = 1$, а ее корреляционная функция совпадает с коэффициентом корреляции логарифма ФОН (3.2.7).

Установленные свойства шумовой функции $\tilde{N}_0(\eta)$, а именно: гауссовость, стационарность и регулярность - полностью совпадают со свойствами нормированной шумовой функции при приеме квазидетерминированного сигнала с неизвестным неэнергетическим параметром [19, 45, 61]. В результате, асимптотически точное выражение для вероятности ложной тревоги (3.2.8) получаем как частный случай [45]

$$\alpha = \begin{cases} 1 - \exp[-\xi \exp(-u^2/2)/2\pi], & u \geq 0, \\ 1, & u < 0. \end{cases} \quad (3.2.11)$$

Здесь

$$\xi = \left\{ \frac{\partial^2 B_{NO}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} / B_{NO}(\eta, \eta) \right\}_{\eta}^{1/2} =$$

$$= m \left[-d^2 R_{No}(\Delta)/d\Delta^2 \right]_{\Delta=0}^{1/2} =$$

$$= m \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[dg(x)/dx]^2}{[1+qg(x)]^4} dx \right\} / \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{g(x)}{1+qg(x)} \right]^2 dx \right\}^{1/2} \quad (3.2.12)$$

– приведенная длина априорного интервала (3.1.1) возможных значений неизвестной центральной частоты спектральной плотности обнаруживаемого сигнала, а

$$m = \eta_{\max} - \eta_{\min} = (\nu_{\max} - \nu_{\min})/\Omega. \quad (3.2.13)$$

Точность формулы (3.2.11) возрастает с увеличением μ , μ и ξ . Выражение (3.2.12) для приведенной длины априорного интервала несколько упрощается при обнаружении слабого сигнала (2.2.45) и принимает вид

$$\xi = m \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [dg(x)/dx]^2 dx} = m \sqrt{g_2}. \quad (3.2.14)$$

Положим теперь, что узкополосный сигнал с неизвестной центральной частотой $\nu_0 \in [\nu_{\min}; \nu_{\max}]$ присутствует на входе МПО (верна гипотеза H_1). Тогда,

аналогично (2.2.37), логарифм ФОП переписывается как

$$L_x(\nu | H_1) = L_{1x}(\eta) = S_1(\eta) + N_1(\eta). \quad (3.2.15)$$

Здесь

$$S_1(\eta) = \langle L_{1x}(\eta) \rangle$$

– сигнальная, а $N_1(\eta)$ (2.2.24) – шумовая функции.

Подставляя (1.2.27) в (2.2.12) и (2.2.31), получаем, опуская последнее слагаемое в (2.2.12) и учитывая (1.2.23),

$$S_1(\eta) = \mu q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)[1+qg(x+\eta-\eta_0)]}{1+qg(x)} dx, \quad (3.2.16)$$

$$B_{N1}(\eta_1, \eta_2) = \mu q^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x-\eta_1)g(x-\eta_2)[1+qg(x-\eta_0)]^2}{[1+qg(x-\eta_1)][1+qg(x-\eta_2)]} dx. \quad (3.2.17)$$

Для определения вероятности пропуска сигнала (2.2.39) разобьем весь интервал возможных значений η (3.2.5) на две подобласти

$$\Theta_s = \left(\max[\eta_{\min}; \eta_0 - r]; \min[\eta_0 + r; \eta_{\max}] \right), \quad (3.2.18)$$

$$\Theta_N = \left\{ \left[\eta_{\min}; \max[\eta_{\min}; \eta_0 - r] \right], \right. \\ \left. \left[\min[\eta_0 + r; \eta_{\max}]; \eta_{\max} \right] \right\}, \quad (3.2.19)$$

где r удовлетворяет (3.1.8).

Из сопоставления (3.2.2), (3.2.3) и (3.2.16), (3.2.17) имеем, что при $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Theta_N$

$$S_1(\eta) = S_0, \quad B_{N1}(\eta_1, \eta_2) = B_{N0}(\eta_1, \eta_2). \quad (3.2.20)$$

Следовательно, в подобласти Θ_N статистические характеристики логарифма ФОР при отсутствии (3.2.1) и при наличии (3.2.15) сигнала одинаковы, кроме того, согласно (3.2.3) и (3.2.17), когда $|\eta_1 - \eta_2| > r$

$$B_{N0}(\eta_1, \eta_2) = 0, \quad B_{N1}(\eta_1, \eta_2) = 0.$$

Обозначим

$$H_N = \sup L_{1x}(\eta), \quad \eta \in \Theta_N, \quad (3.2.21)$$

$$H_s = \sup L_{1x}(\eta), \quad \eta \in \Theta_s. \quad (3.2.22)$$

Пусть интервал возможных значений неизвестного параметра (3.2.5) велик по сравнению с подобластью Θ_s , т.е.

$$m \gg r \quad (3.2.23)$$

или, что тоже самое

$$\xi \gg 1, \quad (3.2.24)$$

где ξ - приведенная длина априорного интервала (3.2.12). Тогда случайные величины H_N и H_s , как это

показано в [45], можно считать приближенно независимыми. При этом вероятность пропуска сигнала (2.2.39)

$$\beta(\eta_0) \approx P(N_N < c) P(N_S < c) = P_N(c) P_S(c). \quad (3.2.25)$$

Согласно (3.2.20), (3.2.23), приближенное значение вероятности $P_N(c)$ можно получить из (3.2.8), (3.2.11)

$$P_N(c) \approx 1 - \alpha. \quad (3.2.26)$$

Действительно, в подобласти Θ_N характеристики логарифма ФОН не зависят от факта наличия сигнала. Кроме того, в силу (3.2.23), (3.2.24) приведенная длина подобласти Θ_N приближенно равна приведенной длине всего априорного интервала возможных значений неизвестного параметра (3.2.5).

Согласно (3.2.16), когда $\eta \in \Theta_S$, $S_1(\eta) \neq S_0$ и достигает максимума при $\eta = \eta_0$. Обозначим

$$\hat{\eta} = \arg \sup_{\eta \in \Theta_S} L_{1x}(\eta), \quad (3.2.27)$$

- надежная ОМП параметра η_0 [19]. Тогда $N_S = L_{1x}(\hat{\eta})$ и в (3.2.25)

$$P_S(c) = P[L_{1x}(\hat{\eta}) < c]. \quad (3.2.28)$$

Как показано в [19], $\hat{\eta} \rightarrow \eta_0$ в среднеквадратическом, когда $\mu \rightarrow \infty$. Значит при достаточно больших μ (3.2.6), т.е. при выполнении (2.2.21), учитывая регулярность рассматриваемого сигнала, можем приближенно записать

$$P_S(c) \approx P[L_{1x}(\eta_0) < c].$$

Согласно (2.2.20), $L_{1x}(\eta_0)$ при выполнении (2.2.21) является гауссовской случайной величиной. Из (3.2.16) и (3.2.17) находим ее математическое ожидание и дисперсию

$$\langle L_{1x}(\eta_0) \rangle = S_1(\eta_0), \quad \sigma_1^2(\eta_0) = B_{N1}(\eta_0, \eta_0).$$

В результате имеем приближенное значение вероятности (3.2.28)

$$P_s(c) \approx \Phi \left\{ \left[c - S_1(\eta_0) \right] / \sigma_1(\eta_0) \right\}, \quad (3.2.29)$$

где $\Phi(\cdot)$ – интеграл вероятности (2.2.44). Подставляя (3.2.26) и (3.2.29) в (3.2.25), получаем приближенное выражение для вероятности пропуска сигнала

$$\beta = \begin{cases} \exp[-\xi \exp(-u^2/2)/2\pi] \Phi(fu-z), & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases} \quad (3.2.30)$$

Здесь

$$f^2 = \sigma_0^2 / \sigma_1^2(\eta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ g(x) / [1 + qg(x)] \right\}^2 dx, \quad (3.2.31)$$

$$\begin{aligned} z^2 &= [S_1(\eta_0) - S_0]^2 / \sigma_1^2(\eta_0) = \\ &= \mu q^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) [1 + qg(x)]^{-1} dx \right]^2 \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

– ОСШ на выходе МПО. Точность формулы (3.2.30) возрастает с увеличением u (3.2.9), μ , ξ и z .

Полученные асимптотически точные выражения для вероятностей ложной тревоги (3.2.11) и пропуска сигнала (3.2.30) довольно громоздки. Поэтому представляет интерес получение упрощенных, хотя и менее точных, вариантов этих формул. Полагая $u \gg 1$, имеем

$$\alpha \approx \xi \exp(-u^2/2)/2\pi, \quad (3.2.33)$$

$$\beta \approx \Phi(fu-z). \quad (3.2.34)$$

Причем формула (3.2.33) удовлетворительно аппроксимирует более сложную формулу (3.2.11) уже при $\alpha < 0,1$ [4]. В случае обнаружения слабого сигнала (2.2.45) в (3.2.11), (3.2.30), (3.2.33), (3.2.34), кроме (3.2.14)

следует подставить

$$f=1, u=c/z - \sqrt{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx, z^2 = \mu q^2, \quad (3.2.35)$$

что приводит к заметному упрощению формул для характеристик обнаружения.

В ряде задач аппаратурная реализация МПО оказывается достаточно сложной. В этих случаях может быть полезным использование КПО. Согласно (1.4.6) КПО выработывает логарифм ФОР в одной точке ν^* и сравнивает его с порогом. Следовательно, функциональная схема КПО представляет собой один канал из многоканальной схемы МПО, например, на рис.2.1. Обозначая

$$\eta^* = \nu^* / \Omega,$$

можем записать выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала при использовании КПО

$$\alpha^* = P[L_{0x}(\eta^*) > c], \beta^* = P[L_{1x}(\eta^*) < c]. \quad (3.2.36)$$

Случайные величины $L_{ix}(\eta^*)$ ($i=0,1$) при выполнении (2.2.21) являются гауссовскими, а их первые два момента определяются выражениями (3.2.2), (3.2.3), (3.2.16), (3.2.17). Следовательно, (3.2.36) можно переписать как

$$\alpha^* = 1 - \Phi(u), \quad (3.2.37)$$

$$\beta^* = \Phi(c/\sigma_1^* - z^*). \quad (3.2.38)$$

Здесь u определяется из (3.2.9),

$$(\sigma_1^*)^2 = \mu q^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2(x) [1 + qg(x + \eta^* - \eta_0^*)]^2}{[1 + qg(x)]^2} dx, \quad (3.2.39)$$

$$z^* = \frac{\mu q}{\sigma_1^*} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x) [1 + qg(x + \eta^* - \eta_0^*)]}{1 + qg(x)} dx. \quad (3.2.40)$$

Наконец, если центральная частота ν_0 спектраль-

ной плотности обнаруживаемого сигнала априори известна, то из (3.2.37), (3.2.38) легко получить характеристики оптимального обнаружителя. Действительно, при априори известном значении $\nu_0(\eta_0)$, с порогом ϵ сравнивается логарифм ФОП в этой точке (1.4.2) — $L_x(\nu_0)$ или $L_x(\hat{\eta}_0)$. Следовательно, вероятности ошибок α_0 и β_0 в оптимальном обнаружителе получаем, полагая в (3.2.37), (3.2.38) $\eta^* = \eta_0$:

$$\alpha_0 = \alpha^*, \quad (3.2.41)$$

$$\beta_0 = \Phi(fu - z). \quad (3.2.42)$$

Отметим, что полученные формулы для характеристик КПО и оптимального обнаружителя справедливы при любой форме спектральной плотности стохастического сигнала. Однако формулы для характеристик МПО (3.2.11), (3.2.30) можно использовать только при обнаружении регулярного сигнала.

Оценим проигрыш в эффективности обнаружения из-за незнания центральной частоты спектральной плотности стохастического узкополосного сигнала. Из сравнения (3.2.30) и (3.2.42) следует, что предельное значение вероятности пропуска сигнала с неизвестной центральной частотой совпадает с вероятностью пропуска сигнала, центральная частота спектральной плотности которого априори точно известна.

Сравним теперь вероятности ложной тревоги. Учитывая, что (3.2.33) справедливо при $u \gg 1$, получим аналогичное асимптотическое значение (3.2.41). Известно [15], что при $x \gg 1$ интеграл вероятности (2.2.44)

$$\Phi(x) \approx 1 - \exp(-x^2/2)/x\sqrt{2\pi}.$$

Следовательно, когда $u \gg 1$, (3.2.41) можно приближенно переписать как

$$\alpha_0 \approx \exp(-u^2/2)/u\sqrt{2\pi} \quad (3.2.43)$$

Сопоставляя (3.2.33) и (3.2.43), имеем

$$\alpha/\alpha_0 \approx \xi u/\sqrt{2\pi}.$$

Значит, незвиание центральной частоты спектральной плотности обнаруживаемого сигнала может привести к существенному увеличению вероятности ложной тревоги. При этом относительные потери в эффективности обнаружения возрастают с увеличением приведенной длины ξ (3.2.12) априорного интервала возможных значений частоты и с уменьшением требуемого уровня ложных тревог, так как $\alpha \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$.

3.3. Полосовой сигнал с неизвестной центральной частотой спектральной плотности.

3.3.1. Максимально правдоподобный обнаружитель. Полученные в п.3.2 выражения для характеристик МПО сигнала с неизвестной центральной частотой спектральной плотности нельзя использовать при обнаружении полосового сигнала со спектральной плотностью (1.2.27), где $g(\cdot)$ определяется из (1.2.20). Действительно, в этом случае функция $g(\cdot)$ (1.2.20), описывающая форму спектральной плотности, недифференцируема и стохастический сигнал не является регулярным.

Как показано в п.3.1, МПО полосового сигнала с неизвестной центральной частотой должен вырабатывать функцию $L_I(\nu)$ (3.1.12), (3.1.14) для всех возможных значений неизвестной частоты из априорного интервала (3.1.1). Затем, при использовании критерия Неймана-Пирсона решение о наличии или отсутствии сигнала принимается в результате сравнения абсолютного (наибольшего) максимума $L_I(\nu)$ с порогом c , который определяется по заданному уровню ложных тревог (1.3.13).

Положим, что верна гипотеза H_0 (сигнал отсутствует) и опять перейдем к нормированному аргументу (3.2.4). Тогда (3.1.12) можно представить в виде, аналогичном (2.2.22), (3.2.1)

$$L_I(\nu|H_0) = L_{OI}(\eta) = S_O(\eta) + N_O(\eta), \quad (3.3.1)$$

где

$$S_o(\eta) = \langle L_{oI}(\eta) \rangle$$

- регулярная, а $N_o(\eta)$ (2.2.24) - флуктуирующая составляющие. Подставляя в (3.2.2) и (3.2.3) $g(\cdot)$ из (1.2.20) и опуская множители $q/(1+q)$ и $[q/(1+q)]^2$ соответственно, имеем

$$S_o = \mu, \quad (3.3.2)$$

$$B_{NO}(\eta_1, \eta_2) = \mu \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0). \quad (3.3.3)$$

Для полосового стохастического сигнала при выполнении (2.2.21) можно найти более точную, чем гауссовская, аппроксимацию распределения выходной статистики (3.1.12), (3.1.14), (3.3.1). С этой целью в выражении для характеристической функции логарифма ФОН (2.2.2) положим $L_c(\theta) \equiv 0$, а вместо функции $Q(\omega, \theta)$

подставим $|H_I(\omega, \nu)|^2$ из (3.1.13). Учитывая затем (2.2.15), получаем характеристическую функцию выходной статистики в виде

$$\Theta_{LN}(u) = (1 - ju)^{-\mu}. \quad (3.3.4)$$

Обращая, согласно (1.1.6), эту характеристическую функцию, находим плотность вероятности выходной статистики [15, 38]

$$W_N(L) = L^{\mu-1} \exp(-L) / \Gamma(\mu), \quad L \geq 0, \quad (3.3.5)$$

где $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция [15]. Таким образом, при отсутствии сигнала выходная статистика (3.1.12), (3.1.14), (3.3.1) является стационарным случайным процессом с корреляционной функцией (3.3.3) и одномерной плотностью вероятности (3.3.5). Эти свойства выходной статистики позволяют найти асимптотическое значение вероятности ложной тревоги на основе результатов [45, 48]. Действительно, по определению (2.2.38)

$$\alpha = P\left\{ \sup_{\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]} L_{OI}(\eta) > c \right\} = 1 - P_{\#}(c), \quad (3.3.6)$$

где

$$P_{\#}(c) = P\{L_{OI}(\eta) < c\}, \quad \eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]. \quad (3.3.7)$$

Из установленных свойств выходной статистики следует, что вероятность (3.3.7) можно аппроксимировать формулой (2.3.87), полагая в ней $\nu = \mu$ и подставляя значение $\tilde{m} = m$ из (3.2.13). В результате имеем приближенную формулу для вероятности ложной тревоги

$$\alpha \approx \begin{cases} 1 - \exp\{-m c^{\mu} \exp(-c)/\Gamma(\mu)\}, & c \geq \mu, \\ 1, & c < \mu, \end{cases} \quad (3.3.8)$$

точность которой возрастает с увеличением m , c и μ . Для практически интересного случая малых вероятностей ложной тревоги, что имеет место при больших порогах c , формулу (3.3.8) можно несколько упростить, переписав ее аналогично (3.2.33)

$$\alpha \approx m c^{\mu} \exp(-c)/\Gamma(\mu). \quad (3.3.9)$$

Это выражение удовлетворительно аппроксимирует формулу (3.3.8) уже при $\alpha < 0,1$ [4].

Положим теперь, что узкополосный полосовой сигнал с неизвестной центральной частотой $\nu_0 \in [\nu_{\min}; \nu_{\max}]$ присутствует на входе МПО (верна гипотеза H_1). Тогда (3.1.12) можно представить в виде, аналогичном (2.2.37), (3.2.15).

$$L_I(\nu | H_1) = L_{II}(\eta) = S_I(\eta) + N_I(\eta), \quad (3.3.10)$$

где

$$S_I(\eta) = \langle L_{II}(\eta) \rangle$$

- сигнальная, а $N_I(\eta)$ (2.2.24) - шумовая функции.

Подставляя в (3.2.16) и (3.2.17) $g(\cdot)$ из (1.2.20)

и опуская множители $q/(1+q)$ и $[q/(1+q)]^2$ соответственно, имеем

$$S_1(\eta) = \mu [1+q \max(1-|\eta-\eta_0|; 0)] = \\ = S_0 + \mu q \max(1-|\eta-\eta_0|; 0), \quad (3.3.11)$$

$$B_{N1}(\eta_1, \eta_2) = \mu \left\{ \max(1-|\eta_1-\eta_2|; 0) + q(2+q) I[(\eta_1-\eta_2)/2] \times \right. \\ \times I[(\eta_1-\eta_0)/2] I[(\eta_2-\eta_0)/2] [1 + \min(0; \eta_1-\eta_0; \eta_2-\eta_0) - \\ - \max(0; \eta_1-\eta_0; \eta_2-\eta_0)] \left. \right\} = B_{N0}(\eta_1, \eta_2) + \mu q(2+q) I[(\eta_1 - \\ - \eta_2)/2] I[(\eta_1-\eta_0)/2] I[(\eta_2-\eta_0)/2] [1 + \min(0; \eta_1 - \\ - \eta_0; \eta_2-\eta_0) - \max(0; \eta_1-\eta_0; \eta_2-\eta_0)]. \quad (3.3.12)$$

Здесь S_0 определяется из (3.3.2), а $B_{N0}(\eta_1, \eta_2)$ - из (3.3.3).

Найдем характеристическую функцию и плотность вероятности выходной статистики (3.1.12), (3.3.10). Для этого в выражении для характеристической функции логарифма ФОР (2.2.2) положим $L_c(\theta) = 0$, а вместо функции $Q(\omega, \theta)$ подставим $|H_1(\omega, \nu)|^2$ из (3.1.13). Затем учтем, что при гипотезе H_1

$$G_x(\omega) = \frac{N_0}{2} + \frac{\gamma}{2} \left[I\left(\frac{\nu_0 - \omega}{\Omega}\right) + I\left(\frac{\nu_0 + \omega}{\Omega}\right) \right]. \quad (3.3.13)$$

Подставляя (3.3.13) в выражение для характеристической функции, получаем

$$\Theta_{Ls}(u; \eta) = (1 - ju)^{-\mu} \left[\frac{1 - ju(1+q)}{1 - ju} \right]^{-\mu \max(1-|\eta-\eta_0|; 0)} \quad (3.3.14)$$

Обращая, согласно (1.1.6), эту характеристическую функцию, находим плотность вероятности выходной статистики при наличии сигнала [3]

$$W_s(L; \eta) = \frac{L^{\mu-1} \exp[-L/(1+q)]}{\Gamma(\mu) (1+q)^\mu \max(1 - |\eta - \eta_0|; 0)^\mu} \times$$

$$\times {}_1F_1[\mu \min(1; |\eta - \eta_0|); \mu; -qL/(1+q)], \quad L \geq 0. \quad (3.3.15)$$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция, ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$ - вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [3].

Рассмотрим два частных случая. Положим в (3.3.15) $\eta = \eta_0$. Тогда, согласно [3], ${}_1F_1(0; \mu; -qL/(1+q)) = 1$ и

$$W_s(L; \eta_0) = W_0(L) = L^{\mu-1} \exp[-L/(1+q)] / \Gamma(\mu) (1+q)^\mu,$$

$$L \geq 0. \quad (3.3.16)$$

Пусть теперь $|\eta - \eta_0| > 1$. Тогда, согласно [3],

$${}_1F_1[\mu; \mu; -qL/(1+q)] = \exp[-qL/(1+q)] \text{ и } W_s(L; \eta) =$$

$= W_N(L) = L^{\mu-1} \exp(-L) / \Gamma(\mu)$, $L \geq 0$, где $W_N(L)$ - плотность вероятности выходной статистики при отсутствии сигнала (3.3.5).

Согласно определению (2.2.39) вероятность пропуска сигнала

$$\beta = P[\sup_{v \in [v_{\min}; v_{\max}]} L_I(v) < c | H_1] = P[L_{1I}(\eta) < c]. \quad (3.3.17)$$

$$v \in [v_{\min}; v_{\max}] \quad \eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]$$

Для определения вероятности пропуска разобьем весь интервал возможных значений η (3.2.5) на

подобласти Θ_s (3.2.18) и Θ_N (3.2.19), где теперь

$r = 1$. Из сопоставления (3.3.2) и (3.3.11); (3.3.3) и (3.3.12); (3.3.4) и (3.3.14); (3.3.5) и (3.3.15) имеем, что при $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Theta_N$

$$S_1(\eta) = S_0, \quad B_{N1}(\eta_1, \eta_2) = B_{N0}(\eta_1, \eta_2),$$

$$\Theta_{Ls}(u; \eta) = \Theta_{LN}(u), \quad W_s(L; \eta) = W_N(L). \quad (3.3.18)$$

Следовательно, в подобласти Θ_N статистические ха-

характеристики выходной статистики (3.1.12) при отсутствии и при наличии сигнала совпадают. Кроме того, согласно (3.3.3) и (3.3.12), когда $|\eta_1 - \eta_2| > 1$,

$$B_{NO}(\eta_1, \eta_2) = B_{N1}(\eta_1, \eta_2) = 0. \quad (3.3.19)$$

Аналогично (3.2.21), (3.2.22) обозначим

$$H_N = \sup_{\eta \in \Theta_N} L_{1I}(\eta), \quad H_S = \sup_{\eta \in \Theta_S} L_{1I}(\eta)$$

и положим, что выполняется (3.2.23) при $r = 1$. Тогда случайные величины H_N и H_S можно приближенно считать независимыми, как это показано в [45]. При этом вероятность пропуска сигнала (3.3.17) переписывается в виде (3.2.25), причем $P_N(c)$ определяется формулой (3.2.26) при подстановке в нее α из (3.3.8).

Согласно (3.3.11), когда $\eta \in \Theta_S$, сигнальная функция достигает максимума при $\eta = \eta_0$. Обозначим, аналогично (3.2.27),

$$\hat{\eta} = \arg \sup_{\eta \in \Theta_S} L_{1I}(\eta), \quad \eta \in \Theta_S$$

- надежная ОМП параметра η_0 [19]. Тогда $H_S = L_{1I}(\hat{\eta})$ и в (3.2.25)

$$P_S(c) = P[L_{1I}(\hat{\eta}) < c]. \quad (3.3.20)$$

В [48] показано, что при $\mu \rightarrow \infty$ ОМП $\hat{\eta} \rightarrow \eta_0$ в среднеквадратическом. Следовательно, при больших значениях μ для определения (3.3.20) достаточно исследовать поведение выходной статистики (3.3.10) в малой окрестности η_0 . Поэтому рассмотрим вероятность

$$P_r(c) = P[L_{1I}(\eta) < c], \quad |\eta - \eta_0| \leq m_r, \quad (3.3.21)$$

где m_r - фиксировано и выбрано таким, чтобы $\eta \in \Theta_S$. Положим для определенности $m_r \leq 1/2$, что в частности позволяет несколько упростить выкладки. Пос-

кольку выбрано $m_r < 1$, то при $\mu \rightarrow \infty$ искомая функция $P_s(c) \rightarrow P_r(c)$.

Перепишем (3.3.21) в виде

$$P_r(c) = P[\Delta(\eta) < c - L_0] , \quad |\eta_0 - \eta| < m_r , \quad (3.3.22)$$

где

$$L_0 = L_{II}(\eta_0) , \quad (3.3.23)$$

$$\Delta(\eta) = L_{II}(\eta) - L_{II}(\eta_0) = L_{II}(\eta) - L_0 . \quad (3.3.24)$$

При выполнении (2.2.21), согласно (2.2.19), (2.2.20), процесс (3.3.24) можно приближенно считать гауссовским. Используя (3.3.11), (3.3.12), находим первые два момента процесса (3.3.24)

$$S_{\Delta}(\eta) = \langle \Delta(\eta) \rangle = S_I(\eta) - S_I(\eta_0) = -\mu q \min(|\eta - \eta_0|; 1) , \quad (3.3.25)$$

$$\begin{aligned} B_{\Delta}(\eta_1, \eta_2) &= \langle [\Delta(\eta_1) - \langle \Delta(\eta_1) \rangle] [\Delta(\eta_2) - \langle \Delta(\eta_2) \rangle] \rangle = \\ &= B_{NI}(\eta_1, \eta_2) - B_{NI}(\eta_0, \eta_2) - B_{NI}(\eta_1, \eta_0) + B_{NI}(\eta_0, \eta_0) = \\ &= \mu(2 + 2q + q^2) \begin{cases} \min(|\eta_1 - \eta_0|, |\eta_2 - \eta_0|), & (\eta_1 - \eta_0)(\eta_2 - \eta_0) > 0, \\ 0, & (\eta_1 - \eta_0)(\eta_2 - \eta_0) < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Отсюда следует, что значения процесса (3.3.24) на интервалах $[\eta_0 - m_r; \eta_0]$ и $[\eta_0; \eta_0 + m_r]$ некоррелированы, а при выполнении (2.2.21) они приближенно статистически независимы. Значит, (3.3.22) можно переписать, как

$$P_r(c) \approx P[\Delta(\eta) < c - L_0] P[\Delta(\eta) < c - L_0] , \quad (3.3.27)$$

$$\eta_0 - m_r \leq \eta \leq \eta_0 \quad \eta_0 < \eta \leq \eta_0 + m_r$$

Обозначим

$$F^-(x) = P[\Delta(\eta) < x] , \quad \eta \in [\eta_0 - m_r; \eta_0] ,$$

$$F^*(x) = P[\Delta(\eta) < x], \quad \eta \in (\eta_0; \eta_0 + m_r] \quad (3.3.28)$$

Тогда при фиксированном значении L_0 (3.3.23)

$$P[\Delta(\eta) < c - L_0] = F^-(c - L_0), \quad \eta_0 - m_r \leq \eta \leq \eta_0,$$

$$P[\Delta(\eta) < c - L_0] = F^+(c - L_0), \quad \eta_0 < \eta \leq \eta_0 + m_r, \quad (3.3.29)$$

Учитывая (3.3.23), из (3.3.27)...(3.3.29) получаем (3.3.22) в виде

$$P_r(c) \approx \int_{-\infty}^c F^+(c-x) F^-(c-x) W_0(x) dx, \quad (3.3.30)$$

где $W_0(\cdot)$ – плотность вероятности случайной величины L_0 (3.3.23), определяемая выражением (3.3.16).

