

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин

**ПРИЁМ СИГНАЛОВ
С НЕИЗВЕСТНЫМИ МОМЕНТАМИ
ПОЯВЛЕНИЯ И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ**

Монография

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2017

УДК 621.391
ВВК 32.811.7
Т69

Р е ц е н з е н т ы:

доктор физико-математических наук, профессор *О. В. Чернояров*,
доктор физико-математических наук, доцент *Г. К. Усков*

Трифонов А.П.

Т69 Приём сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения : монография / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин ; Воронежский государственный университет. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017. – 202 с.
ISBN 978-5-9273-2553-5

В монографии на основе методов теории статистических решений выполнен синтез и анализ алгоритмов приёма сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения на фоне помех при различном объёме априорной информации о параметрах сигнала. Установлена структура и найдены характеристики максимально правдоподобных и квазиоптимальных алгоритмов обнаружения и оценки параметров квазидетерминированных сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения. Полученные результаты позволяют для конкретного вида сигнала сформулировать рекомендации по выбору необходимого алгоритма приёма в зависимости от требований, предъявляемых к его простоте и эффективности функционирования.

Для научных работников, аспирантов и студентов, сферой научных интересов которых являются разработка и исследование систем передачи информации, дистанционной диагностики, активной и пассивной локации, измерительных систем.

УДК 621.391
ВВК 32.811.7

ISBN 978-5-9273-2553-5

© Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э., 2017
© Воронежский государственный университет, 2017
© Оформление. Издательский дом ВГУ, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Обнаружение сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения	8
1.1. Обнаружение сигнала с неизвестным моментом исчезновения.	8
1.2. Квазиправдоподобное обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения.....	33
1.3. Оптимальное обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения	56
Глава 2. Оценка моментов появления и исчезновения	65
2.1. Оценка момента исчезновения сигнала.....	65
2.2. Квазиправдоподобная оценка моментов появления и исчезновения	79
2.3. Оптимальная оценка моментов появления и исчезновения	88
2.4. Совместная оценка времени прихода и длительности сигнала	102
Глава 3. Оценка параметров сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения	118
3.1. Оценка параметров сигнала с неизвестным моментом исчезновения	118
3.2. Оценка параметров сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения	129
3.3. Оценка амплитуды и наклона вершины импульса	140
Глава 4. Статистическое моделирование алгоритмов приёма сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения	150
4.1. Методы статистического моделирования алгоритмов обработки сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения	150
4.2. Моделирование алгоритмов обнаружения.....	157
4.3. Моделирование алгоритмов оценок	168
Приложение. Исследование распределений величины и положения максимума марковского случайного процесса.....	179
Заключение	187
Библиографический список.....	191

Введение

Большое число прикладных задач радиофизики, радио и гидролокации, навигации, сейсмологии, управления связано с необходимостью приёма сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения. Например, при угловом сканировании области ответственности радиолокационной станцией, при построчном сканировании изображений принимаемый сигнал по смыслу задачи обладает априори неизвестными моментами появления и исчезновения. Проектирование технических средств радиомониторинга [29] требуется осуществлять обработку сигнала заранее неизвестных источников для выделения и установления местоположения радиосредства. В практических приложениях радио и гидролокации, дефектоскопии, сейсмологии оценка моментов появления и исчезновения сигнала позволяют установить наличие и параметры цели, дефекта или центра сейсмической активности [16,40].

Приём сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения является актуальным также для разработчиков систем пожарной и охранной сигнализации. Действительно, в области, контролируемой такими системами, может в неизвестные моменты времени появиться и исчезнуть источник сигнала, своевременное обнаружение которого является целью функционирования данных систем.

В теории связи и автоматического управления широко используются сигналы с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ) [18]. Моменты появления и исчезновения таких сигналов несут полезную информацию, поэтому их обработка связана с необходимостью оценки моментов появления и исчезновения.

При проектировании асинхронных импульсных радиосистем [43] из-за отсутствия постоянной синхронизации в работе передающих и приёмного узлов необходимо специальным образом обозначать начало и конец передачи сигнала, что равносильно приёму специального синхросигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения.

В данной книге задача обработки сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения решается с использованием методов статистической радиофизики. Действительно, большинство современных радиофизических систем работают в помеховой обстановке, требующей применения для синтеза алгоритмов обработки статистических методов. С точки зрения статистической радиофизики, задачу обработки сигнала можно свести к задачам обнаружения сигнала на интервале наблюдения и оценки его неизвестных моментов появления и исчезновения.

Вопросам статистического синтеза и анализа радиофизических систем посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных авторов, в частности [1,2,4,8,15,30,31,32,124,129,130 и др]. Статистические методы обнаружения сигналов и оценки их параметров на фоне помех хорошо разработаны к настоящему времени. Методы синтеза оптимальных, асимптотически оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов обнаружения и оценки, как правило, не вызывают значительных затруднений. Возможности же их анализа существенно зависят от свойств сигнала и шума, и могут быть реализованы далеко не всегда.

Для анализа алгоритмов обработки сигнала с неизвестными параметрами необходимо исследовать статистические характеристики величины и положения наибольшего максимума решающей статистики, которая представляет собой случайное поле. Если выполняются условия регулярности [30], то характеристики оценок параметров сигнала в условиях высокой апостериорной точности можно получить методом малого параметра [29,30]. Он основан на разложении решающей статистики в ряд в окрестности положения максимума её математического ожидания. При нахождении вероятностей ошибок обнаружения используется асимптотически пуассоновский характер распределения потока выходов решающей статистики за высокий уровень [60,110].

Если условия регулярности не выполняются, то решающая статистика недифференцируема ни в каком вероятностном смысле [15,52,60], а число её выходов за некоторый уровень бесконечно [56]. Для анализа алгоритмов обработки разрывных сигналов был разработан метод локально-марковской аппроксимации [60,61,110], позволивший выполнить анализ алгоритмов обнаружения и оценки параметров разрывного сигнала. Суть метода заключается в асимптотическом (при больших отношениях сигнал/шум) представлении недифференцируемого случайного поля в виде суммы марковских или локальномарковских случайных процессов. Распределение положения абсолютного максимума решающей статистики удаётся выразить через нестационарные решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) [54,55,60].

Таким образом, в настоящее время задача статистического анализа алгоритмов приёма сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения при нарушении условий регулярности является актуальной.

Данная работа посвящена вопросам статистического анализа квазидетерминированных сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения. Синтезированы оптимальные и близкие к ним квазиоптимальные (КО) алгоритмы обработки квазидетерминированных сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения. Найдены статистические характеристики синтезированных алгоритмов, анализ которых позволяет най-

ти обоснованный компромис между простотой реализации используемого алгоритма и его эффективностью. Для проверки полученных теоретических соотношений и установления границ их применимости выполнено статистическое моделирование на ЭВМ синтезированных алгоритмов.

Большинство реальных радиофизических информационных систем при отсутствии преднамеренных помех работают в условиях воздействия аддитивного широкополосного шума, который представляет собой результат суммирования большого количества слабых шумовых воздействий. Поэтому в книге использована модель аддитивного гауссовского белого шума (ГБШ). Благодаря этой модели удаётся также свести к минимуму математические трудности, возникающие при синтезе и анализе алгоритмов приёма сигналов.

Результаты могут быть использованы при реализации различных физических экспериментов, связанных с необходимостью регистрации и анализа сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения, в частности на выходе датчиков измерительных систем.

Книга состоит из четырех глав. В первой главе исследуются различные алгоритмы обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестными моментами появления и исчезновения. Синтезированы квазиправдоподобный (КП), максимально правдоподобный (МП) и байесовский алгоритмы обнаружения. Показана возможность представления решающей статистики в виде суммы двух статистически независимых случайных процессов и предложены двухканальные блок-схемы обнаружителей. На основе метода локально-марковской аппроксимации найдены асимптотические характеристики функционирования КП и МП алгоритмов. Получены условия работоспособности квазиправдоподобных алгоритмов обнаружения.

Во второй главе анализируются различные алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения сигнала. В силу возможности представления решающей статистики в виде суммы двух статистически независимых случайных процессов предложены двухканальные блок-схемы измерителей моментов появления и исчезновения. Для КП и МП оценок моментов появления и исчезновения методом локально-марковской аппроксимации найдены асимптотические плотности вероятностей, выражения для смещения и рассеяния.

Синтезированы КП и МП алгоритмы совместного оценивания времени прихода и длительности сигнала произвольной формы. Получены асимптотические характеристики оценок. Исследовано влияние отклонения формы сигнала от прямоугольной на точность оценок времени прихода и длительности.

В третьей главе синтезированы алгоритмы оценок регулярных параметров сигнала при неизвестных моментах его появления и исчезновения.

Методом малого параметра получены асимптотические характеристики оценок регулярных параметров. Методом локально-марковской аппроксимации найдены асимптотические характеристики оценок моментов появления и исчезновения при их оценивании совместно с регулярными параметрами. В качестве примера рассмотрены совместные оценки амплитуды, параметра наклона и моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной.

В четвёртой главе исследуются вопросы моделирования алгоритмов статистического анализа сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения. Рассмотрены методы формирования решающей статистики при моделировании алгоритмов приёма сигнала произвольной формы. В качестве примера рассматривается моделирование МП и байесовских алгоритмов обнаружения и оценки параметров прямоугольного импульса со скошенной вершиной.

В приложении исследованы распределения величины и положения максимума марковского случайного процесса с постоянным коэффициентом диффузии и кусочно-постоянным коэффициентом сноса. С помощью решения уравнения ФПК получены точные выражения для распределений величины и положения наибольшего максимума процесса.

Представленные результаты получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-10022).

Глава 1. Обнаружение сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения

1.1. Обнаружение сигнала с неизвестным моментом исчезновения

Пусть на фоне аддитивного гауссовского белого шума подлежит обнаружению сигнал

$$s(t, \theta_{01}, \theta_{02}) = \begin{cases} f(t), & \theta_{01} \leq t \leq \theta_{02}, \\ 0, & t < \theta_{01}, t > \theta_{02}, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

форма которого описывается непрерывной функцией $f(t)$, а θ_{01} и θ_{02} — соответственно моменты его появления и исчезновения, которые могут принимать значения из априорных интервалов

$$\theta_{01} \in [\theta_{1\min}, \theta_{1\max}], \quad \theta_{02} \in [\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]. \quad (1.1.2)$$

Предположим, что на приёмной стороне неизвестна форма сигнала $f(t)$ и момент исчезновения θ_{02} , а момент появления сигнала θ_{01} считаем априори известным. Сформулируем задачу обнаружения в терминах теории проверки статистических гипотез [4,32,35,60,129]. Подлежит проверке простая гипотеза $H_0: x(t) = n(t)$ — сигнал отсутствует в наблюдаемой реализации $x(t)$ — против сложной альтернативы $H_1: x(t) = n(t) + s(t, \theta_{01}, \theta_{02})$ — сигнал присутствует. Здесь $n(t)$ — реализация гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0 .

Будем также считать, что $f(\theta_{0i}) \neq 0$, $i=1,2$, а интервал наблюдения $[0, T]$ удовлетворяет условию $0 \leq \theta_{1\min} < \theta_{2\max} \leq T$, так что сигнал (1.1.1) полностью размещается в этом интервале.

Для синтеза приёмного устройства при известных моменте исчезновения и форме сигнала можно воспользоваться методом МП [1,4,27,31,35]. Приёмник МП должен формировать случайную величину $L_0 = L(\theta_{02})$, где

$$L(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2} [x(t) - f(t)/2] f(t) dt \quad (1.1.3)$$

— логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) [4,30,60,110].

Решение о наличии или отсутствии сигнала в реализации наблюдаемых данных принимается на основе сравнения величины L_0 с порогом c

$$L_0 \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} c. \quad (1.1.4)$$

Если порог превышен ($L_0 > c$), выносится решение о наличии сигнала, в противном случае — об отсутствии. Значение порога c зависит от выбранного критерия оптимальности. Например, для критерия максимального правдоподобия $c = 0$, для критерия Неймана-Пирсона порог определяется требуемым значением вероятности ложной тревоги.

Вероятности ошибок [35,53,60,108,114,118,122] 1-го рода α_0 (ложной тревоги) и 2-го рода β_0 (пропуска сигнала) алгоритма обнаружения (1.1.4) известны [4,53,60]

$$\alpha_0 = 1 - \Phi(c/z_0 + z_0/2), \quad \beta_0 = \Phi(c/z_0 - z_0/2), \quad (1.1.5)$$

где $z_0^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t) dt$ — отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе приём-

ника, а $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности [19,47].

Один из способов преодоления априорной неопределенности относительно момента исчезновения и формы сигнала (1.1.1) — использование КП алгоритма обнаружения [60,110], согласно которому приёмник формирует и сравнивает с порогом логарифм ФОП (1.1.3) для некоторых ожидаемых момента исчезновения θ_2^* из области (1.1.2) и формы сигнала $g(t)$

$$L^* = L^*(\theta_2^*) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} c, \quad (1.1.6)$$

$$L^*(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2} [x(t) - g(t)/2] g(t) dt. \quad (1.1.7)$$

Блок-схему КП обнаружителя (1.1.6) можно изобразить в виде рис.1.1, где К — ключ, замкнутый на отрезке времени $[\theta_{01}, \theta_2^*]$, И — интегратор, РУ — решающее устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала интегратора в момент времени $t = \theta_2^*$ с порогом c и выносящее решение в пользу одной из гипотез.

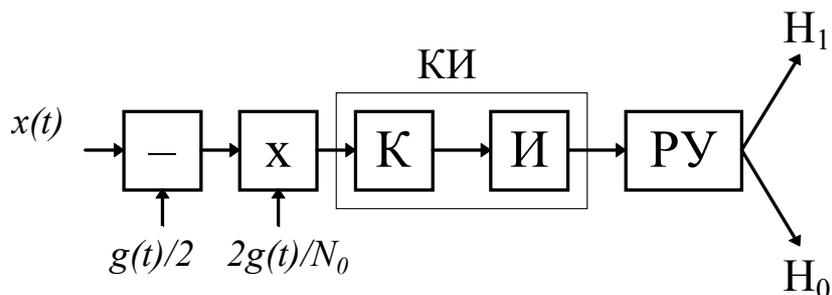


Рис. 1.1

Часть блок-схемы рис. 1.1, обведенную штриховой линией, будем называть коммутируемым интегратором (КИ).

Найдем характеристики КП обнаружителя (1.1.6) — вероятность ложной тревоги

$$\alpha^* = P\{L^* > c | H_0\} \quad (1.1.8)$$

и условную вероятность пропуска сигнала

$$\beta^*(\theta_{02}) = P\{L^* < c | H_1\}. \quad (1.1.9)$$

Для этого рассмотрим статистические характеристики случайной величины L^* . Согласно (1.1.7), она представляет собой результат линейного преобразования гауссовского случайного процесса $x(t)$ [13,52], а, следовательно, сама является гауссовской [5,7,27]. Математические ожидания случайной величины L^* при условии справедливости гипотез H_0 и H_1 равны соответственно

$$s_0 = \langle L^* | H_0 \rangle = -\frac{1}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2^*} g^2(t) dt = -z_g^2/2, \quad (1.1.10)$$

$$s_1 = \langle L^* | H_1 \rangle = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\min(\theta_{02}, \theta_2^*)} g(t)f(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2^*} g^2(t) dt = Z_{fg} - z_g^2/2. \quad (1.1.11)$$

Дисперсия величины L^* одинакова при обеих гипотезах и равна

$$D = \langle (L^* - s_1)^2 \rangle = \langle (L^* - s_0)^2 \rangle = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2^*} g^2(t) dt = z_g^2. \quad (1.1.12)$$

Здесь обозначено

$$z_g^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2^*} g^2(t) dt, \quad Z_{fg} = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\min(\theta_{02}, \theta_2^*)} g(t)f(t) dt. \quad (1.1.13)$$

Поскольку функцию распределения гауссовской случайной величины (1.1.6) можно представить в виде [5,7,27]

$$P\{L^* < x | H_j\} = \Phi\left[\frac{(x - s_j)}{\sqrt{D}}\right], \quad (1.1.14)$$

то для вероятностей ошибок обнаружения запишем

$$\alpha^* = 1 - \Phi\left[\frac{(c - s_0)}{\sqrt{D}}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{c}{z_g} + z_g/2\right), \quad (1.1.15)$$

$$\beta^*(\theta_{02}) = \Phi\left[\frac{(c - s_1)}{\sqrt{D}}\right] = \Phi\left[\frac{(c - Z_{fg} + z_g^2/2)}{z_g}\right]. \quad (1.1.16)$$

Исследуем состоятельность алгоритма обнаружения (1.1.6). Для этого рассмотрим поведение вероятности пропуска сигнала (1.1.16) при фиксированной вероятности ложной тревоги (1.1.15). Выражая из (1.1.15) порог c как функцию вероятности ложной тревоги и подставляя его в формулу (1.1.16), получаем

$$\beta^*(\theta_{02}) = \Phi\left(\text{arc}\Phi(1 - \alpha^*) + (s_0 - s_1)/\sqrt{D}\right) = \Phi\left(\text{arc}\Phi(1 - \alpha^*) - Z_{fg}/z_g\right), \quad (1.1.17)$$

где $\text{arc}\Phi(x)$ — функция, обратная к интегралу вероятности. Согласно (1.1.17), при неизменной вероятности ложной тревоги $\alpha^* = \text{const}$ и снижении уровня шума $N_0 \rightarrow 0$ вероятность пропуска сигнала $\beta^* \rightarrow 0$, если

$$Z_{fg} > 0. \quad (1.1.18)$$

В частном случае, когда форма сигнала априори известна, выражения (1.1.15) и (1.1.16) приобретают вид

$$\alpha^* = 1 - \Phi\left(\left(c + z_0^2/2 + \Delta_2(\theta_2^*)/2\right)/\sqrt{z_0^2 + \Delta_2(\theta_2^*)}\right),$$

$$\beta^*(\theta_{02}) = \Phi\left(\frac{c - z_0^2/2 - \Delta_2[\min(\theta_{02}, \theta_2^*)] + \Delta_2(\theta_2^*)/2}{\sqrt{z_0^2 + \Delta_2(\theta_2^*)}}\right),$$

где обозначено $\Delta_2(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_2}^{\theta_2} f^2(t) dt$ — обобщённая расстройка приём-

ника по моменту исчезновения. Нетрудно убедиться, что алгоритм КП обнаружения сигнала известной формы является состоятельным для любых ожидаемых моментов исчезновения из априорной области (1.1.2).

В качестве примера рассмотрим обнаружение прямоугольного импульса со скошенной вершиной [12]. Выберем априорные области (1.1.2) моментов появления и исчезновения так, чтобы $\theta_{1\min}$ и $\theta_{2\max}$ были фиксированными и обозначим

$$\theta = (\theta_{1\min} + \theta_{2\max})/2 \quad (1.1.19)$$

— середина отрезка $[\theta_{1\min}, \theta_{2\max}]$. Положим, что $\theta_{1\max}$ и $\theta_{2\min}$ располагаются симметрично относительно θ , то есть $\theta_{2\min} - \theta = \theta - \theta_{1\max}$. Тогда длины априорных интервалов моментов появления и исчезновения одинаковы, а их изменение можно производить согласованно изменением $\theta_{1\max}$ и $\theta_{2\min}$ с помощью величины

$$k = T_{\max}/T_{\min}, \quad T_{\max} = \theta_{2\max} - \theta_{1\min}, \quad T_{\min} = \theta_{2\min} - \theta_{1\max}. \quad (1.1.20)$$

Форму сигнала будем описывать функцией

$$f(t) = A_r \left[1 + b_0 (t - \theta) / T_{\max} \right] / \sqrt{1 + b_0^2 / 12}. \quad (1.1.21)$$

Здесь величина A_r характеризует амплитуду сигнала, а b_0 — безразмерный коэффициент наклона скошенной вершины импульса. Множитель $(1 + b_0^2 / 12)^{-1/2}$ в выражении (1.1.21) необходим для того, чтобы энергия

сигнала максимальной длительности $E_{\max} = \int_{\theta_{1\min}}^{\theta_{2\max}} f^2(t) dt = A_r^2 T_{\max}$ не зави-

села от наклона его вершины и тем самым была возможность сравнивать эффективность обнаружения сигналов с одинаковыми энергиями и разным наклоном вершин.

Альтернативой для характеристики наклона вершины импульса b_0 может служить величина

$$\gamma_0 = f(\theta_{1\min}) / f(\theta_{2\max}) = (1 - b_0 / 2) / (1 + b_0 / 2), \quad b_0 = 2(1 - \gamma_0) / (1 + \gamma_0),$$

используя которую можно переписать сигнал (1.1.21) в виде

$$f(t) = A_r \left[1 + 2(1 - \gamma_0)(t - \theta) / (1 + \gamma_0) T_{\max} \right] \sqrt{3 / (\gamma_0^2 + \gamma_0 + 1)} (1 + \gamma_0) / 2. \quad (1.1.22)$$

Будем полагать, что опорный сигнал может отличаться от принимаемого амплитудой и наклоном скошенной вершины, то есть

$$g(t) = A_r^* \left[1 + 2(1 - \gamma)(t - \theta) / (1 + \gamma) T_{\max} \right] \sqrt{3 / (\gamma^2 + \gamma + 1)} (1 + \gamma) / 2. \quad (1.1.23)$$

Подставляя (1.1.22) и (1.1.23) в (1.1.13), полагая, что $\theta_{01} = \theta_{1\min}$, находим

$$\begin{aligned} z_g^2 &= z_r^2 \left[(1 - \gamma)^2 (\lambda_2^{*3} + 1/8) + 1,5(1 - \gamma^2) (\lambda_2^{*2} - 1/4) + 0,75(1 + \gamma)^2 (\lambda_2^* + 1/2) \right] / (1 + \gamma + \gamma^2), \\ Z_{fg} &= z_r^2 d \left\{ (1 - \gamma)(1 - \gamma_0) \left[\min^3(\lambda_2^*, \lambda_{02}) + 1/8 \right] + 1,5(1 - \gamma_0 \gamma) \left[\min^2(\lambda_2^*, \lambda_{02}) - 1/4 \right] + \right. \\ &\quad \left. + 0,75(1 + \gamma)(1 + \gamma_0) \left[\min(\lambda_2^*, \lambda_{02}) + 1/2 \right] \right\} (\gamma^2 + \gamma + 1)^{-1/2} (\gamma_0^2 + \gamma_0 + 1)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

где обозначено $z_r^2 = 2A_r^{*2} T_{\max} / N_0$, $\lambda_{02} = (\theta_{02} - \theta) / T_{\max}$ — нормированное положение момента исчезновения принятого сигнала, $\lambda_2^* = (\theta_2^* - \theta) / T_{\max}$ — нормированное положение момента исчезновения ожидаемого сигнала, $d = A_r / A_r^*$ — параметр, характеризующий отличие амплитуд принятого и опорного сигналов. Если амплитуда и наклон вершины импульса априори известны $\gamma = \gamma_0$, $A_r = A_r^*$, то выражения (1.1.24) приобретают вид

$$z_g^2 = z_r^2 \Delta(\lambda_2^*), \quad Z_{fg} = z_r^2 \Delta[\min(\lambda_{02}, \lambda_2^*)], \quad (1.1.25)$$

$$\Delta(x) = \left[(1-\gamma)^2 (x^3 + 1/8) + 1,5(1-\gamma^2)(x^2 - 1/4) + 0,75(1+\gamma)^2 (x+1/2) \right] / (1+\gamma+\gamma^2).$$

Следовательно, вероятности ошибок обнаружения (1.1.15) и (1.1.16) сигнала (1.1.22) с неизвестным моментом исчезновения перепишем как

$$\alpha^* = 1 - \Phi \left(c / z_r \sqrt{\Delta(\lambda_2^*)} + z_r \sqrt{\Delta(\lambda_2^*)} / 2 \right), \quad (1.1.26)$$

$$\beta^*(\theta_{02}) = \Phi \left(c / z_r \sqrt{\Delta(\lambda_2^*)} - z_r \Delta[\min(\lambda_{02}, \lambda_2^*)] / \sqrt{\Delta(\lambda_2^*)} + z_r \sqrt{\Delta(\lambda_2^*)} / 2 \right). \quad (1.1.27)$$

Если известны априорные вероятности гипотез [4,8,60] $p_i = P(H_i)$, $i = 0,1$, то качество обнаружения можно характеризовать условной средней вероятностью ошибки [4,8,60]

$$P_e^*(\theta_{02}) = p_0 \alpha^* + p_1 \beta^*(\theta_{02}), \quad (1.1.28)$$

а при известной априорной плотности вероятности момента исчезновения $W_{pr}(\theta_2)$ — безусловной средней вероятностью ошибки [4,8,60]

$$P_e^* = p_0 \alpha^* + p_1 \beta^*, \quad (1.1.29)$$

где $\beta^* = \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \beta^*(\theta_2) W_{pr}(\theta_2) d\theta_2$ — безусловная вероятность пропуска сигнала.

Характеристики КП обнаружения импульса со скошенной вершиной при совпадении форм опорного и принятого сигналов и $k = 4$ иллюстрируют рис. 1.2 и 1.3. Сплошные, штриховые и штрих-пунктирные кривые на рис. 1.2 и 1.3 соответствуют положениям ожидаемого момента исчезновения сигнала $\lambda_2^* = 0,25$, $\lambda_2^* = 0,375$ и $\lambda_2^* = 0,125$ соответственно.

На рис. 1.2 представлены зависимости условных вероятностей пропуска (1.1.27) сигнала (1.1.1), (1.1.22) от ОСШ z_r при фиксированных значениях вероятности ложной тревоги (1.1.26) $\alpha^* = 10^{-1}$ (кривые 1), $\alpha^* = 10^{-2}$, (кривые 2) и $\alpha^* = 10^{-3}$ (кривые 3). Наклон вершины импульса был выбран $\gamma_0 = 10$ для рис. 1.2а и $\gamma_0 = 0,1$ для рис. 1.2б, а истинное значение момента исчезновения сигнала — так, чтобы $\lambda_{02} = 0,25$.

На рис. 1.3а и 1.3б показаны соответственно условная (1.1.28) при $c = 0$, $\lambda_{02} = 0,25$ и безусловная (1.1.29) средние вероятности ошибок для $\gamma_0 = 10$ (кривые 1) и $\gamma_0 = 0,1$ (кривые 2) и $p_0 = 0,7$. При построении безусловной средней вероятности ошибки (1.1.29) порог находился как

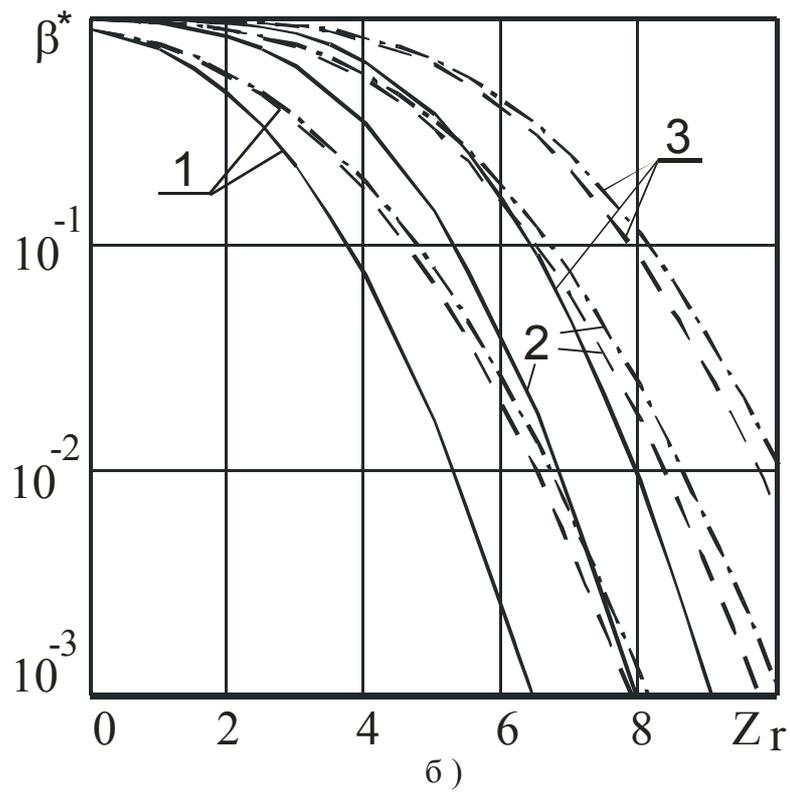
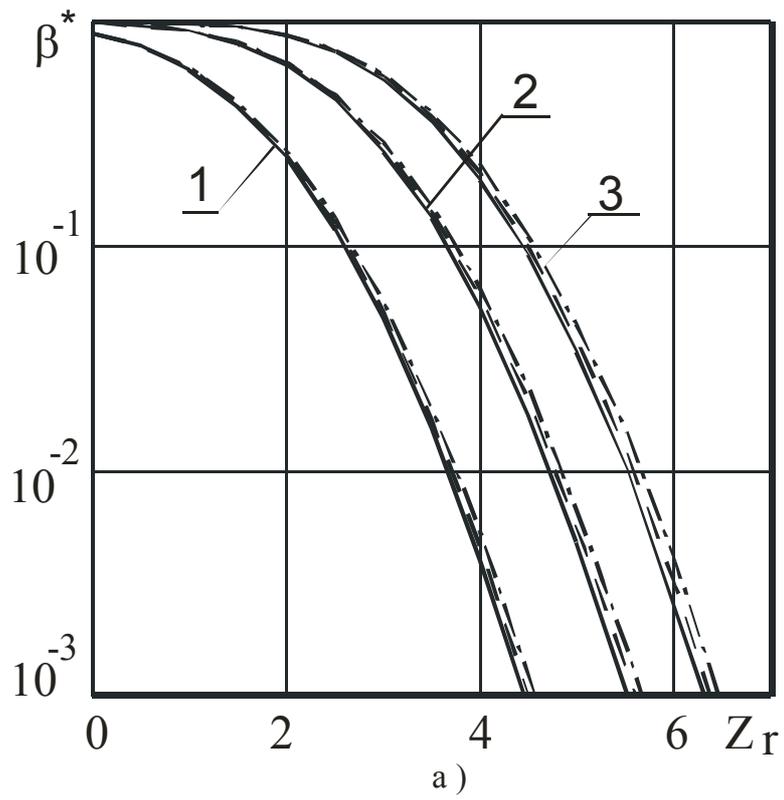
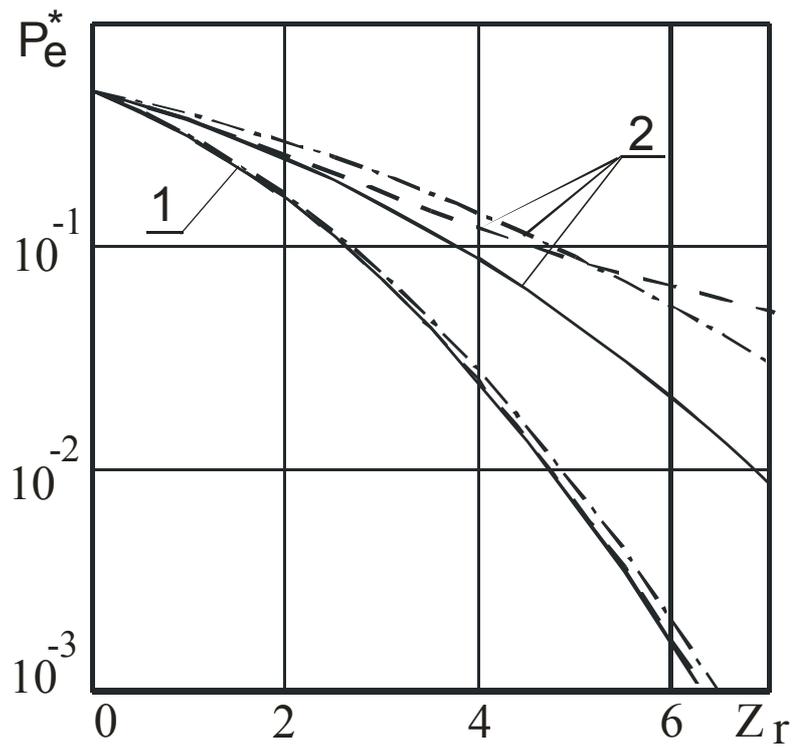
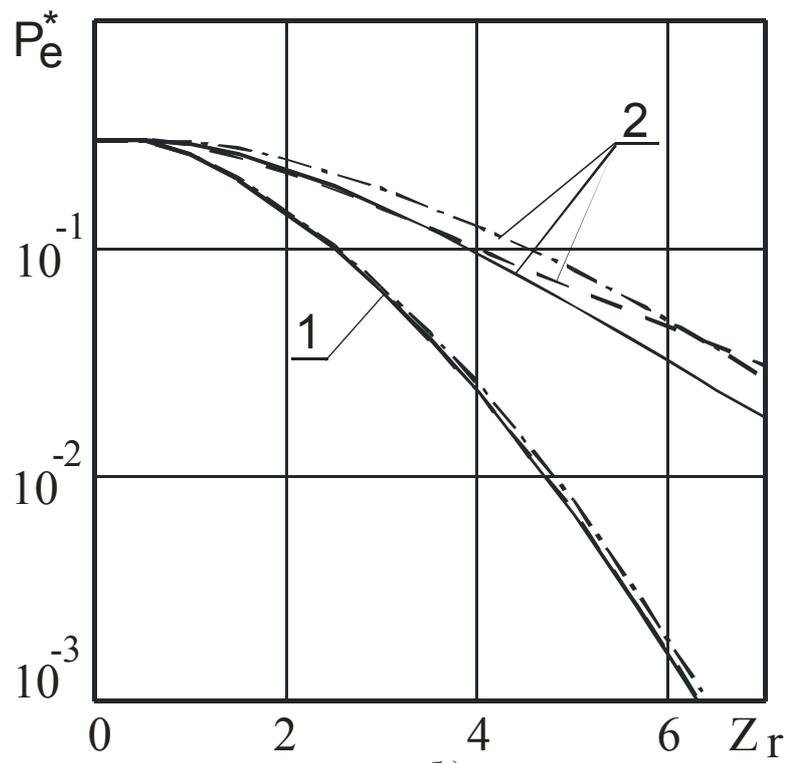


Рис. 1.2. Вероятности пропуска сигнала КП обнаружителем при фиксированной вероятности ложной тревоги.



a)



б)

Рис.1.3 Средние вероятности ошибок КП обнаружения сигнала со скошенной вершиной

$c = \operatorname{arg\,inf} P_e^*$ [60], а априорная плотность вероятности момента исчезновения считалась равномерной на интервале (1.1.2)

$$W_{pr}(\theta_2) = 1/(\theta_{2\max} - \theta_{2\min}). \quad (1.1.30)$$

Как и следовало ожидать, с увеличением параметра наклона скошенной вершины импульса γ вероятности ошибок уменьшаются. Действительно, при любой длительности принятого сигнала, меньшей T_{\max} его энергия растет с увеличением γ .

Прямоугольный импульс с плоской вершиной является частным случаем сигнала (1.1.1), (1.1.22) при $\gamma_0 = 1$. Полагая опорный сигнал (1.1.23) также прямоугольным $\gamma = 1$, запишем, согласно (1.1.15) и (1.1.16), выражения для вероятностей ошибок КП обнаружения прямоугольного импульса

$$\alpha^* = 1 - \Phi\left(c/z_r\sqrt{\tau^*} + z_r\sqrt{\tau^*}/2\right), \quad (1.1.31)$$

$$\beta^*(\theta_{02}) = \Phi\left[\left(c - z_r^2 d \min(\tau_0, \tau^*) + z_r^2 \tau^*/2\right)/z_r\sqrt{\tau^*}\right], \quad \tau^* = \lambda_2^* + 1/2. \quad (1.1.32)$$

Характеристики КП обнаружения прямоугольного импульса при совпадении амплитуд опорного и принятого сигналов $d = 1$ и $k = 4$ приведены на рис. 1.4 и 1.5.

Сплошные, штриховые и штрих-пунктирные кривые на рис.1.4 и 1.5 соответствуют положениям ожидаемого момента исчезновения сигнала, при которых $\lambda_2^* = 0,25$, $\lambda_2^* = 0,375$ и $\lambda_2^* = 0,125$ соответственно.

На рис. 1.4 представлены зависимости условных вероятностей пропуска (1.1.32) от ОСШ z_r при фиксированных значениях вероятности ложной тревоги (1.1.31) $\alpha^* = 10^{-1}$ (кривые 1), $\alpha^* = 10^{-2}$, (кривые 2) и $\alpha^* = 10^{-3}$ (кривые 3), а истинное значение момента исчезновения сигнала выбиралось так, чтобы $\lambda_{02} = 0,25$.

На рис. 1.5а и 1.5б показаны соответственно условная (1.1.28) при $c = 0$, $\lambda_{02} = 0,25$ и безусловная (1.1.29) средние вероятности ошибок, $p_0 = 0,7$. При построении безусловной средней вероятности ошибки (1.1.29) порог находился как $c = \operatorname{arg\,inf} P_e^*$ [60], а априорная плотность вероятности момента исчезновения считалась равномерной (1.1.30).

Как видно из рис. 1.2 – 1.5, вероятности ошибок обнаружения минимальны при совпадающих ожидаемом и истинном моментах исчезновения (сплошные кривые), что соответствует МП обнаружителю (1.1.4). Следовательно, незнание момента исчезновения сигнала приводит к проигрышу КП алгоритма обнаружения (1.1.6) по сравнению с алгоритмом (1.1.4).

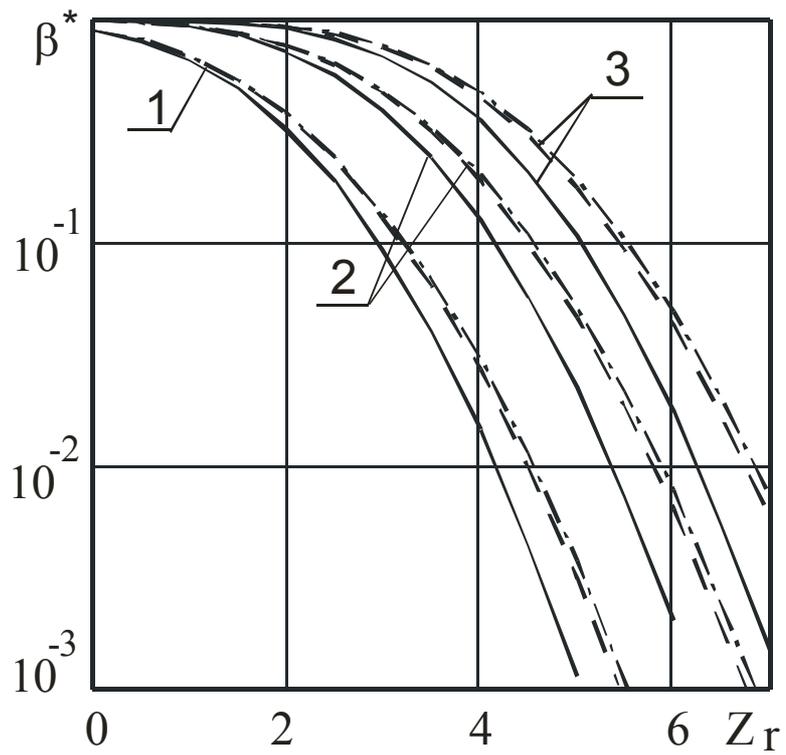
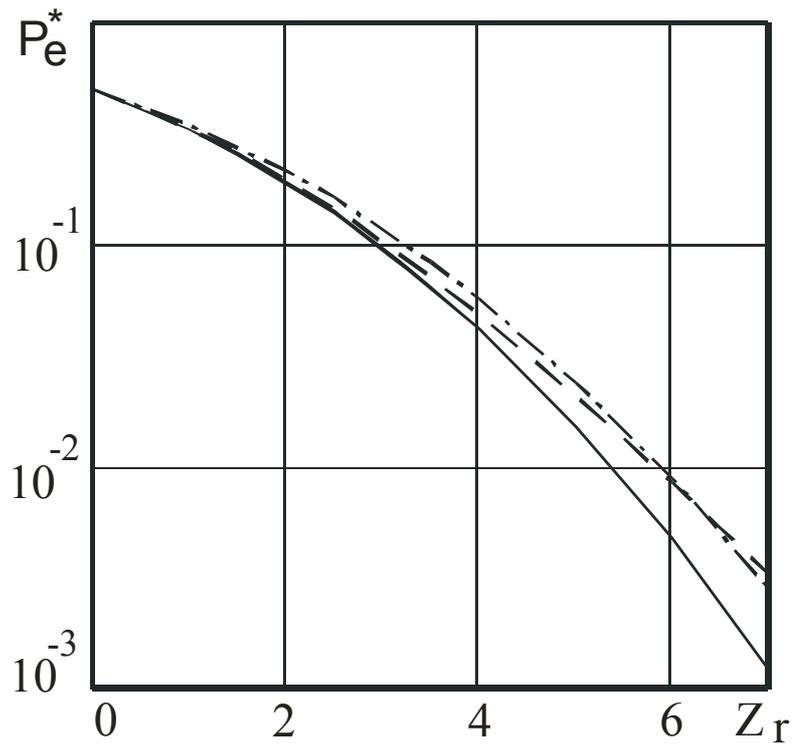
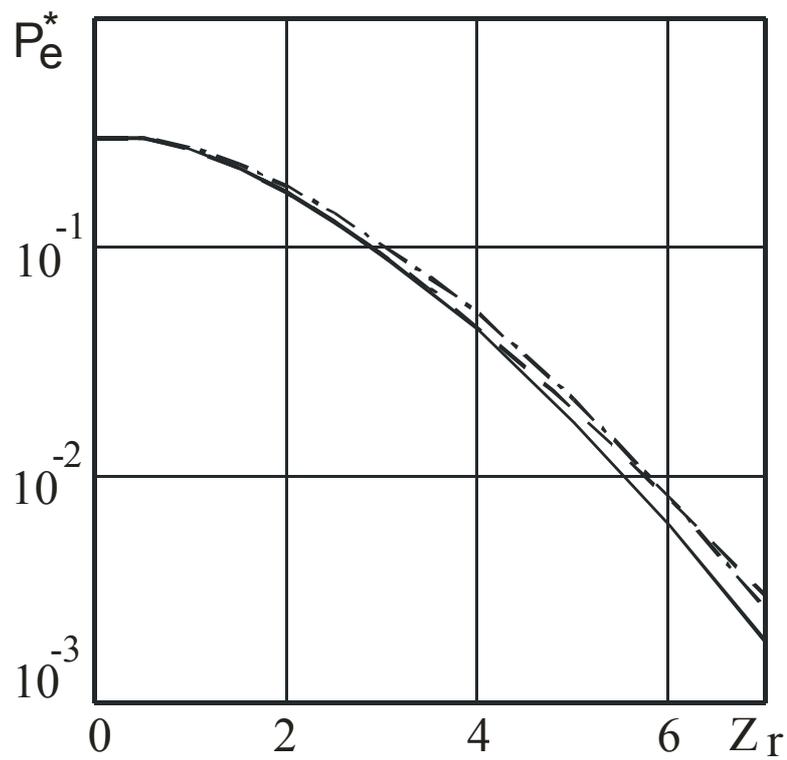


Рис. 1.4. Вероятности пропуска прямоугольного импульса КП обнаружителем при фиксированной вероятности ложной тревоги.



a)



б)

Рис.1.5 Средние вероятности ошибок КП обнаружения прямоугольного импульса

С целью уменьшения проигрыша необходимо использовать другой способ преодоления априорной неопределенности — адаптация приёмного устройства по неизвестному моменту исчезновения [46,60]. Тогда приёмник должен формировать решающую статистику (1.1.7) для всех возможных моментов исчезновения из отрезка (1.1.2) и находить величину ее максимума

$$L_g = \sup L^*(\theta_2). \quad (1.1.33)$$

Решение в пользу одной из гипотез выносится в результате сравнения величины (1.1.33) с порогом

$$L_g \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} c. \quad (1.1.34)$$

Блок-схему КП обнаружителя (1.1.34) можно изобразить в виде рис.1.6.