В силу (2.2.19), (2.2.20), при выполнении (2.2.21) процесс (3.3.24) приближенно гауссовский, причём его два первых момента (3.3.25), (3.3.26) кусочно-дифференцируемы. Следовательно, для процесса (3.3.24) выполняется (2.3.19). Если к тому же выполняется (2.3.20), то процесс (3.3.24) будет гауссовским марковским диффузионным процессом [43]. Найдем его коэффициенты сноса и диффузии и одновременно проверим выполнение (2.3.20). Подставляя (3.3.25) и (3.3.26) в (2.3.17) и (2.3.18), имеем

$$K_1(\Delta, \eta) = \mu q \begin{cases} 1, & \eta_0 - m_r \leq \eta \leq \eta_0, \\ -1, & \eta_0 < \eta \leq \eta_0 + m_r, \end{cases}$$

$$K_2(\Delta, \eta) = \mu [1 + (1+q)^2].$$

Найдем (3.3.28), используя марковские свойства процесса (3.3.24) при $\eta \in [\eta_0 - m_r; \eta_0 + m_r]$. Определим

вначале $F^*(x)$, переписав это распределение в виде

$$F^*(x) = P[y(\eta) > 0], \quad \eta_0 < \eta \leq \eta_0 + m_r. \quad (3.3.31)$$

Здесь $y(\eta) = x - \Delta(\eta)$ — гауссовский марковский процесс с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_{1+} = -K_1(\Delta, \eta) = \mu q, \quad (3.3.32)$$

$$k_{2+} = K_2(\Delta, \eta) = \mu [1 + (1+q)^2]. \quad (3.3.33)$$

Следовательно [43, 45, 61 и др.], аналогично (2.3.27), можем записать

$$F^*(x) = \int_0^{\infty} W^*(y; \eta_0 + m_r) dy, \quad (3.3.34)$$

где

$$W^*(y; \eta_0 + m_r) = W^*(y; \eta) \Big|_{\eta = \eta_0 + m_r},$$

а $W^*(y; \eta)$ — решение второго уравнения ФПК (2.3.28) с коэффициентами (3.3.32), (3.3.33) при начальном и граничном условиях

$$W^*(y; \eta) \Big|_{\eta = \eta_0} = \delta(y-x), \quad W^*(y; \eta) \Big|_{y=0} = 0. \quad (3.3.35)$$

Для решения уравнения ФПК, приведем его к каноническому виду, для чего, аналогично (2.3.29) обозначим

$$W^*(y; \eta) = U^*(y; \eta) \exp \left[- \frac{k_{1+}^2}{2k_{2+}} \eta + \frac{k_{1+}}{k_{2+}} y \right]. \quad (3.3.36)$$

Подставляя (3.3.36) в уравнение ФПК, получаем для $U^*(y; \eta)$ каноническое уравнение вида (2.3.30). Начальное и граничное условия для функции $U^*(y; \eta)$, согласно (3.3.35), (3.3.36) имеют вид

$$U^*(y; \eta) \Big|_{\eta = \eta_0} = \delta(y-x) \exp \left[\frac{k_{1+}^2}{2k_{2+}} \eta_0 - \frac{k_{1+}}{k_{2+}} y \right],$$

$$U^*(y; \eta) \Big|_{y=0} = 0. \quad (3.3.37)$$

Решение канонического уравнения вида (2.3.30), аналогично (2.3.32), запишется как [36, 43]

$$U^*(y; \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\eta - \eta_0)k_{2+}}} \int_0^{\infty} U^*(y_1, \eta_0) \times \\ \times \left\{ \exp\left[-\frac{(y-y_1)^2}{2(\eta - \eta_0)k_{2+}}\right] - \exp\left[-\frac{(y+y_1)^2}{2(\eta - \eta_0)k_{2+}}\right] \right\} dy_1. \quad (3.3.38)$$

Подставляя (3.3.37) в (3.3.38) и (3.3.38) в (3.3.36), находим решение второго уравнения ФПК

$$W^*(y; \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\eta - \eta_0)k_{2+}}} \exp\left[-\frac{k_{1+}^2}{2k_{2+}} (\eta - \eta_0) + \frac{k_{1+}}{k_{2+}} (y-x)\right] \left\{ \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(\eta - \eta_0)k_{2+}}\right] - \exp\left[-\frac{(y+x)^2}{2(\eta - \eta_0)k_{2+}}\right] \right\}.$$

Полагая здесь $\eta = \eta_0 + m_r$ и подставляя в (3.3.34), имеем

$$F^*(x) = \Phi\left(k_{1+} \sqrt{\frac{m_r}{k_{2+}}} + \frac{x}{\sqrt{k_{2+} m_r}}\right) - \\ - \exp\left(-\frac{2k_{1+} x}{k_{2+}}\right) \Phi\left(k_{1+} \sqrt{\frac{m_r}{k_{2+}}} - \frac{x}{\sqrt{k_{2+} m_r}}\right), \quad x \geq 0, \quad (3.3.39)$$

где $\Phi(\cdot)$ - интеграл вероятности (2.2.44).

Найдем теперь распределение $F^-(x)$, переписав его аналогично (3.3.31)

$$F^-(x) = P\{y(\eta) > 0\}, \quad \eta_0 - m_r \leq \eta \leq \eta_0.$$

Здесь $y(\eta) = x - \Delta(\eta)$ - опять марковский диффузионный процесс с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_{1-} = -K_1(\Delta, \eta) = -\mu q, \quad (3.3.40)$$

$$k_{2-} = K_2(\Delta, \eta) = \mu [1 + (1+q)^2]. \quad (3.3.41)$$

В силу свойств марковского процесса $y(\eta)$ [43,45] можем записать

$$F^-(x) = \int_0^{\infty} W^-(y; \eta_0 - m_r) dy, \quad (3.3.42)$$

где $W^-(y; \eta_0 - m_r) = W^-(y; \eta)|_{\eta=\eta_0 - m_r}$, а $W^-(y; \eta)$ - решение первого уравнения ФПК [43,45]

$$\frac{\partial W^-(y; \eta)}{\partial \eta} = -k_{1-} \frac{\partial W^-(y; \eta)}{\partial y} - \frac{1}{2} k_{2-} \frac{\partial^2 W^-(y; \eta)}{\partial y^2} \quad (3.3.43)$$

при граничном условии

$$W^-(y; \eta)|_{y=0} = 0$$

и начальном условии, заданном на правом конце интервала

$$W^-(y; \eta)|_{\eta=\eta_0} = \delta(y-x).$$

После замены переменных, решение уравнения (3.3.43) можно найти аналогично решению второго уравнения ФПК [43]

$$W^-(y; \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\eta+\eta_0)k_{2-}}} \exp\left[-\frac{k_{1-}^2}{2k_{2-}}(\eta+\eta_0) - \dots\right]$$

$$- \frac{k_{1-}}{k_{2-}} (y-x) \left\{ \exp \left[- \frac{(y-x)^2}{2(\eta+\eta_0)k_{2-}} \right] - \exp \left[- \frac{(y+x)^2}{2(\eta+\eta_0)k_{2-}} \right] \right\}.$$

Полагая здесь $\eta = \eta_0 - m_r$ и подставляя в (3.3.42), имеем

$$F^-(x) = \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{k_{2-} - m_r}} - k_{1-} \sqrt{\frac{m_r}{k_{2-}}} \right) - \exp \left(\frac{2k_{1-}x}{k_{2-}} \right) \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{k_{2-} - m_r}} + k_{1-} \sqrt{\frac{m_r}{k_{2-}}} \right) \right], \quad x \geq 0. \quad (3.3.44)$$

Подставляя (3.3.32), (3.3.33) в (3.3.39) и (3.3.40), (3.3.41) в (3.3.44), получаем

$$F^+(x) = F^-(x) = F_r(x) = \Phi \left[q \sqrt{\frac{\mu m_r}{1+(1+q)^2}} + \frac{x}{\sqrt{\mu[1+(1+q)^2]m_r}} \right] - \exp \left[- \frac{2qx}{1+(1+q)^2} \right] \times \times \Phi \left[q \sqrt{\frac{\mu m_r}{1+(1+q)^2}} - \frac{x}{\sqrt{\mu[1+(1+q)^2]m_r}} \right], \quad x \geq 0. \quad (3.3.45)$$

Подставляя далее (3.3.16) и (3.3.45) в (3.3.30), имеем для вероятности (3.3.21)

$$\begin{aligned}
 P_r(c) = & \frac{1}{(1+q)^\mu \Gamma(\mu)} \int_0^c \left\{ \Phi \left[q \sqrt{\frac{\mu m_r}{1+(1+q)^2}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{x}{\sqrt{\mu[1+(1+q)^2] m_r}} \right] - \exp \left[-\frac{2qx}{1+(1+q)^2} \right] \right\} \times \\
 & \times \Phi \left[q \sqrt{\frac{\mu m_r}{1+(1+q)^2}} - \frac{x}{\sqrt{\mu[1+(1+q)^2] m_r}} \right] \Bigg\}^2 \times \\
 & \times (c-x)^{\mu-1} \exp \left(-\frac{c-x}{1+q} \right) dx .
 \end{aligned}$$

При $q > 0$ и $\mu \gg 1$, последнее выражение несколько упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned}
 P_r(c) = P_{\beta}(c) = & 1 - \Gamma[\mu; c/(1+q)]/\Gamma(\mu) - 2\exp(-\varphi c) \times \\
 & \times (1 - \Gamma[\mu; c/(1+q) - \varphi c]/\Gamma(\mu)) [1 - (1+q)\varphi]^{-\mu} + \exp(-2\varphi c) \times \\
 & \times (1 - \Gamma[\mu; c/(1+q) - 2\varphi c]/\Gamma(\mu)) [1 - 2(1+q)\varphi]^{-\mu}, \quad (3.3.46)
 \end{aligned}$$

где $P_{\beta}(c)$ определено в (3.3.20), $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция и $\Gamma(\cdot; \cdot)$ - неполная гамма-функция [38], $\varphi = 2q/[1 + (1+q)^2]$.

Заменим в (3.2.26) α на (3.3.8). Подставляя затем (3.2.26) и (3.3.46) в (3.2.25), получаем приближенное выражение для вероятности пропуска

$$\begin{aligned}
 \beta \approx & \exp[-\mu c \exp(-c)/\Gamma(\mu)] [1 - \Gamma[\mu; c/(1+q)]/\Gamma(\mu) - \\
 & - 2\exp(-\varphi c) (1 - \Gamma[\mu; c/(1+q) - \varphi c]/\Gamma(\mu)) [1 - (1+q)\varphi]^{-\mu} + \\
 & + \exp(-2\varphi c) (1 - \Gamma[\mu; c/(1+q) - 2\varphi c]/\Gamma(\mu)) [1 - 2(1+q)\varphi]^{-\mu}] \\
 & (3.3.47)
 \end{aligned}$$

при $c \geq \mu$ и $\beta = 0$ при $c < \mu$.

Точность этой формулы возрастает с увеличением c , m и μ .

3.3.2. Гауссовская аппроксимация. Полученные асимптотически точные выражения для вероятностей ложной тревоги (3.3.8) и пропуска сигнала (3.3.47) довольно громоздки. Поэтому представляет интерес получение упрощенных, хотя и менее точных, вариантов этих формул. Последнее возможно, если при выполнении (2.2.21) считать распределение выходной статистики МПО (3.1.12), (3.1.14) гауссовским. Аппроксимируем распределение выходной статистики (3.3.1) при отсутствии сигнала посредством гауссовского распределения с двумя первыми моментами (3.3.2), (3.3.3). При этом предположении перепишем выражение для вероятности ложной тревоги (3.3.6) в виде, аналогичном (3.2.8),

$$\alpha = P[\sup \bar{N}_0(\eta) > u], \quad \eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}].$$

Здесь

$$u = (c - S_0) / \sigma_0 = (c - \mu) / \sqrt{\mu} \quad (3.3.48)$$

-нормированный и центрированный порог, а нормированная шумовая функция $\bar{N}_0(\eta)$ обладает, согласно (3.3.3), корреляционной функцией

$$R_{N_0}(\Delta) = \max(1 - |\Delta|; 0).$$

Установленные свойства шумовой функции $\bar{N}_0(\eta)$, а именно: гауссовость, стационарность и вид корреляционной функции полностью совпадают со свойствами нормированной шумовой функции при приеме разрывного квазидетерминированного сигнала с неизвестным энергетическим параметром [45, 47, 61]. В результате приближенное выражение для вероятности ложной тревоги получаем как частный случай [45]

$$\alpha \approx \begin{cases} 1 - \exp[-u \exp(-u^2/2) / \sqrt{2\pi}] , & u \geq 1 , \\ 1 , & u < 1 . \end{cases} \quad (3.3.49)$$

Точность этой формулы возрастает с увеличением μ , m (3.2.13) и порога u (3.3.48). При $u \gg 1$, аналогично (3.2.33), можно упростить формулу (3.3.49)

$$\alpha \approx m u \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}. \quad (3.3.50)$$

Эта формула удовлетворительно аппроксимирует более сложную (3.3.49) уже при $\alpha < 0,1$ [4].

При использовании гауссовской аппроксимации вероятность пропуска сигнала (3.3.17) опять можно представить в виде (3.2.25), где теперь $P_N(c)$ определяется формулой (3.2.26) при подстановке в нее α из (3.3.49). Вероятность $P_N(c)$ в (3.2.25) опять можно рассчитать по формуле (3.3.30). Необходимо лишь использовать гауссовскую плотность вероятности случайной величины L_0 (3.3.23). Согласно (3.3.11) и (3.3.12) эта плотность вероятности имеет вид

$$W_0(L) = \frac{1}{(1+q)\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left\{-\frac{[L-\mu(1+q)]^2}{2\mu(1+q)^2}\right\}. \quad (3.3.51)$$

Подставим (3.3.45) и (3.3.51) в (3.3.30) и, положив $\mu \gg 1$, получим приближенное значение $P_N(c)$. Подставим это значение в (3.2.25) и выразим там же $P_N(c)$ согласно (3.2.26) через (3.3.49). Получим приближенное выражение для вероятности пропуска сигнала при использовании гауссовской аппроксимации

$$\begin{aligned} \beta \approx & \exp[-mu \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}] \{ \Phi[(u-q\sqrt{\mu})/(1+q)] - \\ & - 2\exp[-(u+\sqrt{\mu})\Psi\sqrt{\mu}/(1+q) + \mu\Psi(1+\Psi/2)] \Phi[(u- \\ & - q\sqrt{\mu})/(1+q) - \Psi\sqrt{\mu}] + \exp[-2(u+\sqrt{\mu})\Psi\sqrt{\mu}/(1+q) + \\ & + 2\mu\Psi(1+\Psi)] \Phi[(u-q\sqrt{\mu})/(1+q) - 2\Psi\sqrt{\mu}] \} \quad (3.3.52) \end{aligned}$$

при $u \geq 1$ и $\beta \approx 0$ при $u < 1$. Здесь

$$\Psi = 2q(1+q)/[1+(1+q)^2],$$

а $\Phi(\cdot)$ - интеграл вероятности (2.2.44). Формула

(3.3.52) несколько упростится при приёме слабого сигнала (2.2.45) и переписывается как

$$\beta = \exp[-\mu \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}] \{ \Phi(u-z) - 2\exp(3z^2/2 - uz) \Phi(u-2z) + \exp(4z^2 - 2uz) \Phi(u-3z) \} \quad (3.3.53)$$

при $u \geq 1$ и $\beta = 0$ при $u < 1$. Здесь ОШ z определяется из (3.2.35). Точность формул (3.3.52), (3.3.53) возрастает с увеличением u , μ и z .

Полученные на основе гауссовской аппроксимации формулы (3.3.49), (3.3.52), (3.3.53) целесообразно использовать при весьма больших значениях μ и не слишком малых величинах вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала. В противном случае надо использовать более громоздкие, но и более точные формулы (3.3.8) и (3.3.47).

Расчет характеристик МПО на основе гауссовской аппроксимации позволяет также определить влияние формы спектральной плотности узкополосного стохастического сигнала на величину вероятности ложной тревоги. При прямоугольной форме спектральной плотности (полосовой сигнал) и больших значениях порога u вероятность ложной тревоги определяется из (3.3.50). Для слабого (2.2.45) регулярного сигнала вероятность ложной тревоги определяется формулой (3.2.33) при подстановке в нее ξ из (3.2.14). Обозначим здесь α_R - вероятность ложной тревоги при обнаружении регулярного сигнала с неизвестной частотой (3.2.33). Тогда, используя (3.3.50) и (3.2.14), получаем

$$\alpha/\alpha_R = u \sqrt{2\pi/g_2}. \quad (3.3.54)$$

Следовательно, при одинаковых эквивалентных полосах частот (1.2.22) вероятность ложной тревоги может быть значительно больше для разрывного сигнала, чем для регулярного. При этом отношение (3.3.54) возрастает с уменьшением α и α_R .

3.3.3. Квазиправдоподобный и оптимальный обнаружители. В ряде задач аппаратная реализация МПО сигнала с неизвестной центральной частотой оказывается излишне сложной. В таких ситуациях может оказаться целесообразным использование КПО. Согласно (1.4.6) КПО выработывает выходную статистику

(3.1.12), (3.1.14) в одной точке $\nu^* \in [\nu_{\min}; \nu_{\max}]$ и

сравнивает с порогом. Следовательно, КПО полосового сигнала с неизвестной центральной частотой спектральной плотности можно реализовать в одноканальном варианте, как показано на рис. 3.2. Достаточно в этой функциональной схеме положить центральную частоту полосового фильтра равной ν^* .

Аналогично (3.2.36), вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала при использовании КПО можно записать как

$$\alpha^* = P[L_{OI}(\eta^*) > c], \quad \beta^* = P[L_{II}(\eta^*) < c]. \quad (3.3.55)$$

Здесь $L_{OI}(\eta)$ определяется из (3.3.1), а $L_{II}(\eta)$ - из (3.3.10).

При отсутствии сигнала (верна гипотеза H_0) выходная статистика (3.3.1) является стационарным случайным процессом с одномерной плотностью вероятности (3.3.5). Следовательно, вероятность ложной тревоги (3.3.55) определяется выражением

$$\alpha^* = \int_c^{\infty} W_N(L) dL = \Gamma(\mu; c) / \Gamma(\mu), \quad (3.3.56)$$

т.е. не зависит от выбора ν^* .

Вероятность пропуска сигнала при использовании КПО получаем, используя плотность вероятности (3.3.15) выходной статистики (3.3.10) при наличии сигнала

$$\beta^* = \int_0^c W_s(L; \eta^*) dL = (1+q)^{-\mu} \max(1 - |\eta^* - \eta_0|; 0) \times$$

$$\times \int_0^c x^{\mu-1} \exp[-x/(1+q)] {}_1F_1[\mu; \min(1; |\eta^* - \eta_0|); \mu; -qx/(1+q)] dx / \Gamma(\mu). \quad (3.3.57)$$

Естественно, вероятность пропуска существенно зависит от выбора $\eta^*(\nu^*)$. В частности, при

$$|\eta^* - \eta_0| > 1 \quad (3.3.58)$$

из сопоставления (3.3.56), (3.3.57) имеем

$$\beta^* = 1 - \alpha^*. \quad (3.3.59)$$

Последнее свидетельствует о неработоспособности КПО при выполнении (3.3.58).

Если центральная частота ν_0 спектральной плотности полосового сигнала априори точно известна, то из (3.3.56), (3.3.57) легко получить характеристики оптимального обнаружителя. Действительно, при априори известном значении $\nu_0(\eta_0)$ с порогом c сравнивается выходная статистика (3.1.12), (3.1.14) в этой точке — $L_I(\nu_0)$ или $L_I(\eta_0)$. Следовательно, вероятности ошибок α_0 и β_0 в оптимальном обнаружителе находим, полагая в (3.3.56), (3.3.57) $\eta^* = \eta_0$.

В результате вероятность ложной тревоги определяется из (3.2.41) при подстановке в эту формулу α^* из (3.3.56), а вероятность пропуска сигнала

$$\beta_0 = 1 - \Gamma[\mu; c/(1+q)] / \Gamma(\mu). \quad (3.3.60)$$

Сопоставление найденных выше характеристик МПО, КПО и оптимального обнаружителя позволяет оценить влияние незнания центральной частоты на эффективность обнаружения. В аналитической форме, однако, возможно лишь асимптотическое сравнение вероятностей ложных тревог при использовании МПО и оптимального обнаружителя. Для этого, полагая $c \gg 1$, воспользуемся асимптотическим представлением неполной

гамма-функции из [38]. Получаем при больших порогах

$$\alpha_0 = \alpha^* = c^{\mu-1} \exp(-c) / \Gamma(\mu).$$

Из этой формулы и (3.3.9) имеем

$$\alpha / \alpha_0 \approx mc. \quad (3.3.61)$$

Следовательно, незнание центральной частоты спектральной плотности обнаруживаемого полосового сигнала может привести к существенному увеличению вероятности ложной тревоги. При этом, относительное увеличение вероятности ложной тревоги возрастает с увеличением приведенной длины m (3.2.13) априорного интервала возможных значений неизвестной частоты и с уменьшением требуемого уровня ложных тревог, так как $\alpha \rightarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$. К сожалению, сравнить значения вероятностей пропуска сигнала при неизвестной (3.3.47) и известной центральной частоте (3.3.60) удастся лишь посредством численных расчетов. Они показывают, что для значительного диапазона значений параметров μ и q вероятность пропуска (3.3.47) оказывается в 1,5...2 раза меньше вероятности пропуска (3.3.60).

При использовании гауссовской аппроксимации распределения выходной статистики (3.1.12), (3.1.14) характеристики КПО получаем как частный случай (3.2.37), (3.2.38). Действительно, используя (3.3.2), (3.3.3), опять приходим к формуле (3.2.37) для вероятности ложной тревоги КПО полосового сигнала. Необходимо лишь в (3.2.37) подставить u из (3.3.48). Вероятность пропуска сигнала находим из (3.2.38), подставляя в (3.2.39), (3.2.40) $g(\cdot)$ из (1.2.20) и опуская в (3.2.39) множитель $[q/(1+q)]^2$. В результате для вероятности пропуска КПО полосового сигнала имеем

$$\beta^* = \Phi \left[\frac{u - q\sqrt{\mu} \max(1 - |\eta^* - \eta_0|; 0)}{\sqrt{1+q(2+q)} \max(1 - |\eta^* - \eta_0|; 0)} \right]. \quad (3.3.62)$$

Из сопоставления (3.2.37), (3.3.48) и (3.3.62) следует, что при выполнении (3.3.58) опять имеет место (3.3.59).

Характеристики оптимального обнаружителя при использовании гауссовской аппроксимации выходной статистики получаем, положив $\eta^* = \eta_0$. Тогда вероятность ложной тревоги определяется из (3.2.37), (3.2.41), (3.3.48), а вероятность пропуска принимает вид

$$\beta_0 = \Phi[(u - q\sqrt{\mu}) / (1 + q)] . \quad (3.3.63)$$

Сравним вероятности ложной тревоги, обеспечиваемые МПО (3.3.49) и оптимальным обнаружителем (3.2.41) при использовании для их расчета гауссовской аппроксимации. В аналитической форме это можно сделать при $u \gg 1$, когда верны приближенные формулы (3.2.43) и (3.3.50). Используя эти выражения, получаем

$$\alpha/\alpha_0 = \pi u^2 . \quad (3.3.64)$$

Так же как из (3.3.61), из (3.3.64) следует, что незнание центральной частоты приводит к существенному увеличению вероятности ложной тревоги при больших m (3.2.13) и u (3.3.48). Для сравнения вероятностей пропуска сигнала с неизвестной (3.3.52) и известной (3.3.63) центральной частотой необходимы численные расчеты по этим формулам.

Все рассмотренные здесь алгоритмы обнаружения полосового сигнала с неизвестной центральной частотой основаны на использовании выходной статистики (3.1.12), (3.1.14). В отличие от случая обнаружения регулярного сигнала, статистика (3.1.12), (3.1.14) формируется без использования априорной информации о величине спектральной плотности γ (1.2.21). Поэтому рассмотренные здесь алгоритмы можно так же использовать для обнаружения полосового сигнала, у которого неизвестны величина γ_0 и центральная частота ν_0 спектральной плотности. Характеристики обнаружения

полосового сигнала с неизвестными величиной и центральной частотой спектральной плотности могут быть рассчитаны по формулам, полученным выше, если в них заменить q на $q_0 = \gamma_0/N_0$. При этом предполагается использование критерия Неймана-Пирсона, так что порог s определяется по заданной величине вероятности ложной тревоги, которая не зависит от априори неизвестного значения спектральной плотности сигнала.

ГЛАВА 4.

ИМПУЛЬСНЫЕ СИГНАЛЫ С НЕИЗ-
ВЕСТНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ

4.1. Синтез алгоритмов обнаружения

4.1.1. Логарифм функционала отношения правдоподобия. Определим структуру АМП для обработки нестационарного импульсного гауссовского сигнала (1.2.28), принимаемого на фоне гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0 (1.2.14). С этой целью конкретизируем общее выражение для логарифма ФОП (1.4.12) применительно к обнаружению гауссовского сигнала с математическим ожиданием (1.2.29) и корреляционной функцией (1.2.30). Длительность импульса (1.2.28) полагаем достаточно большой, так что

$$2\pi/\Omega \ll \tau, \quad (4.1.1)$$

где τ - минимально возможная длительность импульса, а Ω - эквивалентная полоса частот (1.2.17), (1.2.22) процесса $\xi(t)$ в (1.2.28). При выполнении (4.1.1) решение интегрального уравнения (1.4.13), аналогично [8, 11], будем искать в форме, структурно подобной корреляционной функции (1.2.30) импульсного стохастического сигнала (1.2.28)

$$\bar{Q}(t_1, t_2, \chi) = I[(t_1 - \lambda)/\tau] I[(t_2 - \lambda)/\tau] \bar{Q}_0(t_2 - t_1, \chi). \quad (4.1.2)$$

Подставляя (4.1.2) в (1.4.13), приходим к уравнению

$$\frac{N_0}{2} \bar{Q}_0(t_2 - t_1, \chi) + \chi \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} \bar{Q}_0(t - t_1, \chi) B(t_2 - t) dt = B(t_2 - t_1), \quad (4.1.3)$$

где $B(t_2 - t_1)$ - корреляционная функция процесса $\xi(t)$ в (1.2.28). В силу (4.1.1) пределы интегрирования в (4.1.3) можно заменить на бесконечные. Получаемое при этом интегральное уравнение типа свертки совпадает с (2.1.4). Решение его с помощью преобразования Фурье приводит к результату, аналогичному (2.1.8)

$$\bar{Q}_0(t_2 - t_1, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[j\omega(t_2 - t_1)] G(\omega)}{N_0/2 + \chi G(\omega)} d\omega. \quad (4.1.4)$$

Здесь $G(\omega)$ - спектральная плотность (1.2.12) процесса $\xi(t)$ в (1.2.28). Положим в (4.1.4) $\chi=1$ и подставим в (4.1.2). Подставляя затем (1.2.29) и (4.1.2) в (1.4.14), получаем

$$V(t) = \frac{2a}{N_0} I \left[\frac{t - \lambda}{\tau} \right] \left\{ 1 - \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} Q_0(t_1 - t) dt_1 \right\}, \quad (4.1.5)$$

$$Q_0(t_2 - t_1) = Q_0(t_2 - t_1, \chi) \Big|_{\chi=1}. \quad (4.1.6)$$

Спектр этой функции, согласно (4.1.4), имеет вид

$$Q_0(\omega) = 2G(\omega) / N_0 [1 + 2G(\omega)/N_0], \quad (4.1.7)$$

откуда следует, что эквивалентная полоса частот функции (4.1.6), аналогично (2.1.21), не менее Ω . Значит, в силу (4.1.1) пределы интегрирования в (4.1.5) можно заменить на бесконечные. В результате из (4.1.5) имеем

$$\begin{aligned}
 V(t) &\approx \frac{2a}{N_0} I \left[\frac{t-\lambda}{\tau} \right] \left\{ 1 - \int_{-\infty}^{\infty} Q_0(\Delta) d\Delta \right\} = \\
 &= \frac{2a}{N_0} I \left[\frac{t-\lambda}{\tau} \right] \left\{ 1 - Q_0(\omega) \Big|_{\omega=0} \right\} = \\
 &= \frac{2a}{N_0(1+q')} I \left[\frac{t-\lambda}{\tau} \right].
 \end{aligned}$$

Где

$$q' = 2G(\omega)/N_0 \Big|_{\omega=0}. \quad (4.1.8)$$

Подставляя теперь (1.2.29), (4.1.2), (4.1.4), (4.1.6) и (4.1.8) в (1.4.12), получаем выражение для логарифма ФОП при обработке импульсного гауссовского сигнала

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{N_0} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} x(t_1) x(t_2) Q_0(t_2-t_1) dt_1 dt_2 + \\
 &+ \frac{2a}{N_0(1+q')} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} x(t) dt - E\tau, \quad (4.1.9)
 \end{aligned}$$

$$E = \frac{a^2}{N_0(1+q')} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{2G(\omega)}{N_0} \right] d\omega. \quad (4.1.10)$$

Формировать логарифм ФОП (4.1.9) при аппаратурной реализации МПО можно различными способами. Рассмотрим наиболее простой из них, который уже использовался в п.2.1.1. Обозначая

$$\tilde{x}(t) = I[(t-\lambda)/\tau] x(t)$$

и, преобразуя первое слагаемое в правой части (4.1.9) аналогично (2.1.13)...(2.1.17), находим

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{1}{N_0} \int_0^{\lambda+\tau/2} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} x(t_1) x(t_2) Q_0(t_2-t_1) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2(t, \lambda, \tau) dt, \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t, \lambda, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t') H(t-t') dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} I[(t'-\lambda)/\tau] x(t') H(t-t') dt', \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

а спектр $H(\omega)$ функции $H(t)$ удовлетворяет условию

$$|H(\omega)|^2 = Q_0(\omega). \quad (4.1.13)$$

Учитывая (2.1.21) и (4.1.1), можем, аналогично (2.1.23), переписать (4.1.12) как

$$\bar{y}(t, \lambda, \tau) \approx I[(t-\lambda)/\tau] y(t), \quad (4.1.14)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') H(t-t') dt'. \quad (4.1.15)$$

Аналогично (2.1.24), функцию (4.1.15) можно интерпретировать как сигнал на выходе линейного фильтра с импульсной переходной функцией $H(t)$, на вход которого подается реализация наблюдаемых данных $x(t)$. Как и в (2.1.23), правая и левая части приближенного равенства (4.1.14) могут существенно отличаться на интервалах времени порядка $2\pi/\Omega_H$ в окрестности точек $t=\lambda+\tau/2$ и $t=\lambda-\tau/2$, где Ω_H — эквивалентная полоса частот (2.1.20) фильтра с передаточной функцией $H(\omega)$ (4.1.13). В силу (2.1.21) и (4.1.1) $2\pi/\Omega_H \ll \tau$. Кроме того, (4.1.14) входит в логарифм ФОП под знаком интеграла (4.1.11). Следовательно, можно пренебречь переходными процессами в фильтре с передаточной функцией $H(\omega)$ (4.1.13). В результате, аналогично (2.1.25), логарифм ФОП (4.1.9) можем переписать как

$$L = \frac{1}{N_0} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} \left[|y^2(t) + \frac{2ax(t)}{1+q'}| dt - E\tau \right]. \quad (4.1.16)$$

Соотношения (1.4.5), (4.1.10), (4.1.13), (4.1.15), (4.1.16) определяют структуру МПО, реализующего АМП обнаружения нестационарного гауссовского импульсного сигнала на фоне гауссовского белого шума.