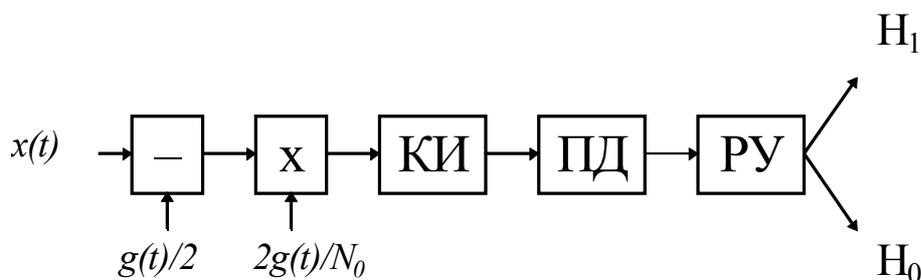


Рис.1.6

Здесь коммутируемый интегратор КИ работает в интервале времени: $[\theta_{01}, \theta_{2\max}]$, ПД — пиковый детектор, определяющий величину максимума сигнала на интервале времени $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$, РУ — решающее устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала пикового детектора в момент времени $t = \theta_{2\max}$ с порогом c и вырабатывающее решение в пользу одной из гипотез.

Перейдем к анализу алгоритма обнаружения (1.1.34). Вероятности ошибок 1-го рода (ложной тревоги) и 2-го рода (пропуска сигнала) определяются выражениями [35,60,110]

$$\alpha_g = P[L_g > c | H_0] = 1 - P_0(c), \quad (1.1.35)$$

$$\beta_g(\theta_{02}) = P[L_g < c | H_1] = P_1(c), \quad (1.1.36)$$

где $P_j(c) = P[\sup L^*(\theta_2) < c | H_j]$, $j = 0, 1$ — функции распределения величины абсолютного максимума случайного процесса $L^*(\theta_2)$, который, со-

гласно (1.1.7), является гауссовским. Для полного статистического описания процесса (1.1.7) находим его математическое ожидание при гипотезе H_1

$$S_1^*(\theta_2) = \langle L^*(\theta_2) | H_1 \rangle = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\min(\theta_2, \theta_{02})} f(t)g(t)dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2} g^2(t)dt, \quad (1.1.37)$$

при гипотезе H_0

$$S_0^*(\theta_2) = \langle L^*(\theta_2) | H_0 \rangle = -\frac{1}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2} g^2(t)dt \quad (1.1.38)$$

и корреляционную функцию

$$B^*(\theta_{12}, \theta_{22}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\min(\theta_{12}, \theta_{22})} g^2(t)dt, \quad (1.1.39)$$

одинаковую при обеих гипотезах. Обозначим

$$\theta_{2m} = \arg \sup S_1^*(\theta_2) \quad (1.1.40)$$

— положение максимума математического ожидания (1.1.37). Тогда для ОСШ на выходе приёмника можем записать

$$z^2 = \frac{S_1^{*2}(\theta_{2m})}{B^*(\theta_{2m}, \theta_{2m})} = \frac{2}{N_0} \left\{ \int_{\theta_{01}}^{\min(\theta_{2m}, \theta_{02})} f(t)g(t)dt - \frac{1}{2} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{2m}} g^2(t)dt \right\}^2 / \int_{\theta_{01}}^{\theta_{2m}} g^2(t)dt. \quad (1.1.41)$$

В дальнейшем будем считать, что ОСШ (1.1.41) велико $z \gg 1$, что в подавляющем большинстве случаев выполняется на практике. Тогда положение максимума случайного процесса $L^*(\theta_2)$ располагается в малой окрестности положения максимума его математического ожидания. Следовательно, при достаточно больших ОСШ (1.1.41) важно исследовать поведение случайного процесса $L^*(\theta_2)$ лишь в окрестности точки θ_{2m} (1.1.40) при гипотезе H_1 и точки

$$\theta_{2\min} = \arg \sup S_0^*(\theta_2) \quad (1.1.42)$$

при гипотезе H_0 . Разложив первое слагаемое в выражении (1.1.37) в ряд Маклорена по $\min(\theta_2 - \theta_{2m}, \theta_{02} - \theta_{2m})$, а второе слагаемое — по $\theta_2 - \theta_{2m}$, получим

$$S_1^*(\theta_2) = Z_0 - z_0^2/2 - \rho_{21}^2(\theta_2 - \theta_{2m})/2T_{\max} + \rho_{21}^2 q(\theta_{2m}) \min(\theta_2 - \theta_{2m}, \theta_{02} - \theta_{2m})/T_{\max}. \quad (1.1.43)$$

Функцию (1.1.38) разлагаем в ряд Маклорена по $\theta_2 - \theta_{2\min}$

$$S_0^*(\theta_2) = -z_{\min}^2/2 - \rho_{20}^2(\theta_2 - \theta_{2\min})/2T_{\max}. \quad (1.1.44)$$

Корреляционную функцию (1.1.39) разлагаем дважды: один раз для гипотезы H_1 по $\min(\theta_{12} - \theta_{2m}, \theta_{22} - \theta_{2m})$, второй раз для гипотезы H_0 : по $\min(\theta_{12} - \theta_{2\min}, \theta_{22} - \theta_{2\min})$

$$B_1^*(\theta_{12}, \theta_{22}) = z_0^2 + \rho_{21}^2 \min(\theta_{12} - \theta_{2m}, \theta_{22} - \theta_{2m})/T_{\max}, \quad (1.1.45)$$

$$B_0^*(\theta_{12}, \theta_{22}) = z_{\min}^2 + \rho_{20}^2 \min(\theta_{12} - \theta_{2\min}, \theta_{22} - \theta_{2\min})/T_{\max}. \quad (1.1.46)$$

В выражениях (1.1.43) – (1.1.46) отброшены все члены разложения выше первой степени и введены обозначения

$$q(t) = f(t)/g(t), \quad \rho_{20}^2 = 2g^2(\theta_{2\min})T_{\max}/N_0, \\ \rho_{21}^2 = 2g^2(\theta_{2m})T_{\max}/N_0, \quad (1.1.47)$$

$$z_0^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{2m}} g^2(t) dt, \quad Z_0 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{2m}} f(t)g(t) dt, \quad z_{\min}^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{2\min}} g^2(t) dt.$$

Будем аппроксимировать случайный процесс $L^*(\theta_2)$ при гипотезе H_j гауссовским случайным процессом $M_j(\theta_2)$ с математическим ожиданием $S_j^*(\theta_2)$ (1.1.43), (1.1.44) корреляционной функцией $B_j^*(\theta_{12}, \theta_{22})$ (1.1.45), (1.1.46), $j = 0, 1$. Очевидно, такой аппроксимацией можно пользоваться при неотрицательных дисперсиях

$$D_1^*(\theta_2) = B_1^*(\theta_2, \theta_2) = z_0^2 + \rho_{21}^2(\theta_2 - \theta_{2m})/T_{\max}, \quad (1.1.48)$$

$$D_0^*(\theta_2) = B_0^*(\theta_2, \theta_2) = z_{\min}^2 + \rho_{20}^2(\theta_2 - \theta_{2\min})/T_{\max} \quad (1.1.49)$$

случайных процессов $M_1(\theta_2)$ и $M_0(\theta_2)$ соответственно. Нетрудно убедиться, что функция (1.1.49) неотрицательна при всех θ_2 , принадлежащих априорной области (1.1.2), а дисперсия $D_1^*(\theta_2)$ отрицательна при $\theta_2 < \theta_{2n} = \theta_{2m} - z_0^2 T_{\max} / \rho_{21}^2$. Если $\theta_{2n} \in [\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$, ограничим априорный интервал возможных значений момента исчезновения отрезком $[\theta_{2n}, \theta_{2\max}]$, на левой границе которого случайный процесс $M_1(\theta_2)$ обладает нулевой дисперсией и равен

$$B_2 = M_1(\theta_{2n}) = S_1^*(\theta_{2n}) = Z_0 - \rho_{21}^2 q(\theta_{2m}) \max\left(z_0^2 / \rho_{21}^2, (\theta_{2m} - \theta_{02}) / T_{\max}\right).$$

Пользуясь выражениями (1.1.44), (1.1.46), а также теоремой Дуба [13,54,55] в изложении [126], можно показать [57], что случайный процесс $M_0(\theta_2)$ является марковским с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = -\rho_{20}^2 / 2T_{\max}, \quad k_2 = \rho_{20}^2 / T_{\max} \quad (1.1.50)$$

соответственно. В приложении найдена функция распределения (П.29) величины максимума марковского случайного процесса $Y(t), t \in [T_1, T_2]$, коэффициенты сноса и диффузии которого имеют вид

$$k_1 = \begin{cases} a_1, & T_1 \leq t \leq t_0, \\ -a_2, & t_0 < t \leq T_2, \end{cases} \quad k_2 = b.$$

Подставляя в формулу (П.29) $a_2 = \rho_{20}^2 / 2T_{\max}$, $b = \rho_{20}^2 / T_{\max}$, $t_0 = T_1 = \theta_{2\min}$, $T_2 = \theta_{2\max}$,

$$W_Y(y, \theta_{2\min}) = \exp \left[- \left(y + z_{\min}^2 / 2 \right)^2 / 2z_{\min}^2 \right] / z_{\min} \sqrt{2\pi} \quad (1.1.51)$$

— плотность вероятности гауссовской случайной величины $M_0(\theta_{2\min})$, среднее значение которой, согласно (1.1.44), равно $-z_{\min}^2 / 2$, а дисперсия z_{\min}^2 , запишем для вероятности $P_0(c)$

$$P_0(c) = \int_0^\infty \int_0^\infty W_Y(c - \xi, T_1) \left\{ \exp \left[- (\xi - \xi_1)^2 / 2b(t_0 - T_1) \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[- (\xi + \xi_1)^2 / 2b(t_0 - T_1) \right] \right\} \varphi \left[2a_2 / \sqrt{b}, T_2 - t_0, 2a_2 \xi_1 / b \right] \times \\ \times \exp \left[a_1 (\xi - \xi_1) / b \right] d\xi d\xi_1 \exp \left[- a_1^2 (t_0 - T_1) / 2b \right] / \sqrt{2\pi b (t_0 - T_1)},$$

где функция $\varphi(y, y_1, y_2)$ определена в (П.28). Поскольку при $t_0 \rightarrow T_1$ выражение $\exp \left[-x^2 / 2b(t_0 - T_1) \right] / \sqrt{2\pi(t_0 - T_1)}$ сходится к дельта-функции $\delta(x)$, то

$$P_0(c) = \int_0^\infty \exp \left[- \left(c - \xi + z_{\min}^2 / 2 \right)^2 / 2z_{\min}^2 \right] \varphi(\rho_{20}, \eta_2, \xi) d\xi / z_{\min} \sqrt{2\pi}, \quad (1.1.52)$$

$$\eta_2 = (\theta_{2\max} - \theta_{2\min}) / T_{\max}.$$

Подставляя функцию (1.1.52) в формулу (1.1.35), получаем асимптотическое выражение для вероятности ложной тревоги КП алгоритма обнаружения, адаптирующегося по моменту исчезновения сигнала

$$\alpha_g = 1 - \int_0^\infty \exp \left[- \left(c - \xi + z_{\min}^2 / 2 \right)^2 / 2z_{\min}^2 \right] \varphi(\rho_{20}, \eta_2, \xi) d\xi / z_{\min} \sqrt{2\pi}. \quad (1.1.53)$$

Вычисление вероятности пропуска сводится, согласно (1.1.36), к нахождению функции распределения $P_1(c)$ величины максимума случайного процесса $M_1(\theta_2)$. Используя его математическое ожидание (1.1.43) и кор-

реляционную функцию (1.1.45), а также теорему Дуба [13,54,55,126] можно показать, что процесс $M_1(\theta_2)$ является марковским с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \frac{\rho_{21}^2}{2T_{\max}} \begin{cases} q_2, & \max(\theta_{2\min}, \theta_{2n}) \leq \theta_2 \leq \theta_{2m}, \\ -1, & \theta_{2m} < \theta_2 \leq \theta_{2\max}, \end{cases} \quad k_2 = \rho_{21}^2 / T_{\max}, \quad (1.1.54)$$

где $q_2 = 2q(\theta_{2m}) - 1$.

Предположим сначала, что $\theta_{2n} < \theta_{2\min}$. Тогда для искомой функции $P_1(c)$ можно воспользоваться выражением (П.29), при $T_1 = \theta_{2\min}$, $t_0 = \theta_{2m}$, $T_2 = \theta_{2\max}$, $a_2 = \rho_{21}^2 / 2T_{\max}$, $a_1 = \rho_{21}^2 q_2 / 2T_{\max}$, $b = \rho_{21}^2 / T_{\max}$, $W_Y(y, \theta_{2\min})$ — плотность вероятности гауссовской случайной величины $M_1(\theta_{2\min})$. Согласно (1.1.43) и (1.1.45), она обладает математическим ожиданием

$$A_2 = S_1^*(\theta_2) = Z_0 - z_0^2 / 2 - \rho_{21}^2 q_2 \mu_2 / 2$$

и дисперсией $\sigma_2^2 = D_1^*(\theta_{2\min}) = z_0^2 - \rho_{21}^2 \mu_2$, $\mu_2 = (\theta_{2m} - \theta_{2\min}) / T_{\max}$. Следовательно, плотность вероятности $W_Y(y, \theta_{2\min})$ равна

$$W_Y(y, \theta_{2\min}) = \exp\left[-(y - A_2)^2 / 2\sigma_2^2\right] / \sigma_2 \sqrt{2\pi}, \quad (1.1.55)$$

а функцию распределения $P_1(c)$ запишем в виде

$$\begin{aligned} P_1(c) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-(\xi - c + A_2)^2 / 2\sigma_2^2 + q_2(\xi - \xi_1) / 2\right] \times \\ &\times \left\{ \exp\left[-(\xi_1 - \xi)^2 / 2\rho_{21}^2 \mu_2\right] - \exp\left[-(\xi_1 + \xi)^2 / 2\rho_{21}^2 \mu_2\right] \right\} \times \\ &\exp\left[-\rho_{21}^2 q_2^2 \mu_2 / 8\right] \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi_1) d\xi d\xi_1 / 2\pi\sigma_2\rho_{21}\sqrt{\mu_2}, \\ &m_2 = (\theta_{2\max} - \theta_{2m}) / T_{\max} = \eta_2 - \mu_2. \end{aligned} \quad (1.1.56)$$

После вычисления интеграла по $d\xi$ [11] подставим (1.1.56) в (1.1.36), получим асимптотическое выражение для вероятности пропуска сигнала

$$\begin{aligned} \beta_g(\theta_{02}) = P_1(c) &= \frac{1}{z_0 \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi) \times \\ &\times \left\{ \Phi\left(\frac{\rho_{21}\sqrt{\mu_2}\left[c - Z_0 + z_0^2(q_2 + 1)/2\right] + \frac{\xi\sigma_2}{z_0\rho_{21}\sqrt{\mu_2}}}{\sigma_2 z_0}\right) \exp\left[-\frac{(c - \xi - Z_0 + z_0^2/2)^2}{2z_0^2}\right] - \right. \end{aligned}$$

$$-\exp\left[-q_2\xi - \frac{(c + \xi - Z_0 + z_0^2/2)^2}{2z_0^2}\right] \Phi\left(\frac{\rho_{21}\sqrt{\mu_2}\left[c - Z_0 + z_0^2(q_2 + 1)/2\right] - \frac{\xi\sigma_2}{z\rho_{21}\sqrt{\mu_2}}}{\sigma_2 z_0}\right) d\xi, \quad \mu_2 < z_0^2/\rho_{21}^2. \quad (1.1.57)$$

При $\theta_{2n} \geq \theta_{2\min}$ марковский случайный процесс $M_1(\theta_2)$ определен на отрезке $[\theta_{2n}, \theta_{2\max}]$ и в точке $\theta_2 = \theta_{2n}$ обладает начальной плотностью вероятности $W_Y(y, \theta_{2n}) = \delta(y - B_2)$, $B_2 = Z_0 - z_0^2(q_2 + 1)/2$. Используя выражение (П.29), а также фильтрующее свойство дельта-функции, записываем распределение величины максимума процесса $M_1(\theta_2)$ и вероятность пропуска (1.1.36)

$$\beta_g(\theta_{02}) = P_1(c) = \int_0^\infty \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi) \left\{ \exp\left[-(c - \xi - Z_0 + z_0^2/2)^2 / 2z_0^2\right] - \exp\left[-q_2\xi - (c + \xi - Z_0 + z_0^2/2)^2 / 2z_0^2\right] \right\} d\xi / z_0 \sqrt{2\pi}, \quad c \geq B_2, \\ \beta_g = P_1(c) = 0, \quad c < B_2, \quad \mu_2 \geq z_0^2/\rho_{21}^2. \quad (1.1.58)$$

При совпадении опорного и принятого сигналов $f(t) = g(t)$ КП алгоритм обнаружения (1.1.34) совпадает с МП алгоритмом [1,4,49,58], согласно которому, приёмник должен формировать логарифм ФОП (1.1.3) для всех возможных значений момента исчезновения (1.1.2) и находить величину его максимума

$$L = \sup L(\theta_2), \quad \theta_2 \in [\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]. \quad (1.1.59)$$

Решение в пользу одной из гипотез выносится в результате сравнения величины (1.1.59) с порогом

$$\begin{matrix} H_1 \\ L > c \\ H_0 \end{matrix} \quad (1.1.60)$$

Вероятность ложной тревоги МП обнаружителя определяется выражением (1.1.53), где

$$z_{\min}^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{2\min}} f^2(t) dt, \quad \rho_{20}^2 = \frac{2T_{\max}}{N_0} f^2(\theta_{2\min}). \quad (1.1.61)$$

Нетрудно убедиться, что при $f(t) = g(t)$ положение максимума математического ожидания (1.1.37) совпадает с истинным значением момента

исчезновения сигнала $\theta_{2m} = \theta_{02}$. Тогда для вероятности пропуска сигнала приёмником МП можно использовать выражения (1.1.57), (1.1.58), где

$$\rho_{21}^2 = 2f^2(\theta_{2m})T_{\max}/N_0, \quad q_2 = 1, \\ z_0^2 = Z_0 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t) dt, \quad A_2 = \sigma_2^2/2 = z_0^2/2 - \rho_{21}^2\mu_2/2, \quad B_2 = 0. \quad (1.1.62)$$

В результате вероятность пропуска (1.1.57), (1.1.58) запишем как

$$\beta(\theta_{02}) = \frac{1}{z_0\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left\{ \Phi\left(\frac{c\rho_{21}\sqrt{\mu_2}}{z_0\sigma_2} + \frac{\xi\sigma_2}{z_0\rho_{21}\sqrt{\mu_2}}\right) \exp\left[-\left(\xi - c + z_0^2/2\right)^2 / 2z_0^2\right] - \right. \\ \left. - \exp\left[-\xi - \left(\xi + c - z_0^2/2\right)^2 / 2z_0^2\right] \Phi\left(\frac{c\rho_{21}\sqrt{\mu_2}}{z_0\sigma_2} - \frac{\xi\sigma_2}{z_0\rho_{21}\sqrt{\mu_2}}\right) \right\} \times \\ \times \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi) d\xi, \quad \mu_2 < z_0^2 / \rho_{21}^2, \quad (1.1.63a)$$

$$\beta(\theta_{02}) = \frac{1}{z_0\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi) \left\{ \exp\left[-\left(\xi - c + z_0^2/2\right)^2 / 2z_0^2\right] - \right. \\ \left. - \exp\left[-\left(\xi + c - z_0^2/2\right)^2 / 2z_0^2\right] \right\} d\xi, \quad c \geq 0, \\ \beta = 0, \quad c < 0.$$

В качестве примера рассмотрим МП обнаружение прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.1), (1.1.22), применительно к которому перепишем выражения (1.1.61) и (1.1.62) в виде

$$\rho_{20}^2 = 3z_r^2 \left[k(1 + \gamma_0) + (1 - \gamma_0) \right]^2 / 4k^2 (1 + \gamma_0 + \gamma_0^2), \\ \rho_{21}^2 = 3z_r^2 \left[(1 + \gamma_0) + 2(1 - \gamma_0)\lambda_{02} \right]^2 / 4(1 + \gamma_0 + \gamma_0^2), \\ z_{\min}^2 = z_r^2 \left[3(1 + \gamma_0)^2 (k + 1) / k + 3(1 + \gamma_0^2)(1 - k^2) / k^2 + \right. \\ \left. + (1 - \gamma_0)^2 (k^3 + 1) / k^3 \right] / 8(1 + \gamma_0 + \gamma_0^2), \quad (1.1.64)$$

$$z_0^2 = Z_0 = z_r^2 \left[(1 - \gamma_0)^2 (\lambda_{02}^3 + 1/8) + 1,5(1 - \gamma_0^2)(\lambda_{02}^2 - 1/4) + 0,75(1 + \gamma_0)^2 (\lambda_{02} + 1/2) \right] \times \\ \times (1 + \gamma_0 + \gamma_0^2)^{-1}.$$

На рис. 1.7 – 1.9 представлены зависимости характеристик обнаружения сигнала (1.1.1), (1.1.22) приёмником МП при $k = 4$, где штриховые кри-

вые соответствуют $\gamma_0 = 0,1$, сплошные — $\gamma_0 = 1$, штрих-пунктирные — $\gamma_0 = 10$.

На рис. 1.7 изображены зависимости условной вероятности пропуска (1.1.63) от ОСШ z_r при фиксированной вероятности ложной тревоги (1.1.53), (1.1.61), $\lambda_{02} = 0,25$. Рисунок под буквой а) соответствует $\alpha = 10^{-1}$, б) — $\alpha = 10^{-2}$, в) — $\alpha = 10^{-3}$.

На рис. 1.8 и 1.9 показаны соответственно условная $P_e(\theta_{02}) = p_0\alpha + p_1\beta(\theta_{02})$ при $\lambda_{02} = 0,25$, $c = 0$ и безусловная $P_e = p_0\alpha + p_1\beta$ при $c = \arg \inf P_e$ средние вероятности ошибок обнаружения, где

$\beta = \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \beta(\theta_2) W_{pr}(\theta_2) d\theta_2$ — безусловная вероятность пропуска сигнала

приёмником МП, $W_{pr}(\theta_2)$ — априорная плотность вероятности (1.1.30).

Как видно из рис. 1.7 – 1.9, МП алгоритм обнаружения (1.1.60) выигрывает по сравнению с КП алгоритмами. Однако вероятности ошибок обнаружения при известном моменте исчезновения (1.1.5) (рис 1.2 – 1.5) меньше аналогичных вероятностей МП обнаружителя. Следовательно, МП алгоритм (1.1.60) проигрывает по сравнению с алгоритмом (1.1.4) обнаружения сигнала (1.1.1) при известном моменте исчезновения.

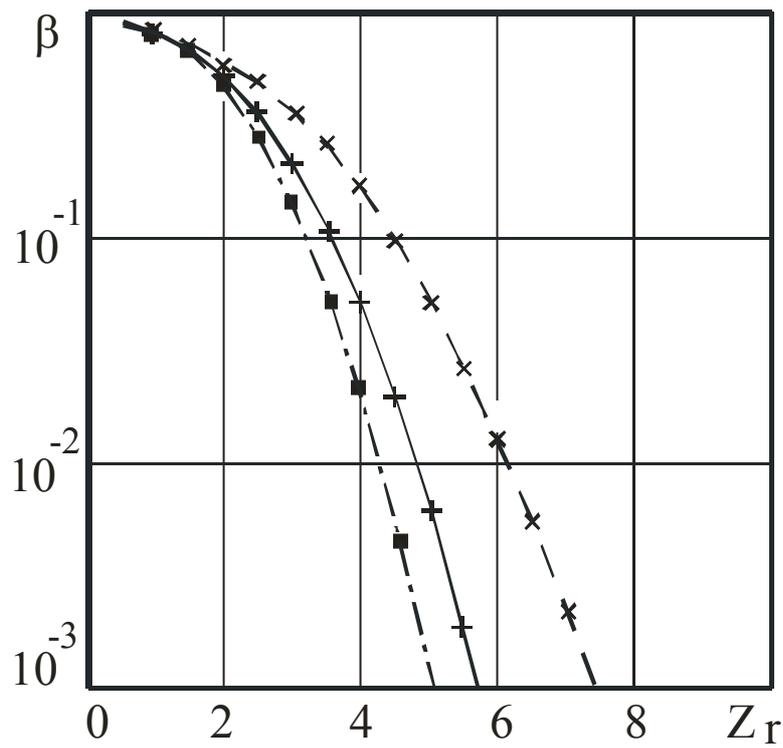
Рассмотрим далее возможность применения классического байесовского подхода [4,8,42,60,110] к обнаружению сигнала (1.1.1), согласно которому приёмник должен формировать случайную величину

$$\Lambda = \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \exp[L(\theta_2)] W_{pr}(\theta_2) d\theta_2. \quad (1.1.65)$$

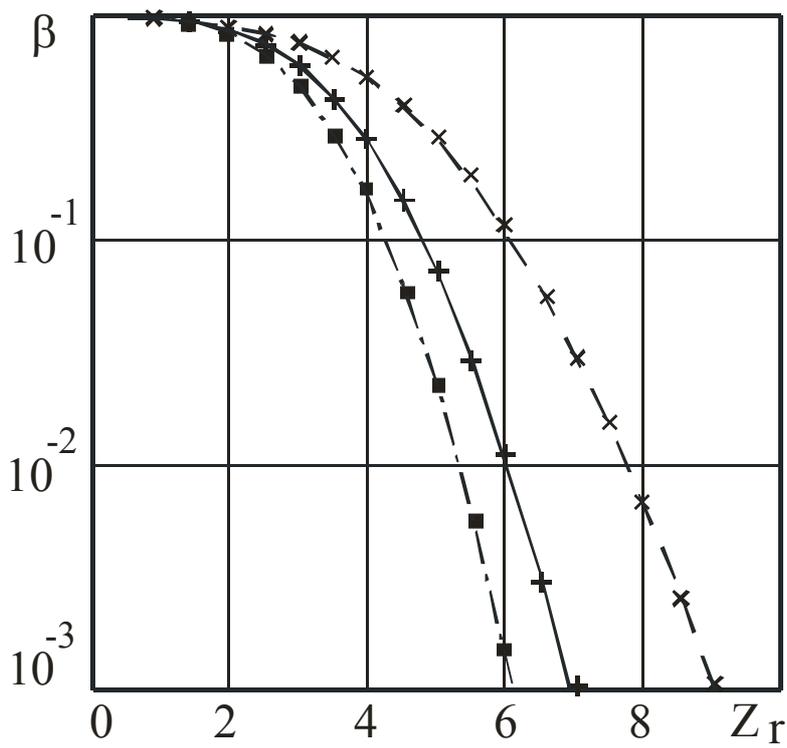
Решение в пользу одной из гипотез выносится в результате сравнения величины (1.1.65) с порогом

$$c = p_0(C_{01} - C_{00})/p_1(C_{10} - C_{11}), \quad (1.1.66)$$

где C_{ij} — матрица потерь [57]. Согласно (1.1.65), блок-схему байесовского обнаружителя сигнала (1.1.1) можно изобразить в виде рис 1.10.

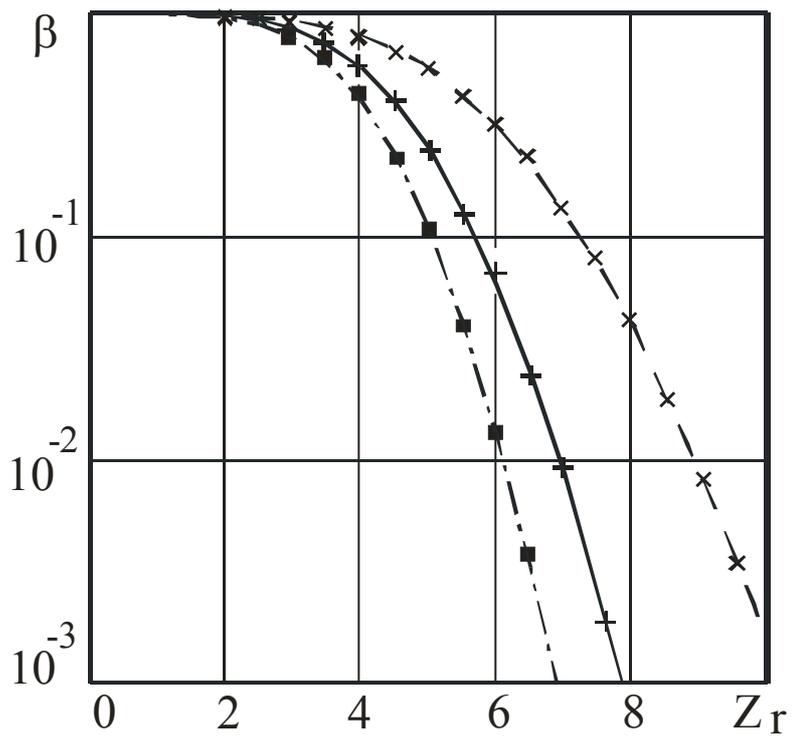


a)



б)

Рис. 1.7. Вероятности пропуска сигнала МП обнаружителем при фиксированной вероятности ложной тревоги.



В)

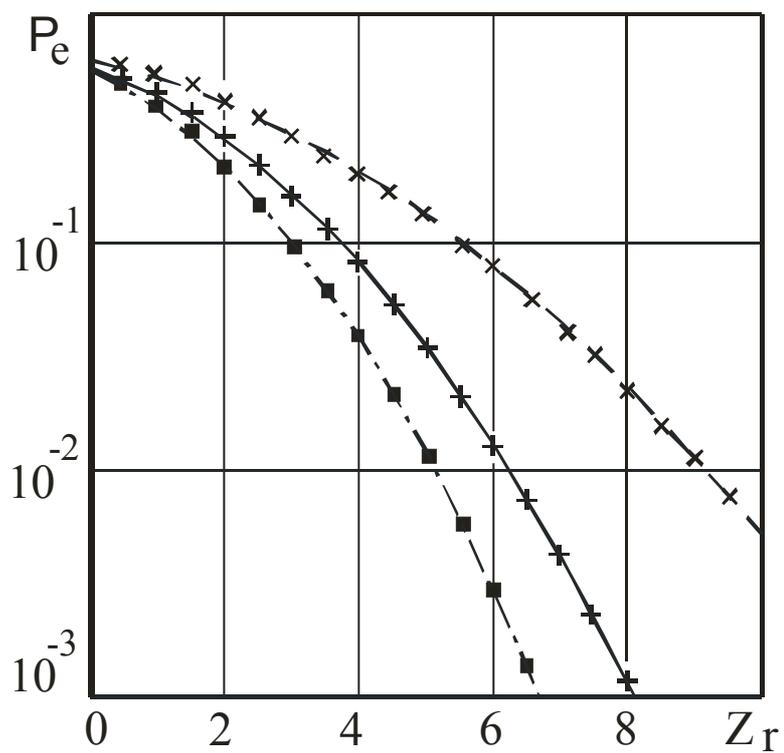


Рис.1.8 Условная средняя вероятность ошибки МП обнаружения

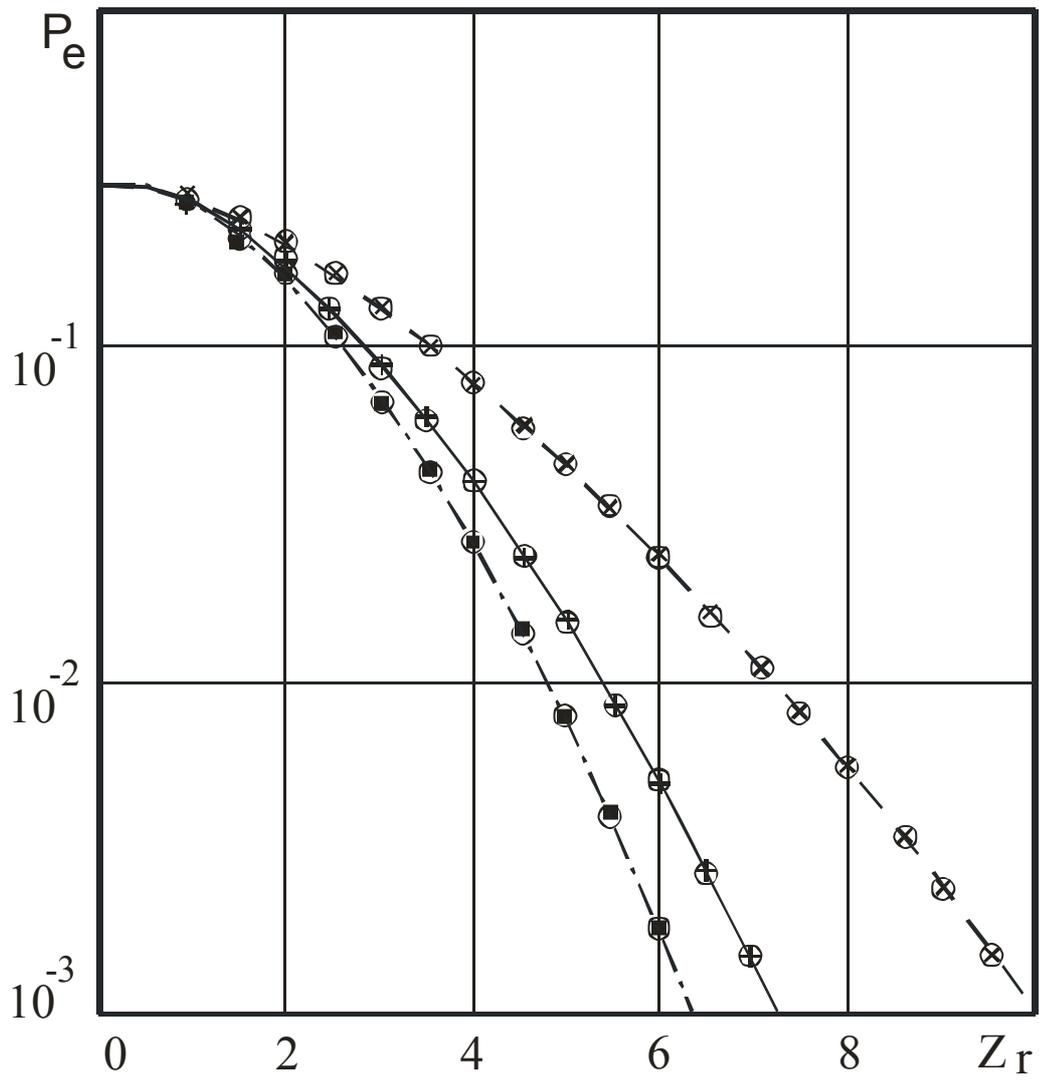


Рис. 1.9. Безусловные средние вероятности ошибки МП обнаружения при оптимизированном пороге.

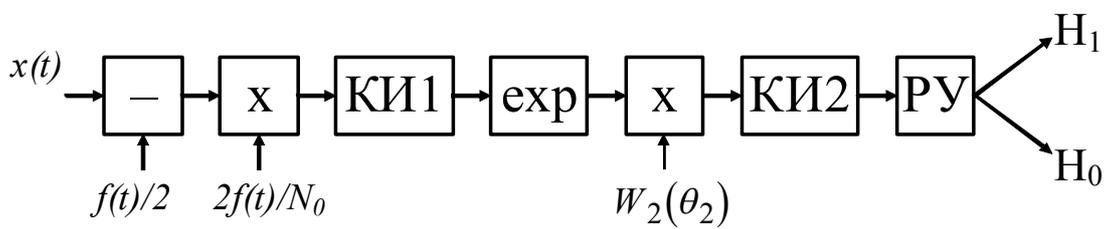


Рис. 1.10.

Здесь коммутируемые интеграторы КИ1 и КИ2 работают в интервалах времени $[\theta_{01}, \theta_{2\max}]$ и $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$ соответственно, \exp — преобразователь с экспоненциальной характеристикой, РУ — решающее устройство, осуществляющее сравнение сформированной на выходе КИ2 величины (1.1.65) с порогом (1.1.66).

К сожалению, найти характеристики работы байесовского алгоритма обнаружения аналитически не удастся. Исследование эффективности байесовского обнаружителя возможно методами статистического моделирования на ЭВМ.

С целью проверки работоспособности синтезированных алгоритмов обнаружения сигнала (1.1.1), а также с целью установления границ применимости асимптотических выражений проводилось статистическое моделирование на ЭВМ МП и байесовского алгоритмов обнаружения. Методика статистического моделирования изложена в главе 4.

На рис. 1.7 – 1.9 показаны результаты моделирования МП алгоритма (1.1.60) приёма сигнала (1.1.1), (1.1.22) крестиками для $\gamma_0 = 0,1$, плюсиками для $\gamma_0 = 1$ и квадратиками для $\gamma_0 = 10$. Как видно, при $z_r \geq 2$ асимптотические характеристики (1.1.53) и (1.1.63) удовлетворительно описывают экспериментальные данные.

На рис. 1.9 кружками изображены результаты моделирования байесовского алгоритма обнаружения (1.1.65). Характеристики байесовского обнаружителя практически совпадают с характеристиками МП обнаружителя с оптимизированным порогом [56]. Это позволяет рекомендовать формулы (1.1.53), (1.1.63) для приближенного расчета характеристик байесовского алгоритма обнаружения.

В работе [76] синтезированы максимально правдоподобный и оптимальный (байесовский) алгоритмы обнаружения сигнала произвольной формы при совпадающих формах принимаемого и опорного сигналов. Применение оригинальной замены переменных дало возможность получить **точные** выражения для характеристик максимально правдоподобных алгоритмов. С помощью моделирования на ЭВМ определены характеристики байесовских алгоритмов. Точные выражения для условных вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала не зависят от формы сигнала. Вероятности ошибок обнаружения полностью определяются минимальным и максимальным значениями отношения сигнал/шум, а также отношением сигнал/шум для принятого сигнала. Была исследована возможность оптимизации порога обнаружения по критерию минимума средней (полной) вероятности ошибки. Для одинакового объёма априорной информации и равномерного распределения случайной длительности сигнала характеристики

байесовского алгоритма и максимально правдоподобного алгоритма обнаружения с оптимизированным порогом практически совпадают.

В практических приложениях, требующих как можно более быстрого принятия решения можно использовать однопороговый последовательный алгоритм обнаружения. В работах [21, 63] выполнен синтез однопорогового последовательного алгоритма обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестной длительностью, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. Приведена блок-схема порогового обнаружителя. Показана возможность представления решающей статистики в виде марковского случайного процесса. Найдены точные выражения для функций распределения времени обнаружения при наличии и отсутствии сигнала в наблюдаемой реализации. Проведено сравнение времени обнаружения порогового алгоритма с временем обнаружения алгоритма максимального правдоподобия. На примере прямоугольного импульса со скошенной вершиной исследовано влияние изменения длительности сигнала, а также длины априорного интервала возможных значений длительности на среднее время обнаружения. Показано, что без снижения эффективности обнаружения пороговый последовательный алгоритм может обеспечить заметный выигрыш во времени анализа.

В ряде практических приложений мощность принимаемого сигнала является неизвестной, что равносильно приёму сигнала с неизвестной амплитудой. В работе [95] исследованы алгоритмы обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестными амплитудой и длительностью. Выполнен синтез квазиправдоподобного алгоритма обнаружения, использующего вместо неизвестных амплитуды и длительности сигнала их ожидаемые значения. Исследована возможность адаптации обнаружителя по неизвестным параметрам. Синтезированы квазиправдоподобные алгоритмы обнаружения с адаптацией по амплитуде и по длительности. Получены статистические характеристики эффективности функционирования синтезированных алгоритмов обнаружения: вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала. Выполнен сравнительный анализ алгоритмов обнаружения. В работе [87] получен МП алгоритм обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестными длительностью и амплитудой. Выполнен анализ синтезированного алгоритма в предположении достаточно больших отношений сигнал/шум. Найдены асимптотически точные выражения для вероятностей ошибок обнаружения. С помощью моделирования на ЭВМ проверена работоспособность синтезированного алгоритма, а также определены границы применимости асимптотических выражений. Априорное незнание амплитуды сигнала произвольной формы с неизвестной длительностью приводит к усложнению структуры обнаружителя. Показано, что форма сигнала может оказывать существенное

влияние на эффективность обнаружения. Проигрыш в эффективности обнаружения вследствие априорного незнания амплитуды может быть значительным и возрастает с уменьшением величины скачка заднего фронта сигнала.