Если гауссовский импульсный сигнал (1.2.28) является широкополосным, то спектральная плотность $G(\omega)$ в (4.1.7), (4.1.10) определяется из (1.2.18), а (4.1.16) принимает вид

$$L = \frac{1}{N_0} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} \left[y^2(t) + \frac{2ax(t)}{1+q} \right] dt - E\tau. \quad (4.1.17)$$

Здесь q определяется из (2.1.22),

$$E = \frac{\Omega}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln [1+qg(x)] dx + \frac{a^2}{N_0(1+q)}, \quad (4.1.18)$$

$y(t)$ - сигнал на выходе фильтра с передаточной функцией $H(\omega)$, удовлетворяющей условию

$$|H(\omega)|^2 = g_1(\omega/\Omega), \quad (4.1.19)$$

а $g_1(\cdot)$ определяется из (2.1.30).

Если же гауссовский импульсный сигнал (1.2.28) является узкополосным, то согласно (1.2.26), (1.2.27) можем (4.1.9) переписать как

$$L = \frac{1}{N_0} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} y^2(t) dt - E\tau, \quad (4.1.20)$$

где

$$E = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln [1 + qg(x)] dx, \quad (4.1.21)$$

q определяется из (2.1.48), а $y(t)$ - сигнал на выходе фильтра с передаточной функцией $H(\omega)$, которая удовлетворяет условию

$$|H(\omega)|^2 = g_1\left(\frac{\nu-\omega}{\Omega}\right) + g_1\left(\frac{\nu+\omega}{\Omega}\right) \quad (4.1.22)$$

при подстановке в него $g_1(\cdot)$ из (2.1.30).

4.1.2. Неизвестная длительность сигнала. Конкретизируем структуру МПО для импульсного гауссовского сигнала с неизвестной длительностью τ (1.2.31), т.е. полагаем пока временное положение λ известным. Тогда целесообразно совместить передний фронт импульса с началом интервала наблюдения (1.2.10), положив $\lambda = \tau/2$. В результате, применительно к обнаружению широкополосного импульсного сигнала с неизвестной длительностью, логарифм ФОП (4.1.17) примет вид

$$L(\tau) = \int_0^{\tau} [y^2(t) + Ax(t) - A_1] dt / N_0, \quad (4.1.23)$$

где

$$A = 2a/(1+q), \quad A_1 = N_0 E. \quad (4.1.24)$$

Согласно (1.4.5), МПО сигнала с неизвестной длительностью должен вырабатывать логарифм ФОП (4.1.23) для всех возможных значений длительности

$$\tau \in [T_1; T_2], \quad (4.1.25)$$

определять величину абсолютного (наибольшего) максимума (4.1.23) и сравнивать ее с порогом s .

Функциональная схема МПО сигнала с неизвестной длительностью приведена на рис. 4.1. Здесь, как и ранее, $H(\omega)$ - линейный фильтр, передаточная функция которого удовлетворяет условию (4.1.19), ПД - пиковый детектор [64], выходной сигнал которого равен наибольшему максимуму входного сигнала на интервале времени (4.1.25), ПУ - пороговое устройство, сигнал на выходе которого (решение о наличии стохастического сигнала во входной реализации) появляется, если превышен порог s . В отличие от общей функциональной схемы МПО (рис. 2.1), функциональная схема рис. 4.1 является

одноканальной. Она формирует логарифм ФОП как непрерывную функцию неизвестной длительности сигнала во всем априорном интервале её возможных значений (4.1.25).

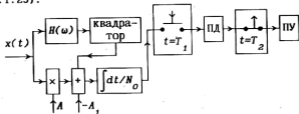


Рис. 4.1. Обнаружитель импульсного сигнала с неизвестной длительностью; ПД - пиковый детектор; ПУ - пороговое устройство.

Несколько изменив функциональную схему рис. 4.1, её можно использовать для обнаружения узкополосного сигнала с неизвестной длительностью. Действительно, при обнаружении узкополосного сигнала с неизвестной длительностью логарифм ФОП (4.1.20) принимает вид

$$L(\tau) = \int_0^{\tau} [y^2(t) - A_1] dt / N_0. \quad (4.1.26)$$

Здесь $y(t)$ определяется как в (4.1.20), а A_1 - из (4.1.24) при подстановке в эту формулу (4.1.21). Следовательно, для обнаружения узкополосного сигнала с неизвестной длительностью, надо в функциональной схеме рис. 4.1 использовать фильтр с передаточной функцией, которая удовлетворяет (4.1.22), положить $A = 0$ и использовать A_1 из (4.1.26).

Пусть теперь, спектральная плотность стохастического сигнала (1.2.31) с неизвестной длительностью зависит от неизвестных параметров $\theta \in \Theta$. В этом случае МПО может быть реализован в многоканальном варианте, аналогично рис. 2.1. При этом один канал, соответ-

ствущий значению неизвестных параметров ϑ_k , имеет вид, показанный на рис 4.1. Необходимо лишь в этой функциональной схеме использовать фильтр, передаточная функция которого удовлетворяет условию (2.1.16). Пусть, например, кроме длительности у широкополосного стохастического сигнала неизвестны математическое ожидание a (1.2.9) и величина спектральной плотности γ (1.2.16). Тогда МПО можно реализовать в виде многоканальной функциональной схемы, аналогично рис. 2.1. Один канал такой схемы будет иметь вид, показанный на рис. 4.1. Необходимо только в этой схеме использовать фильтр, передаточная функция которого удовлетворяет условию

$$|H(\omega, q_k)|^2 = q_k g(\omega/\Omega) / [1 + q_k g(\omega/\Omega)], \quad (4.1.27)$$

a на перемножитель и сумматор подавать вместо (4.1.24) сигналы

$$A_{ki} = 2a_i / (1 + q_k), \quad A_{iki} = a_i^2 / (1 + q_k) + \\ + N_0 \Omega \int_{-\infty}^{\infty} \ln[1 + q_k g(x)] dx / 4\pi. \quad (4.1.28)$$

Здесь $k = \overline{1, n}$, n — количество дискретных значений параметра q (2.1.22), $i = \overline{1, n_i}$, n_i — количество дискретных значений математического ожидания a (1.2.9). Общее число каналов функциональной схемы МПО будет равно произведению $n \cdot n_i$. Это обстоятельство существенно затрудняет техническую реализацию МПО.

Существенно упростить техническую реализацию МПО стохастического сигнала с неизвестными длительностью, математическим ожиданием и величиной спектральной плотности удастся при обнаружении полосового импульсного сигнала. Для полосового импульсного сигнала

спектральная плотность процесса $\xi(t)$ в (1.2.31) имеет прямоугольную форму (1.2.20).

Рассмотрим вначале частный случай обнаружения полосового центрированного широкополосного стохастического импульсного сигнала с неизвестными длительностью и величиной спектральной плотности. Полагая в (4.1.23), (4.1.24) $a=0$ и подставляя $g(\cdot)$ из (1.2.20), для логарифма ФОП находим

$$L(\tau, q) = \frac{q}{N_0(1+q)} \int_0^{\tau} y_I^2(t) dt - \frac{\Omega\tau}{4\pi} \ln(1+q). \quad (4.1.29)$$

Здесь, аналогично (2.1.40), $y_I(t)$ — отклик фильтра с передаточной функцией $H_I(\omega)$ на реализацию наблюдаемых данных $x(t)$, причём

$$|H_I(\omega)|^2 = I(\omega/\Omega). \quad (4.1.30)$$

Согласно (1.4.5), МПО должен вырабатывать наибольший максимум логарифма ФОП

$$\hat{L} = \sup_{\tau, q} L(\tau, q) = \sup_{\tau} \hat{L}(\tau),$$

где

$$\hat{L}(\tau) = \sup_q L(\tau, q) = L[\tau, \tilde{q}(\tau)], \quad (4.1.31)$$

а $\tilde{q}(\tau)$ можно найти из решения уравнения [19]

$$[\partial L(\tau, q)/\partial q]_{\tilde{q}(\tau)} = 0. \quad (4.1.32)$$

Подставляя (4.1.29) в (4.1.32) и решая получаемое уравнение, находим

$$\tilde{q}(\tau) = 4\pi \int_0^{\tau} y_I^2(t) dt / N_0 \Omega \tau - 1. \quad (4.1.33)$$

Подставляя затем (4.1.33) в (4.1.29), имеем для (4.1.31)

$$\hat{L}(\tau) = \frac{1}{N_0} \int_0^{\tau} y_I^2(t) dt - \frac{\Omega\tau}{4\pi} \left\{ 1 + \ln \left[\frac{4\pi}{\tau\Omega N_0} \int_0^{\tau} y_I^2(t) dt \right] \right\}. \quad (4.1.34)$$

Эта форма представления логарифма ФОР позволяет реализовать МПО полосового сигнала с неизвестными длительностью и величиной спектральной плотности в виде, показанном на рис. 4.2. Здесь используется поло-

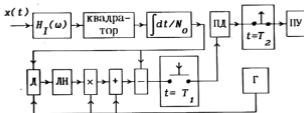


Рис. 4.2. Обнаружитель полосового импульсного сигнала с неизвестными длительностью и величиной спектральной плотности; Д - делитель; ЛН - нелинейный преобразователь с логарифмической характеристикой; ПД - пиковый детектор; Г - генератор линейно-изменяющегося сигнала; ПУ - пороговое устройство.

совой линейный фильтр с передаточной функцией $H_I(\omega)$, удовлетворяющей (4.1.30), и обозначено: Д - делитель, ЛН - нелинейный преобразователь с логарифмической характеристикой, Г - генератор, вырабатывающий линейно-изменяющийся сигнал

$$u(t) = t\Omega/4\pi \quad (4.1.35)$$

в интервале времени $t \in [T_1; T_2]$. Остальные обозначения такие же, как на рис. 4.1.

Функциональная схема рис. 4.2 легко модифицируется для обнаружения узкополосного сигнала с неизвестными длительностью и величиной спектральной плотности. Действительно, подставляя в (4.1.26) $g(\cdot)$ из (1.2.20), максимизируя результат по q , аналогично (4.1.34), получаем

$$\begin{aligned} \hat{L}(\tau) = & \frac{1}{N_0} \int_0^{\tau} y_I^2(t) dt - \frac{\tau \Omega}{2\pi} \left\{ 1 + \right. \\ & \left. + \ln \left[\frac{2\pi}{\tau \Omega N_0} \int_0^{\tau} y_I^2(t) dt \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.36)$$

Здесь, в отличие от (4.1.29), (4.1.34), $y_I(t)$ - отклик узкополосного полосового фильтра на реализацию наблюдаемых данных, причем передаточная функция этого фильтра удовлетворяет условию

$$|H_I(\omega)|^2 = I[(\nu - \omega)/\Omega] + I[(\nu + \omega)/\Omega]. \quad (4.1.37)$$

Далее используем в функциональной схеме рис. 4.2 узкополосный полосовой фильтр и положим, что генератор линейно изменяющегося сигнала вместо (4.1.35) вырабатывает сигнал $u(t) = t\Omega/2\pi$. Тогда функциональная схема рис. 4.2 позволяет реализовать МПО узкополосного полосового сигнала с неизвестными длительностью и величиной (1.2.21) спектральной плотности (1.2.27), где $g(\cdot)$ определяется из (1.2.20).

Положим теперь, что у обнаруживаемого полосового широкополосного импульсного сигнала неизвестны длительность, величина спектральной плотности и математическое ожидание. Подставим в (4.1.23), (4.1.24) $g(\cdot)$ из (1.2.20). Получаем логарифм ФОП в

виде

$$L(\tau, q, a) = \frac{q}{N_0(1+q)} \int_0^{\tau} y_I^2(t) dt + \frac{2a}{N_0(1+q)} \int_0^{\tau} x(t) dt - \left[\frac{a^2}{N_0(1+q)} + \frac{\Omega}{4\pi} \ln(1+q) \right] \tau. \quad (4.1.38)$$

Согласно (1.4.5), МПО должен выработать абсолютный максимум логарифма ФОР

$$\hat{L} = \sup_{\tau, q, a} L(\tau, q, a) = \sup_{\tau} \hat{L}(\tau),$$

где

$$\hat{L}(\tau) = \sup_{q, a} L(\tau, q, a) = L[\tau, \tilde{q}(\tau), \tilde{a}(\tau)], \quad (4.1.39)$$

а $\tilde{q}(\tau)$ и $\tilde{a}(\tau)$ можно найти из решения системы уравнений [19]

$$[\partial L(\tau, q, a) / \partial q]_{\tilde{q}(\tau), \tilde{a}(\tau)} = 0,$$

$$[\partial L(\tau, q, a) / \partial a]_{\tilde{q}(\tau), \tilde{a}(\tau)} = 0. \quad (4.1.40)$$

Подставляя (4.1.38) в (4.1.40) и решая получаемую систему уравнений, находим

$$\tilde{q}(\tau) = \frac{4\pi}{\tau \Omega N_0} \left\{ \int_0^{\tau} y_I^2(t) dt - \frac{1}{\tau} \left[\int_0^{\tau} x(t) dt \right]^2 \right\}^{-1}, \quad (4.1.41)$$

$$\tilde{a}(\tau) = \int_0^{\tau} x(t) dt / \tau. \quad (4.1.42)$$

Подставляя затем (4.1.41) и (4.1.42) в (4.1.38), имеем для (4.1.39)

$$\hat{L}(\tau) = \frac{1}{N_0} \int_0^{\tau} y_I^2(t) dt - \frac{\Omega\tau}{4\pi} \left\{ 1 + \ln \left[\frac{4\pi}{\tau\Omega N_0} \int_0^{\tau} y_I^2(t) dt - \frac{4\pi}{\tau^2\Omega N_0} \left\{ \int_0^{\tau} x(t) dt \right\}^2 \right] \right\}. \quad (4.1.43)$$

Это выражение позволяет реализовать МПО полосового сигнала с неизвестными длительностью, величиной спектр-

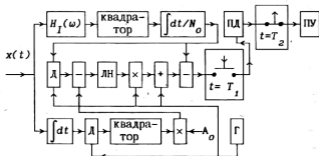


Рис. 4.3. Обнаружитель полосового импульсного сигнала с неизвестными длительностью, математическим ожиданием и величиной спектральной плотности; Д - делитель; ЛН - нелинейный преобразователь с логарифмической характеристикой; ПД - пиковый детектор; Г - генератор линейно-изменяющегося сигнала; ПУ - пороговое устройство.

ральной плотности и математическим ожиданием как по-

казано на рис. 4.3. Здесь используется полосовой фильтр с передаточной функцией (4.1.30) и обозначения соответствуют рис. 4.1, 4.2, $A_0 = \Omega/4\pi N_0$.

Функциональные схемы рис. 4.2, 4.3 могут быть также использованы для многоканальной реализации МПО, когда у сигнала имеются дополнительные неизвестные параметры, такие как эквивалентная полоса частот, центральная частота спектральной плотности и т.д. Для таких сигналов функциональные схемы рис. 4.2, 4.3 определяют структуру одного канала в многоканальной функциональной схеме МПО, аналогичной рис. 2.1.

4.2. Характеристики обнаружения.

При обнаружении стохастического импульсного сигнала (1.2.31) с неизвестной длительностью логарифм ФОР определяется из (4.1.23). В этом выражении содержится квадрат гауссовского случайного процесса (4.1.15), поэтому в общем случае логарифм ФОР представляет собой негауссовский случайный процесс. Тем не менее, исследуя, аналогично п. 2.2.1, характеристическую функцию (1.1.5) и кумулянтные коэффициенты (1.1.12) логарифма ФОР (4.1.23), получаем, что при выполнении (2.2.21) его распределение сходится к гауссовскому. Отличие лишь в том, что в качестве величин (2.2.18), (2.2.19) теперь надо использовать соответственно

$$\mu_{\min} = \Omega T_1 / 4\pi \quad (4.2.1)$$

– при обнаружении широкополосного импульсного сигнала и

$$\mu_{\min} = \Omega T_1 / 2\pi \quad (4.2.2)$$

– при обнаружении узкополосного импульсного сигнала. В (4.2.1), (4.2.2) Ω – эквивалентная полоса частот

сигнала (1.2.17) или (1.2.22), а T_1 - его минимальная возможная длительность (4.1.25).

В силу асимптотической гауссовости логарифма ФОР (4.1.23) при выполнении (2.2.21) для его асимптотически полного вероятностного описания достаточно найти математическое ожидание и корреляционную функцию. Для этого представим (4.1.23) в виде (2.2.22) и найдем регулярную составляющую (2.2.23) и корреляционную функцию (2.2.25) шумовой составляющей (2.2.24).

Выполняя в (4.1.23) усреднение, для регулярной составляющей (2.2.23) имеем

$$S(\tau) = \langle L(\tau) \rangle = \frac{1}{N_0} \int_0^{\tau} \langle y^2(t) \rangle dt + \\ + \frac{2a}{N_0(1+q)} \int_0^{\tau} \langle x(t) \rangle dt - E\tau. \quad (4.2.3)$$

Согласно (4.1.15)

$$\langle y^2(t) \rangle = \left\langle \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t') H(t-t') dt' \right]^2 \right\rangle = \\ = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle x(t_1) x(t_2) \rangle H(t-t_1) H(t-t_2) dt_1 dt_2 \quad (4.2.4)$$

так, что (4.2.3) можно переписать в виде

$$S(\tau) = \frac{1}{N_0} \int_0^{\tau} \iint_{-\infty}^{\infty} \langle x(t_1) x(t_2) \rangle H(t-t_1) H(t-t_2) dt dt_1 dt_2 + \\ + \frac{2a}{N_0(1+q)} \int_0^{\tau} \langle x(t) \rangle dt - E\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\tau} \iint_{-\infty}^{\infty} [B_x(t_1, t_2) +$$

$$\begin{aligned}
 & + a_x(t_1)a_x(t_2)] H(t-t_1)H(t-t_2)dt dt_1 dt_2 + \\
 & + \frac{2a}{N_0(1+q)} \int_0^{\tau} a_x(t)dt - E\tau. \quad (4.2.5)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$a_x(t) = \langle x(t) \rangle \quad (4.2.6)$$

- математическое ожидание и

$$B_x(t_1, t_2) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle - a_x(t_1)a_x(t_2) \quad (4.2.7)$$

- корреляционная функция наблюдаемого случайного процесса $x(t)$

Найдем далее корреляционную функцию (2.2.25) шумовой составляющей (2.2.24) логарифма ФАП (4.1.23)

$$\begin{aligned}
 & B_N(\tau_1, \tau_2) = \langle N(\tau_1)N(\tau_2) \rangle = \\
 & = \frac{1}{N_0^2} \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \left\{ \langle y^2(t_1)y^2(t_2) \rangle - \langle y^2(t_1) \rangle \langle y^2(t_2) \rangle \right\} + \\
 & + \frac{2a}{1+q} \left[\langle y^2(t_1)x(t_2) \rangle - \langle y^2(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle + \right. \\
 & + \left. \langle x(t_1)y^2(t_2) \rangle - \langle x(t_1) \rangle \langle y^2(t_2) \rangle \right] + \\
 & + \frac{4a^2}{(1+q)^2} \left[\langle x(t_1)x(t_2) \rangle - \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle \right] \Bigg\} dt_1 dt_2. \quad (4.2.8)
 \end{aligned}$$

Подставляя (4.1.15) в (4.2.8), имеем

$$\begin{aligned}
B_N(\tau_1, \tau_2) = & \frac{1}{N^2} \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \left\{ \iiint_{-\infty}^{\infty} [\langle x(t_3)x(t_4)x(t_5)x(t_6) \rangle - \right. \\
& - \langle x(t_3)x(t_4) \rangle \langle x(t_5)x(t_6) \rangle] H(t_1-t_3)H(t_1-t_4) \times \\
& \times H(t_2-t_5)H(t_2-t_6) dt_3 dt_4 dt_5 dt_6 + \quad (4.2.9) \\
& + \frac{2a}{1+q} \int_{-\infty}^{\infty} \int [\langle x(t_2)x(t_3)x(t_4) \rangle - \langle x(t_2) \rangle \langle x(t_3)x(t_4) \rangle] \times \\
& \times H(t_1-t_3)H(t_1-t_4) dt_3 dt_4 + \frac{2a}{1+q} \int_{-\infty}^{\infty} \int [\langle x(t_1)x(t_3)x(t_4) \rangle - \\
& - \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_3)x(t_4) \rangle] H(t_2-t_3)H(t_2-t_4) dt_3 dt_4 + \\
& \left. + \frac{4a^2}{(1+q)^2} [\langle x(t_1)x(t_2) \rangle - \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle] \right\} dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

Учитывая, что наблюдаемый процесс $x(t)$ является гауссовским как при наличии, так и при отсутствии сигнала (1.2.31) и используя (1.2.4), выразим (4.2.9) через два первых момента наблюдаемого процесса (4.2.6), (4.2.7)

$$\begin{aligned}
B_N(\tau_1, \tau_2) = & \frac{1}{N^2} \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \left\{ \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\{ B_x(t_3, t_5) [B_x(t_4, t_6) + \right. \right. \\
& + a_x(t_4)a_x(t_6)] + B_x(t_3, t_6) [B_x(t_4, t_5) + a_x(t_4)a_x(t_5)] + \\
& \left. \left. + a_x(t_3)a_x(t_6)B_x(t_4, t_5) + a_x(t_3)a_x(t_5)B_x(t_4, t_6) \right\} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times H(t_1 - t_3)H(t_1 - t_4)H(t_2 - t_5)H(t_2 - t_6)dt_3 dt_4 dt_5 dt_6 + \\
& + \frac{2a}{1+q} \iint_{-\infty}^{\infty} [a_x(t_3)B_x(t_4, t_2) + a_x(t_4)B_x(t_3, t_2)]H(t_1 - t_3) \times \\
& \times H(t_1 - t_4)dt_3 dt_4 + \frac{2a}{1+q} \iint_{-\infty}^{\infty} [a_x(t_3)B_x(t_4, t_1) + \\
& + a_x(t_4)B_x(t_3, t_1)]H(t_2 - t_3)H(t_2 - t_4)dt_3 dt_4 + \\
& + \frac{4a^2}{(1+q)^2} B_x(t_1, t_2) \Big\} dt_1 dt_2 . \quad (4.2.10)
\end{aligned}$$

Пусть верна гипотеза H_0 (сигнал отсутствует).

Тогда $x(t) = n(t)$, где $n(t)$ — центрированный гауссовский белый шум (1.2.15), а выражения (4.2.6), (4.2.7) примут вид

$$a_x(t) = 0, \quad B_x(t_1, t_2) = N_0 \delta(t_1 - t_2)/2. \quad (4.2.11)$$

Подставляя (4.2.11) в (4.2.5), имеем

$$S_0(\tau) = S[\tau | H_0] = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} H^2(t - t_1) dt dt_1 - E\tau. \quad (4.2.12)$$

Найдем внутренний интеграл по t_1 . Используя теорему Парсеваля [22, 41, 63] и (4.1.19), (2.1.30), получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} H^2(t - t_1) dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} H^2(t) dt = \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{qg(x)}{1+qg(x)} dx. \quad (4.2.13)
\end{aligned}$$

Подставим теперь (4.1.18) и (4.2.13) в (4.2.12) и запишем выражение для регулярной составляющей логарифма ФОР (4.1.23) при отсутствии сигнала

$$S_0(\tau) = S_0(\eta) = -k_N \eta / \eta_s. \quad (4.2.14)$$

Здесь

$$k_N = \frac{z_{0\min}^2}{2(1+q)} + \mu_{\min} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \ln[1+qg(x)] - \frac{qg(x)}{1+qg(x)} \right\} dx, \quad (4.2.15)$$

$$\eta = \tau/T_2, \quad \eta_s = T_1/T_2,$$

$$z_{0\min}^2 = 2a^2 T_1 / N_0 \quad (4.2.16)$$

— минимальное ОСШ для регулярной составляющей сигнала (1.2.31), μ_{\min} определяется из (4.2.1), а q — из (2.1.22).

Подставим далее (4.2.11) в (4.2.10) и найдем корреляционную функцию шумовой функции логарифма ФОР (4.1.23) при отсутствии сигнала

$$B_{N0}(\tau_1, \tau_2) = B_N[\tau_1, \tau_2 | H_0] = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(t_1-t) \times \right. \\ \left. \times H(t_2-t) dt \right]^2 dt_1 dt_2 + \frac{2a^2}{N_0(1+q)^2} \min(\tau_1, \tau_2). \quad (4.2.17)$$

Рассмотрим внутренний интеграл в (4.2.17), для чего выразим функцию $H(t)$ через её спектр (2.1.19) и подставим в этот интеграл. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(t_1-t) H(t_2-t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\omega(t_2 - t_1)] |H(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.2.18)$$

Здесь $H(\omega)$ удовлетворяет соотношению (4.1.13), так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(t_1 - t) H(t_2 - t) dt = Q_0(t_2 - t_1), \quad (4.2.19)$$

а $Q_0(t_2 - t_1)$ определяется из (4.1.6).

Теперь (4.2.17) принимает вид

$$B_{HO}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} J(\tau_1, \tau_2) + \frac{2a^2}{N_0(1+q)^2} \min(\tau_1, \tau_2), \quad (4.2.20)$$

где

$$J(\tau_1, \tau_2) = \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} Q_0^2(t_2 - t_1) dt_1 dt_2.$$

Выполним в этом интеграле замену переменных интегрирования, аналогичную (2.2.27), (2.2.29). Переходя к новым переменным интегрирования (2.2.28), получаем

$$J(\tau_1, \tau_2) = T_2 \int_{-\tau_1}^{\tau_2} Q_0^2(\Delta) [\min(\eta_1, \eta_2 - \Delta/T_2) - \max(0, -\Delta/T_2)] d\Delta, \quad (4.2.21)$$

где

$$\eta_1 = \tau_1/T_2.$$

В силу (2.2.21), (4.1.1) и (4.1.7) в (4.2.21) $|\Delta|/T_2 \ll 1$ на той части интервала интегрирования, где функция $Q_0(\Delta)$ (4.1.6) заметно отлична от нуля.

Кроме того, при выполнении (2.2.21), (4.1.1) пределы интегрирования в (4.2.21) можно заменить на бесконечные, так что

$$J(\tau_1, \tau_2) \approx \min(\tau_1, \tau_2) \int_{-\infty}^{\infty} Q_0^2(\Delta) d\Delta. \quad (4.2.22)$$

Используя теперь, аналогично (4.2.13), теорему Парсеваля [22, 41, 63] и соотношения (4.1.7), (1.2.18), для интеграла (4.2.22) находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Q_0^2(\Delta) d\Delta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_0^2(\omega) d\omega = \\ &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{qg(x)}{1+qg(x)} \right]^2 dx. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Подставляя (4.2.23) в (4.2.22), а (4.2.22) в (4.2.20), запишем выражение для корреляционной функции логарифма ФОП (4.1.23) при отсутствии сигнала

$$B_{NO}(\tau_1, \tau_2) = B_{NO}(\eta_1, \eta_2) = d_N \min(\eta_1, \eta_2) / \eta_s, \quad (4.2.24)$$

где

$$d_N = \frac{\sigma_{0\min}^2}{(1+q)^2} + \mu_{\min} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{qg(x)}{1+qg(x)} \right]^2 dx. \quad (4.2.25)$$

Таким образом, при отсутствии сигнала, логарифм ФОП (4.1.23) можно представить в виде (2.3.1), где регулярная составляющая определяется из (4.2.14), а асимптотически гауссовская флуктуирующая составляющая обладает корреляционной функцией (4.2.24). Сопоставление (2.3.2), (2.3.3) и (4.2.14), (4.2.24) показывает, что логарифм ФОП (4.1.23) при отсутствии сигнала является гауссовским марковским диффузионным процессом [43]. Его начальная плотность вероятности опреде-

ляется формулой (2.3.6), если в неё подставить $S_0(\eta_x)$ из (4.2.14) и, согласно (4.2.24), положить

$$\sigma_0^2(\eta_x) = B_{N0}(\eta_x, \eta_x) = d_N. \quad (4.2.26)$$

Очевидно коэффициенты сноса и диффузии логарифма ФОП (4.1.23) при отсутствии сигнала имеют вид (2.3.21), (2.3.22), где теперь k_N определяется из (4.2.15), а d_N — из (4.2.25). Следовательно, повторяя выкладки п. 2.3, вероятность ложной тревоги при обнаружении импульсного случайного сигнала получаем в виде (2.3.35), куда надо теперь подставить

$$z_N^2 = \left\{ \frac{z_{0\min}^2}{2(1+q)} + \mu_{\min} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \ln[1+qg(x)] - \frac{qg(x)}{1+qg(x)} \right\} dx \right\}^2 \times \\ \times \left\{ \frac{z_{0\min}^2}{(1+q)^2} + \mu_{\min} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{qg(x)}{1+qg(x)} \right]^2 dx \right\}^{-1}, \quad (4.2.27)$$

$$\tilde{c} = c \left\{ \frac{z_{0\min}^2}{(1+q)^2} + \mu_{\min} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{qg(x)}{1+qg(x)} \right]^2 dx \right\}^{-1/2}. \quad (4.2.28)$$

Кроме того, для сигнала с неизвестной длительностью остаются справедливыми формулы (2.3.38), (2.3.39) при соответствующей замене обозначений.