Возможность сокращения времени принятия решения при обнаружении сигнала с неизвестными амплитудой и длительностью исследована в [22]. Выполнен синтез порогового алгоритма обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестными длительностью и амплитудой, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума, а также анализ синтезированного алгоритма в предположении достаточно больших отношений сигнал/шум. Найдены асимптотические выражения для вероятностей ошибок обнаружения. Результаты конкретизированы для прямоугольного импульса со скошенной вершиной. Применение однопорогового последовательного алгоритма обнаружения сигнала с неизвестными амплитудой и длительностью позволяет заметно сократить среднее время принятия решения по сравнению с алгоритмом максимального правдоподобия. При этом пороговый и максимально правдоподобный алгоритмы обеспечивают одинаковое качество обнаружения сигнала с неизвестными амплитудой и длительностью. Среднее время принятия решения однопорогового алгоритма зависит от формы сигнала и величины динамического диапазона изменения неизвестной длительности вследствие нелинейности алгоритма.

Во многих практических приложениях используются сигналы с высокочастотным заполнением (радиосигналы), начальная фаза и амплитуда которых в силу особенностей его распространения являются априори неизвестными. В работе [104] построен МП алгоритм обнаружения узкополосного радиосигнала с произвольной формой огибающей, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. При этом длительность, амплитуда и начальная фаза сигнала заранее неизвестны. Выполнен анализ построенного алгоритма в предположении достаточно больших отношений сигнал/шум. Найдены асимптотические выражения для вероятностей ошибок обнаружения. Посредством компьютерного моделирования проверена работоспособность построенного алгоритма, а также определены границы применимости найденных асимптотических выражений для характеристик алгоритма. Априорное незнание амплитуды и начальной фазы радиосигнала с произвольной формой огибающей и неизвестной длительностью приводит к усложнению структуры обнаружителя. Показано, что форма сигнала может оказывать существенное влияние на эффективность обнаружения. Относительный проигрыш в эффективности обнаружения вследствие априорного незнания амплитуды и начальной

фазы возрастает с уменьшением скачка заднего фронта огибающей радиосигнала.

В работе [102] рассмотрен алгоритм обнаружения радиосигнала произвольной формы с неизвестными амплитудой, начальной фазой и длительностью, который не удовлетворяет условию относительной узкополосности и назван сверхширокополосным квазирадиосигналом (СШП КРС). Под СШП КРС понимался сигнал, структура которого подобна узкополосному радиосигналу, однако условие относительной узкополосности не выполняется. Предложена блок-схема квазиправдоподобного обнаружителя. Выполнен анализ синтезированного алгоритма, найдены вероятности ошибок обнаружения. Показано, что незнание длительности сигнала может приводить к существенному снижению точности обнаружения.

1.2. Квазиправдоподобное обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения

Предположим, что на приёмной стороне неизвестна форма сигнала (1.1.1) $f(t)$, а также моменты его появления θ_{01} и исчезновения θ_{02} , которые могут принимать значения из априорных интервалов (1.1.2).

Следовательно, подлежит проверке простая гипотеза $H_0: x(t) = n(t)$ — сигнал отсутствует в наблюдаемой реализации $x(t)$ — против сложной альтернативы $H_1: x(t) = n(t) + s(t, \theta_{01}, \theta_{02})$ — сигнал присутствует. Здесь $n(t)$ — реализация гауссовского белого шума с односторонней спектральной плотностью N_0 .

Один из способов преодоления априорной неопределенности относительно формы принимаемого сигнала (1.1.1) и моментов появления и исчезновения — использование КП алгоритма обнаружения [60,110], согласно которому приёмник формирует и сравнивает с порогом случайную величину

$$L^* = L^* \left(\theta_1^*, \theta_2^* \right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} c, \quad (1.2.1)$$

$$L^* (\theta_1, \theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [x(t) - g(t)/2] g(t) dt. \quad (1.2.2)$$

Выражение (1.2.2) представляет собой логарифм ФОП для некоторых ожидаемых моментов появления θ_1^* и исчезновения θ_2^* из области (1.1.2) и формы сигнала $g(t)$. Блок-схему КП обнаружителя (1.2.1) можно изобра-

зить в виде рис.1.1, где коммутируемый интегратор КИ работает на отрезке времени $[\theta_1^*, \theta_2^*]$, РУ — решающее устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала интегратора в момент времени $t = \theta_2^*$ с порогом c и выносящее решение в пользу одной из гипотез.

Найдем характеристики КП обнаружителя (1.2.1) — вероятность ложной тревоги

$$\alpha^* = P\{L^* > c | H_0\} \quad (1.2.3)$$

и условную вероятность пропуска сигнала

$$\beta^*(\theta_{01}, \theta_{02}) = P\{L^* < c | H_1\}. \quad (1.2.4)$$

Для этого рассмотрим статистические характеристики случайной величины L^* . Согласно (1.2.2), она представляет собой результат линейного преобразования гауссовского случайного процесса $x(t)$ [6,7,52], а, следовательно, сама является гауссовской [5,7,10,27]. Математические ожидания случайной величины L^* при условии справедливости гипотез H_0 и H_1 равны соответственно

$$s_0 = \langle L^* | H_0 \rangle = -\frac{1}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} g^2(t) dt = -z_g^2/2, \quad (1.2.5)$$

$$s_1 = \langle L^* | H_1 \rangle = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\theta_{01}, \theta_1^*)}^{\min(\theta_{02}, \theta_2^*)} g(t) f(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} g^2(t) dt = Z_{fg} - z_g^2/2. \quad (1.2.6)$$

Дисперсия величины L^* одинакова при обеих гипотезах и равна

$$D = \langle (L^* - s_1)^2 \rangle = \langle (L^* - s_0)^2 \rangle = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} g^2(t) dt = z_g^2. \quad (1.2.7)$$

Здесь обозначено

$$z_g^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} g^2(t) dt, \quad Z_{fg} = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\theta_{01}, \theta_1^*)}^{\min(\theta_{02}, \theta_2^*)} g(t) f(t) dt. \quad (1.2.8)$$

Поскольку функцию распределения гауссовской случайной величины (1.2.1) можно представить в виде (1.1.14), то для вероятностей ошибок обнаружения запишем

$$\alpha^* = 1 - \Phi\left[(c - s_0)/\sqrt{D}\right] = 1 - \Phi\left(c/z_g + z_g/2\right), \quad (1.2.9)$$

$$\beta^*(\theta_{01}, \theta_{02}) = \Phi \left[(c - s_1) / \sqrt{D} \right] = \Phi \left[(c - Z_{fg} + z_g^2/2) / z_g \right]. \quad (1.2.10)$$

Выражая условную вероятность пропуска (1.2.10) аналогично (1.1.17), получаем условие состоятельности КП алгоритма обнаружения (1.2.1) в виде

$$Z_{fg} > 0. \quad (1.2.11)$$

Достаточным для выполнения неравенства (1.2.11) является условие

$$f(t)g(t) > 0, \quad t \in \left[\max(\theta_{01}, \theta_1^*), \min(\theta_{02}, \theta_2^*) \right]. \quad (1.2.12)$$

В частном случае, когда форма сигнала априори известна, выражения (1.2.9) и (1.2.10) приобретают вид

$$\alpha^* = 1 - \Phi \left(\frac{c + z_0^2/2 + \Delta_1(\theta_1^*)/2 + \Delta_2(\theta_2^*)/2}{\sqrt{z_0^2 + \Delta_1(\theta_1^*) + \Delta_2(\theta_2^*)}} \right), \quad (1.2.13)$$

$$\beta^*(\theta_{01}, \theta_{02}) = \Phi \left(\frac{c - z_0^2/2 - \Delta_1 \left[\max(\theta_{01}, \theta_1^*) \right]}{\sqrt{z_0^2 + \Delta_1(\theta_1^*) + \Delta_2(\theta_2^*)}} - \frac{\Delta_2 \left[\min(\theta_{02}, \theta_2^*) \right] + \left[\Delta_1(\theta_1^*) + \Delta_2(\theta_2^*) \right] / 2}{\sqrt{z_0^2 + \Delta_1(\theta_1^*) + \Delta_2(\theta_2^*)}} \right), \quad (1.2.14)$$

где обозначено $\Delta_i(\theta_i) = \frac{(-2)^i}{N_0} \int_{\theta_{0i}}^{\theta_i} f^2(t) dt$, $i=1,2$ — обобщенные расстройки

алгоритма по моментам появления и исчезновения соответственно. Нетрудно убедиться, что алгоритм КП обнаружения сигнала известной формы является состоятельным для любых ожидаемых моментах появления и исчезновения из априорной области (1.1.2).

В качестве примера рассмотрим КП обнаружение прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22) при опорном сигнале (1.1.23). Будем полагать, что опорный сигнал может отличаться от принимаемого амплитудой и наклоном скошенной вершины. Подставляя (1.1.22) и (1.1.23) в (1.2.8), находим

$$z_g^2 = z_r^2 \left[3(1+\gamma)^2 (\lambda_1^* + \lambda_2^*) + 6(1-\gamma^2) (\lambda_2^{*2} - \lambda_1^{*2}) + 4(1-\gamma)^2 (\lambda_2^{*3} + \lambda_1^{*3}) \right] \times \\ \times \left[4(1+\gamma+\gamma^2) \right]^{-1},$$

$$\begin{aligned}
Z_{fg} = z_r^2 d \left\{ 3(1+\gamma_0)(1+\gamma) \left[\min(\lambda_{01}, \lambda_1^*) + \min(\lambda_{02}, \lambda_2^*) \right] + 6(1-\gamma_0) \times \right. \\
\times \left[\min^2(\lambda_{02}, \lambda_2^*) - \min^2(\lambda_{01}, \lambda_1^*) \right] + 4(1+\gamma_0)(1+\gamma) \left[\min^3(\lambda_{01}, \lambda_1^*) + \right. \\
\left. \left. + \min^3(\lambda_{02}, \lambda_2^*) \right] \right\} (\gamma^2 + \gamma + 1)^{-1/2} (\gamma_0^2 + \gamma_0 + 1)^{-1/2} / 4, \quad (1.2.15)
\end{aligned}$$

где обозначено $z_r^2 = 2A_r^{*2} T_{\max} / N_0$, $\lambda_{0i} = (-1)^i (\theta_{0i} - \theta) / T_{\max}$ — нормированные положения моментов появления и исчезновения принятого сигнала, $\lambda_i^* = (-1)^i (\theta_i^* - \theta) / T_{\max}$ — нормированные положения моментов появления и исчезновения ожидаемого сигнала, $i = 1, 2$, $d = A_r / A_r^*$ — параметр, характеризующий отличие амплитуд принятого и опорного сигналов. Если амплитуда и наклон вершины импульса априори известны $\gamma = \gamma_0$, $A_r = A_r^*$, то выражения (1.2.15) приобретают вид

$$z_g^2 = z_r^2 \Delta(\lambda_1^*, \lambda_2^*), \quad Z_{fg} = z_r^2 \Delta \left[\min(\lambda_{01}, \lambda_1^*), \min(\lambda_{02}, \lambda_2^*) \right], \quad (1.2.16)$$

$$\Delta(x, y) = \left[3(1+\gamma)^2 (x+y) + 6(1-\gamma^2)(y^2 - x^2) + 4(1-\gamma)^2 (x^3 + y^3) \right] / 4(1+\gamma+\gamma^2).$$

Следовательно, вероятности ошибок обнаружения (1.2.13) и (1.2.14) сигнала (1.1.22) с неизвестными моментами появления и исчезновения перепишем как

$$\alpha^* = 1 - \Phi \left(c / z_r \sqrt{\Delta(\lambda_1^*, \lambda_2^*)} + z_r \sqrt{\Delta(\lambda_1^*, \lambda_2^*)} / 2 \right), \quad (1.2.17)$$

$$\begin{aligned}
\beta^*(\theta_{01}, \theta_{02}) = \Phi \left(c / z_r \sqrt{\Delta(\lambda_1^*, \lambda_2^*)} - \right. \\
\left. - z_r \left\{ \Delta \left[\min(\lambda_{01}, \lambda_1^*), \min(\lambda_{01}, \lambda_1^*) \right] - \Delta(\lambda_1^*, \lambda_2^*) \right\} / \sqrt{\Delta(\lambda_1^*, \lambda_2^*)} \right). \quad (1.2.18)
\end{aligned}$$

Если известны априорные вероятности гипотез $p_j = P(H_j)$, $j = 0, 1$, то качество обнаружения можно характеризовать условной средней вероятностью ошибки [4, 8, 31, 35, 60, 116]

$$P_e^*(\theta_{01}, \theta_{02}) = p_0 \alpha^* + p_1 \beta^*(\theta_{01}, \theta_{02}), \quad (1.2.19)$$

а при известной априорной плотности вероятности моментов появления и исчезновения $W_{pr}(\theta_1, \theta_2)$ — безусловной средней вероятностью ошибки [4, 8, 31, 60, 116]

$$P_e^* = p_0 \alpha^* + p_1 \beta^*, \quad (1.2.20)$$

где $\beta^* = \int_{\theta_{1\min}}^{\theta_{1\max}} \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \beta^*(\theta_1, \theta_2) W_{pr}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$ — безусловная вероятность

пропуска сигнала.

Характеристики КП обнаружения импульса со скошенной вершиной при совпадении форм опорного и принятого сигналов и $k = 4$ иллюстрируют рис. 1.11 и 1.12.

На рис. 1.11 изображены зависимости условной вероятности пропуска (1.2.18) сигнала (1.1.22), от ОСШ z_r при фиксированных значениях вероятности ложной тревоги (1.2.17) $\alpha^* = 10^{-1}$ (кривые 1), $\alpha^* = 10^{-2}$, (кривые 2) и $\alpha^* = 10^{-3}$ (кривые 3) и различных расстройках моментов появления и исчезновения принятого и опорного сигналов. Предполагалось, что нормированные моменты появления и исчезновения принятого сигнала равны $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 0,25$.

Сплошные, штриховые и штрих-пунктирные кривые на рис.1.11а соответствуют нормированным положениям ожидаемых моментов появления и исчезновения сигнала $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0,25$, $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0,5$ и $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0,125$ соответственно. Показанные на рис. 1.11а зависимости справедливы для наклона скошенной вершины импульса (1.1.22) $\gamma_0 = 10$ и $\gamma_0 = 0,1$.

Для всех кривых рис. 1.11б положение ожидаемого момента появления считалось одинаковым $\lambda_1^* = 0,5$, а положения ожидаемого момента исчезновения — $\lambda_2^* = 0,25$ (сплошные), $\lambda_2^* = 0,5$ (штриховые) и $\lambda_2^* = 0,125$ (штрих-пунктирные кривые). Наклон скошенной вершины импульса был выбран равным $\gamma_0 = 0,1$.

На рис. 1.12а и 1.12б представлены зависимости условной (1.2.19) при $c = 0$ и безусловной (1.2.20) при $c = \arg \inf P_e^*$ средних вероятностей ошибок обнаружения сигнала с наклоном вершины $\gamma_0 = 0,1$ при $p_0 = 0,7$ и различных положениях моментов появления и исчезновения ожидаемого сигнала.

При построении условных вероятностей ошибок на рис.1.12а нормированные моменты появления и исчезновения принятого сигнала считались равными $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 0,25$, а для расчета безусловных характеристик обнаружения априорная плотность вероятности моментов появления и исчезновения — равномерной на области (1.1.2)

$$W_{pr}(\theta_1, \theta_2) = 1/(\theta_{1\max} - \theta_{1\min})(\theta_{2\max} - \theta_{2\min}). \quad (1.2.21)$$

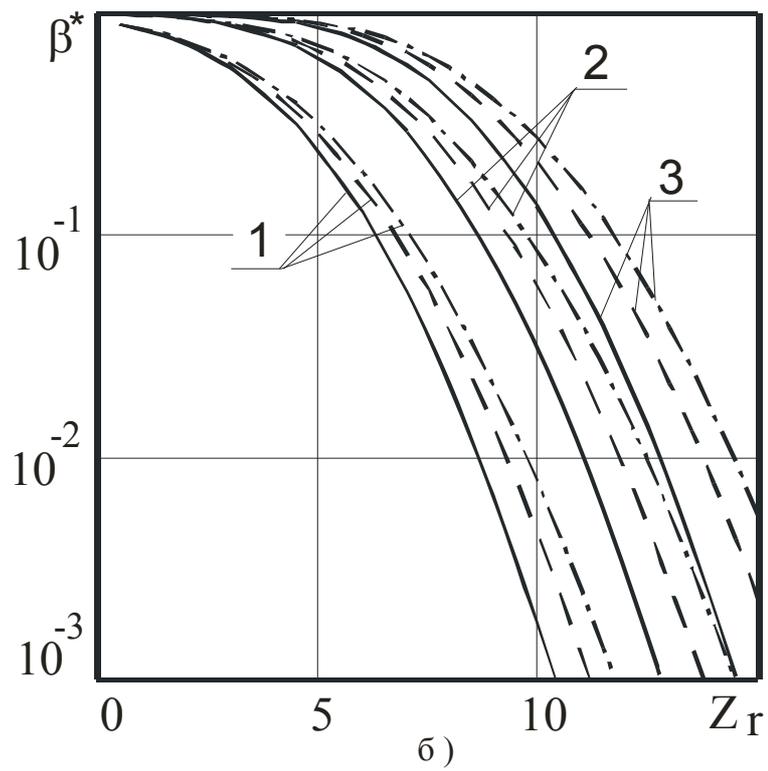
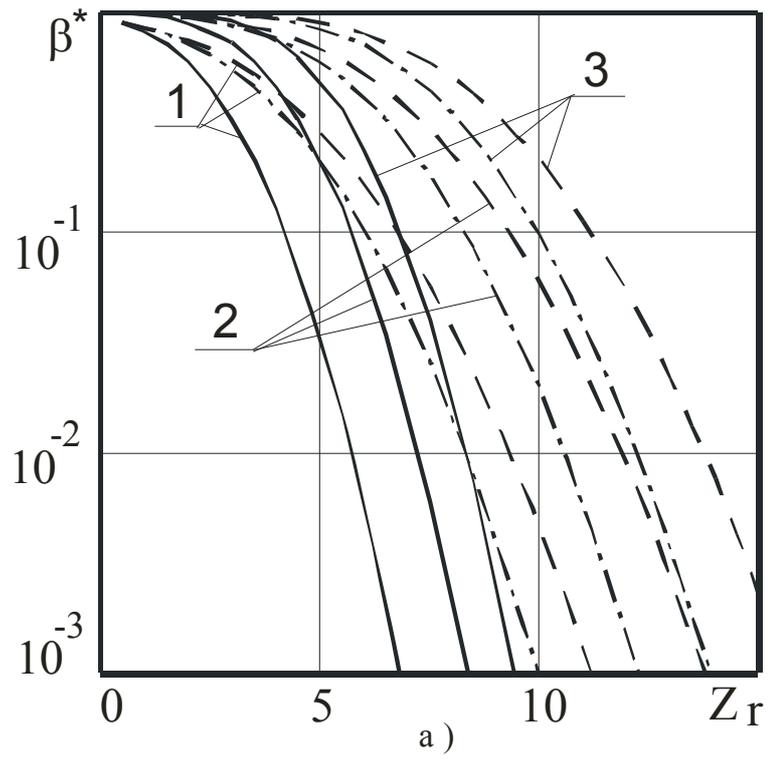


Рис. 1.11 Вероятности пропуска сигнала КП обнаружителем при фиксированной вероятности ложной тревоги

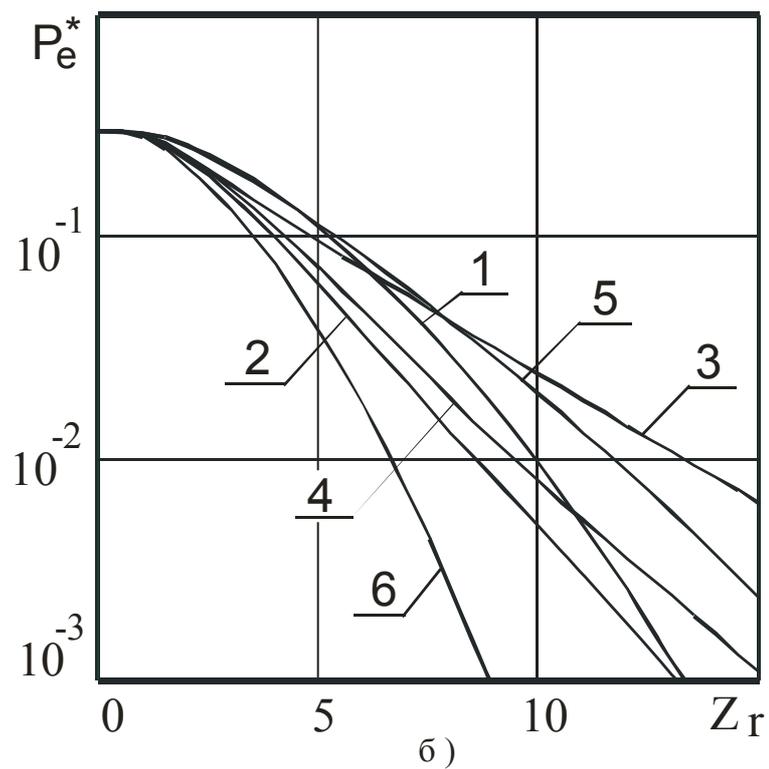
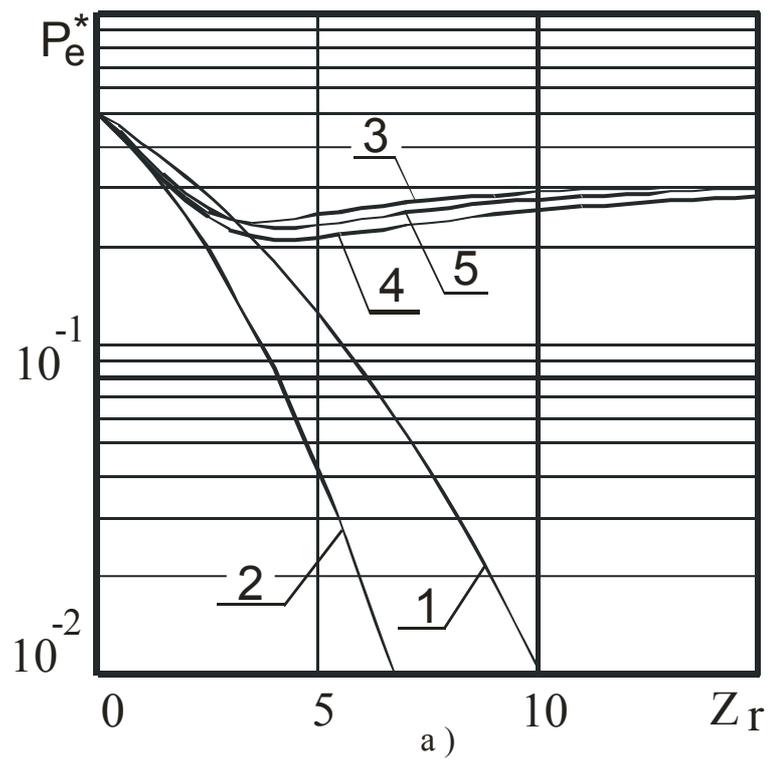


Рис. 1.12 Средние вероятности ошибок обнаружения КП обнаружителем сигнала со скошенной вершиной

Кривые 1, 2, и 3 на рис. 1.12 соответствуют ожидаемым моментам появления и исчезновения $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0,125$, $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0,25$ и $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0,5$. Для построения кривых 4 и 5 момент появления ожидаемого сигнала был выбран равным $\lambda_1^* = 0,5$, а моменты исчезновения — $\lambda_2^* = 0,25$ и $\lambda_2^* = 0,125$ соответственно. Кривая 6 на рис 1.12б иллюстрирует среднюю вероятность ошибки обнаружение сигнала с известными моментами появления и исчезновения. Заметим, что зависимости, показанные на рис. 1.12б справедливы также для КП алгоритма обнаружения сигнала с наклоном вершины $\gamma_0 = 10$.

Прямоугольный импульс с плоской вершиной является частным случаем сигнала (1.1.1), (1.1.22) при $\gamma_0 = 1$. Полагая опорный сигнал (1.1.23) также прямоугольным $\gamma = 1$, запишем, согласно (1.2.9) и (1.2.10), выражения для вероятностей ошибок КП обнаружения прямоугольного импульса

$$\alpha^* = 1 - \Phi \left(\frac{c}{z_r \sqrt{\lambda_1^* + \lambda_2^*}} + z_r \sqrt{\lambda_1^* + \lambda_2^*} / 2 \right), \quad (1.2.22)$$

$$\beta^*(\theta_{02}) = \Phi \left\{ \frac{c - z_r^2 d \left(\min(\lambda_{01}, \lambda_1^*) + \min(\lambda_{02}, \lambda_2^*) \right) + z_r^2 (\lambda_1^* + \lambda_2^*) / 2}{z_r \sqrt{\lambda_1^* + \lambda_2^*}} \right\}, \quad (1.2.23)$$

Характеристики КП обнаружения прямоугольного импульса при совпадении амплитуд опорного и принятого сигналов $d = 1$ и $k = 4$ приведены на рис. 1.13 и 1.14.

На рис. 1.13 изображены зависимости условной вероятности пропуска (1.2.23) от z_r при фиксированных значениях вероятности ложной тревоги (1.2.22) $\alpha^* = 10^{-1}$ (кривые 1), $\alpha^* = 10^{-2}$, (кривые 2) и $\alpha^* = 10^{-3}$ (кривые 3) и различных расстройках моментов появления и исчезновения принятого и опорного сигналов. Предполагалось, что нормированные моменты появления и исчезновения принятого сигнала равны $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 0,25$.

Сплошные кривые на рис.1.13а соответствуют нормированным положениям ожидаемых моментов появления и исчезновения сигнала $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0,25$, штриховые — $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0,5$ и $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0,125$. Для всех кривых рис. 1.13б положение ожидаемого момента появления считалось одинаковым $\lambda_1^* = 0,5$, а положения ожидаемого момента исчезновения — $\lambda_2^* = 0,25$ (сплошные), $\lambda_2^* = 0,5$ (штриховые) и $\lambda_2^* = 0,125$ (штрихпунктирные кривые).

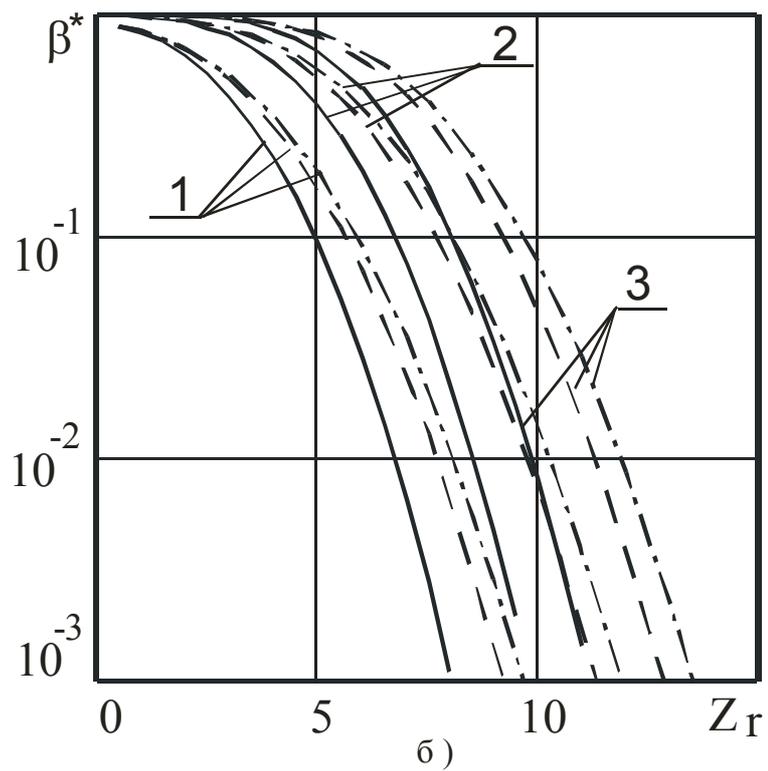
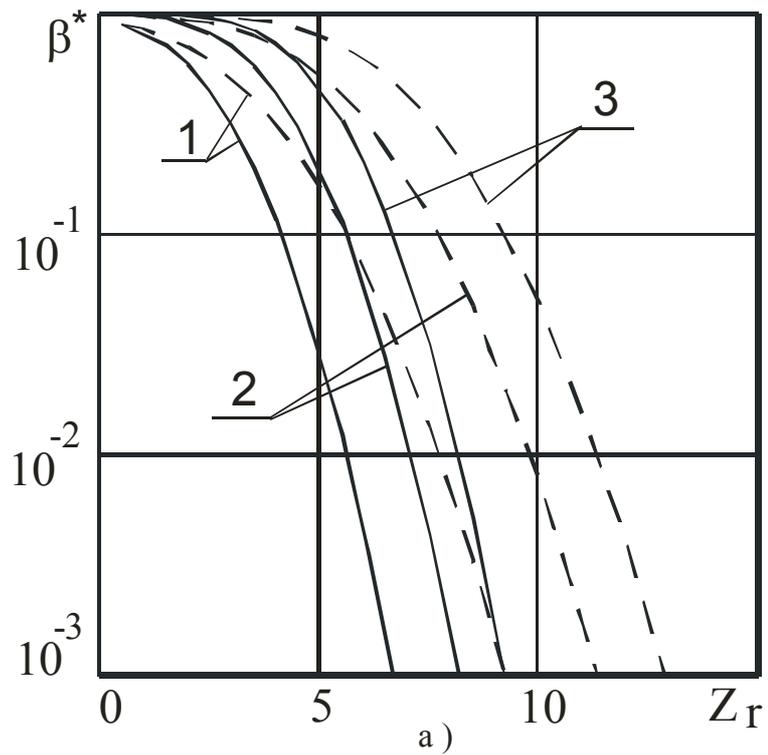


Рис. 1.13 Вероятности пропуска прямоугольного импульса КП обнаружителем при фиксированной вероятности ложной тревоги

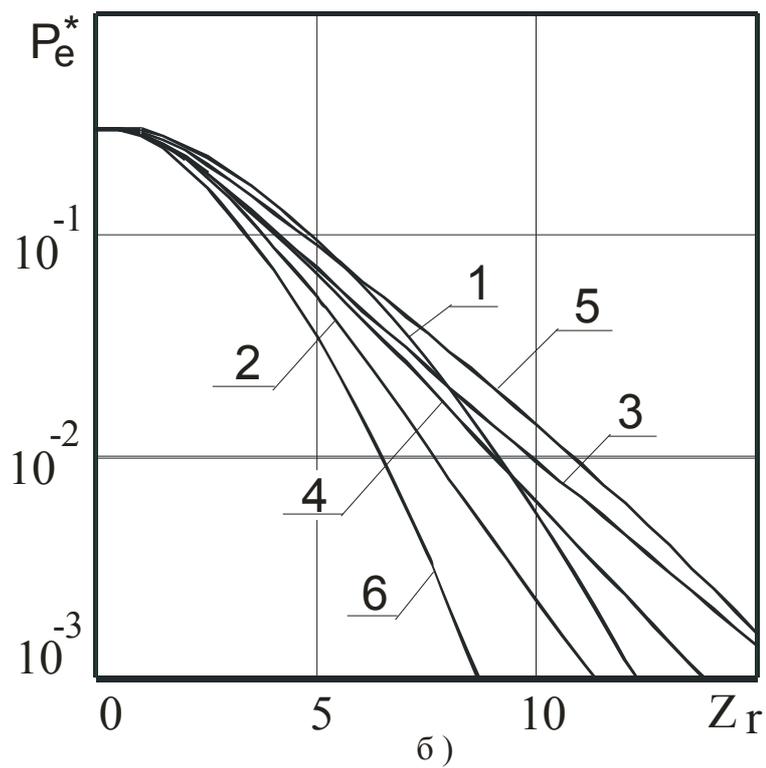
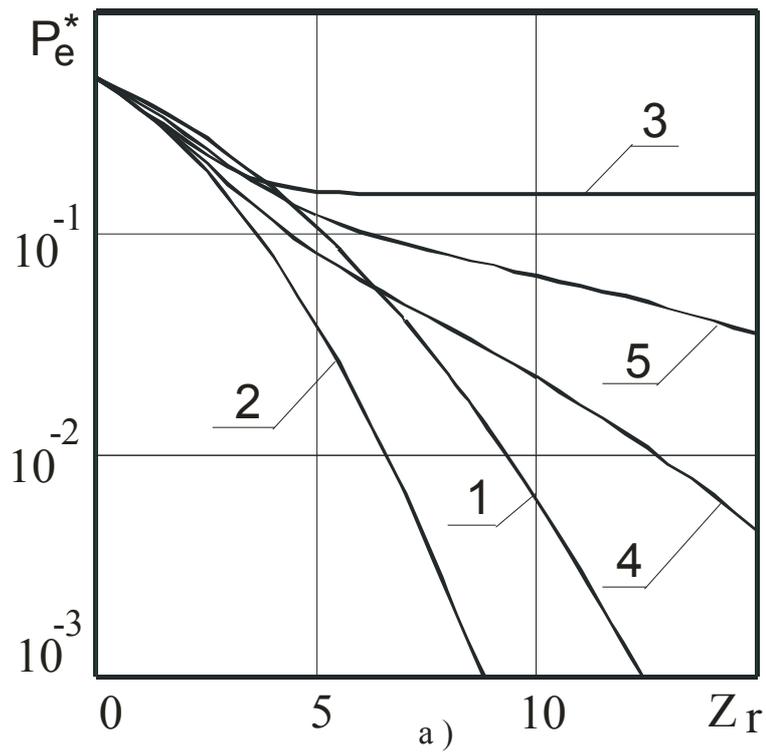


Рис. 1.14 Средние вероятности ошибок обнаружения КП обнаружителем прямоугольного импульса

На рис. 1.14а и 1.14б представлены зависимости условной (1.2.19) при $c = 0$ и безусловной (1.2.20) при $c = \arg \inf P_e^*$ средних вероятностей ошибок обнаружения прямоугольного импульса при $p_0 = 0,7$ и различных положениях моментов появления и исчезновения ожидаемого сигнала.

При построении условных вероятностей ошибок на рис. 1.14а нормированные моменты появления и исчезновения принятого сигнала считались равными $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 0,25$, а для расчета безусловных характеристик обнаружения априорная плотность вероятности моментов появления и исчезновения — равномерной (1.2.21). Нумерация кривых на рис. 1.14 совпадает с нумерацией на рис. 1.12.

Как видно из рис. 1.11 – 1.14, отличие формы сигнала от прямоугольной приводит к ухудшению эффективности обнаружения. Вероятности ошибок минимальны при совпадающих ожидаемом и истинном моментах появления и исчезновения (сплошные кривые), что соответствует МП обнаружителю (1.1.4). Следовательно, незнание моментов появления и исчезновения сигнала приводит к проигрышу КП алгоритма обнаружения (1.2.1) по сравнению с алгоритмом (1.1.4).

С целью уменьшения проигрыша необходимо использовать другой способ преодоления априорной неопределенности — адаптация приёмного устройства по неизвестным моментам появления и исчезновения [60,110]. Тогда приёмник должен формировать решающую статистику (1.2.2) для всех возможных моментов исчезновения из отрезка (1.1.2) и находить величину ее максимума

$$L_g = \sup L^*(\theta_1, \theta_2). \quad (1.2.24)$$

Решение в пользу одной из гипотез выносится в результате сравнения величины (1.2.24) с порогом

$$L_g \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} c. \quad (1.2.25)$$

Необходимость формирования двумерного случайного поля (1.2.2) для всех возможных значений моментов появления и исчезновения (1.1.2) приводит к трудностям в технической реализации приёмника. Частично избежать этих трудностей можно, если аналогично [20,66,68,71], представить поле (1.2.2) в виде суммы $L^*(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2)$ двух случайных процессов, один из которых зависит только от момента появления, второй — от момента исчезновения

$$L_1(\theta_1) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} [x(t) - g(t)/2] g(t) dt, \quad (1.2.26)$$

$$L_2(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} [x(t) - g(t)/2] g(t) dt, \quad (1.2.27)$$

где θ — произвольная точка, принадлежащая интервалу $(\theta_{1\max}, \theta_{2\min})$.

Согласно (1.2.26) и (1.2.27), функции $L_1(\theta_1)$ и $L_2(\theta_2)$ статистически независимы, поскольку представляют собой интегралы от гауссовского белого шума на неперекрывающихся интервалах (θ_1, θ) и (θ, θ_2) . Следовательно, (1.2.24) можем переписать как

$$L_g = L_{1g} + L_{2g}, \quad L_{1g} = \sup L_1(\theta_1), \quad L_{2g} = \sup L_2(\theta_2). \quad (1.2.28)$$

Таким образом, величину абсолютного (наибольшего) максимума случайного поля (1.2.2) можно получить посредством отдельной максимизации функций (1.2.26) и (1.2.27), что существенно облегчает техническую реализацию КП обнаружителя.

Блок-схему квазиправдоподобного обнаружителя (1.2.25) можно изобразить в виде рис. 1.15.

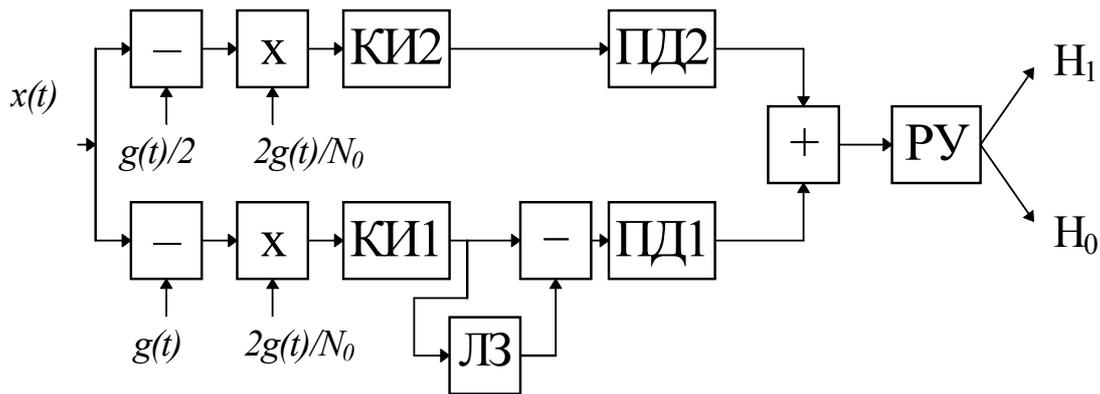


Рис. 1.15

Здесь коммутируемые интеграторы КИ1 и КИ2 работают в интервалах времени: $[\theta_{1\min}, \theta]$ и $[\theta, \theta_{2\max}]$ соответственно. ПД1 и ПД2 — пиковые детекторы, определяющие величину максимума сигнала на интервалах времени $[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$, $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$. ЛЗ — линия задержки, осуществляющая задержку сигнала на время $t = \theta - \theta_{1\min}$. РУ — решающее устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала сумматора с порогом c и вырабатывающее решение в пользу одной из гипотез.

Перейдем к анализу характеристик алгоритма обнаружения (1.2.25). Вероятность ложной тревоги и условная вероятность пропуска сигнала определяются выражениями [35,60,110]

$$\alpha_g = P[\sup L_g > c | H_0] = 1 - P_0(c), \quad (1.2.29)$$

$$\beta_g(\theta_{01}, \theta_{02}) = P[\sup L_g < c | H_1] = P_1(c), \quad (1.2.30)$$

где $P_j(c) = P[\sup L_g < c | H_j]$, $j = 0, 1$ — функции распределения величины абсолютного максимума случайного поля $L^*(\theta_1, \theta_2)$, которое, согласно (1.2.2), является гауссовским. Для полного статистического описания поля (1.2.2) необходимо найти его математическое ожидание при гипотезе H_1

$$S_1^*(\theta_1, \theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\theta_1, \theta_{01})}^{\min(\theta_2, \theta_{02})} f(t)g(t)dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} g^2(t)dt \quad (1.2.31)$$

и при гипотезе H_0

$$S_0^*(\theta_1, \theta_2) = -\frac{1}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} g^2(t)dt \quad (1.2.32)$$

и корреляционную функцию

$$B^*(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}) = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\theta_{21}, \theta_{22})}^{\min(\theta_{12}, \theta_{22})} g^2(t)dt, \quad (1.2.33)$$

одинаковую при обеих гипотезах. Обозначим

$$(\theta_{1m}, \theta_{2m}) = \arg \sup S_1^*(\theta_1, \theta_2) \quad (1.2.34)$$

— положение максимума математического ожидания (1.2.31). Тогда ОСШ на выходе КП приёмника можно записать как

$$z^2 = \frac{S_1^{*2}(\theta_{1m}, \theta_{2m})}{B^*(\theta_{1m}, \theta_{1m}, \theta_{2m}, \theta_{2m})} = \frac{\left\{ \int_{\max(\theta_{1m}, \theta_{01})}^{\min(\theta_{2m}, \theta_{02})} f(t)g(t)dt - \frac{1}{2} \int_{\theta_{1m}}^{\theta_{2m}} g^2(t)dt \right\}^2}{\frac{N_0}{2} \int_{\theta_{1m}}^{\theta_{2m}} g^2(t)dt}. \quad (1.2.35)$$

В дальнейшем будем считать, что ОСШ на выходе приёмника (1.2.35) достаточно велико, что в подавляющем большинстве случаев выполняется на практике. Тогда положение максимума случайного поля $L^*(\theta_1, \theta_2)$ располагается в малой окрестности точки (1.2.34) при гипотезе H_1 и точки

$$(\theta_{1\max}, \theta_{2\min}) = \arg \sup S_0^*(\theta_1, \theta_2) \quad (1.2.36)$$

при гипотезе H_0 .