Пусть теперь сигнал (1.2.31) с неизвестной длительностью $\tau_0 \in [T_1; T_2]$ присутствует на входе МПО (верна гипотеза H_1). Тогда (4.2.6) и (4.2.7) согласно (1.2.15), (1.2.32) переписутся как

$$a_x(t) = aI \left[\frac{t-\tau_0/2}{\tau_0} \right], \quad B_x(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2} \delta(t_2-t_1) + \\ + I \left[\frac{t_1-\tau_0/2}{\tau_0} \right] I \left[\frac{t_2-\tau_0/2}{\tau_0} \right] B(t_2-t_1). \quad (4.2.29)$$

Подставим (4.2.29) в (4.2.5) и определим сигнальную функцию

$$S_1(\tau) = S[\tau|H_1] = \frac{1}{N_0} \int_0^\tau \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty I\left[\frac{t_1 - \tau_0/2}{\tau_0}\right] I\left[\frac{t_2 - \tau_0/2}{\tau_0}\right] \times \\ \times [B(t_2 - t_1) + a^2] H(t - t_1) H(t - t_2) dt dt_1 dt_2 + \quad (4.2.30) \\ + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty H^2(t - t_1) dt dt_1 + \frac{2a^2}{N_0(1+q)} \min(\tau_0, \tau) - E\tau.$$

Найдем внутренние интегралы в этом выражении. Аналогично (2.1.23), (4.1.14), при выполнении (2.2.21), (4.1.1) можем записать

$$\int_{-\infty}^\infty I\left[\frac{t_1 - \tau_0/2}{\tau_0}\right] I\left[\frac{t_2 - \tau_0/2}{\tau_0}\right] \left\{ B(t_2 - t_1) + \right. \\ \left. + a^2 \right\} H(t - t_1) H(t - t_2) dt_1 dt_2 = \\ = I\left[\frac{t - \tau_0/2}{\tau_0}\right] \int_{-\infty}^\infty B(t_2 - t_1) H(t - t_1) H(t - t_2) dt_1 dt_2 + \\ + a^2 I\left[\frac{t - \tau_0/2}{\tau_0}\right] \left[\int_{-\infty}^\infty H(t - t_1) dt_1 \right]^2. \quad (4.2.31)$$

Выразим в первом интеграле в правой части (4.2.31) корреляционную функцию $B(t_2 - t_1)$ через спектральную плотность согласно (1.2.13)

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty B(t_2 - t_1) H(t - t_1) H(t - t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp[j\omega(t_2 - t_1)] G(\omega) H(t - t_1) H(t - t_2) dt_1 dt_2 d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.2.32)
 \end{aligned}$$

Учитывая (4.1.13) и (4.1.7), имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) Q_0(\omega) d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2G^2(\omega) / [1 + 2G(\omega)/N_0] \right\} d\omega. \quad (4.2.33)
 \end{aligned}$$

Для второго интеграла в правой части (4.2.31) можем записать, согласно (4.1.13),

$$\begin{aligned}
 \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(t - t_1) dt_1 \right]^2 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(t) dt \right]^2 = \\
 &= H^2(\omega) \Big|_{\omega=0} = Q_0(\omega) \Big|_{\omega=0}. \quad (4.2.34)
 \end{aligned}$$

Используя (1.2.18), (4.2.13) и подставляя (4.2.31), (4.2.33), (4.2.34) в (4.2.30), находим сигнальную функцию при обнаружении стохастического сигнала с неизвестной длительностью

$$S_1(\tau) = S_1(\eta) = [(k_{1s} + k_{2s}) \min(\eta, \eta_0) - k_{2s} \eta] / \eta_s. \quad (4.2.35)$$

Здесь

$$k_{1s} = \frac{z_{0\min}^2}{2} + \mu_{\min} \int_{-\infty}^{\infty} (qg(x) - \ln[1 + qg(x)]) dx, \quad (4.2.36)$$

$$k_{2s} = k_N, \quad (4.2.37)$$

а k_N определяется из (4.2.15).

Для того, чтобы определить корреляционную функцию логарифма ФОП (4.1.23) при наличии сигнала, подставим (4.2.29) в (4.2.10). Преобразуя полученное выражение аналогично (4.2.21), (4.2.31) и вычисляя внутренние интегралы, аналогично (4.2.18), (4.2.23), (4.2.32), (4.2.34) с помощью преобразования Фурье, имеем

$$B_{N1}(\tau_1, \tau_2) = B_N[\tau_1, \tau_2 | H_1] = B_{N1}(\eta_1, \eta_2) = \\ = [d_{2s} \min(\eta_1, \eta_2) + (d_{1s} - d_{2s}) \min(\eta_1, \eta_2, \eta_0)] / \eta_s. \quad (4.2.38)$$

Здесь

$$d_{1s} = z_{\min}^2 (1+q) + \mu_{\min} q^2, \quad (4.2.39)$$

$$d_{2s} = d_N, \quad (4.2.40)$$

а d_N определяется из (4.2.25).

Таким образом, при наличии сигнала, логарифм ФОП (4.1.23) можно представить в виде (2.3.41), где сигнальная функция определяется из (4.2.35), а асимптотически гауссовская шумовая функция обладает корреляционной функцией (4.2.38). Совпадение (2.3.42), (2.3.43) и (4.2.35), (4.2.38) показывает, что логарифм ФОП (4.1.23) при наличии сигнала является гауссовским марковским диффузионным процессом [43]. Его начальная плотность вероятности определяется формулой (2.3.46), если в неё подставить k_{1s} из (4.2.36) и d_{1s} из (4.2.39). Очевидно, коэффициенты сноса и диффузии логарифма ФОП (4.1.23) при наличии сигнала имеют вид (2.3.44), (2.3.45), где теперь k_{1s} определяется из (4.2.36), k_{2s} - из (4.2.37), (4.2.15), d_{1s} - из (4.2.39), а d_{2s} - из (4.2.40), (4.2.25).

Следовательно, повторяя выкладки п.2.3., вероятность пропуска при обнаружении импульсного случайного сигнала получаем в виде (2.3.62), куда надо теперь

подставить (4.2.27) и

$$A^2 = [z_{0\min}^2 (1+q) + \mu_{\min} q^2] \left\{ z_{0\min}^2 / (1+q)^2 + \mu_{\min} \int_{-\infty}^{\infty} [qg(x) / (1+qg(x))]^2 dx \right\}^{-1}, \quad (4.2.41)$$

$$z^2 = \frac{1}{4} \left\{ z_0^2 + 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} [qg(x) - \ln[1+qg(x)]] dx \right\}^2 \times \\ \times [z_0^2 (1+q) + \mu q^2]^{-1} \quad (4.2.42)$$

-ОСШ для принятого сигнала (2.2.53),

$$z_0^2 = 2a^2 \tau_0 / N_0, \\ \mu = \Omega \tau_0 / 4\pi, \quad (4.2.43)$$

$$\hat{c} = c [z_0^2 (1+q) + \mu q^2]^{-1/2} = \tilde{c} \sqrt{\eta_n / A^2 \eta_0} \quad (4.2.44)$$

- нормированный порог, причём \tilde{c} определяется из (4.2.28).

Рассмотрим некоторые частные случаи полученных выражений для характеристик обнаружения.

Если обнаруживаемый широкополосный импульсный сигнал центрирован, т.е. имеет нулевое математическое ожидание, то вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала опять определяются формулами (2.3.35), (2.3.62). Необходимо лишь в (4.2.27), (4.2.28), (4.2.41), (4.2.42), (4.2.44) положить

$$z_{0\min} = z_0 = 0 \quad (4.2.45)$$

и подставлять в (2.3.35), (2.3.62) параметры

$$z_N^2 = \mu_{\min} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \ln[1+qg(x)] - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{qg(x)}{1+qg(x)} \right\} dx \Big]^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{qg(x)}{1+qg(x)} \right]^2 dx \right\}^{-1}, \quad (4.2.46)$$

$$\tilde{c} = c / \sqrt{\mu_{\min} \int_{-\infty}^{\infty} (qg(x)/[1+qg(x)])^2 dx}, \quad (4.2.47)$$

$$A^2 = q^2 / \int_{-\infty}^{\infty} (qg(x)/[1+qg(x)])^2 dx, \quad (4.2.48)$$

$$z^2 = \mu \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (qg(x) - \ln[1+qg(x)]) dx \right\}^2 / q^2, \quad (4.2.49)$$

$$\hat{c} = c / q\sqrt{\mu}. \quad (4.2.50)$$

Формулы (2.3.35), (2.3.62) можно так же использовать для расчета характеристик обнаружения узкополосного импульсного сигнала с неизвестной длительностью и спектральной плотностью (1.2.27). Для этого надо в параметры (4.2.46)...(4.2.50) подставить μ_{\min} из (4.2.2), q - из (2.1.48) и положить

$$\mu = \Omega\tau_0 / 2\pi. \quad (4.2.51)$$

Формулы для расчёта характеристик обнаружения несколько упрощаются для слабого сигнала (2.2.45). Тогда в (2.3.35), (2.3.62) надо подставить параметры

$$z_N^2 = (z_{0\min}^2 + \mu_{\min} q^2) / 4 = z_{\min}^2, \quad (4.2.52)$$

$$A = 1, \quad \tilde{c} = c / 2z_{\min}, \quad (4.2.53)$$

$$z^2 = (z_0^2 + \mu q^2) / 4, \quad \hat{c} = c / 2z, \quad (4.2.54)$$

где z_{\min}^2 минимально возможное ОСШ для обнаруживаемого

сигнала.

Наконец, если в (4.2.52)...(4.2.54) положить $q = 0$, то (2.3.35), (2.3.62) переходят в соответствующие формулы для вероятностей ложной тревоги и пропуска прямоугольного импульса с неизвестной длительностью, обнаруживаемого на фоне белого шума [45].

Отметим также, что с помощью (4.2.14), (4.2.24), (4.2.35), (4.2.38) нетрудно получить, аналогично гл.2, характеристики квазиравдоподобного и оптимального обнаружителей.

4.3. Полосовой сигнал с неизвестными параметрами.

Применительно к обнаружению полосового импульсного сигнала с неизвестной длительностью вероятности ошибок определяются из (2.3.35), (2.3.62). Необходимо лишь в (4.2.27), (4.2.28), (4.2.41), (4.2.42), (4.2.44) подставить $g(\cdot)$ из (1.2.20). В результате для параметров, определяющих вероятности ложной тревоги (2.3.35) и пропуска сигнала (2.3.62), получаем

$$z_N^2 = \frac{(z_{0\min}^2 + 2\mu_{\min}[(1+q)\ln(1+q)-q])^2}{4(z_{0\min}^2 + \mu_{\min}q^2)}, \quad (4.3.1)$$

$$\tilde{c} = (1+q)c / \sqrt{z_{0\min}^2 + \mu_{\min}q^2}, \quad (4.3.2)$$

$$A^2 = \frac{(1+q)^2 [z_{0\min}^2 (1+q) + \mu_{\min}q^2]}{z_{0\min}^2 + \mu_{\min}q^2}, \quad (4.3.3)$$

$$z_o^2 = \frac{(z_o^2 + 2\mu[q - \ln(1+q)])^2}{4[z_o^2(1+q) + \mu q^2]}, \quad (4.3.4)$$

$$\hat{c} = c / \sqrt{z_0^2(1+q) + \mu q^2} . \quad (4.3.5)$$

Если же обнаруживаемый полосовой сигнал с неизвестной длительностью центрирован, то выполняется (4.2.45) и для параметров (4.3.1)...(4.3.5) имеем

$$z_N^2 = \mu_{\min} [(1+q) \ln(1+q)/q - 1]^2, \quad (4.3.6)$$

$$\tilde{c} = (1+q)c / q\sqrt{\mu_{\min}}, \quad (4.3.7)$$

$$A = 1+q, \quad (4.3.8)$$

$$z^2 = \mu [1 - \ln(1+q)/q]^2, \quad (4.3.9)$$

$$\hat{c} = c / q\sqrt{\mu}. \quad (4.3.10)$$

Наконец, при обнаружении полосового узкополосного сигнала с неизвестной длительностью надо в (4.3.6)...(4.3.10) подставить q из (2.1.48), μ_{\min} — из (4.2.2), μ — из (4.2.51). Отметим, что параметры (4.3.6)...(4.3.10) совпадают с аналогичными параметрами (2.3.36), (2.3.37), (2.3.63), (2.3.64), (2.3.65) при обнаружении центрированного полосового сигнала с известной длительностью, но неизвестной эквивалентной полосой частот.

Рассмотрим теперь обнаружение центрированного полосового импульсного сигнала с неизвестной длительностью τ и величиной γ (1.2.16), (1.2.21) спектральной плотности. По-прежнему полагаем, что выполняется (2.2.21) для (4.2.1) или (4.2.2).

В соответствии с определением, МПО должен вырабатывать максимизированный по γ логарифм ФОП (4.1.34) или (4.1.36). Опять используя нормированную длительность сигнала (4.2.16), логарифм ФОП представим в виде (2.3.67), где теперь μ_{\min} определяется из

(4.2.1) или (4.2.2)

$$L_I(\eta) = L_I(\tau) \Big|_{\tau = \eta T_2}$$

$$L_I(\tau) = \frac{4\pi}{\Omega\tau N_0} \int_0^{\tau} y_I^2(t) dt \quad (4.3.11)$$

-при обнаружении полосового широкополосного сигнала (4.1.34) и

$$L_I(\tau) = \frac{2\pi}{\Omega\tau N_0} \int_0^{\tau} y_I^2(t) dt$$

-при обнаружении полосового узкополосного сигнала (4.1.36).

Вычисляя, аналогично п.4.2. два первых момента функции (4.3.11) при отсутствии и при наличии сигнала, получаем, что они полностью совпадают с соответствующими моментами функции (2.3.68). Откуда в силу асимптотической гауссовости функций (2.3.68) и (4.3.11) следует, что вероятности ошибок при обнаружении полосового центрированного сигнала с неизвестными длительностью и величиной спектральной плотности можно рассчитать по формулам, полученным в п.2.3.2 для полосового сигнала с неизвестными эквивалентной полосой частот и величиной спектральной плотности.

Таким образом, вероятность ложной тревоги при обнаружении полосового центрированного сигнала с неизвестной длительностью можно определить из (2.3.88), (2.3.89), подставляя в эти формулы η из (4.2.16).

Вероятность пропуска при наличии центрированного полосового сигнала с неизвестными длительностью τ_0 и величиной спектральной плотности γ_0 можно рассчитать по формуле (2.3.62). В нее надо подставить параметры (4.3.8)...(4.3.10), предварительно заменив в них q на

q_0 (2.3.95), (2.3.96).

Следовательно, аналогично п.2.3.2, незнание величины спектральной плотности полосового сигнала с неизвестной длительностью при больших μ_{\min} и z , изменяя вероятность ложной тревоги, не влияет на вероятность пропуска сигнала.

Найдем далее характеристики обнаружения полосового широкополосного сигнала с неизвестными длительностью τ , величиной спектральной плотности γ (1.2.16) и математическим ожиданием a (1.2.9).

По определению, МПО должен формировать максимизированный по a и γ логарифм ФОП (4.1.43) для всех возможных значений неизвестной длительности $\tau \in [T_1; T_2]$. Опять, используя нормированную длительность η (4.2.16), логарифм ФОП (4.1.43) представим в виде

$$\hat{L}(\eta) = \mu_{\min} \eta \left\{ L_I(\eta) - \ln[L_I(\eta) - L_M^2(\eta)] - 1 \right\} / \eta_s, \quad (4.3.12)$$

где $L_I(\eta)$ определяется из (4.3.11), а

$$L_M(\eta) = L_M(\tau) \Big|_{\tau=\eta T_2},$$

$$L_M(\tau) = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{4\pi}{\Omega N_0}} \int_0^{\tau} x(t) dt.$$

Положим, что верна гипотеза H_0 (сигнал отсутствует) и обозначим

$$L_{OI}(\eta) = L_I[\eta | H_0], \quad L_{OM}(\eta) = L_M[\eta | H_0].$$

Процесс $L_{OI}(\eta)$ при выполнении (2.2.21) является асимптотически гауссовским, обладает моментами (2.3.70), (2.3.72) и допускает представление (2.3.74), где s определяется из (2.3.73) при подстановке в эту форму-

лу (4.2.1). Процесс $L_{O_m}(\eta)$ является гауссовским, а его два первые момента, учитывая (4.2.11), можем записать как

$$\langle L_{O_m}(\eta) \rangle = 0,$$

$$\langle L_{O_m}(\eta_1)L_{O_m}(\eta_2) \rangle = \eta_s \min(\eta_1, \eta_2) / 2\mu_{\min} \eta_1 \eta_2. \quad (4.3.13)$$

Введем нормированную функцию

$$N_{O_m}(\eta) = L_{O_m}(\eta) \sqrt{2\mu_{\min}},$$

первые два момента которой согласно (4.3.13)

$$\langle N_{O_m}(\eta) \rangle = 0, \quad \langle N_{O_m}^2(\eta) \rangle = \eta_s / \eta \leq 1, \quad (4.3.14)$$

т.е. совпадают с (2.3.75). Следовательно, для $L_{O_m}(\eta)$ справедливо представление

$$L_{O_m}(\eta) = \epsilon N_{O_m}(\eta) \sqrt{2}. \quad (4.3.15)$$

Подставляя (2.3.74) и (4.3.15) в (4.3.12), получаем для логарифма ФОП при отсутствии сигнала

$$\hat{L}_O(\eta) = \hat{L}[\eta | H_0] = \mu_{\min} \eta \left\{ \epsilon N_O(\eta) - \ln[1 + \epsilon N_O(\eta) - \epsilon^2 N_{O_m}^2(\eta) / 2] \right\} / \eta_s. \quad (4.3.16)$$

Учитывая (2.2.21) и (2.3.75), (4.3.14), разложим (4.3.16) в ряд Маклорена по ϵ до первого члена разложения, зависящего от реализации наблюдаемых данных включительно. Имеем

$$\hat{L}_O(\eta) = \eta [N_O^2(\eta) + N_{O_m}^2(\eta)] / 2\eta_s + O(\epsilon).$$

Отбросим здесь члены разложения порядка ϵ и менее. Процесс $N_O(\eta)$ - асимптотически гауссовский, причем

$$\langle N_{O_m}(\eta_1) N_O(\eta_2) \rangle = 0. \quad (4.3.17)$$

Следовательно, учитывая (2.3.72) и (4.3.13), можем аппроксимировать логарифм ФОП выражением

$$\hat{L}_0(\eta) = [w_1^2(\eta) + w_2^2(\eta)]/2\eta = \chi(\eta). \quad (4.3.18)$$

Здесь $w_i(\eta)$, $i=1,2$, независимые стандартные винеровские процессы с характеристиками (2.3.78). Из (2.3.78) и (4.3.18) получаем, что случайный процесс $\chi(\eta)$ обладает плотностью вероятности [41]

$$W(\chi) = \exp(-\chi), \quad \chi \geq 0, \quad (4.3.19)$$

и коэффициентом корреляции (2.3.80). Переходя от процесса $\chi(\eta)$ (4.3.18) к процессу (2.3.81), имеем для вероятности ложной тревоги формулу (2.3.83). В этой формуле вероятность (2.3.84) аппроксимируется выражением (2.3.87). Полагая в (2.3.87), как это следует из (4.3.19), (2.3.82) и (2.3.85), (2.3.86): $\nu=1$, $\delta=1$, $\tilde{m} = -\ln(\eta_s)$, получаем приближенное выражение для вероятности (2.3.84). Подставляя последнюю в (2.3.83), находим для вероятности ложной тревоги аппроксимацию

$$\alpha \approx \begin{cases} 1 - \eta_s^{c \exp(-c)}, & c \geq 1, \\ 1, & c < 1. \end{cases} \quad (4.3.20)$$

Аналогично (2.3.88), точность аппроксимации (4.3.20) возрастает с уменьшением η_s (4.2.16) и увеличением порога c , т.е. с уменьшением вероятности ложной тревоги.

При $c \gg 1$ выражение (4.3.20) несколько упрощается и принимает вид

$$\alpha \approx -c \exp(-c) \ln(\eta_s). \quad (4.3.21)$$

Обозначим здесь $\alpha_{a,q}$ - вероятность ложной тревоги (4.3.20) при обнаружении полосового сигнала с неизвестными длительностью, величиной спектральной плотности и математическим ожиданием; α_q - вероятность

ложной тревоги (2.3.88) при обнаружении центрированного полосового сигнала с неизвестными длительностью и величиной спектральной плотности. При $c \gg 1$ из (4.3.21) и (2.3.89) имеем

$$\alpha_{a,q} / \alpha_q \approx \sqrt{kc}.$$

Значит, незнание математического ожидания приводит к увеличению вероятности ложной тревоги. При этом относительные потери в эффективности обнаружения возрастают с уменьшением требуемого уровня ложных тревог, так как $\alpha \rightarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$.

Положим теперь, что полосовой импульсный сигнал с неизвестными длительностью τ_0 , величиной спектральной плотности γ_0 и математическим ожиданием a_0 присутствует на входе МПО (верна гипотеза H_1). Обозначим

$$\hat{L}_1(\eta) = \hat{L}[\eta|H_1],$$

$$L_{1I}(\eta) = L_I[\eta|H_1], \quad L_{1M}(\eta) = L_M[\eta|H_1] \quad (4.3.22)$$

и представим последние две функции в виде, аналогичном (2.2.22),

$$L_{1I}(\eta) = S_{1I}(\eta) + N_{1I}(\eta), \quad (4.3.23)$$

$$L_{1M}(\eta) = S_{1M}(\eta) + N_{1M}(\eta). \quad (4.3.24)$$

Используя (4.2.29) и выполняя аналогично п. 4.2 усреднение, находим

$$S_{1I}(\eta) = 1 + (q_0 + \delta^2/2) \min(\eta, \eta_0) / \eta, \quad (4.3.25)$$

$$B_{N1I}(\eta_1, \eta_2) = \langle N_{1I}(\eta_1) N_{1I}(\eta_2) \rangle = \eta_s \{ \min(\eta_1, \eta_2) + [q_0(2+q_0) + \delta^2(1+q_0)] \min(\eta_1, \eta_2, \eta_0) \} / \eta_1 \eta_2 \mu_{\min}, \quad (4.3.26)$$

$$S_{1m}(\eta) = \delta \min(\eta, \eta_0) / \eta \sqrt{2}, \quad (4.3.27)$$

$$B_{N_{1m}}(\eta_1, \eta_2) = \langle N_{1m}(\eta_1) N_{1m}(\eta_2) \rangle = \eta_s [\min(\eta_1, \eta_2) + q_0 \min(\eta_1, \eta_2, \eta_0)] / 2\eta_1 \eta_2 \mu_{\min}. \quad (4.3.28)$$

В (4.3.25)...(4.3.28) обозначено

$$\delta^2 = z_0^2 / \mu, \quad (4.3.29)$$

$$z_0^2 = 2a_0^2 \tau_0 / N_0 \quad (4.3.30)$$

— ОСШ для регулярной составляющей принятого сигнала, μ_{\min} определяется из (4.2.1), μ — из (4.2.43), а q_0 — из (2.3.95).

Введем нормированные шумовые функции

$$\tilde{N}_{1I}(\eta) = N_{1I}(\eta) \sqrt{\mu_{\min}},$$

$$\tilde{N}_{1m}(\eta) = N_{1m}(\eta) \sqrt{\mu_{\min}}, \quad (4.3.31)$$

два первых момента которых

$$\langle \tilde{N}_{1I}(\eta) \rangle = \langle \tilde{N}_{1m}(\eta) \rangle = 0, \quad \langle \tilde{N}_{1I}^2(\eta_0) \rangle = \eta_s (1 + q_0) (1 + q_0 + \delta^2) / \eta_0.$$

$$\langle \tilde{N}_{1m}^2(\eta) \rangle = \eta_s [1 + q_0 \min(\eta, \eta_0) / \eta] / 2. \quad (4.3.32)$$

Выразим (4.3.23), (4.3.24) через нормированные шумовые функции (4.3.31) и подставим в (4.3.22). Получим

$$\hat{L}_I(\eta) = \mu_{\min} \eta \left\{ S_{1I}(\eta) - 1 + \epsilon \tilde{N}_{1I}(\eta) - \ln[S_{1I}(\eta) + \epsilon \tilde{N}_{1I}(\eta) - (S_{1m}(\eta) + \epsilon \tilde{N}_{1m}(\eta))^2] \right\} / \eta_s. \quad (4.3.33)$$

Положим, что величины q_0 и δ^2 конечны, так что дисперсии (4.3.32) нормированных шумовых функций (4.3.31) ограничены при любых значениях μ_{\min} . Тогда, учитывая (2.2.21) и (4.3.32), разложим (4.3.33) в ряд Маклорена по ϵ до первого члена разложения, завися-

щего от реализации наблюдаемых данных включительно. Возвращаясь к ненормированным шумовым функциям с характеристиками (4.3.26), (4.3.28), имеем

$$\hat{L}_1(\eta) = \hat{S}_1(\eta) + \hat{N}_1(\eta), \quad (4.3.34)$$

где

$$\hat{S}_1(\eta) = \langle \hat{L}_1(\eta) \rangle = \mu_{\min} \eta \left\{ S_{11}(\eta) - 1 - \ln[S_{11}(\eta) - S_{1m}^2(\eta)] \right\} / \eta_s \quad (4.3.35)$$

- сигнальная функция, а шумовая функция

$$\hat{N}_1(\eta) = \mu_{\min} \eta \left\{ N_{11}(\eta)[S_{11}(\eta) - S_{1m}^2(\eta) - 1] + 2S_{1m}(\eta)N_{1m}(\eta) \right\} / \eta_s [S_{11}(\eta) - S_{1m}^2(\eta)].$$

Эта шумовая функция при выполнении (2.2.21) является приближенно гауссовской и, согласно (4.3.25)... (4.3.28), обладает корреляционной функцией

$$\begin{aligned} \hat{B}_{N1}(\eta_1, \eta_2) &= \frac{\mu_{\min}}{\eta_s} \cdot \frac{\min(\eta_1, \eta_0)}{\eta_1} \cdot \frac{\min(\eta_2, \eta_0)}{\eta_2} \left\{ \left[\frac{\delta^2}{2} + \right. \right. \\ &+ q_0 - \frac{\delta^2}{2} \cdot \frac{\min(\eta_1, \eta_0)}{\eta_1} \left. \right] \left[\frac{\delta^2}{2} + q_0 - \frac{\delta^2}{2} \cdot \frac{\min(\eta_2, \eta_0)}{\eta_2} \right] \times \\ &\times \left[\min(\eta_1, \eta_2) + (q_0^2 + 2q_0 + \delta^2 q_0 + \delta^2) \min(\eta_1, \eta_2, \eta_0) \right] + \\ &+ \delta^2 \left[\min(\eta_1, \eta_2) + q_0 \min(\eta_1, \eta_2, \eta_0) \right] + \delta^2(1+q_0) \left[\delta^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2q_0 - \frac{\delta^2 \min(\eta_1, \eta_0)}{2 \eta_1} - \frac{\delta^2 \min(\eta_2, \eta_0)}{2 \eta_2} \Big] \times \\
& \times \min(\eta_1, \eta_2, \eta_0) \Big\} \left\{ 1 + \left(\frac{\delta^2}{2} + q_0 \right) \frac{\min(\eta_1, \eta_0)}{\eta_1} - \right. \\
& - \frac{\delta^2}{2} \left[\frac{\min(\eta_1, \eta_0)}{\eta_1} \right]^2 \Big\}^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{\delta^2}{2} + q_0 \right) \frac{\min(\eta_2, \eta_0)}{\eta_2} - \right. \\
& \left. - \frac{\delta^2}{2} \left[\frac{\min(\eta_2, \eta_0)}{\eta_2} \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (4.3.36)
\end{aligned}$$

Вероятность пропуска полосового сигнала с неизвестными длительностью, величиной спектральной плотности и математическим ожиданием запишем в виде (2.3.102), (2.3.103), где теперь $\hat{\eta}$ - ОМП нормированной длительности сигнала, $\hat{L}_1(\eta)$ определяется из (4.3.34), а η_m - из (4.2.16).

Аналогично (2.3.104) введем в рассмотрение ОСШ для принятого сигнала

$$\begin{aligned}
z^2 &= \frac{\hat{S}_1^2(\eta_0)}{\hat{B}_{N1}(\eta_0, \eta_0)} = \frac{\mu(\delta^2 + 2[q_0 - \ln(1+q_0)])^2}{4[\delta^2(1+q_0) + q_0^2]} = \\
&= \frac{(z_0^2 + 2\mu[q_0 - \ln(1+q_0)])^2}{4[z_0^2(1+q_0) + \mu q_0^2]}, \quad (4.3.37)
\end{aligned}$$

где z_0^2 определяется из (4.3.30), а q_0 - из (2.3.95). Величина (4.3.37) совпадает с ОСШ (4.3.4) при обнаружении полосового импульсного сигнала с известными величиной спектральной плотности и математическим ожи-

данием, но с неизвестной длительностью, если в (4.3.4) заменить q на q_0 и a на a_0 . Из (4.3.37) следует, что при $q_0 > 0$ и $\mu \rightarrow \infty$, ОСШ $z \rightarrow \infty$ при любых конечных значениях δ^2 (4.3.29).

Известно [31, 51, 56, 61], что при $z \rightarrow \infty$, ОМП нормированной длительности $\hat{\eta} \rightarrow \eta_0$ в среднеквадратическом. Поэтому при больших ОСШ z (4.3.37) для расчета вероятности пропуска сигнала (2.3.102) достаточно исследовать поведение $\hat{L}_1(\eta)$ (4.3.34) в малой окрестности η_0 [45]. Опять воспользуемся обозначением (2.3.105) и положим $\Delta \rightarrow 0$. Тогда для (4.3.35) получаем асимптотическое разложение

$$\hat{S}_1(\eta) = S_1(\eta) + o(\Delta), \quad (4.3.38)$$

где $S_1(\eta)$ определяется из (4.2.35) при замене q на q_0 (2.3.95) и a на a_0 . Аналогичное разложение для корреляционной функции (4.3.36) имеет вид:

$$\hat{B}_{H1}(\eta_1, \eta_2) = \mu \left\{ \min(\eta_1, \eta_2) [q_0^2 + \delta^2(1+q_0)] - \max(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0) [q_0^2 + \delta^2(2+q_0)/2] / (1+q_0) \right\} / \eta_0 + o(\Delta)$$

при $\min(\eta_1, \eta_2) < \eta_0$ и

$$\begin{aligned} \hat{B}_{H1}(\eta_1, \eta_2) = \mu \left\{ \eta_0 [q_0^2(q_0^2 + 4q_0 + 2) + \delta^2(q_0^3 + 4q_0^2 + \right. \\ \left. + 6q_0 + 2)] - \min(\eta_1, \eta_2) [q_0^3 + \delta^2(q_0^2 + 3q_0)/2] - \right. \\ \left. - \max(\eta_1, \eta_2)(1+q_0)[q_0^2 + \delta^2(2+q_0)/2] \right\} / \eta_0(1+q_0)^2 + o(\Delta) \end{aligned}$$

(4.3.39)

при $\min(\eta_1, \eta_2) > \eta_0$.

В силу (2.2.21) логарифм ФОП (4.3.34) является асимптотически гауссовским процессом. Кроме того, главные члены асимптотических разложений (4.3.38), (4.3.39) кусочно-дифференцируемы. Следовательно, в малой окрестности η_0 для логарифма ФОП выполняется (2.3.19). Если к тому же выполняется (2.3.20), то логарифм ФОП в рассматриваемом случае будет гауссовским марковским диффузионным процессом [43]. Найдем его коэффициенты сноса и диффузии и одновременно проверим выполнение (2.3.20).

Подставляя главные члены асимптотических разложений (4.3.38) и (4.3.39) в (2.3.17) и (2.3.18), имеем

$$K_1[\hat{L}, \eta | H_1] = \frac{1}{\eta_s} \begin{cases} k_{1s}, & \eta_s \leq \eta \leq \eta_0, \\ -k_{2s}[1+\varkappa(\eta)], & \eta_0 < \eta \leq 1, \end{cases} \quad (4.3.40)$$

$$K_2[\hat{L}, \eta | H_1] = K_2[L, \eta | H_1]. \quad (4.3.41)$$

Здесь

$$k_{1s} = z_{0\min}^2 / 2 + \mu_{\min} [q_0 - \ln(1+q_0)], \quad (4.3.42)$$

$$k_{2s} = z_{0\min}^2 / 2(1+q_0) + \mu_{\min} [\ln(1+q_0) - q_0 / (1+q_0)], \quad (4.3.43)$$

$$z_{0\min}^2 = 2a_0^2 T_1 / N_0. \quad (4.3.44)$$

Величины (4.3.42), (4.3.43) совпадают с (4.2.36), (4.2.37), (4.2.15), если в эти формулы подставить $g(\cdot)$ из (1.2.20) и заменить a на a_0 и q на q_0 .

Случайный процесс

$$\varkappa(\eta) = [\hat{L}(\eta) - \hat{S}_1(\eta)](1+q_0)^2 [q_0^2 + \delta^2(2+q_0)/2] \eta_0 \times \\ \times \left\{ \mu[\delta^2/2 + (1+q_0)\ln(1+q_0) - q_0] \right\}^{-1} \left\{ \eta_0(1+q_0)^2 [q_0^2 + \right.$$

$$+\delta^2(1+q_0)] - (\eta-\eta_0)[q_0^2(1+2q_0) + \delta^2(q_0^2 + 3q_0 + 1)]\}^{-1}$$

в (4.3.40) является асимптотически гауссовским и, согласно (4.3.35), (4.3.36), (4.3.39), обладает моментами

$$\begin{aligned} \langle x(\eta) \rangle &= 0, \quad \langle x^2(\eta) \rangle = \mu^{-1} \eta_0 (1+q_0)^2 \left\{ [q_0^2 + \delta^2(2+q_0)/2] \times \right. \\ &\times [\delta^2/2 + (1+q_0)\ln(1+q_0) - q_0]^{-1} \left. \right\}^2 \left\{ \eta_0 (1+q_0)^2 [q_0^2 + \right. \\ &+ \delta^2(1+q_0)] - (\eta-\eta_0) [q_0^2(1+2q_0) + \\ &+ \delta^2(q_0^2 + 3q_0 + 1)] \left. \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

Коэффициент диффузии $K_2[L, \eta | H_1]$ (4.3.41) определяется формулой (2.3.45) при подстановке в эту формулу величин

$$d_{1s} = z_{0\min}^2 (1+q_0) + \mu_{\min} q_0^2, \quad (4.3.46)$$

$$d_{2s} = z_{0\min}^2 / (1+q_0)^2 + \mu_{\min} q_0^2 / (1+q_0)^2, \quad (4.3.47)$$

где $z_{0\min}^2$ определяется из (4.3.44). Величины (4.3.46), (4.3.47) совпадают с (4.2.39), (4.2.40), (4.2.25), если в эти формулы подставить $g(\cdot)$ из (1.2.20) и заменить a на a_0 и q на q_0 .

Согласно (4.3.35), (4.3.36) и (4.3.45) $\langle x^2(\eta) \rangle \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$. При больших ОСШ для принятого сигнала (4.3.37) основной интерес представляет поведение характеристик логарифма ФОП в малой окрестности η_0 , где

$$\langle x^2(\eta_0) \rangle = \mu^{-1} \left\{ [q_0^2 + \delta^2(2+q_0)/2] \right\}^2 [q_0^2 + \delta^2(1+q_0)]^{-1} \times$$

$$\times \left[\delta^2/2 + (1+q_0)\ln(1+q_0) - q_0 \right]^{-2}. \quad (4.3.48)$$

Таким образом, из (4.3.40), (4.3.45) и (4.3.48) следует, что при больших значениях μ и z , коэффициент сноса логарифма ФОП (4.3.34) в малой окрестности η_0 переписывается как

$$K_1[\hat{L}, \eta | N_1] \approx K_1[L, \eta | N_1], \quad (4.3.49)$$

где $K_1[L, \eta | N_1]$ определяется формулой (2.3.44) при подстановке в нее (4.3.42), (4.3.43).

Поскольку [31, 51, 56, 61], при $z \rightarrow \infty$ ОМП $\hat{\eta} \rightarrow \eta_0$ в среднеквадратическом, то величина вероятности пропуска (2.3.102) при больших ОСШ z (4.3.37) определяется поведением характеристик логарифма ФОП в малой окрестности η_0 [45]. Поэтому при аппроксимации этих характеристик необходимо обеспечить высокую точность аппроксимации в указанной окрестности. Точность аппроксимации характеристик логарифма ФОП за пределами малой окрестности η_0 не играет большой роли.

Значит, можно аналогично п.2.3.2, использовать аппроксимации (4.3.38), (4.3.39), (4.3.41), (4.3.49) на всем априорном интервале возможных значений неизвестной нормированной длительности сигнала $\eta \in [\eta_s; 1]$.

Тогда начальная плотность вероятности логарифма ФОП (4.3.34) опять будет определяться формулой (2.3.46) при замене в ней $S_1(\eta_s)$ на $\hat{S}_1(\eta_s)$ (4.3.38) и $\sigma_1^2(\eta_s)$ на $\hat{\sigma}_1^2(\eta_s) = \hat{B}_{N_1}(\eta_s, \eta_s)$ (4.3.39). Или, что тоже самое, при подстановке в (2.3.47), (2.3.48) k_{1s} и d_{1s} из (4.3.42) и (4.3.46) соответственно. Учитывая также (4.3.49) и (4.3.41), вероятность пропуска полосового импульсного сигнала с неизвестными длительностью, величиной спектральной плотности и математическим ожи-

данием получаем в виде (2.3.62). Необходимо лишь при расчетах по этой формуле использовать параметры (4.3.1)...(4.3.5), заменив в них q на q_0 (2.3.95),

подставив $z_{0\min}^2$ из (4.3.44) и z_0^2 из (4.3.30).

Следовательно, при больших μ_{\min} (4.2.1) и z (4.3.37) незнание величины спектральной плотности и математического ожидания при неизвестной длительности полосового импульсного сигнала, изменяя вероятность ложной тревоги, не влияет на вероятность пропуска сигнала.

ГЛАВА 5.

ИМПУЛЬСНЫЕ СИГНАЛЫ С НЕИЗВЕСТНЫМ
ВРЕМЕННЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ

5.1. Синтез алгоритмов обнаружения.

Конкретизируем теперь структуру МПО для импульсного гауссовского сигнала с неизвестным временным положением λ (1.2.28), т.е. полагаем здесь длительность τ известной. При фиксированном значении τ в (4.1.17) логарифм ФОП принимает вид

$$L(\lambda) = \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} [y^2(t) + Ax(t) - A_1] dt / N_0, \quad (5.1.1)$$

где A , A_1 определяются из (4.1.24). Согласно (1.4.5), МПО сигнала с неизвестным временным положением должен формировать логарифм ФОП (5.1.1) для всех возможных значений временного положения

$$\lambda \in [\lambda_1; \lambda_2], \quad (5.1.2)$$

определять величину абсолютного максимума (5.1.1) и сравнивать ее с порогом s .

Функциональная схема МПО сигнала с неизвестным временным положением приведена на рис.5.1. Здесь как и ранее, $H(\omega)$ - линейный фильтр, передаточная функция которого удовлетворяет (4.1.19), СФ - фильтр, согласованный с прямоугольным импульсом длительностью τ [42], ПД - пиковый детектор, ПУ - пороговое устройство. Один из возможных вариантов реализации согласованного фильтра приведен на рис.5.2, где ЛЗ -

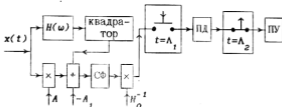


Рис. 5.1. Обнаружитель импульсного сигнала с неизвестным временным положением; СФ - фильтр, согласованный с прямоугольным импульсом; ПД - пиковый детектор; ПУ - пороговое устройство.

лния задержки на время, равное длительности импульса [21,42]. В отличие от общей функциональной схемы МПО (рис.2.1), функциональная схема рис.5.1 является одноканальной. Она формирует логарифм ФОП

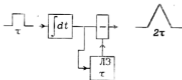


Рис. 5.2. Фильтр, согласованный с прямоугольным импульсом; ЛЗ - линия задержки.

как непрерывную функцию неизвестного временного положения сигнала во всем априорном интервале его возможных значений (5.1.2).

Несколько изменив функциональную схему рис.5.1, ее можно использовать для обнаружения узкополосного сигнала с неизвестным временным положением. Для этого достаточно, аналогично п.4.1.2, в функциональной схеме рис.5.1 использовать фильтр, передаточная функция которого удовлетворяет (4.1.22), положить $\Lambda=0$ и использовать значение Λ_1 из (4.1.26).

Аналогично п. 4.1.2, функциональная схема рис. 5.1 определяет структуру одного канала многоканального МПО вида рис. 2.1, если обнаруживаемый сигнал, кроме временного положения содержит другие неизвестные параметры. Пусть, например, кроме временного положения у широкополосного стохастического импульсного сигнала (1.2.28) неизвестны математическое ожидание (1.2.9) и величина спектральной плотности γ (1.2.16). Тогда МПО можно реализовать в виде многоканальной функциональной схемы, аналогично рис. 2.1. Один канал такой схемы показан на рис. 5.1. Необходимо только в этой схеме использовать входной фильтр (4.1.27), а на перемножитель и сумматор вместо (4.1.24) подавать сигналы (4.1.28). Большое число каналов такой схемы МПО затрудняет ее техническую реализацию. Как и при неизвестной длительности упростить структуру МПО удастся для полосового случайного импульса.

Рассмотрим вначале частный случай обнаружения полосового центрированного широкополосного стохастического импульсного сигнала с неизвестными временным положением и величиной спектральной плотности. Полагая в (5.1.1) $a \equiv 0$ и подставляя $g(\cdot)$ из (1.2.20), для логарифма ФОП находим

$$L(\lambda, q) = qL_I(\lambda)/(1+q) - \mu \ln(1+q). \quad (5.1.3)$$

Здесь

$$\mu = \Omega\tau/4\pi, \quad (5.1.4)$$

$$L_I(\lambda) = \frac{1}{N} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} y_I^2(t) dt, \quad (5.1.5)$$

а $y_I(t)$ определено в (4.1.29). Поскольку всегда $q \geq 0$ (2.1.22), то функциональную схему МПО центрированного полосового импульсного сигнала с неизвестным временным положением можно представить в виде, показанном на рис. 5.3. Обозначения здесь такие же как на рис. 5.1. Отличие функциональной схемы

рис. 5.3 от схемы рис. 5.1 в том, что МПО, реализован-

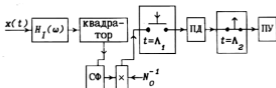


Рис. 5.3. Обнаружитель полосового импульсного сигнала с неизвестным временным положением; СФ — фильтр, согласованный с прямоугольным импульсом; ПД — пиковый детектор; ПУ — пороговое устройство.

ный согласно рис. 5.3, сравнивает с порогом \bar{c} абсолютный максимум функции (5.1.5), а не логарифма ФОР (5.1.3). Следовательно, при использовании функциональной схемы рис. 5.3 порог $\bar{c} = (1+q)[c+\mu \ln(1+q)]/q$, где c — порог, устанавливаемый в пороговом устройстве схемы рис. 5.1. Однако при использовании критерия Неймана-Пирсона, порог в пороговом устройстве схемы рис. 5.3 выбирается по заданной величине вероятности ложной тревоги (1.3.13) и не зависит от возможно неизвестной величины спектральной плотности сигнала $\gamma(q)$ (2.1.22). Таким образом, функциональная схема рис. 5.3 может быть использована для обнаружения центрированного полосового широкополосного импульсного сигнала с неизвестным временным положением как при известной, так и при априори неизвестной величине спектральной плотности.

Функциональная схема рис. 5.3 легко модифицируется для обнаружения полосового узкополосного импульсного сигнала с неизвестным временным положением. Для этого достаточно, аналогично п. 4.1.2, использовать в схеме рис. 5.3 полосовой узкополосный входной фильтр с передаточной функцией, удовлетворяющей (4.1.37). Такой МПО можно использовать как при известной, так и при априори неизвестной величине

(1.2.21) спектральной плотности сигнала (1.2.27).

Положим теперь, что у обнаруживаемого полосового широкополосного импульсного сигнала неизвестны временное положение, величина спектральной плотности и математическое ожидание. Подставим в (5.1.1) $g(\cdot)$ из (1.2.20). Получим логарифм ФОП в виде

$$L(\lambda, q, a) = \frac{q}{1+q} L_I(\lambda) + \frac{2a}{N_0(1+q)} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} x(t) dt - \frac{a^2 \tau}{N_0(1+q)} - \mu \ln(1+q), \quad (5.1.6)$$

где μ определяется из (5.1.4), а $L_I(\lambda)$ - из (5.1.5).

Согласно (1.4.5), МПО должен вырабатывать абсолютный максимум логарифма ФОП

$$\hat{L} = \sup_{\lambda, q, a} L(\lambda, q, a) = \sup_{\lambda} \hat{L}(\lambda),$$

где

$$\hat{L}(\lambda) = \sup_{q, a} L(\lambda, q, a) = L[\lambda, \tilde{q}(\lambda), \tilde{a}(\lambda)], \quad (5.1.7)$$

а $\tilde{q}(\lambda)$ и $\tilde{a}(\lambda)$ можно найти из решения системы уравнений [19]

$$[\partial L(\lambda, q, a) / \partial q]_{\tilde{q}(\lambda), \tilde{a}(\lambda)} = 0,$$

$$[\partial L(\lambda, q, a) / \partial a]_{\tilde{q}(\lambda), \tilde{a}(\lambda)} = 0, \quad (5.1.8)$$

Подставляя (5.1.6) в (5.1.8) и решая получаемую систему уравнений, находим

$$\tilde{q}(\lambda) = L_I(\lambda) / \mu - \left[\int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} x(t) dt \right]^2 / \tau \mu N_0 - 1,$$

$$\tilde{a}(\lambda) = \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} x(t) dt / \tau. \quad (5.1.9)$$

Подставляя затем (5.1.9) в (5.1.6), имеем для (5.1.7)

$$\hat{L}(\lambda) = L_I(\lambda) - \mu \left\{ 1 + \ln \left[L_I(\lambda) / \mu - \left\{ \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} x(t) dt \right\}^2 / \tau \mu N_0 \right] \right\}. \quad (5.1.10)$$

Это выражение позволяет реализовать МПО полосового сигнала с неизвестными временным положением, величиной спектральной плотности и математическим ожиданием как показано на рис. 5.4. Здесь используется

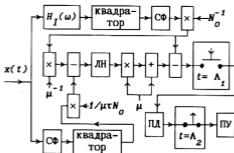


Рис. 5.4. Обнаружитель полосового импульсного сигнала с неизвестными временным положением, математическим ожиданием и величиной спектральной плотности; СФ – фильтр, согласованный с прямоугольным импульсом; ЛН – нелинейный преобразователь с логарифмической характеристикой; ПД – пиковый детектор; ПУ – пороговое устройство.

полосовой фильтр с передаточной функцией (4.1.30), ЛН – нелинейный преобразователь с логарифмической характеристикой, а остальные обозначения соответ-

ствуют рис. 5.1, 5.3.

Аналогично схемам рис. 4.2 и рис. 4.3, функциональные схемы рис. 5.3, 5.4 могут быть также использованы для многоканальной реализации МПО сигналов, содержащих дополнительные неизвестные параметры.

5.2. Характеристики обнаружения.

При обнаружении стохастического импульсного сигнала (1.2.28) с неизвестным временным положением логарифм ФОР определяется из (5.1.1). Последнее слагаемое в (5.1.1) не зависит от реализации наблюдаемых данных $x(t)$ и неизвестного временного положения сигнала λ . Поэтому, согласно АМП, с порогом τ можно сравнивать абсолютный максимум члена логарифма ФОР

$$L_x(\lambda) = \frac{1}{N_0} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} [y^2(t) + \frac{2a}{1+q} x(t)] dt, \quad (5.2.1)$$

зависящего от наблюдаемых данных. Таким образом, здесь в качестве логарифма ФОР рассматривается его член (5.2.1). В (5.2.1) входит квадрат гауссовского случайного процесса (4.1.15). Поэтому в общем случае логарифм ФОР (5.2.1) является негауссовским случайным процессом. Тем не менее, исследуя аналогично п. 2.2.1, характеристическую функцию (1.1.5) и кумулянтные коэффициенты (1.1.12) логарифма ФОР (5.2.1), получаем, что при выполнении условия

$$\mu \gg 1, \quad (5.2.2)$$

аналогично (2.2.21), его распределение сходится к гауссовскому. Отличие лишь в том, что в качестве величин (2.2.17), (2.2.18) теперь надо в (5.2.2) использовать соответственно

$$\mu = \Omega\tau/4\pi \quad (5.2.3)$$

- при обнаружении широкополосного импульсного сигнала и

$$\mu = \Omega\tau/2\pi \quad (5.2.4)$$

- при обнаружении узкополосного импульсного сигнала. В (5.2.3), (5.2.4) Ω - эквивалентная полоса частот сигнала - (1.2.17) или (1.2.22), а τ - его длительность (1.2.28).

Вследствие асимптотической гауссовости логарифма ФАП (5.2.1) при выполнении (2.2.21), для его асимптотически полного статистического описания достаточно найти математическое ожидание и корреляционную функцию. С этой целью представим (5.2.1) в виде (2.2.22) и найдем регулярную составляющую (2.2.23) и корреляционную функцию (2.2.25) шумовой составляющей (2.2.24).

Выполняя в (5.2.1) усреднение, для регулярной составляющей (2.2.23) имеем

$$S(\lambda) = \frac{1}{N_0} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} \langle y^2(t) \rangle dt + \frac{2a}{N_0(1+q)} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} \langle x(t) \rangle dt. \quad (5.2.5)$$

Используя (4.2.4) и обозначения (4.2.6), (4.2.7), можем (5.2.5) переписать в виде

$$S(\lambda) = \frac{1}{N_0} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} dt \iint_{-\infty}^{\infty} [B_x(t_1, t_2) + a_x(t_1)a_x(t_2)] H(t-t_1)H(t-t_2) dt_1 dt_2 + \frac{2a}{N_0(1+q)} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} a_x(t) dt. \quad (5.2.6)$$

Найдем далее корреляционную функцию (2.2.25) шумовой составляющей (2.2.24) логарифма ФАП (5.2.1)

$$B_N(\lambda_1, \lambda_2) = \langle N(\lambda_1)N(\lambda_2) \rangle = \frac{1}{N_0^2} \int_{\lambda_1-\tau/2}^{\lambda_1+\tau/2} dt_1 \int_{\lambda_2-\tau/2}^{\lambda_2+\tau/2} dt_2 \left\{ \langle y^2(t_1) \rangle \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \langle y^2(t_2) \rangle - \langle y^2(t_1) \rangle \langle y^2(t_2) \rangle + \frac{2a}{1+q} [\langle y^2(t_1)x(t_2) \rangle - \\
 & - \langle y^2(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle + \langle x(t_1)y^2(t_2) \rangle - \langle x(t_1) \rangle \langle y^2(t_2) \rangle] + \\
 & + \frac{4a^2}{(1+q)^2} [\langle x(t_1)x(t_2) \rangle - \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle] \}.
 \end{aligned}$$

Подставляя (4.1.15) в это выражение, имеем

$$\begin{aligned}
 B_N(\lambda_1, \lambda_2) = & \frac{1}{N^2} \int_0^{\lambda_1 + \tau/2} dt_1 \int_0^{\lambda_2 + \tau/2} dt_2 \left\{ \iiint_{-\infty}^{\infty} [\langle x(t_3)x(t_4) \rangle \times \right. \\
 & \times \langle x(t_5)x(t_6) \rangle - \langle x(t_3)x(t_4) \rangle \langle x(t_5)x(t_6) \rangle] H(t_1 - t_3) \times \\
 & \times H(t_1 - t_4) H(t_2 - t_5) H(t_2 - t_6) dt_3 dt_4 dt_5 dt_6 + \\
 & + \frac{2a}{1+q} \iint_{-\infty}^{\infty} [\langle x(t_2)x(t_3)x(t_4) \rangle - \langle x(t_2) \rangle \langle x(t_3)x(t_4) \rangle] \times \\
 & \times H(t_1 - t_3) H(t_1 - t_4) dt_3 dt_4 + \frac{2a}{1+q} \iint_{-\infty}^{\infty} [\langle x(t_1)x(t_3)x(t_4) \rangle - \\
 & - \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_3)x(t_4) \rangle] H(t_2 - t_3) H(t_2 - t_4) dt_3 dt_4 + \\
 & \left. + \frac{4a^2}{(1+q)^2} [\langle x(t_1)x(t_2) \rangle - \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle] \right\}. \quad (5.2.7)
 \end{aligned}$$

Учитывая, что наблюдаемый процесс $x(t)$ является гауссовским как при наличии, так и при отсутствии сигнала (1.2.28) и используя (1.2.4), выразим (5.2.7) через два первых момента наблюдаемого процесса (4.2.6), (4.2.7)

$$\begin{aligned}
B_N(\lambda_1, \lambda_2) = & \frac{1}{N^2} \int_0^1 dt_1 \int_{\lambda_1 - \tau/2}^{\lambda_1 + \tau/2} dt_2 \left\{ \iiint_{-\infty}^{\infty} (B_x(t_3, t_5) \times \right. \\
& \times [B_x(t_4, t_6) + a_x(t_4)a_x(t_6)] + B_x(t_3, t_6)[B_x(t_4, t_5) + \\
& + a_x(t_4)a_x(t_5)] + a_x(t_3)a_x(t_6)B_x(t_4, t_5) + a_x(t_3)a_x(t_5) \times \\
& \times B_x(t_4, t_6))H(t_1 - t_3)H(t_1 - t_4)H(t_2 - t_5) \times \\
& \times H(t_2 - t_6)dt_3 dt_4 dt_5 dt_6 + \frac{2a}{1+q} \iint_{-\infty}^{\infty} [a_x(t_3)B_x(t_4, t_2) + \\
& + a_x(t_4)B_x(t_3, t_2)]H(t_1 - t_3)H(t_1 - t_4)dt_3 dt_4 + \\
& + \frac{2a}{1+q} \iint_{-\infty}^{\infty} [a_x(t_3)B_x(t_4, t_1) + a_x(t_4)B_x(t_3, t_1)]H(t_2 - t_3) \times \\
& \left. \times H(t_2 - t_4)dt_3 dt_4 + \frac{4a^2}{(1+q)^2} B_x(t_1, t_2) \right\}. \quad (5.2.8)
\end{aligned}$$

Пусть верна гипотеза H_0 (сигнал отсутствует).

Тогда (4.2.6) и (4.2.7) переписуются в виде (4.2.11). Подставляя (4.2.11) в (5.2.6), имеем

$$S_0(\lambda) = S[\lambda | H_0] = \frac{1}{2} \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} H^2(t - t_1) dt.$$

Подставляя затем сюда внутренний интеграл из (4.2.13), находим для регулярной составляющей логарифма ФОП (5.2.1) в отсутствие сигнала выражение

$$S_0(\lambda) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} (qg(x) / [1 + qg(x)]) dx = S_0. \quad (5.2.9)$$

Подставим теперь (4.2.11) в (5.2.8) и найдем

корреляционную функцию шумовой функции логарифма ФОР (5.2.1) при отсутствии сигнала

$$\begin{aligned}
 B_{N0}(\lambda_1, \lambda_2) &= B_N(\lambda_1, \lambda_2 | H_0) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\lambda_1 - \tau/2}^{\lambda_1 + \tau/2} dt_1 \int_{\lambda_2 - \tau/2}^{\lambda_2 + \tau/2} dt_2 \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(t_1 - t) H(t_2 - t) dt \right]^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2a^2}{N_0(1+q)^2} \delta(t_1 - t_2) \right\}. \quad (5.2.10)
 \end{aligned}$$

Последний интеграл здесь легко вычисляется [19, 42]

$$\int_{\lambda_1 - \tau/2}^{\lambda_1 + \tau/2} dt_1 \int_{\lambda_2 - \tau/2}^{\lambda_2 + \tau/2} dt_2 \delta(t_1 - t_2) = \tau \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0), \quad (5.2.11)$$

где

$$\eta_i = \lambda_i / \tau. \quad (5.2.12)$$

Первый интеграл в правой части (5.2.10), используя (4.2.19), перепишем как

$$\begin{aligned}
 J(\lambda_1, \lambda_2) &= \int_{\lambda_1 - \tau/2}^{\lambda_1 + \tau/2} dt_1 \int_{\lambda_2 - \tau/2}^{\lambda_2 + \tau/2} dt_2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(t_1 - t) H(t_2 - t) dt \right]^2 = \\
 &= \int_{\lambda_1 - \tau/2}^{\lambda_1 + \tau/2} dt_1 \int_{\lambda_2 - \tau/2}^{\lambda_2 + \tau/2} dt_2 Q_0^2(t_1 - t_2).
 \end{aligned}$$

Выполним в этом интеграле замену переменных интегрирования, аналогичную (2.2.27), (2.2.29). Переходя к новым переменным интегрирования (2.2.28),

получаем

$$J(\lambda_1, \lambda_2) = \tau \int_{\lambda_2 - \lambda_1 - \tau}^{\lambda_2 - \lambda_1 + \tau} Q_0^2(\Delta) [1 + \min(\eta_1, \eta_2 - \Delta/\tau) - \max(\eta_1, \eta_2 - \Delta/\tau)] d\Delta. \quad (5.2.13)$$

Как следует из (4.1.7), (2.1.11) и (2.1.21), эквивалентная полоса частот функции $Q_0(\Delta)$ не менее эквивалентной полосы частот (1.2.17), (1.2.22) обнаруживаемого сигнала (1.2.28). Следовательно, основная "масса" этой функции сосредоточена в окрестности точки $\Delta=0$ на интервале, длительность которого имеет порядок величины $2\pi/\Omega$. Значит, при

$$|\lambda_2 - \lambda_1| > \tau, \quad (5.2.14)$$

$$J(\lambda_1, \lambda_2) \approx 0. \quad (5.2.15)$$

Действительно, при выполнении (5.2.14) интервал интегрирования в (5.2.13) не включает в себя точку $\Delta=0$, откуда, в силу (5.2.2), следует (5.2.15).