Разложим первое слагаемое в (1.2.31) в ряд Маклорена по $\max(\theta_1 - \theta_{1m}, \theta_{01} - \theta_{1m})$ и $\min(\theta_2 - \theta_{2m}, \theta_{02} - \theta_{2m})$, а второе слагаемое — по $\theta_1 - \theta_{1m}$ и $\theta_2 - \theta_{2m}$, получим

$$S_1^*(\theta_1, \theta_2) = Z_0 - z_0^2/2 + \rho_{11}^2(\theta_1 - \theta_{1m})/2T_{\max} - \rho_{21}^2(\theta_2 - \theta_{2m})/2T_{\max} - \\ - \rho_{11}^2 q(\theta_{1m}) \max(\theta_1 - \theta_{1m}, \theta_{01} - \theta_{1m})/T_{\max} + \rho_{21}^2 q(\theta_{2m}) \min(\theta_2 - \theta_{2m}, \theta_{02} - \theta_{2m})/T_{\max}. \quad (1.2.37)$$

Функцию (1.2.32) разлагаем в ряд Маклорена по $\theta_2 - \theta_{2\min}$ и $\theta_1 - \theta_{1\max}$:

$$S_0^*(\theta_1, \theta_2) = -z_{\min}^2/2 + \rho_{10}^2(\theta_1 - \theta_{1\max})/2T_{\max} - \rho_{20}^2(\theta_2 - \theta_{2\min})/2T_{\max}. \quad (1.2.38)$$

Корреляционную функцию (1.2.33) разлагаем в ряд Маклорена дважды: один раз для гипотезы H_1 по $\max(\theta_{11} - \theta_{1m}, \theta_{21} - \theta_{1m})$ и $\min(\theta_{12} - \theta_{2m}, \theta_{22} - \theta_{2m})$, второй раз для гипотезы H_0 : по $\max(\theta_{11} - \theta_{1\max}, \theta_{21} - \theta_{1\max})$ и $\min(\theta_{12} - \theta_{2\min}, \theta_{22} - \theta_{2\min})$, получаем

$$B_1^*(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}) = z_0^2 - \rho_{11}^2 \max(\theta_{11} - \theta_{1m}, \theta_{21} - \theta_{1m})/T_{\max} + \\ + \rho_{21}^2 \max(\theta_{12} - \theta_{2m}, \theta_{22} - \theta_{2m})/T_{\max}, \quad (1.2.39)$$

$$B_0^*(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}) = z_{\min}^2 - \rho_{10}^2 \max(\theta_{11} - \theta_{1\max}, \theta_{21} - \theta_{1\max})/T_{\max} + \\ + \rho_{20}^2 \max(\theta_{12} - \theta_{2\min}, \theta_{22} - \theta_{2\min})/T_{\max}. \quad (1.2.40)$$

В выражениях (1.2.37) – (1.2.40) отброшены все члены разложения выше первой степени и введены обозначения

$$q(t) = f(t)/g(t), \quad \rho_{10}^2 = 2g^2(\theta_{1\max})T_{\max}/N_0, \quad \rho_{20}^2 = 2g^2(\theta_{2\min})T_{\max}/N_0, \\ \rho_{11}^2 = 2g^2(\theta_{1m})T_{\max}/N_0, \quad \rho_{21}^2 = 2g^2(\theta_{2m})T_{\max}/N_0, \quad (1.2.41)$$

$$z_0^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{1m}}^{\theta_{2m}} g^2(t) dt, \quad Z_0 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{1m}}^{\theta_{2m}} f(t)g(t) dt, \quad z_{\min}^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{1\max}}^{\theta_{2\min}} g^2(t) dt.$$

Согласно (1.2.37) – (1.2.40) математические ожидания и корреляционные функции случайного поля (1.2.2) можно представить в виде сумм

$$S_j^*(\theta_1, \theta_2) = S_{1j}(\theta_1) + S_{2j}(\theta_2),$$

$$B_j^*(\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{12}, \theta_{22}) = B_{1j}(\theta_{11}, \theta_{21}) + B_{2j}(\theta_{12}, \theta_{22}), \quad (1.2.42)$$

где

$$S_{10}(\theta_1) = -z_{\min}^2/4 + \rho_{10}^2(\theta_1 - \theta_{1\max})/2T_{\max}, \quad (1.2.43)$$

$$S_{20}(\theta_2) = -z_{\min}^2/4 - \rho_{20}^2(\theta_2 - \theta_{2\min})/2T_{\max}, \quad (1.2.44)$$

$$B_{10}(\theta_{11}, \theta_{21}) = z_{\min}^2/2 - \rho_{10}^2 \max(\theta_{11} - \theta_{1\max}; \theta_{21} - \theta_{1\max})/T_{\max}, \quad (1.2.45)$$

$$B_{20}(\theta_{12}, \theta_{22}) = z_{\min}^2/2 + \rho_{20}^2 \min(\theta_{12} - \theta_{2\min}; \theta_{22} - \theta_{2\min})/T_{\max}, \quad (1.2.46)$$

$$S_{11}(\theta_1) = Z_0/2 - z_0^2/4 - q(\theta_{1m})\rho_{11}^2 \max(\theta_1 - \theta_{1m}, \theta_{01} - \theta_{1m})/T_{\max} + \rho_{11}^2(\theta_1 - \theta_{1m})/2T_{\max}, \quad (1.2.47)$$

$$S_{21}(\theta_2) = Z_0/2 - z_0^2/4 + q(\theta_{2m})\rho_{21}^2 \min(\theta_2 - \theta_{2m}, \theta_{02} - \theta_{2m})/T_{\max} - \rho_{21}^2(\theta_2 - \theta_{2m})/2T_{\max}, \quad (1.2.48)$$

$$B_{11}(\theta_{11}, \theta_{21}) = z_0^2/2 - \rho_{11}^2 \max(\theta_{11} - \theta_{1m}, \theta_{21} - \theta_{1m})/T_{\max}, \quad (1.2.49)$$

$$B_{21}(\theta_{12}, \theta_{22}) = z_0^2/2 + \rho_{21}^2 \min(\theta_{12} - \theta_{2m}, \theta_{22} - \theta_{2m})/T_{\max}. \quad (1.2.50)$$

Введем в рассмотрение гауссовские случайные процессы $M_{ij}(\theta_i)$, обладающие математическими ожиданиями $S_{ij}(\theta_i)$ и корреляционными функциями $B_{ij}(\theta_{1i}, \theta_{2i})$, $i=1,2$, $j=0,1$. Поскольку случайное поле (1.2.2) полностью описывается своими математическим ожиданием и корреляционной функцией, то, согласно (1.2.42), решающую статистику (1.2.2) при гипотезе H_0 в окрестности точки (1.2.36) можно аппроксимировать суммой

$$L^*(\theta_1, \theta_2) = L_0(\theta_1, \theta_2) = M_{10}(\theta_1) + M_{20}(\theta_2), \quad (1.2.51)$$

а при гипотезе H_1 в окрестности точки (1.2.34)

$$L^*(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1, \theta_2) = M_{11}(\theta_1) + M_{21}(\theta_2). \quad (1.2.52)$$

Точность такой аппроксимации возрастает с увеличением ОСШ (1.2.35). Так как положения максимума случайного поля (1.2.2) располагаются в окрестностях точек (1.2.34) и (1.2.36), то точность аппроксимации решающей статистики вдали от этих точек не играет существенной роли. Будем пользоваться приближенными выражениями (1.2.51) и (1.2.52) на всем априорном интервале (1.1.2) возможных значений моментов появления и исчезновения. Очевидно, применять аппроксимации (1.2.51), (1.2.52) можно при неотрицательных дисперсиях

$$D_{10}(\theta_1) = B_{10}(\theta_1, \theta_1) = z_{\min}^2/2 - \rho_{10}^2(\theta_1 - \theta_{1\max})/T_{\max}, \quad (1.2.53)$$

$$D_{20}(\theta_2) = B_{20}(\theta_2, \theta_2) = z_{\min}^2/2 + \rho_{20}^2(\theta_2 - \theta_{2\min})/T_{\max}, \quad (1.2.54)$$

$$D_{11}(\theta_1) = B_{11}(\theta_1, \theta_1) = z_0^2/2 - \rho_{11}^2(\theta_1 - \theta_{1m})/T_{\max}, \quad (1.2.55)$$

$$D_{21}(\theta_2) = B_{21}(\theta_2, \theta_2) = z_0^2/2 + \rho_{21}^2(\theta_2 - \theta_{2m})/T_{\max} \quad (1.2.56)$$

случайных процессов $M_{ij}(\theta_i)$. Нетрудно убедиться, что дисперсии (1.2.53) и (1.2.54) неотрицательны при всех θ_1 и θ_2 , принадлежащих априорной области (1.1.2). Функции (1.2.55) и (1.2.56) принимают отрицательные значения при $\theta_2 < \theta_{2n}$ и $\theta_1 > \theta_{1n}$ соответственно, где

$$\theta_{1n} = \theta_{1m} + T_{\max} z_0^2/2\rho_{11}^2, \quad \theta_{2n} = \theta_{2m} - T_{\max} z_0^2/2\rho_{21}^2. \quad (1.2.57)$$

Если $\theta_{1n} \in [\theta_{1\min}, \theta_{1\max}]$, будем рассматривать случайный процесс $M_{11}(\theta_1)$ на отрезке $[\theta_{1\min}, \theta_{1n}]$, на правой границе которого $\theta_1 = \theta_{1n}$ он обладает нулевой дисперсией и равен

$$M_{11}(\theta_{1n}) = B_1 = S_{11}(\theta_{1n}) = Z_0/2 - \rho_{11}^2 q(\theta_{1m}) \max\left(z_0^2/2\rho_{11}^2, (\theta_{01} - \theta_{1m})/T_{\max}\right).$$

Аналогично при $\theta_{2n} \in [\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$, будем рассматривать случайный процесс $M_{21}(\theta_2)$ на отрезке $[\theta_{2n}, \theta_{2\max}]$, на левой границе которого $\theta_2 = \theta_{2n}$ он обладает нулевой дисперсией и равен

$$M_{21}(\theta_{2n}) = B_2 = S_{21}(\theta_{2n}) = Z_0/2 - \rho_{21}^2 q(\theta_{2m}) \max\left(z_0^2/2\rho_{21}^2, (\theta_{2m} - \theta_{02})/T_{\max}\right).$$

Используя представления (1.2.51) и (1.2.52) запишем для распределений максимума случайного поля [77,83,89]

$$P_j(c) = P\left[M_{1j} + M_{2j} < c \mid H_j\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{2j}(c-x) dF_{1j}(x), \quad (1.2.58)$$

где $M_{ij} = \arg \sup M_{ij}(\theta_i)$,

$$F_{ij}(u) = P\left[\sup M_{ij}(\theta_i) < u\right], \theta_{i\min} \leq \theta_i \leq \theta_{i\max} \quad (1.2.59)$$

— функции распределения величины максимума процессов $M_{ij}(\theta_i)$, $i=1,2$, $j=0,1$. Таким образом, для отыскания вероятностей ошибок КП обнаружения необходимо найти функции (1.2.59). Рассмотрим сначала случайный процесс $M_{20}(\theta_2)$. Пользуясь выражениями (1.2.44), (1.2.46), а также теоремой Дуба [13,55,126], можно показать, что он является марковским [17,54,55] и обладает коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = -\rho_{20}^2 / 2T_{\max}, \quad k_2 = \rho_{20}^2 / T_{\max} \quad (1.2.60)$$

соответственно. Функция распределения величины максимума марковского случайного процесса с аналогичными коэффициентами сноса и диффузии (1.1.50) найдена в предыдущем параграфе. Сравнивая выражения (1.2.44), (1.2.46) с (1.1.44), (1.1.46) соответственно, получаем, что функцию (1.2.59) при $i=2$, $j=0$ можно записать в виде (1.1.52), где необходимо z_{\min}^2 заменить на $z_{\min}^2/2$.

Заметим, что при замене переменных $\lambda = -\theta_1$ математическое ожидание (1.2.43) и корреляционная функция (1.2.45) случайного процесса $M_{10}(\lambda)$ совпадают соответственно с математическим ожиданием (1.2.44) и корреляционной функцией (1.2.46) случайного процесса $M_{20}(\theta_2)$ с точностью до замены ρ_{20} на ρ_{10} , то есть

$$S_{10}(\lambda) = -z_{\min}^2 / 4 - \rho_{10}^2 (\lambda - \lambda_{\min}) / 2T_{\max},$$

$$B_{10}(\lambda_1, \lambda_2) = z_{\min}^2 / 2 + \rho_{10}^2 \min(\lambda_1 - \lambda_{\min}; \lambda_2 - \lambda_{\min}) / T_{\max}, \quad (1.2.61)$$

где $\lambda_{\max} = -\theta_{1\min}$, $\lambda_{\min} = -\theta_{1\max}$.

Следовательно, функция $F_{10}(u)$ совпадает с $F_{20}(u)$ с точностью до замены ρ_{20} на ρ_{10} , $\theta_{2\min}$ на $-\theta_{1\max}$, $\theta_{2\max}$ на $-\theta_{1\min}$. В итоге при $j=0$, $i=1,2$ можем записать

$$F_{i0}(u) = \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(u - \xi + z_{\min}^2 / 4\right)^2 / z_{\min}^2\right] \varphi(\rho_{i0}, \eta_i, \xi) d\xi / z_{\min} \sqrt{\pi}, \quad (1.2.62)$$

$$\eta_i = (\theta_{i\max} - \theta_{i\min}) / T_{\max}.$$

Подставляя (1.2.61) в (1.2.58), а затем (1.2.58) в (1.2.29), выполняя интегрирование, получаем асимптотическое выражение для вероятности ложной тревоги

$$\alpha_g = 1 - \frac{1}{z_{\min}^2 \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{\xi_1 + \xi_2 - c - z_{\min}}{z_{\min}} - \frac{z_{\min}}{2} \right) \exp\left[-\frac{(\xi_1 + \xi_2 - c - z_{\min}^2 / 2)^2}{2z_{\min}^2}\right] \times$$

$$\times \varphi(\rho_{10}, \eta_1, \xi_1) \varphi(\rho_{20}, \eta_2, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (1.2.63)$$

Для нахождения вероятности пропуска сигнала КП обнаружителем (1.2.25) рассмотрим случайный процесс $M_{21}(\theta_2)$. Согласно выражениям (1.2.48), (1.2.50), а также теореме Дуба [13,55,126], можно показать, что случайный процесс $M_{21}(\theta_2)$ является марковским [16,54,55] с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \frac{\rho_{21}^2}{2T_{\max}} \begin{cases} q_2, & \max(\theta_{2\min}, \theta_{2n}) \leq \theta_2 \leq \theta_{2m}, \\ -1, & \theta_{2m} < \theta_2 \leq \theta_{2\max}, \end{cases} \quad k_2 = \rho_{21}^2 / T_{\max}, \quad (1.2.64)$$

где $q_2 = 2q(\theta_{2m}) - 1$. Далее в зависимости от взаимного расположения точек $\theta_{2\min}$ и θ_{2n} будем различать два случая. Пусть сначала $\theta_{2\min} > \theta_{2n}$, что равносильно $\mu_2 < \nu_2$, $\mu_2 = (\theta_{2m} - \theta_{2\min}) / T_{\max}$, $\nu_2 = z_0^2 / 2\rho_{21}^2 = (\theta_{2m} - \theta_{2n}) / T_{\max}$ — точка θ_{2n} не попадает внутрь априорного интервала момента исчезновения. Тогда для искомой функции распределения $F_{21}(u)$ (1.2.59) можно воспользоваться выражением приложения (П.29), в которое необходимо подставить $T_1 = \theta_{2\min}$, $t_0 = \theta_{2m}$, $T_2 = \theta_{2\max}$, $a_2 = \rho_{21}^2 / 2T_{\max}$, $a_1 = \rho_{21}^2 q_2 / 2T_{\max}$, $b = \rho_{21}^2 / T_{\max}$,

$$W_Y(y, \theta_{2\min}) = \exp\left[-(y - A_2)^2 / 2\sigma_2^2\right] / \sigma_2 \sqrt{2\pi} \quad (1.2.65)$$

— плотность вероятности гауссовской случайной величины $M_{21}(\theta_{2\min})$, с математическим ожиданием

$$A_2 = Z_0/2 - z_0^2/4 - (q_2 + 1)\rho_{21}^2 \max[\mu_2, (\theta_{2m} - \theta_{02})/T_{\max}] / 2 + \rho_{21}^2 \mu_2 / 2$$

и дисперсией $\sigma_2^2 = z_0^2 / 2 - \rho_{21}^2 \mu_2$. Следовательно,

$$F_{21}(u) = \exp\left[-\rho_{21}^2 q_2^2 \mu_2 / 8\right] \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-(\xi - u + A_2)^2 / 2\sigma_2^2\right] \chi(\xi, \xi_1, \rho_{21}^2 \mu_2) \times \\ \times \exp\left[q_2(\xi - \xi_1)/2\right] \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi_1) d\xi d\xi_1 / 2\pi\sigma_2\rho_{21}\sqrt{\mu_2}, \quad \mu_2 < \nu_2, \quad (1.2.66)$$

$m_2 = \eta_2 - \mu_2$, а функции $\varphi(\cdot)$ и $\chi(\cdot)$ определены в приложении.

Пусть теперь $\theta_{2\min} \leq \theta_{2n}$, что равносильно $\mu_2 \geq \nu_2$. Тогда, подставляя в выражение (П.29) $T_1 = \theta_{2n}$, $t_0 = \theta_{2m}$, $T_2 = \theta_{2\max}$, $a_2 = \rho_{21}^2 / 2T_{\max}$, $a_1 = \rho_{21}^2 q_2 / 2T_{\max}$, $b = \rho_{21}^2 / T_{\max}$, $W_Y(y, \theta_{2m}) = \delta(y - B_2)$,

$$B_2 = Z_0/2 - (q_2 + 1)\rho_{21}^2 \max[\nu_2, (\theta_{2m} - \theta_{02})/T_{\max}] / 2,$$

получаем

$$F_{21}(u) = \frac{\exp\left[-z_0^2 q_2^2 / 16\right]}{z_0 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left[\frac{q_2(u - B_2 - \xi)}{2}\right] \chi(\xi, u - B_2, z_0^2 / 2) \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi) d\xi, \\ \mu_2 \geq \nu_2. \quad (1.2.67)$$

Найдем теперь распределение величины максимума случайного процесса $M_{11}(\theta_1)$. После замены переменной $\lambda = -\theta_1$ математическое ожидание (1.2.47) и корреляционная функция (1.2.49) приобретают вид

$$S_{11}(\lambda) = Z_0/2 - z_0^2/4 + q(\theta_{1m})\rho_{11}^2 \min(\lambda - \lambda_m, \lambda_0 - \lambda_m) / T_{\max} - \\ - \rho_{11}^2 (\lambda - \lambda_m) / 2T_{\max}, \quad (1.2.68)$$

$$B_{11}(\lambda_1, \lambda_2) = z_0^2 / 2 + \rho_{11}^2 \min(\lambda_1 - \lambda_m; \lambda_2 - \lambda_m) / T_{\max}, \quad (1.2.69)$$

$\lambda_m = -\theta_{1m}$, $\lambda_0 = -\theta_{01}$. Поскольку выражения (1.2.68) и (1.2.69) с точностью до замены ρ_{11} на ρ_{21} и λ_m на θ_{2m} совпадают с (1.2.48) и (1.2.50) соответственно, искомое распределение можно записать на основе выражений (1.2.66) и (1.2.67) в виде

$$F_{11}(u) = \exp\left[-\rho_{11}^2 q_1^2 \mu_1 / 8\right] \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-(\xi - u + A_1)^2 / 2\sigma_1^2\right] \chi(\xi, \xi_1, \rho_{11}^2 \mu_1) \times \\ \times \exp\left[q_1(\xi - \xi_1)/2\right] \varphi(\rho_{11}, m_1, \xi_1) d\xi d\xi_1 / 2\pi\sigma_1\rho_{11}\sqrt{\mu_1}, \quad \mu_1 < \nu_1, \quad (1.2.70)$$

$$F_{11}(u) = \frac{\exp\left[-z_0^2 q_1^2 / 16\right]}{z_0 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left[\frac{q_1(u - B_1 - \xi)}{2}\right] \chi\left(\xi, u - B_1, z_0^2 / 2\right) \varphi(\rho_{11}, m_1, \xi) d\xi$$

$$\mu_1 \geq \nu_1, \quad (1.2.71)$$

где $\mu_1 = (\theta_{1\max} - \theta_{1m}) / T_{\max}$, $m_1 = \eta_1 - \mu_1$, $q_1 = 2q(\theta_{1m}) - 1$,

$$\nu_1 = z_0^2 / 2 \rho_{11}^2 = (\theta_{1n} - \theta_{1m}) / T_{\max},$$

$$A_1 = Z_0 / 2 - z_0^2 / 4 - (q_1 + 1) \rho_{11}^2 \max\left[\mu_1, (\theta_{01} - \theta_{1m}) / T_{\max}\right] / 2 + \rho_{11}^2 \mu_1 / 2,$$

$$B_1 = Z_0 / 2 - (q_1 + 1) \rho_{11}^2 \max\left[\nu_1, (\theta_{01} - \theta_{1m}) / T_{\max}\right] / 2, \sigma_1^2 = z_0^2 / 2 - \rho_{11}^2 \mu_1.$$