Положим теперь, что

$$|\lambda_2 - \lambda_1| < \tau, \quad (5.2.16)$$

так, что интервал интегрирования в (5.2.13) включает в себя точку $\Delta=0$. В силу (5.2.2) в (5.2.13) $|\Delta|/\tau \ll 1$ на той части интервала интегрирования, где функция $Q_0(\Delta)$ (4.1.6) заметно отлична от нуля. Кроме того, условие (5.2.2) при выполнении (5.2.16) позволяет пределы интегрирования в (5.2.13) заменить на бесконечные. В результате получаем

$$J(\lambda_1, \lambda_2) \approx \tau \int_{-\infty}^{\infty} Q_0^2(\Delta) d\Delta \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0). \quad (5.2.17)$$

Используя (4.2.23) и подставляя (5.2.11), (5.2.17) в (5.2.10), запишем корреляционную функцию логарифма ФОР (5.2.1) при отсутствии сигнала как

$$B_{NO}(\eta_1, \eta_2) = \sigma_0^2 \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0), \quad (5.2.18)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{z_0^2}{(1+q)^2} + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{qg(x)}{1+qg(x)} \right]^2 dx, \quad (5.2.19)$$

$$z_0^2 = 2a^2\tau/N_0 \quad (5.2.20)$$

- ОШ для регулярной составляющей сигнала (1.2.28).

Итак, аналогично (2.2.37), логарифм ФОР (5.2.1) при отсутствии сигнала можно представить как

$$L_x[\lambda | H_0] = L_{Ox}(\lambda) = L_{Ox}(\eta) = S_0 + N_0(\eta), \quad (5.2.21)$$

где

$$\eta = \lambda/\tau \quad (5.2.22)$$

- нормированное временное положение сигнала (1.2.28), которое согласно (5.1.2) принимает значения из интервала

$$\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}], \quad (5.2.23)$$

$\eta_{\min} = \Lambda_1/\tau$, $\eta_{\max} = \Lambda_2/\tau$, S_0 определяется из (5.2.9), а $N_0(\eta)$ - асимптотически гауссовский центрированный стационарный процесс, обладающий корреляционной функцией (5.2.18) и коэффициентом корреляции (1.2.8)

$$R_{NO}(\eta_2 - \eta_1) = \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0). \quad (5.2.24)$$

Используя (5.2.21), аналогично (3.2.8) запишем вероятность ложной тревоги

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left\{ \sup_{\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} L_{Ox}(\lambda) > c | H_0 \right\} = P\left\{ \sup_{\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]} L_{Ox}(\eta) > c \right\} = \\ &= P\left\{ \sup_{\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]} \tilde{N}_0(\eta) > u \right\}. \end{aligned}$$

Здесь нормированный и центрированный порог u

определяется из (3.2.9) с использованием (5.2.9) и (5.2.19), а $\tilde{N}_0(\eta)$ (3.2.10) - нормированная шумовая функция, корреляционная функция которой совпадает с коэффициентом корреляции (5.2.24) логарифма ФОР (5.2.1).

Установленные свойства шумовой функции $\tilde{N}_0(\eta)$, а именно, гауссовость, стационарность, вид корреляционной функции, полностью совпадают со свойствами нормированной шумовой функции при приеме разрывного квазидетерминированного сигнала с неизвестным неэнергетическим параметром [45, 47, 61, 68, 69]. В результате приближенное выражение для вероятности ложной тревоги при обнаружении сигнала (1.2.28) с неизвестным временным положением получаем как частный случай [45] в виде (3.3.49). Теперь в этой формуле порог μ (3.2.9) определяется через (5.2.9) и (5.2.19), а

$$m = \eta_{\max} - \eta_{\min} = (\Lambda_2 - \Lambda_1) / \tau. \quad (5.2.25)$$

Пусть теперь сигнал (1.2.28) с неизвестным временным положением $\lambda_0 \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ присутствует на входе МПО (верна гипотеза H_1). Тогда (4.2.6) и (4.2.7) согласно (1.2.29), (1.2.30) переписуются как

$$a_x(t) = aI\left[\frac{t-\lambda_0}{\tau}\right], \quad B_x(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2) + \\ + I\left[\frac{t_1 - \lambda_0}{\tau}\right] I\left[\frac{t_2 - \lambda_0}{\tau}\right] B(t_2 - t_1). \quad (5.2.26)$$

Подставим (5.2.26) в (5.2.6) и определим сигнальную функцию

$$S_1(\lambda) = S[\lambda | H_1] = \frac{1}{N_0} \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} dt \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} I\left(\frac{t_1 - \lambda_0}{\tau}\right) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times I\left(\frac{t_2 - \lambda_0}{\tau}\right) [B(t_2 - t_1) + a^2] H(t - t_1) H(t - t_2) dt_1 dt_2 + \\ & + \frac{2a^2}{1+q} I\left(\frac{t - \lambda_0}{\tau}\right) \left\} + \frac{1}{2} \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} H^2(t - t_1) dt_1. \quad (5.2.27) \end{aligned}$$

Найдем внутренние интегралы в этом выражении. Аналогично (2.1.23), (4.1.14), при выполнении (4.1.1), (5.2.2) можем записать

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} I\left(\frac{t_1 - \lambda_0}{\tau}\right) I\left(\frac{t_2 - \lambda_0}{\tau}\right) [B(t_2 - t_1) + a^2] H(t - t_1) \times \\ & \times H(t - t_2) dt_1 dt_2 \approx I\left(\frac{t - \lambda_0}{\tau}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} B(t_2 - t_1) H(t - t_1) \times \\ & \times H(t - t_2) dt_1 dt_2 + a^2 I\left(\frac{t - \lambda_0}{\tau}\right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(t - t_1) dt_1 \right]^2. \quad (5.2.28) \end{aligned}$$

Учитывая (4.2.33), (4.2.34), приходим к необходимости вычисления интегралов, аналогичных (5.2.11)

$$\int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} I\left(\frac{t - \lambda_0}{\tau}\right) dt = \tau \max(1 - |\eta - \eta_0|; 0). \quad (5.2.29)$$

Подставляя (4.2.33), (4.2.34) в (5.2.28), а (5.2.28) в (5.2.27) и используя (5.2.29), находим сигнальную функцию при обнаружении стохастического импульсного сигнала с неизвестным временным положением

$$S_I(\lambda) = S_I(\eta) = S_0 + A \frac{\tau}{\sigma} \max(1 - |\eta - \eta_0|; 0). \quad (5.2.30)$$

Здесь

$$\eta_0 = \lambda_0 / \tau, \quad (5.2.31)$$

$$A_s = \frac{z_0^2(2+q)}{2(1+q)} + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q^2 g^2(x)}{1+qg(x)} dx, \quad (5.2.32)$$

а S_0 определяется из (5.2.9).

Для того, чтобы определить корреляционную функцию логарифма ФОР (5.2.1) при наличии сигнала, подставим (5.2.26) в (5.2.8). Преобразуя полученное выражение аналогично (5.2.13), (5.2.28) и вычисляя внутренние интегралы аналогично (4.2.18), (4.2.23), (4.2.32), (4.2.34) с помощью преобразования Фурье, имеем

$$\begin{aligned} B_{N1}(\lambda_1, \lambda_2) &= B_N[\lambda_1, \lambda_2 | H_1] = B_{N1}(\eta_1, \eta_2) = \\ &= \sigma_0^2 \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0) + (\sigma_1^2 - \sigma_0^2) I\left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}\right) I\left(\frac{\eta_1 - \eta_0}{2}\right) \times \\ &\quad \times I\left(\frac{\eta_2 - \eta_0}{2}\right) [1 + \min(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0) - \\ &\quad - \max(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0)] = B_{N0}(\eta_1, \eta_2) + (\sigma_1^2 - \sigma_0^2) \times \\ &\quad \times I\left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}\right) I\left(\frac{\eta_1 - \eta_0}{2}\right) I\left(\frac{\eta_2 - \eta_0}{2}\right) [1 + \min(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0) - \\ &\quad - \max(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0)]. \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

Здесь

$$\sigma_1^2 = B_{N1}(\eta_0, \eta_0) = z_0^2(1+q) + \mu q^2, \quad (5.2.34)$$

а $B_{N0}(\eta_1, \eta_2)$ — корреляционная функция (5.2.18)

логарифма ФОР (5.2.1) при отсутствии сигнала.

Итак, аналогично (2.2.37), (3.2.15), логарифм ФОР (5.2.1) при наличии сигнала можно представить

как

$$L_x[\lambda|H_1] = L_{1x}(\eta) = S_1(\eta) + N_1(\eta), \quad (5.2.35)$$

где $S_1(\eta)$ определяется из (5.2.30), а $N_1(\eta)$ - асимптотически гауссовский центрированный процесс, обладающий корреляционной функцией (5.2.33). Согласно определению (2.2.39), вероятность пропуска сигнала

$$\beta = P[\sup_{\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]} L_{1x}(\eta) < c] = P[L_{1x}(\eta) < c]. \quad (5.2.36)$$

Разобьем весь интервал возможных значений η (5.2.23) на подобласти Θ_s (3.2.18) и Θ_N (3.2.19), где теперь $r=1$. Из сопоставления (5.2.9) и (5.2.30), (5.2.18) и (5.2.33) имеем, что при $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Theta_N$ справедливы соотношения (3.3.18), (3.3.19). Далее используем обозначения (3.2.21), (3.2.22) и положим, что выполняется (3.2.23) при $r=1$ и m , определяемом из (5.2.25). Тогда вероятность пропуска (5.2.36) переписывается в виде (3.2.25), причем $P_N(c)$ определяется формулой (3.2.26) при подстановке в нее α из (3.3.49). Кроме того, в этой формуле порог u (3.2.9) теперь определяется через (5.2.9), (5.2.19), а параметр m - из (5.2.25).

Согласно (5.2.30), когда $\eta \in \Theta_s$, сигнальная функция достигает максимума при $\eta = \eta_0$. Используем далее обозначения (3.2.27), (3.2.28), где теперь $L_{1x}(\eta)$ имеет вид (5.2.35), а η - надежная ОМП нормированного временного положения η_0 сигнала (1.2.28). Обозначим аналогично (3.2.32)

$$z^2 = A_s^2 / \sigma_1^2 \quad (5.2.37)$$

-ОШ на выходе МПО, где A_s определяется из (5.2.32), а σ_1^2 - из (5.2.34). В [52] показано, что при $z \rightarrow \infty$

ОМП нормированного временного положения $\hat{\eta} \rightarrow \eta_0$ в среднеквадратическом. Следовательно, при больших значениях z , аналогично п.п. 3.2, 3.3, для определения (3.2.28) достаточно исследовать поведение логарифма ФОП (5.2.35) в малой окрестности η_0 . Поэтому, аналогично (3.3.21), рассмотрим вероятность

$$P_r(c) = P[L_{1x}(\eta) < c], \quad |\eta - \eta_0| < m_r, \quad (5.2.38)$$

где $m_r < 1/2$. Тогда при $z \rightarrow \infty$, в силу сходимости $\hat{\eta} \rightarrow \eta_0$ в среднеквадратическом [52], имеем, следуя [45],

$$P_s(c) \rightarrow P_r(c). \quad (5.2.39)$$

Перепишем, аналогично (3.3.22), вероятность (5.2.38) в виде

$$P_r(c) = P[\Delta(\eta) < c - L_0], \quad |\eta - \eta_0| < m_r, \quad (5.2.40)$$

где

$$L_0 = L_{1x}(\eta_0), \quad (5.2.41)$$

$$\Delta(\eta) = L_{1x}(\eta) - L_{1x}(\eta_0) = L_{1x}(\eta) - L_0. \quad (5.2.42)$$

При выполнении (5.2.2) процессы (5.2.35) и (5.2.42) можно приближенно считать гауссовскими. Используя (5.2.30), (5.2.33), находим два первых момента процесса (5.2.42) аналогично (3.3.25), (3.3.26)

$$S_{\Delta}(\eta) = -A_s \min(|\eta - \eta_0|; 1), \quad (5.2.43)$$

$$B_{\Delta}(\eta_1, \eta_2) = d_s \begin{cases} \min(|\eta_1 - \eta_0|, |\eta_2 - \eta_0|), & (\eta_1 - \eta_0)(\eta_2 - \eta_0) > 0, \\ 0, & (\eta_1 - \eta_0)(\eta_2 - \eta_0) < 0, \end{cases} \quad (5.2.44)$$

$$d_s = \sigma_1^2 + \sigma_0^2 = \frac{z_0^2 [(1+q)^3 + 1]}{(1+q)^2} +$$

$$+ \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q^2 g^2(x) [2 + 2qg(x) + q^2 g^2(x)]}{[1 + qg(x)]^2} dx. \quad (5.2.45)$$

Сопоставление (3.3.25), (3.3.26) и (5.2.43), (5.2.44) показывает, что вероятность (5.2.38) можно записать в виде (3.3.30), где теперь

$$W_0(L) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[L - S_1(\eta_0)]^2}{2\sigma_1^2}\right\} \quad (5.2.46)$$

— плотность вероятности случайной величины L_0 (5.2.41), а $S_1(\eta_0)$ и σ_1^2 определяются из (5.2.30) и

(5.2.34) соответственно. Функции $F^+(x)$ и $F^-(x)$ в (3.3.30) по-прежнему определяются из (3.3.39), (3.3.44), куда надо, согласно (5.2.43), (5.2.44), подставить

$$k_{1+} = A_s, k_{2+} = d_s, k_{1-} = -A_s, k_{2-} = d_s. \quad (5.2.47)$$

Подставляя (5.2.47) в (3.3.39), (3.3.44), а затем (3.3.39), (3.3.44), (5.2.46) в (3.3.30) при $z \gg 1$ (5.2.37), учитывая (5.2.39), находим приближенное выражение для вероятности (3.2.28)

$$P_s(c) \approx P_r(c) \approx \Phi(fu - z) - 2\exp[\psi^2 z^2 / 2 - \psi z(fu - z)] \Phi[fu - (\psi + 1)z] + \\ + \exp[2\psi^2 z^2 - 2\psi z(fu - z)] \Phi[fu - (2\psi + 1)z]. \quad (5.2.48)$$

Здесь f определяется из (3.2.31) при подстановке в эту формулу (5.2.19), (5.2.34),

$$\psi = 2/(1 + f^2), \quad (5.2.49)$$

z определяется из (5.2.37), а $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности (2.2.44).

Подставим (5.2.48) в (3.2.25) и выразим там же $P_N(c)$ согласно (3.2.26) через (3.3.49), где теперь и

определяется из (3.2.9) с подстановкой S_0 и σ_0^2 из (5.2.9), (5.2.19) соответственно, а m - из (5.2.25). Получаем приближенное выражение для вероятности пропуска сигнала (1.2.28)

$$\beta \approx \exp[-\mu \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}] \{ \Phi(fu-z) - \\ - 2\exp[\psi^2 z^2/2 - \psi z(fu-z)] \Phi[fu-(\psi+1)z] + \\ + \exp[2\psi^2 z^2 - 2\psi z(fu-z)] \Phi[fu-(2\psi+1)z] \} \quad (5.2.50)$$

при $u \geq 1$ и $\beta \approx 0$ при $u < 1$. Точность полученной приближенной формулы для вероятности пропуска возрастает с увеличением u , m , μ и z .

Рассмотрим некоторые частные случаи найденных характеристик МПО стохастического импульсного сигнала (1.2.28) с неизвестным временным положением.

Если обнаруживаемый широкополосный импульсный сигнал центрирован, т.е. имеет нулевое математическое ожидание, то вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала опять определяются формулами (3.3.49), (5.2.50). Необходимо лишь учесть (4.2.45) и использовать в этих формулах и в (3.2.9) параметры

$$\sigma_0^2 = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \{qg(x)/[1+qg(x)]\}^2 dx, \quad (5.2.51)$$

$$f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{g(x)/[1+qg(x)]\}^2 dx, \quad (5.2.52)$$

$$z^2 = \mu \left\{ q \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{g^2(x)}{1+qg(x)} \right] dx \right\}^2. \quad (5.2.53)$$

Формулы (3.3.49) и (5.2.50) можно также использовать для расчета характеристик обнаружения узкополосного импульсного сигнала с неизвестным временным положением и спектральной плотностью (1.2.27). Для

этого достаточно в (5.2.51)...(5.2.53) подставить μ из (5.2.4) и q из (2.1.48).

Формулы для расчета характеристик обнаружения несколько упрощаются при обнаружении слабого сигнала (2.2.45). Тогда в (3.2.9), (3.3.49), (5.2.50) надо подставить параметры

$$S_0 = \mu q, \quad \sigma_0^2 = z^2 = z_0^2 + \mu q^2,$$

$$f^2 = 1, \quad \psi = 1$$

так, что (5.2.50) принимает вид

$$\beta = \exp[-\mu \exp(-u^2/2)/\sqrt{2\pi}] \left\{ \Phi(u-z) - \right. \\ \left. - 2 \exp(3z^2/2 - zu) \Phi(u-2z) + \right. \\ \left. + \exp(4z^2 - 2zu) \Phi(u-3z) \right\} \quad (5.2.54)$$

при $u \gg 1$ и $\beta \approx 0$ при $u \ll 1$. Здесь

$$u = (c - \mu q)/z.$$

Наконец, если положить $q = 0$, то (3.3.49), (5.2.54) переходят в соответствующие формулы для вероятностей ложной тревоги и пропуска прямоугольного импульса с неизвестным временным положением, обнаруживаемого на фоне белого шума [45].

Отметим также, что, используя (5.2.9), (5.2.18), (5.2.30), (5.2.33), при необходимости нетрудно, аналогично гл. 2, 3, получить характеристики квазиправдоподобного и оптимального обнаружителей стохастического импульсного сигнала (1.2.28).

5.3. Полосовой сигнал с неизвестными параметрами.

Применительно к обнаружению полосового импульсного сигнала с неизвестным временным положением вероятности ошибок определяются из (3.3.49), (5.2.50), где теперь μ имеет вид (5.2.25). Необходимо лишь в (5.2.9), (5.2.19), (5.2.34), (5.2.37), (5.2.49) подставить $g(\cdot)$ из (1.2.20). В результате для

параметров, определяющих вероятность ложной тревоги (3.3.49) и пропуска сигнала (5.2.50), получаем

$$u = [c(1+q) + \mu q] / \sqrt{z_0^2 + \mu q^2}, \quad (5.3.1)$$

$$f^2 = (z_0^2 + \mu q^2) / (1+q)^2 [z_0^2(1+q) + \mu q^2], \quad (5.3.2)$$

$$\begin{aligned} \psi = & 2(1+q)^2 [z_0^2(1+q) + \mu q^2] \{z_0^2[(1+q)^3 + 1] + \\ & + \mu q^2[(1+q)^2 + 1]\}^{-1}, \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

$$z^2 = [z_0^2(2+q)/2 + \mu q^2]^2 \{ (1+q)^2 [z_0^2(1+q) + \mu q^2] \}^{-1}, \quad (5.3.4)$$

Если же обнаруживаемый полосовой сигнал с неизвестным временным положением центрирован, то выполняется (4.2.45) и для параметров (5.3.1)...(5.3.4) имеем

$$u = c(1+q) / q\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu}, \quad (5.3.5)$$

$$f^2 = (1+q)^{-2}, \quad (5.3.6)$$

$$\psi = 2[1 + (1+q)^{-2}]^{-1}, \quad (5.3.7)$$

$$z^2 = \mu [q / (1+q)]^2 \quad (5.3.8)$$

Наконец при обнаружении полосового узкополосного импульсного сигнала с неизвестным временным положением надо в (5.3.5)...(5.3.8) подставить q из (2.1.48) и μ - из (5.2.4).

Рассмотрим теперь обнаружение централизованного полосового импульсного сигнала с неизвестным временным положением λ и величиной γ (1.2.16), (1.2.21) спектральной плотности.

Как показано в п.5.1, МПО централизованного импульсного полосового сигнала с неизвестным временным положением должен вырабатывать функцию $L_I(\lambda)$ (5.1.5) для всех возможных значений неизвестного временного положения из априорного интервала (5.1.2). Затем, при использовании критерия Неймана-Пирсона, решение о наличии или отсутствии сигнала принимается в результате сравнения абсолютного максимума $L_I(\lambda)$ с порогом c , который определяется по заданному уровню ложных тревог (1.3.13).

Положим, что верна гипотеза H_0 (сигнал отсутствует) и опять перейдем к нормированному аргументу (5.2.22). Тогда (5.1.5) можно представить в виде (3.3.1). Полагая далее в (5.2.9), (5.2.18), согласно (4.2.45) $z_0 = 0$, подставляя $g(\cdot)$ из (1.2.20) и опуская множители $q/(1+q)$ и $[q/(1+q)]^2$ соответственно, приходим к формулам (3.3.2), (3.3.3). Таким образом, при отсутствии сигнала выходная статистика (5.1.5) обладает математическим ожиданием (3.3.2) и корреляционной функцией (3.3.3). Необходимо лишь в этих формулах использовать значения μ из (5.2.3) и η из (5.2.22).

Для централизованного полосового импульсного стохастического сигнала, при выполнении (5.2.2), можно найти более точную, чем гауссовская, аппроксимацию распределения выходной статистики (5.1.5). С этой целью найдем характеристическую функцию выходной статистики (5.1.5) при отсутствии сигнала. Положим в (2.2.2) $L_c(\theta) = 0$, а решение уравнения (2.2.3) будем искать аналогично (4.1.2)...(4.1.4). Тогда приходим к формуле (2.2.11) для кумулянтной функции, где надо T заменить на длительность t

импульса (1.2.28), положить $L_c(\theta) = 0$, а вместо $Q(\omega, \theta)$ подставить $|H_f(\omega)|^2$ из (4.1.30). Учитывая затем (2.2.15) и связь кумулянтной и характеристической функций (1.1.7), приходим к формуле (3.3.4). Таким образом, при отсутствии сигнала, характеристическая функция и плотность вероятности выходной статистики (5.1.5) определяются из (3.3.4) и (3.3.5) соответственно. Необходимо лишь в этих формулах использовать значение μ из (5.2.3). В результате получаем, что вероятность ложной тревоги при обнаружении центрированного полосового импульсного сигнала с неизвестным временным положением может быть рассчитана по формуле (3.3.8), где теперь μ определяется из (5.2.3), а m — из (5.2.25).

Положим теперь, что центрированный полосовой импульсный сигнал с неизвестным временным положением $\lambda_0 \in [\lambda_1, \lambda_2]$ присутствует на входе МПО (верна гипотеза H_1). Опять, используя нормированный аргумент (5.2.22), представим выходную статистику (5.1.5) в виде (3.3.10). Полагая далее в (5.2.30), (5.2.33), согласно (4.2.45) $z_0 = 0$, подставляя $g(\cdot)$ из (1.2.20)

и опуская множители $q/(1+q)$ и $[q/(1+q)]^2$ соответственно, приходим к формулам (3.3.11), (3.3.12). Таким образом, при наличии сигнала выходная статистика (5.1.5) обладает математическим ожиданием (3.3.11) и корреляционной функцией (3.3.12). Необходимо лишь в этих формулах использовать μ из (5.2.3), η — из (5.2.22), η_0 — из (5.2.31) и η_i , $i=1,2$ — из (5.2.12). Определяя, аналогично п.2.2.1, п.4.1.1 характеристическую функцию (1.1.5) и плотность вероятности (1.1.6) выходной статистики (5.1.5) при наличии сигнала, опять приходим к формулам (3.3.14) и (3.3.15), с очевидной заменой обозначений. Получаем, что вероятностные характеристики выходной ста-

тики (5.1.5) полностью совпадают с вероятностными характеристиками статистики (3.3.10). Поэтому для расчета вероятности пропуска импульсного полосового сигнала с неизвестным временным положением можно использовать формулу (3.3.47). Необходимо лишь в эту формулу подставить μ из (5.2.3) и m - из (5.2.25).

Формулы (3.3.8), (3.3.47) можно также использовать для расчета характеристик обнаружения узкополосного импульсного сигнала с неизвестным временным положением. С этой целью надо в (3.3.8), (3.3.47) подставить m из (5.2.25), μ - из (5.2.4) и q - из (2.1.48).

Отметим еще раз, что выходная статистика МПО (5.1.5) не зависит от величины спектральной плотности γ обнаруживаемого полосового импульсного сигнала с неизвестным временным положением. Поэтому найденные выражения для характеристик обнаружения могут быть использованы как при известной так и при априори неизвестной величине спектральной плотности обнаруживаемого сигнала. В последнем случае в (3.3.47) надо q заменить на q_0 (2.3.95) или (2.3.96).

Найдем далее характеристики обнаружения полосового широкополосного импульсного сигнала с неизвестными временным положением λ , величиной спектральной плотности γ (1.2.16) и математическим ожиданием a .

По определению, МПО должен вырабатывать максимизированный по a и γ логарифм ФОР (5.1.10) для всех возможных значений неизвестного временного положения $\lambda \in [A_1; A_2]$. Опять используя нормированное временное положение η (5.2.22), логарифм ФОР (5.1.10) представим в виде

$$\hat{L}(\eta) = \mu[\tilde{L}_I(\eta) - \ln\{\tilde{L}_I(\eta) - L_m^2(\eta)\} - 1], \quad (5.3.9)$$

где

$$L_m(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\mu\tau N_0}} \int_{(\eta-1/2)\tau}^{(\eta+1/2)\tau} x(t) dt,$$

$$\tilde{L}_I(\eta) = \frac{1}{\mu} L_I(\lambda) \Big|_{\lambda=\eta\tau}.$$

а $L_I(\lambda)$ определяется из (5.1.5).

Положим, что верна гипотеза H_0 (сигнал отсутствует) и обозначим

$$L_{OI}(\eta) = \tilde{L}_I[\eta|H_0], \quad L_{Om}(\eta) = L_m[\eta|H_0], \quad (5.3.10)$$

При выполнении (5.2.2), случайный процесс $L_{OI}(\eta)$ является приближенно гауссовским и обладает математическим ожиданием (2.3.70). Для шумовой функции (2.3.71), аналогично (5.2.10), получаем

$$B_{NOI}(\eta_1, \eta_2) = \langle N_{OI}(\eta_1) N_{OI}(\eta_2) \rangle =$$

$$= \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0) / \mu. \quad (5.3.11)$$

Процесс $L_{Om}(\eta)$ (5.3.10) является гауссовским, а его два первые момента можем записать как

$$\langle L_{Om}(\eta) \rangle = 0,$$

$$\langle L_{Om}(\eta_1) L_{Om}(\eta_2) \rangle = \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0) / 2\mu. \quad (5.3.12)$$

Введем в рассмотрение, аналогично (2.3.73), величину

$$\epsilon = \mu^{-1/2}, \quad (5.3.13)$$

которая при выполнении (5.2.2) является малым параметром. Используя (2.3.70), (5.3.11), (5.3.12),

перепишем (5.3.10) как

$$L_{OI}(\eta) = 1 + \epsilon N_O(\eta), \quad L_{Om}(\eta) = \epsilon N_{Om}(\eta) / \sqrt{2}. \quad (5.3.14)$$

Здесь

$$N_O(\eta) = N_{OI}(\eta) \sqrt{\mu}, \quad N_{Om}(\eta) = L_{Om}(\eta) \sqrt{2\mu} \quad (5.3.15)$$

– нормированные шумовые функции, два первые момента которых

$$\langle N_O(\eta) \rangle = \langle N_{Om}(\eta) \rangle = 0, \quad \langle N_O^2(\eta) \rangle = \langle N_{Om}^2(\eta) \rangle = 1. \quad (5.3.16)$$

Подставляя (5.3.14) в (5.3.9), для логарифма ФОП при отсутствии сигнала получаем

$$\begin{aligned} \hat{L}_O(\eta) = & \hat{L}[\eta | H_0] = \mu(\epsilon N_O(\eta) - \\ & - \ln[1 + \epsilon N_O(\eta) - \epsilon^2 N_{Om}^2(\eta) / 2]). \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

Учитывая (5.2.2) и (5.3.16), разложим (5.3.17) в ряд Маклорена по ϵ до первого члена разложения, зависящего от реализации наблюдаемых данных включительно. Имеем

$$\hat{L}_O(\eta) = [N_O^2(\eta) + N_{Om}^2(\eta)] / 2 + O(\epsilon),$$

Отбросим здесь члены разложения порядка ϵ и менее. Процесс $N_{Om}(\eta)$ – гауссовский, а $N_O(\eta)$ – асимптотически гауссовский, причем для них выполняется (4.3.17). Следовательно, учитывая (5.3.11), (5.3.12) и (5.3.15), можем аппроксимировать логарифм ФОП выражением

$$\hat{L}_O(\eta) = [X_1^2(\eta) + X_2^2(\eta)] / 2 = \chi(\eta). \quad (5.3.18)$$

Здесь $X_i(\eta)$, $i=1,2$ – независимые стационарные

гауссовские центрированные случайные процессы с одинаковыми корреляционными функциями

$$\langle X_I(\eta_1)X_I(\eta_2) \rangle = \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0). \quad (5.3.19)$$

Согласно (5.3.18), (5.3.19) случайный процесс $\chi(\eta)$ обладает плотностью вероятности (4.3.19) и коэффициентом корреляции (1.2.8)

$$R_\chi(\Delta) = [\max(1 - |\Delta|; 0)]^2. \quad (5.3.20)$$

Отсюда имеем при $\Delta \rightarrow 0$

$$R_\chi(\Delta) = 1 - 2|\Delta| + o(|\Delta|).$$

Таким образом, логарифм ФОП (5.3.9) при отсутствии сигнала и выполнении (5.2.2) является стационарным случайным процессом с коэффициентом корреляции (5.3.20) и одномерной плотностью вероятности (4.3.19). Эти свойства логарифма ФОП позволяют найти асимптотическое значение вероятности ложной тревоги на основе результатов [19,45]. Действительно, согласно определению (2.2.38), вероятность ложной тревоги можно записать в виде (3.3.6), где вероятность (3.3.7) может быть аппроксимирована формулой (2.3.87). Для этого надо в (2.3.87) положить $v = 1$, $\delta = 2$, $\tilde{m} = 2m$, а m подставить из (5.2.25). В результате имеем приближенную формулу для вероятности ложной тревоги

$$\alpha \approx \begin{cases} 1 - \exp[-2\lambda s \exp(-c)] , & c \geq 1, \\ 1 , & c < 1, \end{cases} \quad (5.3.21)$$

точность которой возрастает с увеличением m и s . Для практически интересного случая малых вероятностей ложной тревоги, что имеет место при больших порогах s , формулу (5.3.21) можно несколько упростить, переписав ее аналогично (3.2.33)

$$\alpha \approx 2 \operatorname{arctg}(-c) .$$

Это выражение удовлетворительно аппроксимирует формулу (5.3.21) уже при $\alpha < 0,1$.

Положим теперь, что полосовой импульсный сигнал с неизвестными временным положением λ_0 , величиной спектральной плотности γ_0 и математическим ожиданием a_0 присутствует на входе МПО (верна гипотеза H_1).

Обозначим

$$\hat{L}_1(\eta) = \hat{L}[\eta|H_1] , \quad (5.3.22)$$

$$L_{1I}(\eta) = \tilde{L}_I[\eta|H_1] , \quad L_{1M}(\eta) = L_M[\eta|H_1] \quad (5.3.23)$$

и представим последние две функции в виде, аналогичном (2.2.22)

$$L_{1I}(\eta) = S_{1I}(\eta) + N_{1I}(\eta) , \quad (5.3.24)$$

$$L_{1M}(\eta) = S_{1M}(\eta) + N_{1M}(\eta) . \quad (5.3.25)$$

Используя (5.2.26) и выполняя, аналогично (5.2.6), (5.2.8), усреднение, находим

$$S_{1I}(\eta) = 1 + (q_0 + \delta^2/2) \max(1 - |\eta - \eta_0|; 0) , \quad (5.3.26)$$

$$\begin{aligned} B_{N1I}(\eta_1, \eta_2) = \langle N_{1I}(\eta_1) N_{1I}(\eta_2) \rangle = & \left\{ \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0) + \right. \\ & + [q_0(2 + q_0) + \delta^2(1 + q_0)] I[(\eta_1 - \eta_2)/2] I[(\eta_1 - \eta_0)/2] \times \\ & \times I[(\eta_2 - \eta_0)/2] [1 + \min(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0)] - \\ & \left. - \max(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0) \right\} / \mu , \quad (5.3.27) \end{aligned}$$

$$S_{1M}(\eta) = \delta \max(1 - |\eta - \eta_0|; 0) / \sqrt{2} , \quad (5.3.28)$$

$$B_{N1M}(\eta_1, \eta_2) = \langle N_{1M}(\eta_1) N_{1M}(\eta_2) \rangle = \left\{ \max(1 - |\eta_1 - \eta_2|; 0) + \right.$$

$$+q_0 \left\{ I[(\eta_1 - \eta_2)/2] I[(\eta_1 - \eta_0)/2] I[(\eta_2 - \eta_0)/2] [1 + \min(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0) - \max(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0)] \right\} / 2\mu. \quad (5.3.29)$$

Здесь обозначено

$$\delta^2 = z_0^2 / \mu, \quad (5.3.30)$$

$$z_0^2 = 2a_0^2 \tau / N_0 \quad (5.3.31)$$

— ОСШ для регулярной составляющей принятого сигнала, μ определяется из (5.2.3), а q_0 — из (2.3.95).

По определению (2.2.39) вероятность пропуска сигнала

$$\beta = P[\sup \hat{L}_1(\eta) < c] = P[\hat{L}_1(\eta) < c]. \quad (5.3.32)$$

$$\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}] \quad \eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]$$

Разобьем весь интервал возможных значений η (5.2.23) на подобласти Θ_s (3.2.18) и Θ_N (3.2.19), где теперь $r=1$. Из (5.3.26)...(5.3.29) следует, что при $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Theta_N$ вероятностные характеристики функций (5.3.23) такие же, как у функций (5.3.10). Следовательно, вероятностные характеристики логарифма ФОР (5.3.22) при $\eta \in \Theta_N$ такие же как у логарифма ФОР (5.3.17) в отсутствие сигнала. Далее, аналогично (3.2.21), (3.2.22) обозначим

$$H_N = \sup \hat{L}_1(\eta), \quad \eta \in \Theta_N,$$

$$H_s = \sup \hat{L}_1(\eta), \quad \eta \in \Theta_s$$

и положим, что выполняется (3.2.23) при $r=1$ и m , определяемом из (5.2.25). Тогда вероятность пропуска (5.3.32) переписывается в виде (3.2.25), причем $P_N(c)$ определяется формулой (3.2.26) при подстановке в нее α из (5.3.21).

Для того, чтобы найти вероятность $P_N(c)$ (3.2.25),

введем в рассмотрение нормированные шумовые функции

$$\tilde{N}_{1I}(\eta) = N_{1I}(\eta)\sqrt{\mu}, \quad \tilde{N}_{1M}(\eta) = N_{1M}(\eta)\sqrt{\mu}, \quad (5.3.33)$$

два первых момента которых при $\eta \in \Theta_{\mu}$

$$\langle \tilde{N}_{1I}(\eta) \rangle = \langle \tilde{N}_{1M}(\eta) \rangle = 0,$$

$$\langle \tilde{N}_{1I}^2(\eta) \rangle = 1 + [q_0(2+q_0) + \delta^2(1+q_0)] (1 -$$

$$-|\eta-\eta_0|), \quad \langle \tilde{N}_{1M}^2(\eta) \rangle = [1 + q_0(1-|\eta-\eta_0|)]/2. \quad (5.3.34)$$

Выразим (5.3.24), (5.3.25) через нормированные шумовые функции (5.3.33), подставим в (5.3.22) и воспользуемся обозначением (5.3.13). Получим

$$L_I(\eta) = \mu \left\{ S_{1I}(\eta) - 1 + \epsilon \tilde{N}_{1I}(\eta) - \ln[S_{1I}(\eta) + \right. \\ \left. + \epsilon \tilde{N}_{1I}(\eta) - (S_{1M}(\eta) + \epsilon \tilde{N}_{1M}(\eta))^2] \right\}. \quad (5.3.35)$$

Положим, что величины q_0 и δ^2 конечны, так что дисперсии (5.3.34) нормированных шумовых функций (5.3.33) ограничены при любых значениях μ . Кроме того, из определения подобласти Θ_{μ} следует, что сигнальные функции (5.3.26), (5.3.28) не обращаются в ноль при $\eta \in \Theta_{\mu}$. Поскольку, согласно (5.2.2), (5.3.13), $\epsilon \ll 1$, то разложим (5.3.35) в ряд Маклорена по ϵ до первого члена разложения, зависящего от реализации наблюдаемых данных включительно. Возвращаясь к ненормированным шумовым функциям с характеристиками (5.3.27), (5.3.29), для логарифма ФОП при $\eta \in \Theta_{\mu}$ имеем

$$\hat{L}_I(\eta) = \hat{S}_I(\eta) + \hat{N}_I(\eta), \quad (5.3.36)$$

где

$$\hat{S}_I(\eta) = \mu \left\{ S_{1I}(\eta) - 1 - \ln[S_{1I}(\eta) - S_{1M}^2(\eta)] \right\}, \quad (5.3.37)$$

$$\hat{N}_1(\eta) = \mu \left\{ N_{11}(\eta)[S_{11}(\eta) - S_{1m}^2(\eta) - 1] + \right. \\ \left. + 2S_{1m}(\eta)N_{1m}(\eta) \right\} / [S_{11}(\eta) - S_{1m}^2(\eta)].$$

Эта шумовая функция при выполнении (5.2.2) является приближенно гауссовской и, согласно (5.3.26)... (5.3.29) обладает корреляционной функцией

$$\hat{B}_{N1}(\eta_1, \eta_2) = \mu^2 \left\{ B_{N11}(\eta_1, \eta_2)[S_{11}(\eta_1) - S_{1m}^2(\eta_1) - 1] \times \right. \\ \times [S_{11}(\eta_2) - S_{1m}^2(\eta_2) - 1] + 4S_{1m}(\eta_1)S_{1m}(\eta_2)B_{N1m}(\eta_1, \eta_2) + \\ + 2S_{1m}(\eta_2)B_{N1m}(\eta_1, \eta_2)[S_{11}(\eta_1) - S_{1m}^2(\eta_1) - 1] + \\ \left. + 2S_{1m}(\eta_1)B_{N1m}(\eta_1, \eta_2)[S_{11}(\eta_2) - S_{1m}^2(\eta_2) - 1] \right\} \times \\ \times [S_{11}(\eta_1) - S_{1m}^2(\eta_1)]^{-1} [S_{11}(\eta_2) - S_{1m}^2(\eta_2)]^{-1}, \quad (5.3.38)$$

где

$$B_{N1m}(\eta_1, \eta_2) = \delta(1+q_0) I[(\eta_1 - \eta_2)/2] I[(\eta_1 - \eta_0)/2] \times \\ \times I[(\eta_2 - \eta_0)/2] \left\{ 1 + \min(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0) - \right. \\ \left. - \max(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0) \right\} / \mu\sqrt{2}.$$

Аналогично (2.3.104), (4.3.37) введем в рассмотрение ОСШ для принятого сигнала

$$z^2 = \hat{S}_1^2(\eta_0) / \hat{B}_{N1}(\eta_0, \eta_0). \quad (5.3.39)$$

Подставляя (5.3.37) и (5.3.38) в (5.3.39), получаем выражение (4.3.37), где теперь μ определяется из (5.2.3), δ^2 - из (5.3.30), z_0^2 - из (5.3.31), а q_0 - по-прежнему из (2.3.95). Из (5.3.39), (4.3.37) следует, что при $q_0 > 0$ и $\mu \rightarrow \infty$, ОСШ $z \rightarrow \infty$ при любых конечных значениях δ^2 (5.3.30).

Согласно (5.3.37), когда $\eta \in \Theta$, $\hat{S}_1(\eta) \neq 0$ и достигает максимума при $\eta = \eta_0$. Обозначим

$$\hat{\eta} = \arg \sup_{\eta \in \Theta} \hat{L}_1(\eta), \quad \eta \in \Theta \quad (5.3.40)$$

— надежная ОМП параметра η_0 [19]. Тогда в (3.2.25) $H_{\hat{\eta}} = \hat{L}_1(\hat{\eta})$ и

$$P_{\hat{\eta}}(c) = P[\hat{L}_1(\hat{\eta}) < c]. \quad (5.3.41)$$

Известно [53], что при $z \rightarrow \infty$, ОМП нормированного временного положения $\hat{\eta} \rightarrow \eta_0$ в среднеквадратическом. Поэтому при больших ОСШ z (5.3.39) для расчета вероятности (5.3.41) достаточно исследовать поведение $\hat{L}_1(\eta)$ (5.3.36) в малой окрестности η_0 [45]. Опять воспользуемся обозначением (2.3.105) и положим $\Delta \rightarrow 0$. Тогда для (5.3.37) получаем асимптотическое разложение

$$\hat{S}_1(\eta) = \mu[q_0 - \ln(1+q_0)] + z_0^2/2 - A_{\hat{\eta}} |\eta - \eta_0| + o(\Delta), \quad (5.3.42)$$

где

$$A_{\hat{\eta}} = [\mu q_0^2 + z_0^2(2+q_0)/2]/(1+q_0) \quad (5.3.43)$$

и совпадает с (5.2.32), если в эту формулу подставить $g(\cdot)$ из (1.2.20) и заменить α на α_0 и \bar{q} на q_0 (2.3.95). Аналогичное разложение для корреляционной функции (5.3.38) имеет вид

$$\hat{B}_{\hat{\eta}}(\eta_1, \eta_2) = \sigma_1^2 + (A_{\hat{\eta}} - \sigma_0^2) |\eta_1 - \eta_2| - (2A_{\hat{\eta}} + \sigma_1^2 - \sigma_0^2) [\max(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0) - \min(0; \eta_1 - \eta_0; \eta_2 - \eta_0)] + o(\Delta). \quad (5.3.44)$$

Здесь

$$\sigma_0^2 = (\mu q_0^2 + z_0^2)/(1 + q_0)^2, \quad (5.3.45)$$

$$\sigma_1^2 = \mu q_0^2 + z_0^2(1 + q_0). \quad (5.3.46)$$

Причем (5.3.45) и (5.3.46) совпадают с (5.2.19) и (5.2.34) соответственно, если в эти формулы подставить $g(\cdot)$ из (1.2.20) и заменить a на a_0 и q на q_0 (2.3.95).

Введем, аналогично (3.3.21), (5.2.38), в рассмотрение вероятность

$$P_r(c) = P[\hat{L}_1(\eta) < c], \quad |\eta - \eta_0| < m_r, \quad (5.3.47)$$

где m_r фиксировано и выбрано настолько малым, чтобы при $|\Delta| < m_r$, где Δ определяется из (2.3.105), функции (5.3.37), (5.3.38) можно было бы аппроксимировать главными членами их асимптотических разложений (5.3.42), (5.3.44) с требуемой точностью. Тогда, при $z \rightarrow \infty$, в силу сходимости $\hat{\eta} \rightarrow \eta_0$ в среднеквадратическом [53], для (5.3.41), (5.3.47) справедливо (5.2.39).

Перепишем, аналогично (3.3.22), вероятность (5.3.47) в виде (5.2.40), где теперь

$$L_0 = \hat{L}_1(\eta_0), \quad (5.3.48)$$

$$\Delta(\eta) = \hat{L}_1(\eta) - \hat{L}_1(\eta_0) = \hat{L}_1(\eta) - L_0. \quad (5.3.49)$$

При выполнении (5.2.2) процессы (5.3.36) и (5.3.49) можно приближенно считать гауссовскими. Используя (5.3.42) и (5.3.44), находим два первых момента процесса (5.3.49), которые определяются формулами (5.2.43)...(5.2.45) при подстановке в них (5.3.43), (5.3.45) и (5.3.46). Следовательно, вероятность (5.3.47) можно записать в виде (3.3.30), где теперь

$$W_0(L) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[L - \hat{S}_1(\eta_0)]^2}{2\sigma_1^2}\right\} \quad (5.3.50)$$

- плотность вероятности случайной величины L_0 (5.3.48), а $\hat{S}_1(\eta_0)$ и σ_1^2 определяются из (5.3.42) и (5.3.46) соответственно. Подставляя (5.3.50) в

(3.3.30), учитывая (5.2.47) и (5.2.39) при $z \gg 1$ (5.3.39), находим приближенное выражение для вероятности (5.3.41)

$$P_n(c) \approx P_r(c) \approx \Phi(u-z) - 2\exp[\psi^2 z^2 / 2 - \psi z(u-z)] \Phi[u-(\psi+1)z] + \\ + \exp[2\psi^2 z^2 - 2\psi z(u-z)] \Phi[u-(2\psi+1)z]. \quad (5.3.51)$$

Здесь z определяется из (5.3.39),

$$u = c/\sigma_1, \quad (5.3.52)$$

$$\psi = 2\sigma_1^2 A_n / \hat{S}_1(\eta_0)(\sigma_1^2 + \sigma_0^2) = 2(1+q_0)[z_0^2(1+q_0) + \\ + \mu q_0^2] [2\mu q_0^2 + z_0^2(2+q_0)] \left\{ z_0^2[(1+q_0)^3 + 1] + \right. \\ \left. + \mu q_0^2[(1+q_0)^2 + 1] \right\}^{-1} \left\{ 2\mu[q_0 - \ln(1+q_0)] + z_0^2 \right\}^{-1}, \quad (5.3.53)$$

а $\Phi(\cdot)$ - интеграл вероятности (2.2.44). Подставим (5.3.51) в (3.2.25) и выразим в этой формуле $P_n(c)$ согласно (3.2.26) через α (5.3.21). Получаем приближенное выражение для вероятности пропуска сигнала (1.2.28) с неизвестными временным положением, величиной спектральной плотности и математическим ожиданием

$$\beta \approx \exp[-2\mu \exp(-c)] \left\{ \Phi(u-z) - 2\exp[\psi^2 z^2 / 2 - \right. \\ \left. - \psi z(u-z)] \Phi[u-(\psi+1)z] + \exp[2\psi^2 z^2 - \right. \\ \left. - 2\psi z(u-z)] \Phi[u-(2\psi+1)z] \right\} \quad (5.3.54)$$

при $c \gg 1$ и $\beta \approx 0$ при $c < 1$. Точность этой приближенной формулы для вероятности пропуска возрастает с увеличением c , μ , μ и z .

Выражение для вероятности пропуска (5.3.54) несколько упрощается при обнаружении слабого сигнала (2.2.45). Действительно, в этом случае

$$z^2 = (z_0^2 + \mu q_0^2)/4, \sigma_1^2 = 4z^2, \psi = 2. \quad (5.3.55)$$

Подставляя (5.3.55) в (5.3.54), имеем для слабого сигнала

$$\beta = \exp[-2\psi \operatorname{erfc}(-c)] \left\{ \Phi(c/2z-z) - 2\exp(4z^2 - c) \Phi(c/2z-3z) + \exp(12z^2-2c) \Phi(c/2z-5z) \right\}$$

при $c \geq 1$ и $\beta = 0$ при $c < 1$.

Сопоставление полученных здесь и в п. 5.2 характеристик обнаружения позволяет оценить потери в эффективности обнаружения сигнала из-за незнания его математического ожидания и величины спектральной плотности.

5.4. Результаты статистического моделирования

Полученные выше формулы для характеристик обнаружения (вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала) являются лишь асимптотически точными с увеличением соответствующих параметров — μ , z , m , ξ , c и т.д.. При конечных значениях этих параметров определить погрешность найденных формул аналитическими методами пока не представляется возможным. С целью проверки работоспособности синтезированных алгоритмов обнаружения и определения границ применимости полученных выше асимптотически точных формул для их характеристик проводилось (совместно с А. В. Захаровым) имитационное моделирование МПО стохастического импульсного сигнала с неизвестным временным положением на ЭВМ ЕС-1060.

Моделировалось обнаружение импульсного сигнала (1.2.28), где $\xi(t)$ — полосовой стационарный гауссовский широкополосный процесс, спектральная плотность которого определяется формулой (1.2.18) при подстановке в нее $g(\cdot)$ из (1.2.20). Для обнаружения такого сигнала необходимо формировать логарифм ФАП (5.1.6) для всех $\lambda \in [\lambda_1; \lambda_2]$ и принимать решение, сравни-

вая его наибольший максимум с порогом (1.4.5). Последние два слагаемых в (5.1.6) не зависят от реализации наблюдаемых данных $x(t)$ и неизвестного временного положения сигнала λ . Поэтому, конкретизируя (5.2.1) для полосового сигнала, получаем, что, согласно АМП, с порогом c можно сравнивать абсолютный максимум члена логарифма ФОП

$$L_x(\lambda) = \frac{q}{1+q} L_I(\lambda) + \frac{2a}{N_0(1+q)} \int_{\lambda-\tau/2}^{\lambda+\tau/2} x(t) dt. \quad (5.4.1)$$

Здесь $L_I(\lambda)$ определяется из (5.1.5), q - из (2.1.22) и z_0 - из (5.2.20).

Для формирования функции (5.4.1) на ЭВМ перейдем к нормированным аргументам η (5.2.22) и

$$\tilde{t} = t/\tau. \quad (5.4.2)$$

Тогда (5.4.1) переписывается как

$$L_x(\eta) = [qL_I(\eta) + z_0 L_z(\eta)] / (1+q), \quad (5.4.3)$$

где

$$L_I(\eta) = \int_{\eta-1/2}^{\eta+1/2} \tilde{y}^2(\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (5.4.4)$$

$$L_z(\eta) = \sqrt{2} \int_{\eta-1/2}^{\eta+1/2} \tilde{x}(\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (5.4.5)$$

$$\tilde{y}(\tilde{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tilde{t}-t') \tilde{x}(t') dt', \quad (5.4.6)$$

$$H(\tilde{t}) = \sin(2\pi\mu\tilde{t}) / \pi\tilde{t}, \quad (5.4.7)$$

$$\bar{x}(\bar{t}) = \varphi \bar{s}(\bar{t}, \eta_0) + \bar{n}(\bar{t}), \quad (5.4.8)$$

$$\bar{s}(\bar{t}, \eta_0) = I[\bar{t} - \eta_0] \bar{\xi}(\bar{t}),$$

$$\bar{\xi}(\bar{t}) = \xi(\bar{t}\tau) \sqrt{\tau/N_0},$$

$$\bar{n}(\bar{t}) = n(\bar{t}\tau) \sqrt{\tau/N_0}, \quad (5.4.9)$$

μ определяется из (5.1.4)

$$\varphi = 0 \quad (5.4.10)$$

- при отсутствии сигнала (1.2.28) и

$$\varphi = 1 \quad (5.4.11)$$

- при его наличии; η, η_0 принадлежат интервалу

(5.2.23), а $\bar{t} \in [0; T/\tau]$.

Подставляя (5.4.8) в (5.4.5), (5.4.6), получаем

$$L_z(\eta) = \varphi L_{zs}(\eta) + L_{zN}(\eta), \quad (5.4.12)$$

$$\bar{y}(\bar{t}) = \varphi \bar{y}_s(\bar{t}) + \bar{y}_N(\bar{t}), \quad (5.4.13)$$

$$L_{zs}(\eta) = \sqrt{2} \int_{\eta-1/2}^{\eta+1/2} \bar{s}(\bar{t}, \eta_0) d\bar{t}, \quad (5.4.14)$$

$$L_{zN}(\eta) = \sqrt{2} \int_{\eta-1/2}^{\eta+1/2} \bar{n}(\bar{t}) d\bar{t}, \quad (5.4.15)$$

$$\bar{y}_s(\bar{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{s}(t', \eta_0) H(\bar{t} - t') dt', \quad (5.4.16)$$

$$\bar{y}_N(\bar{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{n}(t') H(\bar{t} - t') dt'. \quad (5.4.17)$$

Таким образом, для получения логарифма ФОП (5.4.3) необходимо формировать (5.4.15) и (5.4.17) как функционалы от одной и той же реализации нормированного белого шума $\tilde{n}(\tilde{t})$. При наличии сигнала ($\varphi = 1$) необходимо еще формировать (5.4.14) и (5.4.16) как функционалы от одной и той же реализации нормированного случайного процесса $\tilde{\xi}(\tilde{t})$.

В процессе моделирования выработывались отсчеты функций (5.4.9), (5.4.16) с шагом $\Delta\tilde{t}$ и функции (5.4.15) с шагом $\Delta\eta$. На основе сформированных дискретных последовательностей реализации этих процессов аппроксимировались ступенчатыми функциями. Относительная среднеквадратичная погрешность аппроксимации определялась по формуле

$$\delta_{\chi} = \left\{ \max_{t \in (t^* - \Delta/2; t^* + \Delta/2)} \langle [\chi(t^*) - \chi(t)]^2 \rangle \sigma_{\chi}^{-2} \right\}^{1/2} = \\ = \left\{ 2[1 - R_{\chi}(\Delta/2)] \right\}^{1/2}. \quad (5.4.18)$$

Здесь t^* - одна из точек, в которых формировались отсчеты процесса $\chi(t)$, σ_{χ}^2 - его дисперсия, а $R_{\chi}(t)$ - коэффициент корреляции. Соответственно $\chi(t)$ - один из процессов (5.4.9), (5.4.15) или (5.4.17), а $\Delta = \Delta\tilde{t}$ при формировании (5.4.9) или (5.4.17) и $\Delta = \Delta\eta$ при формировании (5.4.15).

Дискретные отсчеты этих процессов формировались на основе последовательности независимых гауссовских случайных чисел методом скользящего суммирования [6]

$$\tilde{\xi}_i = z_0/\sqrt{2} + \sqrt{\mu\eta} \sum_{k=1}^{2n+1} C_k \beta_{k+i-1}, \quad (5.4.19)$$

$$\bar{y}_{Nj} = \sqrt{\mu} \sum_{k=1}^{2n+1} C_{1+n-k} \alpha_{k+j-1-n} \quad (5.4.20)$$

$$L_{zNV} = \sqrt{\Delta\eta} \sum_{k=-n_1}^{n_1} \alpha_{v-k} \quad (5.4.21)$$

Здесь α_k и β_k - независимые гауссовские случайные числа с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями [62],

$$C_k = \sin[\Psi(k-n-1)] / ((k-n-1)\sqrt{\pi\Psi}) \quad (5.4.22)$$

$$\Psi = 2\pi\mu\bar{\Delta t} \quad (5.4.23)$$

$i \in [1; 1+\text{int}(T/\bar{\Delta t})]$, $j \in [1+n; 1-n+\text{int}(T/\tau\bar{\Delta t})]$, $v \in [1+\text{int}(\eta_{\min}/\Delta\eta); 1+\text{int}(\eta_{\max}/\Delta\eta)]$, $\text{int}(\cdot)$ - целая часть числа.

При выбранном шаге дискретизации число слагаемых в (5.4.19)...(5.4.21) определялось таким образом, чтобы относительное отклонение дисперсии сформированного отсчета от дисперсии моделируемого процесса не превышало заданную величину, т.е.

$$\left| \sigma_{\chi}^2 - \sum_{k=1}^{2n+1} C_k^2 \sigma_{\chi}^{-2} \right| < \epsilon_{\chi} \quad (5.4.24)$$

Для построения ступенчатой аппроксимации процессов (5.4.9) и (5.4.17) был выбран шаг дискретизации

$$\bar{\Delta t} = 0,1/\mu \quad (5.4.25)$$

Эти два процесса обладают одинаковым коэффициентом корреляции

$$R_{\xi,y}(\bar{t}) = \sin(2\pi\mu\bar{t}) / 2\pi\mu\bar{t} \quad (5.4.26)$$

так, что при шаге (5.4.25) из (5.4.18) для среднеквадратичной погрешности аппроксимации имеем

$$\delta_{\xi, y} < 0,2. \quad (5.4.27)$$

Затем, подставляя (5.4.25) в (5.4.23), (5.4.23) в (5.4.22), а (5.4.22) в (5.4.24), получаем, что при

$$n = 10 \quad (5.4.28)$$

относительное отличие дисперсий (5.4.24) для процессов (5.4.9) и (5.4.17) ограничено сверху величиной

$$\epsilon_{\xi, y} < 0,05. \quad (5.4.29)$$

Для построения ступенчатой аппроксимации процесса (5.4.15) был выбран шаг дискретизации

$$\Delta\eta = 0,01. \quad (5.4.30)$$

Процесс (5.4.15) согласно (5.3.11) обладает коэффициентом корреляции

$$R_L(\eta) = \max(1 - |\eta|; 0), \quad (5.4.31)$$

так что при шаге (5.4.30) из (5.4.18) для среднеквадратичной погрешности аппроксимации имеем

$$\delta_L < 0,1. \quad (5.4.32)$$

Полагая теперь в (5.4.21) $n_1 = 50$ и подставляя в (5.4.24) соответствующие значения коэффициентов $C_k = \sqrt{\Delta\eta}$, получаем, что относительное отличие дисперсий для процесса (5.4.15) ограничено сверху величиной

$$\epsilon_L < 0,01. \quad (5.4.33)$$

От сформированной согласно (5.4.19), ступенчатой аппроксимации процесса (5.4.9) вычисляется интеграл (5.4.16). Здесь импульсная переходная функция $H(\bar{t})$ (5.4.7) с точностью до множителя совпадает с коэффициентом корреляции (5.4.26). Поэтому, при замене интеграла конечной суммой использовался шаг дискретизации (5.4.25) и учитывался $2n+1$ отсчет подынтегральной функции при выборе n согласно (5.4.28). В результате погрешность аппроксимации

процессов (5.4.16), (5.4.17) была практически одинакова и не превышала (5.4.27), (5.4.29).

Далее, от ступенчатых аппроксимаций процессов (5.4.13) и (5.4.9) вычислялись интегралы (5.4.4) и (5.4.14). Как показано в п.5.3, процессы (5.4.4) и (5.4.14) обладают коэффициентами корреляции, подобными (5.4.31). Поэтому, с учетом (5.4.26) при замене интегралов (5.4.4) и (5.4.14) конечными суммами использовался шаг дискретизации по переменной интегрирования (5.4.25), а сами функции (5.4.4) и (5.4.14) аппроксимировались ступенчатой функцией на основе их дискретных отсчетов с шагом (5.4.30). В результате функции (5.4.4), (5.4.5), а следовательно и сам логарифм ФОП (5.4.3), формировались с погрешностью, не превышающей (5.4.32), (5.4.33).

Таким образом, для экспериментального определения характеристик обнаружения стохастического импульсного сигнала (1.2.28) с неизвестным временным положением необходимо формировать реализации логарифма ФОП (5.4.3), как описано выше.

Если же у сигнала (1.2.28) неизвестны временное положение, математическое ожидание и величина спектральной плотности, то логарифм ФОП определяется выражением (5.1.10). Переходя в этой формуле к нормированным аргументам η (5.2.22) и \tilde{t} (5.4.2), имеем

$$\hat{L}(\eta) = L_I(\eta) - \mu \ln \left[L_I(\eta) - L_z^2(\eta)/2 \right] - \mu(1 - \ln \mu). \quad (5.4.34)$$

Этот логарифм ФОП выражается через функции (5.4.4), (5.4.5), порядок формирования которых описан выше.

В процессе моделирования с шагом (5.4.30) вырабатывались отсчеты логарифмов ФОП (5.4.3) и (5.4.34) при выполнении (5.4.10) или (5.4.11). Затем простым перебором значений определялся наибольший отсчет, который сравнивался с порогом s . Если при выполнении (5.4.10) порог превышался, фиксировалась ошибка ложной тревоги. Если при выполнении (5.4.11)

наибольший отсчет логарифмов ФОП оказывался меньше порога s , фиксировалась ошибка пропуска сигнала. В качестве оценок вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала использовалась относительная частота появления соответствующих ошибок.

Моделирование выполнялось для приведенного априорного интервала возможных значений неизвестного временного положения (5.2.25) $m = 10$, так что для аппроксимации каждой реализации логарифмов ФОП (5.4.3), (5.4.34) использовалось 10^3 отсчетов с шагом (5.4.30). При наличии полезного сигнала (5.4.11) истинное значение нормированного временного положения выбиралось в середине априорного интервала $\eta_0 = (\eta_{\max} + \eta_{\min})/2$.

С целью экономии машинного времени использовался метод зависимых испытаний [32, 33], который был реализован следующим образом. В каждом цикле статистических испытаний формировались отсчеты функции (5.4.15) согласно (5.4.21), а также для выбранного значения μ отсчеты центрированной и нормированной функции

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{2n+1} C_k \beta_{k+i-1} \quad (5.4.35)$$

Согласно (5.4.19)

$$\tilde{\xi}_i = z_0 \sqrt{2} + \xi_i \sqrt{\mu q} \quad (5.4.36)$$

По сформированным в одном цикле испытаний отсчетам (5.4.20), (5.4.21), (5.4.35) согласно (5.4.36), (5.4.3) ... (5.4.5), (5.4.12) ... (5.4.17), (5.4.34) формировались реализации логарифмов ФОП (5.4.3), (5.4.34) для набора значений φ (5.4.10), (5.4.11) и для набора значений z_0 и q , представляющих интерес. Таким образом, в каждом цикле моделировалось обнаружение сигнала с известными и неизвестными математическим ожиданием и величиной спектральной плотности, выносились решения при наличии и отсутствии в наблюдае-

мой реализации сигнала (1.2.28), а так же для всех выбранных значений z_0 и q . Для каждого значения μ было проведено не менее $N=10^3$ циклов испытаний.

Определим точность полученных экспериментальных значений вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала. Оценки этих вероятностей определялись как относительная частота принятия решений в пользу гипотез H_1 и H_0 , в то время как были верны гипотезы H_0 и H_1 соответственно. Пусть p - оценка одной из вероятностей ошибок, а p_0 - её истинное значение.

Тогда, при достаточно большом числе испытаний N доверительная вероятность приблизительно определяется выражением [9]

$$P_d = P[|p-p_0| < \epsilon] = 2\Phi\left[\epsilon \sqrt{\frac{N}{p(1-p)}}\right] - 1,$$

где $\Phi(\cdot)$ - интеграл вероятности (2.2.44). Иногда удобнее определять доверительную вероятность для относительного доверительного интервала δ_p

$$P_d = P\left[\frac{|p-p_0|}{p} < \delta_p\right] = 2\Phi\left[\delta_p \sqrt{\frac{pN}{1-p}}\right] - 1.$$

Используем эту формулу при числе испытаний $N = 10^3$, которое было реализовано в процессе моделирования. Получаем, что с вероятностью $P_d = 0,9$ границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала не более чем на 15% при $\alpha, \beta > 0,1$ и не более, чем на 30% при $\alpha, \beta > 3 \cdot 10^{-2}$.

Полученные в результате моделирования экспериментальные значения вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала нанесены на рис. 5.5...5.8. При экспериментальном определении вероятности пропуска, по-

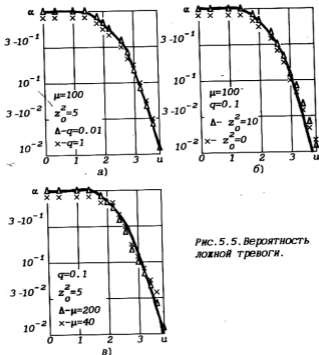


Рис. 5.5. Вероятность ложной тревоги.

порог \bar{u} определялся в соответствии с критерием Неймана-Пирсона (1.3.13). Для определения вероятности пропуска сигнала с известными априори математическим ожиданием и величиной спектральной плотности порог рассчитывался по формуле (3.3.49), куда следует подставить $m = 10$ и нормированный порог \bar{u} из (5.3.1). Для определения вероятности пропуска сигнала с априори неизвестными математическим ожиданием и величиной спектральной плотности порог рассчиты-

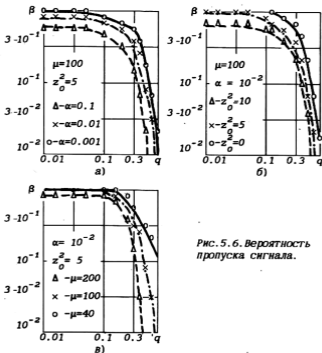


Рис. 5.6. Вероятность пропуска сигнала.

вался по формуле (5.3.21) также при $m = 10$.

На рис. 5.5...5.8, кроме экспериментальных значений вероятностей ошибок, нанесены линиями соответствующие теоретические зависимости, рассчитанные по асимптотически точным формулам.

На рис. 5.5, 5.6 приведены теоретические и экспериментальные значения вероятностей ошибок при обнаружении сигнала (1.2.28) с неизвестным временным положением, но с априори известными математическими

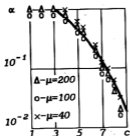


Рис. 5.7. Вероятность ложной тревоги при неизвестных величинах спектральной плотности и математического ожидания сигнала.

ожидаемым и величиной спектральной плотности.

На рис. 5.5 теоретические зависимости вероятности ложной тревоги α от нормированного порога μ (5.3.1) рассчитаны по формуле (3.3.49) при $m = 10$.

На рис. 5.6 теоретические зависимости вероятности пропуска сигнала β от q (2.1.22) рассчитаны по формуле (5.2.50), где $m = 10$, а f , ψ и z определяются формулами (5.3.2)...(5.3.4) соответственно. Согласно критерию Неймана-Пирсона, нормированный порог μ (5.3.1) определялся по фиксированной вероятности ложной тревоги из формулы (3.3.49).

На рис. 5.7, 5.8 приведены теоретические и экспериментальные значения вероятностей ошибок при обнаружении сигнала (1.2.28) с неизвестным временным положением, математическим ожиданием и величиной спектральной плотности.

На рис. 5.7 теоретическая зависимость вероятности ложной тревоги от порога s рассчитана по формуле (5.3.21) при $m = 10$. На рис. 5.8 теоретические зависимости вероятности пропуска сигнала β от q_0 (2.3.95) рассчитаны по формуле (5.3.54), где $m = 10$, а z , u , ψ определяются формулами (5.3.39), (5.3.52), (5.3.53) соответственно. Согласно критерию Неймана-Пирсона, порог s в (5.3.52) определялся по заданной вероятности ложной тревоги из формулы (5.3.21).

Следует отметить удовлетворительную аппроксима-

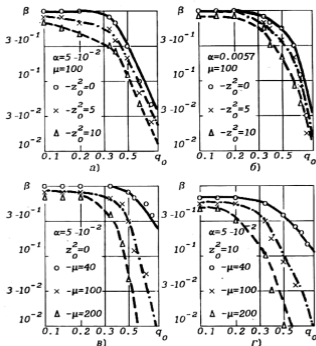


Рис. 5.8. Вероятность пропуска сигнала с неизвестными величинами спектральной плотности и математического ожидания.

цию экспериментальных зависимостей асимптотическими на рис. 5.5... 5.8 уже при $\mu \geq 40$.

Приведенные результаты статистического моделирования позволяют судить о границах применимости

полученных выше асимптотических формул для вероятностей ошибок при использовании АМП для обнаружения стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Действительно, найденные формулы обладают удовлетворительной точностью по крайней мере при $\mu \geq 40$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Амнантов И.Н. Избранные вопросы статистической теории связи. - М.: Сов. радио, 1971. - 416с.
2. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. - М.: Наука, 1981. - 640с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. - Т.1. - 344с.
4. Беляев Ю.К. Распределение максимума случайного поля и его приложение к задачам надежности // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. - 1970. - № 3. - С. 77-84.
5. Большаков И.А., Раковиц В.С. Прикладная теория случайных потоков. - М.: Сов. радио, 1978. - 248с.
6. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. - М.: Сов. радио, 1971. - 326с.
7. Ван-Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции /Пер. с англ. под ред. В.И. Тихонова. - М.: Сов. радио, 1972. - Т.1. - 744с.
8. Ван-Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции /Пер. с англ. под ред. В.Т. Горяинова. - М.: Сов. радио, 1977. - Т.3. - 644с.
9. Вентцель Е.С., Овчаров А.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. - М.: Наука, 1988. - 480с.
10. Волохаток В.А., Кочетков В.М., Красовский Р.Р. Вопросы оптической локации. - М.: Сов. радио, 1971. - 256с.
11. Вопросы статистической теории радиолокации /П.А. Бакут, И.А. Большаков, Б.М. Герасимов и др.: Под ред. Г.П. Тартаковского. - М.: Сов. радио, 1963. - Т.1. - 426с.
12. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. - М.: Наука, 1978. - 295с.
13. Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. Обобщенные функции. - М.: Физматгиз, 1961. Вып. 4. - 472с.
14. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник для университетов. - М.: Наука, 1969. - 400с.
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1962. - 1100с.
16. Крамер Г. Математические методы статистики /Пер. с англ. под ред. А.Н. Колмогорова. - М.: Мир, 1975. - 648с.
17. Крамер Г., Анбеттер М. Стационарные случайные процессы /Пер. с англ. под ред. Ю.К. Беляева. - М.: Мир, 1969. - 400с.
18. Куликов Е.И. Методы измерения случайных процессов. - М.: Радио и связь, 1986. - 272с.
19. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. - М.: Сов. радио, 1978. - 296с.
20. Курикова А.А. Квантовая оптика и оптическая локация. - М.: Сов. радио, 1973. - 184с.
21. Лезин Ю.С. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. - М.: Сов. радио, 1969. - 446с.

22. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. - М.: Радио и связь, 1989. - 656с.
23. Левин Б.Р., Шварц В. -Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. - М.: Радио и связь, 1985. - 312с.
24. Леман Э. Проверка статистических гипотез /Пер. с англ. Д.В. Прохорова. - М.: Наука, 1964. - 498с.
25. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. - М.: Сов. радио, 1978. - 376с.
26. Марченко Б.Г. Метод статистических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. - Киев: Наукова думка, 1973. - 192с.
27. Мидадтон Д. Введение в статистическую теорию связи. - М.: Сов. радио, 1962. - Т.2. - 832с.
28. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. - М.: Энергия, 1972. - 456с.
29. Обрезков Г.В., Разевиг Б.А. Методы анализа срыва слежения. - М.: Сов. радио, 1972. - 239с.
30. Омельченко В.А. Основы спектральной теории распознавания сигналов. - Харьков: Вища шк. Изд. при Харьк. ун-те, 1983. - 160с.
31. Парфенов В.И. Обнаружение случайного сигнала с неизвестной длительностью // Методы и устройства цифровой и аналоговой обработки информации. - Воронеж, 1987. - С. 82-85.
32. Поляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. - М.: Сов. радио, 1971. - 400с.
33. Поляк Ю.Г., Филимонов В.А. Статистическое машинное моделирование средств связи. - М.: Радио и связь, 1988. - 176с.
34. Репин В.Г., Тартаховский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. - М.: Сов. радио, 1977. - 432с.
35. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Случайные процессы. - М.: Наука, 1976. - Т.1. - 496с.
36. Смирнов В.И. Курс высшей математики. - М.: Наука, 1965. - Т.2. - 656с.
37. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. - М.: Сов. радио, 1978. - 320с.
38. Справочник по специальным функциям/ Под ред. М.Абрамовица и И.Стигана. /Пер. с англ. под ред. В.А.Диткина и Л.Н.Кармазиной. - М.: Наука, 1979. - 832с.
39. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. - М.: Сов. радио, 1961. - 560с.
40. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. - М.: Наука, 1970. - 392с.
41. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. - М.: Радио и связь, 1982. - 624с.
42. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. - М.: Радио и связь, 1983. - 320с.
43. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. - М.: Радио и связь, 1977. - 488с.
44. Тихонов В.И., Хименко В.И. Выбросы траекторий случайных процессов/ Отв. ред. В.И.Сифоров. - М.: Наука, 1987. - 303с.
45. Трифонов А.П. Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами// Теория обнаружения сигналов. - М.: Радио и связь, 1984. - С.12-89.
46. Трифонов А.П. Прием сигнала с неизвестной длительностью на фоне белого шума// Радиотехника и электроника. - 1977, Т.22. - № 1. - С.90-98.

47. Трифонов А.П. Прием разрывного квазидетерминированного сигнала на фоне гауссовой помехи// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. - 1978. - № 4. - С. 146-153.
48. Трифонов А.П. Прием случайного сигнала с неизвестной частотой// Радиотехника и электроника. - 1980, Т. 25. - № 4. - С. 749-757.
49. Трифонов А.П., Гааун С.А. Эффективность приема случайного импульсного сигнала на фоне белого шума// Радиотехника и электроника. - 1981, Т. 26. - № 8. - С. 1622-1630.
50. Трифонов А.П., Гааун С.А. Прием случайного сигнала с неизвестной шириной спектра мощности// Радиотехника и электроника. - 1982, Т. 27. - № 8. - С. 1554-1562.
51. Трифонов А.П., Гааун С.А., Парфенов В.И. Оценка длительности случайного гауссовского сигнала// Изв. вузов. Сер. Приборостроение. - 1984, Т. 27. - № 11. - С. 9-13.
52. Трифонов А.П., Захаров А.В. Прием сигнала с неизвестной задержкой при наличии модулирующей помехи// Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. - 1986, Т. 29. - № 4. - С. 36-41.
53. Трифонов А.П., Захаров А.В. Оценка задержки сигнала при неизвестных параметрах модулирующей помехи// Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. - 1988, Т. 31. - № 1. - С. 24-28.
54. Трифонов А.П., Нечаев Е.П. Совместная оценка величины и ширины спектра мощности случайного сигнала// Изв. вузов. Сер. Приборостроение. - 1987, Т. 30. - № 11. - С. 7-10.
55. Трифонов А.П., Парфенов В.И. Определение момента изменения центральной частоты спектральной плотности гауссовского случайного сигнала по наблюдениям, искаженным сильным шумом// Статистические проблемы управления. - Вильнюс, 1984. - Вып. 65. - С. 210-220.
56. Трифонов А.П., Парфенов В.И. Оценка длительности случайного гауссовского сигнала с неизвестной мощностью// Изв. вузов. Сер. Приборостроение. - 1986, Т. 29. - № 7. - С. 7-10.
57. Трифонов А.П., Парфенов В.И. Частотно-временная модуляция шумоподобных радиосигналов// Радиотехника. - 1987, Т. 42. - № 6. - С. 48-49.
58. Трифонов А.П., Парфенов В.И. Обнаружение двухчастотного составного случайного сигнала// Статистические методы обработки информации в авиационных радиоэлектронных системах. - Киев, 1987. - С. 31-37.
59. Трифонов А.П., Парфенов В.И. Импульсная частотно-временная модуляция шумовой несущей// Радиотехника и электроника. - 1988, Т. 33. - № 1. - С. 87-95.
60. Трифонов А.П., Парфенов В.И. Прием случайного частотно-манипулированного сигнала// Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. - 1988, Т. 31. - № 7. - С. 3-8.
61. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. - М.: Радио и связь, 1986. - 264 с.
62. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений/ Пер. с англ. Х.Д. Икрамова. - М.: Мир, 1980. - 280 с.
63. Харкевич А.А. Спектры и анализ. - М.: Физматгиз, 1952. - 191 с.
64. Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники/ Пер. с англ. под ред. М.В. Гальперина. - М.: Мир, 1986. - Т. 1. - 598 с.

65. Хромых В.Г., Трифонов А.П. Об одной модификации коррелятора совпадения полярностей// Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника.-1968, Т.11.-№ 1.-С.105-108.
66. Kailath T. Some Integral Equations with Nonrational Kernels// IEEE Trans. on Inf.Theory.-1966, v.11-12. № 4.-P.442-447.
67. McFadden I.A. On a class of Gaussian processes for which the mean rate of crossing is infinite// J.Roy.Statist.Soc.- 1967, v.829.-P.489-502.
68. Pickands J. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian process//Trans.Amer.Math.Soc.-1969, v.145.-November.-P.51-73.
69. Qualls C., Watanabe H. Asymptotic properties of Gaussian processes// Ann. on Math.Statist.-1972, v.3.-№ 2.-P.580-596.
70. Sharpe K. Some properties of the crossing process generated by a stationary process// Adv.Appl.Probab.-1978, v.10.-№ 2.-P.373-391.
71. Shepp L.A. Radon-Nicodym derivatives of Gaussian measures//Ann. Math.Statist. -1966, v.37.-April.-P.321-354.
72. Trifonov A., Buteiko V. The effectiveness of detection Algorithms and estimates of change in a Wiener process//Detection of changes in Random Processes.-New York: Opt.Software inc., Publ.division, 1986.-P.184-194.

	стр.
Введение	5
Глава 1. Стохастические сигналы и методы их обнаружения	8
1.1. Стохастические сигналы и методы их описания	8
1.1.1. Общие сведения	8
1.1.2. Случайные величины	9
1.1.3. Случайные процессы	12
1.2. Гауссовские сигналы и их параметры	18
1.2.1. Определение и основные свойства	18
1.2.2. Стационарные гауссовские сигналы	22
1.2.3. Импульсные гауссовские сигналы	27
1.3. Оптимальные алгоритмы обнаружения	29
1.3.1. Постановка задачи	29
1.3.2. Проверка простых гипотез	30
1.3.3. Проверка сложных гипотез	34
1.4. Обнаружение по методу максимального правдоподобия	39
1.4.1. Метод максимального правдоподобия	39
1.4.2. Функционал отношения правдоподобия	43
Глава 2. Стационарные сигналы с неизвестной полосой частот	47
2.1. Синтез алгоритмов обнаружения	47
2.1.1. Неизвестные параметры спектральной плотности	47
2.1.2. Неизвестная ширина спектральной плотности	55
2.2. Регулярные сигналы	64
2.2.1. Свойства логарифма функционала отношения правдоподобия	64
2.2.2. Характеристики обнаружения	71
2.3. Полосовой сигнал	79
2.3.1. Неизвестная ширина спектральной плотности	79
2.3.2. Неизвестные величина и ширина спектральной плотности	94
Глава 3. Стационарные узкополосные сигналы с неизвестной центральной частотой	105
3.1. Синтез алгоритмов обнаружения	105
3.2. Регулярный сигнал с неизвестной центральной частотой спектральной плотности	111
3.3. Полосовой сигнал с неизвестной центральной частотой спектральной плотности	121
3.3.1. Максимально правдоподобный обнаружитель	121
3.3.2. Гауссовская аппроксимация	134
3.3.3. Квазиправдоподобный и оптимальный обнаружитель	137
Глава 4. Импульсные сигналы с неизвестной длительностью	142
4.1. Синтез алгоритмов обнаружения	142

4.1.1. Логарифм функционала отношения правдоподобия	142
4.1.2. Незвестная длительность сигнала	148
4.2. Характеристики обнаружения	156
4.3. Полосовой сигнал с неизвестными параметрами	170
Глава 5. Импульсные сигналы с неизвестным временным положением	185
5.1. Синтез алгоритмов обнаружения	185
5.2. Характеристики обнаружения	191
5.3. Полосовой сигнал с неизвестными параметрами	205
5.4. Результаты статистического моделирования	220
Библиографические ссылки	234

TRIFONOV A.P., NECHAEV E.P., PARFENOV V.I.

DETECTION OF THE STOCHASTIC SIGNALS WITH
THE UNKNOWN PARAMETERS. VORONEZH STATE
UNIVERSITY. 1991. -246 p.

The synthesis and analysis of the maximum likelihood detection algorithms of Gaussian stationary and pulse nonstationary signals with the unknown parameters are considered. For the subscription of the functional dependence of the statistical characteristics of the detected signals from the unknown parameters in a line with the traditional (differential) laws also the discontinuity (undifferential) approximation are widely used. This essentially makes easier the practical realization of the detectors.

The unknown parameters can be: mathematical expectation, value, bandwidth and main frequency of spectral density; time delay and duration of the pulse with the random Gaussian substructure. The results of the statistical computer modelling of the synthesized detectors are given.

For the engineer-technical and science workers in the fields of radio, optical, hydrolocation and communication and also for the students and post-graduates of the corresponding specialities.

CONTENTS

	p.
Introduction	5
Part 1. Stochastic signals and methods of their detection	8
1.1. Stochastic signals and methods of their description	8
1.1.1. General information	8
1.1.2. Stochastic variables	9
1.1.3. Stochastic processes	12
1.2. Gaussian signals and their parameters	18
1.2.1. Definition and basic properties	18
1.2.2. Stationary Gaussian signals	22
1.2.3. Pulse Gaussian signals	27
1.3. Optimal detection algorithms	29
1.3.1. Task foundation	29
1.3.2. Simple hypothesis checking	30
1.3.3. Complex hypothesis checking	34
1.4. Detection by the maximum likelihood method	39
1.4.1. Maximum likelihood method	39
1.4.2. Functional of likelyhood ratio	43
Part 2. Stationary signals with unknown bandwidth	47
2.1. Synthesis of detection algorithms	47
2.1.1. Unknown parameters of spectral density	47
2.1.2. Unknown bandwidth of spectral density	55

2.2.	Regular signals	64
2.2.1.	Properties of logarithm of functional likelyhood ratio	64
2.2.2.	Characteristics of detection	71
2.3.	Signal with rectangular form of spectral density	79
2.3.1.	Unknown bandwidth of spectral density	79
2.3.2.	Unknown value and bandwidth of spectral density	94
Part 3.	Stationary narrowband signals with unknown main frequency	105
3.1.	Synthesis of detection algorithms	105
3.2.	Regular signals with unknown main frequency of spectral density	111
3.3.	Signal with rectangular form and unknown main frequency of spectral density	121
3.3.1.	Maximum likelyhood detector	121
3.3.2.	Gaussian approximation	134
3.3.3.	Quasiliikelyhood and optimal detectors	137
Part 4.	Pulse signals with unknown duration	142
4.1.	Synthesis of detection algorithms	142
4.1.1.	Logarithm of functional of likelyhood ratio	142
4.1.2.	Unknown signal duration	148
4.2.	Detection characteristics	156
4.3.	Signal with rectangular form of spectral density and unknown parameters	170
Part 5.	Pulse signals with unknown delay	185
5.1.	Synthesis of detection algorithms	185
5.2.	Detection characteristics	191
5.3.	Signal with rectangular form of spectral density and unknown parameters	205
5.4.	Results of statistical modelling	220
	Bibliografic references	234

КАФЕДРА РАДИОФИЗИКИ

Воронежского государственного университета создана в 1953 году. За годы существования кафедры на ней сформировался высококвалифицированный научный коллектив, который в настоящее время включает 4 доктора и 28 кандидатов наук.

Коллектив кафедры радиофизики выполняет большой объем научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ. Разработки сотрудников кафедры радиофизики охватывают ряд актуальных областей науки и техники:

1. Современные статистические методы синтеза и анализа систем и устройств получения, передачи и обработки информации, в том числе с использованием новых информационных технологий, базирующихся на применении современной вычислительной техники.

1.1. Разработка, анализ, статистическое моделирование, программная и аппаратурная реализация высокоэффективных систем пространственно-временной и поляризационной обработки электромагнитных полей в широком диапазоне частот с использованием традиционной гармонической несущей, а также секвентных (сверхширокополосных) или шумовых несущих колебаний.

1.2. Обработка информации в разнесенных радиосистемах.

1.3. Спектрально-пространственно-временная обработка акустической и гидроакустической информации.

1.4. Обработка радио-, оптических изображений и голограмм.

1.5. Обработка сигналов оптического диапазона, в том числе с учетом квантовых эффектов.

1.6. Специальные применения: обработка выходных сигналов датчиков слабых воздействий различной физической природы; обработка выходных сигналов гравитационных антенн и т.п.

1.7. Статистическая оценка показателей надежности.

Обработка информации понимается в широком смысле, включая обнаружение, распознавание, оценку, сов-

местные обнаружение-оценку и т.п. В качестве носителей информации (сигналов) могут выступать процессы, имеющие различную физическую и статистическую природу - квазидетерминированные, случайные, стационарные, локально-нестационарные и др.

Области приложения: активная и пассивная локация, различные системы связи и автоматического управления, анализ экспериментальных данных, обработка результатов социологических исследований и т.п.

2. Исследование среднеширотного слоя "Е спорадический" ионосферы с целью построения статистической модели отраженных сигналов.

Результаты могут быть использованы для более надежного, чем обеспечивает общепринятая методика, прогнозирования состояния ионосферного канала связи, прогнозирования землетрясений и других аномальных природных явлений.

3. Разработка методов и аппаратуры для анализа электромагнитных полей СВЧ диапазона.

На основе исследования взаимодействия электромагнитной волны с различными средами и нелинейными малоразмерными неоднородностями разработаны и аппаратно реализованы устройства, позволяющие производить полное измерение параметров электромагнитных полей различных излучателей, регистрацию радиоизображений и радиоголограмм в реальном масштабе времени, вести бесконтактное измерение влажности и получать интегральные характеристики влажности больших объемов различных веществ с высокой точностью.

Значительная часть разработок кафедры радиофизики защищена более чем 50 авторскими свидетельствами СССР.

Кафедра радиофизики готовит (в том числе - на договорной основе) специалистов в области статистической радиофизики и радиофизической информатики, обладающих навыками работы с новейшими средствами вычислительной техники. Также ведется послевузовская подготовка и переподготовка специалистов для работы с современными средствами вычислительной техники. Осуществляется подготовка научных кадров высшей

квалификации. Имеется специализированный совет Д 063.48.06 по защите докторских диссертаций по специальности 01.04.03 – Радиофизика. Председатель совета – доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой радиофизики Трифонов А. П.

Высокая научная квалификация коллектива кафедры радиофизики подтверждается большим числом научных публикаций – работы [19,45–61,72] по списку литературы в этой книге, а также:

1. Кремер И.Я., Кремер А.И., Петров В.М. и др. Пространственно-временная обработка сигналов / Под ред. И.Я.Кремера – М.: Радио и связь, 1984 – 224с.

2. Трифонов А.П., Ветров С.В. Оценка параметров сигнала в гравитационно-волновом эксперименте // Астрономический журнал, 1990, т.67, С.367–376.

3. Трифонов А.П., Костина З.А., Радченко Т.А. Об одной статистической модели отражений от E_{\ast} // Геомагнетизм и аэрономия, 1984, т.24, N5, С.727–732.

4. Трифонов А.П., Зюльков А.В. Точность оценки параметра статистически-шероховатого объекта при наличии фона // Радиотехника и электроника, 1988, т.33, N 5, С.969–973.

5. Лукин А.Н. Оценка координат точечного источника, расположенного у границы раздела двух сред // Акустический журнал, 1989, N 4, С.696–702.

6. Струков И.Ф., Гридин Ю.И., Лукин А.Н. Устройство регистрации радиоголограмм и радиоизображений в реальном масштабе времени // Приборы и техника эксперимента, 1986, N 4, С.118–120.

7. Потапов А.А., Галкина Т.В., Орлова Т.И., Хлявич Я.Л. Дисперсионный метод обнаружения детерминированных объектов на текстурных оптических и радиолокационных изображениях земной поверхности // Радиотехника и электроника, 1990, т.35, N 11, С.2295–2301.

Более подробную информацию можно получить по адресу и телефонам:

394693, Воронеж, Университетская пл. 1, Воронежский госуниверситет.

Телефоны: (0732) 56-66-08, 56-66-01

Телефаксы: (0732) 55-66-00, 56-65-51.

**Для лиц интересующихся проблемой
ОБНАРУЖЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН**

На кафедре радиофизики Воронежского госуниверситета
выпущен препринт

А. П. Трифонов, С. В. Ветров
**Последовательное обнаружение гравитационных
волн**

В работе синтезированы алгоритмы последовательного обнаружения воздействия гравитационной волны на гравитационную антенну гетеродинного типа. Найден характеристики эффективности этих алгоритмов. Показано, что применение последовательных алгоритмов даёт существенный выигрыш в средней длительности наблюдения по сравнению с однопороговыми (непоследовательными) алгоритмами. Разработан пакет прикладных программ для статистического моделирования синтезированных алгоритмов на ПЭВМ.

Sequential detection gravitational wave. / Trifonov A. P., Vetrov S. V. - Voronezh. 1990. - 30p. (Prepr. / Voronezh University).

The algorithms of the sequential detection of the gravitational wave influence on gravitational antenna of heterojunction type have been obtained. The characteristics of the sequential algorithms efficiency have been found. The packet of the programmes for statistical modelling of the synthesised algorithms on the computer has been created.

Заказы на препринт следует направлять по адресу:
394693, Воронеж, Университетская пл. 1,
Воронежский госуниверситет, кафедра
радиофизики
Контактные телефоны в Воронеже:
(0732) 56-66-01, 56-66-08

Андрей Павлович Трифонов
Евгений Петрович Нечаев
Владимир Иванович Парфенов

ОБНАРУЖЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Формат бумаги 60x84/16. Бумага офсетная.
Офсетная печать. Усл. п. л. 14,3. Тираж 2200.
Заказ 405. Цена 3руб.00коп.
Оригинал-макет книги изготовлен на лазер-
ном принтере LaserJet III товариществом
КРФ. 394693, Воронеж, Университетская пл.1.

Типография издательства ВГУ
394000. Воронеж, ул.Пушкинская, 3.