Подставляя далее функции (1.2.66), (1.2.67) и (1.2.70), (1.2.71) в выражение (1.2.58), а затем (1.2.58) в (1.2.30), получаем асимптотическое выражение для условной вероятности пропуска сигнала КП обнаружителем

$$\beta_g(\theta_{01}, \theta_{02}) = \begin{cases} \beta_{1g}, & \mu_1 < \nu_1, \quad \mu_2 < \nu_2, \\ \beta_{2g}, & \mu_1 < \nu_1, \quad \mu_2 \geq \nu_2, \\ \beta_{3g}, & \mu_1 \geq \nu_1, \quad \mu_2 < \nu_2, \\ \beta_{4g}, & \mu_1 \geq \nu_1, \quad \mu_2 \geq \nu_2, \end{cases} \quad (1.2.72)$$

$$\beta_{1g} = \frac{\exp\left[-\rho_{21}^2 \mu_2 q_2^2 / 8 - \rho_{11}^2 \mu_1 q_1^2 / 8\right]}{2\pi \rho_{11} \rho_{21} \sqrt{2\pi \mu_1 \mu_2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{3/2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi_1 + \xi_3 - c + A_1 + A_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right] \times$$

$$\times (\xi_1 + \xi_3 - c + A_1 + A_2) \varphi(\rho_{11}, m_1, \xi_2) \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi_4) \exp\left[q_1 \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} + q_2 \frac{\xi_3 - \xi_4}{2}\right] \times$$

$$\times \chi(\xi_2, \xi_1, \rho_{11}^2 \mu_1) \chi(\xi_4, \xi_3, \rho_{21}^2 \mu_2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4, \quad (1.2.73)$$

$$\beta_{2g} = \frac{\exp\left[-z_0^2 q_2^2 / 16 - \rho_{11}^2 \mu_1 q_1^2 / 8\right]}{2\pi \rho_{11} z_0 \sqrt{\pi \mu_1} \sigma_1^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-(\xi_1 + \xi_3 - c + A_1 + B_2)^2 / 2\sigma_1^2\right] \times$$

$$\times (\xi_1 + \xi_3 - c + A_1 + B_2) \varphi(\rho_{11}, m_1, \xi_2) \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi_4) \exp\left[q_1 \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} + q_2 \frac{\xi_3 - \xi_4}{2}\right] \times$$

$$\times \chi(\xi_2, \xi_1, \rho_{11}^2 \mu_1) \chi(\xi_4, \xi_3, z_0^2 / 2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4, \quad (1.2.74)$$

$$\beta_{3g} = \frac{\exp\left[-\rho_{21}^2 \mu_2 q_2^2 / 8 - z_0^2 q_1^2 / 16\right]}{2\pi z_0 \rho_{21} \sqrt{\pi \mu_2} \sigma_2^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-(\xi_1 + \xi_3 - c + B_1 + A_2)^2 / 2\sigma_2^2\right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times (\xi_1 + \xi_3 - c + B_1 + A_2) \varphi(\rho_{11}, m_1, \xi_2) \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi_4) \exp \left[q_1 \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} + q_2 \frac{\xi_3 - \xi_4}{2} \right] \times \\ & \times \chi \left(\xi_2, \xi_1, z_0^2/2 \right) \chi \left(\xi_4, \xi_3, \rho_{21}^2 \mu_2 \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4, \end{aligned} \quad (1.2.75)$$

$$\begin{aligned} \beta_{4g} = & \exp \left[-z_0^2 \frac{q_2 + q_1}{16} - \frac{q_1 B_1 - q_2 B_2}{2} + \frac{q_2 c}{2} \right] \int_{B_1}^{c-B_2} dx \int_0^\infty \int_0^\infty \chi \left(\xi_1, c - x - B_2, z_0^2/2 \right) \times \\ & \times \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi_1) \varphi(\rho_{11}, m_2, \xi) \exp \left[x(q_1 - q_2)/2 - q_2 \xi_1/2 - q_1 \xi/2 \right] \times \\ & \times \left\{ \left[2(\xi - x + B_1)/z_0^2 + q_1/2 \right] \exp \left[-(\xi - x + B_1)^2/z_0^2 \right] - \right. \\ & \left. - \left[q_1/2 - 2(\xi + x - B_1)/z_0^2 \right] \exp \left[-(\xi + x - B_1)^2/z_0^2 \right] \right\} d\xi d\xi_1/z_0^2 \pi. \end{aligned} \quad (1.2.76)$$

Рассмотрим далее несколько частных случаев КП обнаружения. Пусть сначала опорный сигнал представляет собой ступенчатый импульс вида

$$g(t) = \begin{cases} D_1, \theta_{1\min} \leq t \leq \theta, \\ D_2, \theta < t \leq \theta_{2\max}, \\ 0, t < \theta_{1\min}, t > \theta_{2\max}, \end{cases} \quad (1.2.77)$$

где D_i , $i=1,2$ — некоторые положительные константы. Согласно (1.2.2), КП обнаружитель должен формировать случайное поле

$$L^*(\theta_1, \theta_2) = \frac{2}{N_0} D_1 \int_{\theta_1}^{\theta} x(t) dt + \frac{2}{N_0} D_2 \int_{\theta}^{\theta_2} x(t) dt - \frac{D_1^2(\theta - \theta_1) + D_2(\theta_2 - \theta)}{N_0} \quad (1.2.78)$$

для всех возможных значений неизвестных параметров (1.1.2), определять величину его абсолютного максимума (1.2.24) и сравнивать ее с порогом (1.2.25).

Представим случайное поле (1.2.78) аналогично (1.2.26) и (1.2.27) в виде суммы двух статистически независимых гауссовских случайных процессов

$$L_1(\theta_1) = \frac{2D_1}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} [x(t) - D_1/2] dt, \quad L_2(\theta_2) = \frac{2D_2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} [x(t) - D_2/2] dt. \quad (1.2.79)$$

Тогда множители в блок-схеме КП обнаружителя рис. 1.15 можно заменить усилителями. В результате получаем блок-схему, изображенную на рис. 1.16.

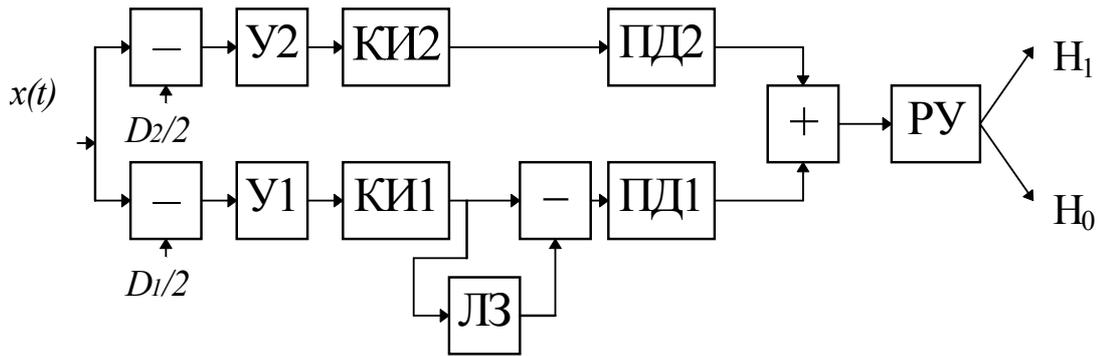


Рис.1.16

Здесь усилители У1 и У2 обладают коэффициентами усиления $2D_1/N_0$ и $2D_2/N_0$ соответственно, а все остальные блоки совпадают с рис. 1.15. Пользуясь асимптотическим представлением (1.2.51), (1.2.52) поля (1.2.78), находим характеристики КП обнаружителя в виде (1.2.63) и (1.2.72), где

$$z_{\min}^2 = 2 \left[D_1^2 (\theta - \theta_{1\max}) + D_2^2 (\theta_{2\min} - \theta) \right] / N_0,$$

$$z_0^2 = 2 \left[D_1^2 (\theta - \theta_{1m}) + D_2^2 (\theta_{2m} - \theta) \right] / N_0,$$

$$Z_0 = \frac{2}{N_0} D_1 \int_{\theta_{1m}}^{\theta} f(t) dt + \frac{2}{N_0} D_2 \int_{\theta}^{\theta_{2m}} f(t) dt,$$

$$v_i = \left[D_1^2 (\theta - \theta_{1m}) + D_2^2 (\theta_{2m} - \theta) \right] / D_i^2 T_{\max}, \quad (1.2.80)$$

$$\rho_{i0}^2 = \rho_{i1}^2 = 2D_i^2 T_{\max} / N_0, \quad i=1,2, \quad q(t) = \begin{cases} f(t)/D_1, & \theta_{1\min} \leq t \leq \theta, \\ f(t)/D_2, & \theta < t \leq \theta_{2\max}, \end{cases}$$

$(\theta_{1m}, \theta_{2m})$ — положение максимума математического ожидания поля (1.2.78).

Если $D_1 = D_2 = D$, то опорный сигнал (1.2.77) представляет собой прямоугольный импульс. Блок-схема КП обнаружителя с прямоугольным опорным сигналом изображена на рис. 1.17.

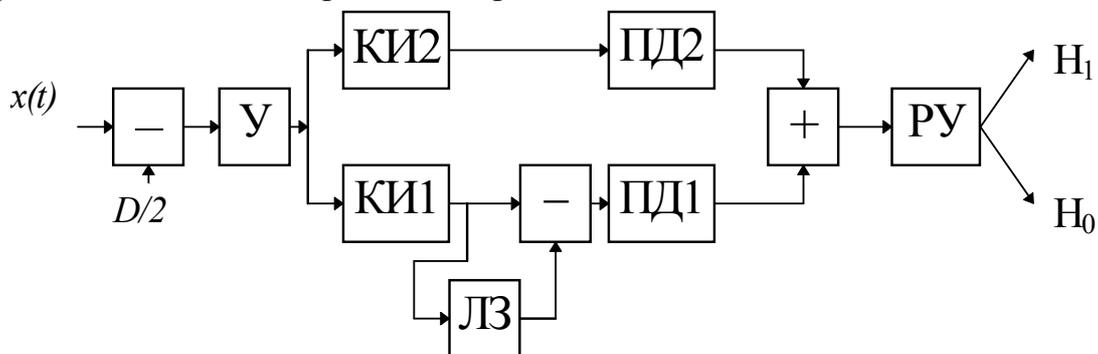


Рис.1.17

Здесь усилитель $У$ обладает коэффициентом усиления $2D/N_0$. Выражения (1.2.80) применительно к прямоугольному опорному сигналу принимают вид

$$z_{\min}^2 = 2D^2 (\theta_{2\min} - \theta_{1\max}) / N_0, \quad z_0^2 = 2D^2 (\theta_{2m} - \theta_{1m}) / N_0,$$

$$Z_0 = \frac{2}{N_0} D \int_{\theta_{1m}}^{\theta_{2m}} f(t) dt, \quad q(t) = f(t) / D,$$

$$v_i = (\theta_{2m} - \theta_{1m}) / T_{\max}, \quad \rho_{i0}^2 = \rho_{i1}^2 = 2D^2 T_{\max} / N_0, \quad i = 1, 2. \quad (1.2.81)$$

Как видно из (1.2.63), (1.2.72), асимптотические выражения для вероятностей ошибок КП обнаружителя, адаптирующегося по моментам появления и исчезновения довольно сложны. Однако, как показывает численный расчет этих характеристик на ЭВМ применительно к принимаемому сигналу (1.1.22) и опорному сигналу (1.1.23), вероятности ошибок (1.2.63), (1.2.72) оказываются меньше соответствующих вероятностей (1.2.9) и (1.2.10) КП обнаружителя без адаптации по моментам появления и исчезновения для тех же сигналов. Это позволяет говорить о выигрыше алгоритма (1.2.25) по сравнению с (1.2.1). Вместе с тем, вероятности ошибок КП обнаружителя (1.2.25) больше аналогичных вероятностей МП алгоритма (1.1.4) обнаружения сигнала с известными моментами появления и исчезновения. Дальнейшее увеличение эффективности обнаружения возможно с применением МП и байесовского алгоритмов [60,110].

В работе [80] проведен сравнительный анализ алгоритмов обнаружения прямоугольного импульса на фоне аддитивного гауссовского белого шума при реализации санкционированного и несанкционированного доступа к передаваемой информации. Предполагалось, что передаваемая информация заключается в факте наличия или отсутствия сигнала. Сторонний наблюдатель для реализации несанкционированного доступа к передаваемой информации с целью её использования или разрушения должен установить факт наличия сигнала, то есть обнаружить его. Несанкционированный доступ стороннего наблюдателя осуществляется при полном или частичном незнании параметров сигнала. Степень скрытности передаваемой информации характеризуется параметром скрытности, определяющим увеличение порогового ОСШ при несанкционированном доступе по сравнению с санкционированным. В результате сопоставления пороговых значений ОСШ при санкционированном и несанкционированном доступе вводится параметр скрытности, который дает количественную оценку степени скрытности передаваемой информации.

В работе [82] выполнены синтез и анализ квазиправдоподобного алгоритма обнаружения сигнала с неизвестными формой и моментами появле-

ния и исчезновения, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. Найдены асимптотически точные (с ростом ОСШ) статистические характеристики синтезированного алгоритма. Выполнено статистическое моделирование алгоритма обнаружения. Найдены границы применимости полученных асимптотических выражений.

Задача обнаружения сигнала с неизвестной амплитудой и моментами появления и исчезновения решена в [96]. Выполнены синтез и анализ квазиправдоподобных алгоритмов обнаружения разрывного сигнала произвольной формы с неизвестными амплитудой и моментами появления и исчезновения. Предполагалось, что сигнал наблюдается на фоне аддитивного гауссовского белого шума. Выполнен синтез квазиправдоподобного алгоритма обнаружения, использующего вместо неизвестных амплитуды и моментов появления и исчезновения сигнала их ожидаемые значения. Исследована возможность адаптации обнаружителя по неизвестным параметрам. Синтезированы квазиправдоподобные алгоритмы обнаружения с адаптацией по амплитуде и по моментам появления и исчезновения. Получены статистические характеристики эффективности функционирования синтезированных алгоритмов обнаружения: вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала.

Поскольку во многих практических приложениях используются сигналы с высокочастотным заполнением (радиосигналы), которые ввиду специфики распространения имеют неизвестную амплитуду и начальную фазу в статье [94] исследованы КП алгоритмы обнаружения радиосигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения, амплитудой и начальной фазой. Предложены блок-схемы устройств, осуществляющих обнаружение. Изучены алгоритмы обнаружения без адаптации по неизвестным параметрам и с адаптацией по амплитуде и начальной фазе. Выполнено сравнение сложности технической или программной реализации синтезированных алгоритмов.

Выполнен анализ синтезированных алгоритмов, найдены вероятности ошибок ложной тревоги и пропуска сигнала. На примере прямоугольного радиоимпульса с линейно изменяющейся огибающей исследовано влияние априорного незнания моментов появления и исчезновения, амплитуды и начальной фазы на эффективность алгоритмов обнаружения. Рассмотрено условие малой расстройки начальной фазы, при котором более простой алгоритм обнаружения без адаптации по амплитуде и фазе обладает меньшими вероятностями ошибок, чем алгоритм с адаптацией по амплитуде и фазе.

1.3. Оптимальное обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения

Предположим теперь, что принятый и опорный сигналы имеют одинаковую форму $f(t) = g(t)$. Тогда КП алгоритм обнаружения (1.2.25) совпадает с МП алгоритмом [35,53,60], согласно которому, приёмник должен формировать логарифм ФОП

$$L(\theta_1, \theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [x(t) - f(t)/2] f(t) dt \quad (1.3.1)$$

для всех возможных значений моментов появления и исчезновения (1.1.2). Решение в пользу одной из гипотез выносится в результате сравнения

$$L = \sup_{\theta_1, \theta_2} L(\theta_1, \theta_2) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} c \quad (1.3.2)$$

с порогом величины максимума логарифма ФОП на априорной области (1.1.2).

Представим случайное поле (1.3.1) в виде суммы двух статистически независимых гауссовских случайных процессов (1.2.26) и (1.2.27), где $f(t) = g(t)$, и изобразим блок-схему МП обнаружителя в виде рис 1.18.

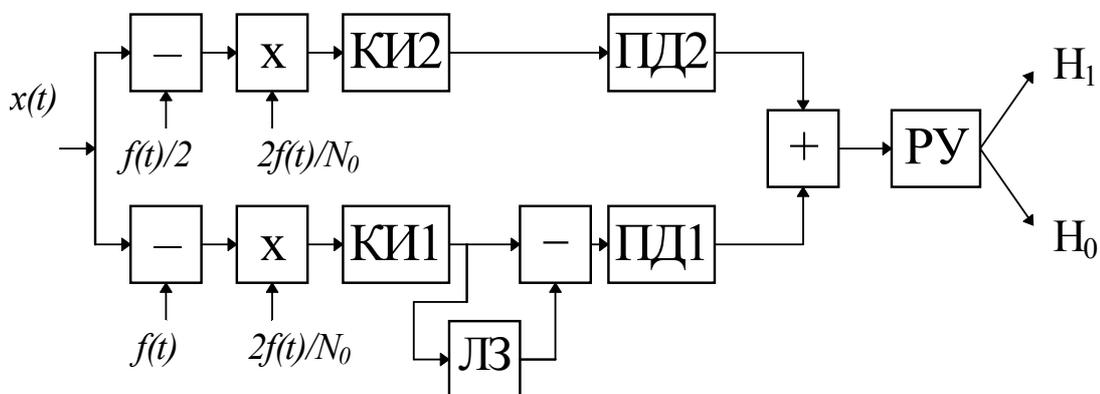


Рис. 1.18

Здесь коммутируемые интеграторы КИ1 и КИ2 работают в интервалах времени: $[\theta_{1\min}, \theta]$ и $[\theta, \theta_{2\max}]$ соответственно. ПД1 и ПД2 — пиковые детекторы, определяющие величину максимума сигнала на интервалах времени $[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$, $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$, ЛЗ — линия задержки, осуществляющая задержку сигнала на время $t = \theta - \theta_{1\min}$, ПУ — решающее устройство,

осуществляющее сравнение выходного сигнала сумматора с порогом c и вырабатывающее решение в пользу одной из гипотез.

Как известно [60], положение максимума математического ожидания поля (1.3.1) при наличии сигнала в принятой реализации совпадает с истинным значением моментов появления и исчезновения, то есть $\theta_{im} = \theta_{0i}$. Отношение сигнал/шум (1.2.35) на выходе приёмника МП равно $z^2 = z_0^2 = 2 \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t) dt / N_0$.

Характеристики МП алгоритма обнаружения запишем на основе выражений (1.2.63), (1.2.72) – (1.2.76), где необходимо положить [20,72]

$$\begin{aligned} \rho_{10}^2 &= 2f^2(\theta_{1\max})T_{\max}/N_0, \quad \rho_{20}^2 = 2f^2(\theta_{2\min})T_{\max}/N_0, \\ z_{\min}^2 &= \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{1\max}}^{\theta_{2\min}} f^2(t) dt, \quad z_{\max}^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{1\min}}^{\theta_{2\max}} f^2(t) dt, \\ \mu_2 &= (\theta_{02} - \theta_{2\min})/T_{\max}, \quad m_2 = (\theta_{2\max} - \theta_{02})/T_{\max}, \\ \mu_1 &= (\theta_{1\max} - \theta_{01})/T_{\max}, \quad m_1 = (\theta_{01} - \theta_{1\min})/T_{\max}, \\ \rho_{i1}^2 &= 2f^2(\theta_{0i})T_{\max}/N_0, \quad \eta_i = (\theta_{i\max} - \theta_{i\min})/T_{\max}, \quad \sigma_i^2 = z_0^2/2 - \rho_{i1}^2\mu_i, \\ v_i &= z_0^2/2\rho_{i1}^2, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

В результате, для вероятности ложной тревоги МП обнаружителя получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{1}{z_{\min}^2 \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\xi_1 + \xi_2 - c}{z_{\min}} - \frac{z_{\min}}{2} \right) \exp \left[- \left(\xi_1 + \xi_2 - c - \frac{z_{\min}}{2} \right)^2 / 2z_{\min}^2 \right] \times \\ &\quad \times \varphi(\rho_{10}, \eta_1, \xi_1) \varphi(\rho_{20}, \eta_2, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Условную вероятность пропуска сигнала запишем аналогично (1.2.72)

$$\beta(\theta_{01}, \theta_{02}) = \begin{cases} \beta_1, & \mu_1 < v_1, \quad \mu_2 < v_2, \\ \beta_2, & \mu_1 < v_1, \quad \mu_2 \geq v_2, \\ \beta_3, & \mu_1 \geq v_1, \quad \mu_2 < v_2, \\ \beta_4, & \mu_1 \geq v_1, \quad \mu_2 \geq v_2, \end{cases} \quad (1.3.5)$$

где

$$\beta_1 = \frac{\exp \left[-\rho_{21}^2\mu_2/8 - \rho_{11}^2\mu_1/8 \right]}{2\pi\rho_{11}\rho_{21}\sqrt{2\pi\mu_1\mu_2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{3/2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[- \frac{\left(\xi_1 + \xi_3 - c + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/2 \right)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\xi_1 + \xi_3 - c + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} \right) \varphi(\rho_{11}, m_1, \xi_2) \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi_4) \exp \left[\frac{\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4}{2} \right] \times \\ & \quad \times \chi(\xi_2, \xi_1, \rho_{11}^2 \mu_1) \chi(\xi_4, \xi_3, \rho_{21}^2 \mu_2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4, \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = & \exp \left[-z_0^2/16 - \rho_{11}^2 \mu_1/8 \right] \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\left(\xi_1 + \xi_3 - c + \sigma_1^2/2 \right)^2 / 2\sigma_1^2 \right] \times \\ & \times \left(\xi_1 + \xi_3 - c + \sigma_1^2/2 \right) \varphi(\rho_{11}, m_1, \xi_2) \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi_4) \exp \left[(\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4)/2 \right] \times \\ & \quad \times \chi(\xi_2, \xi_1, \rho_{11}^2 \mu_1) \chi(\xi_4, \xi_3, z_0^2/2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 / 2\pi \rho_{11} z_0 \sqrt{\pi \mu_1} \sigma_1^3, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = & \exp \left[-\rho_{21}^2 \mu_2/8 - z_0^2/16 \right] \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\left(\xi_1 + \xi_3 - c + \sigma_2^2/2 \right)^2 / 2\sigma_2^2 \right] \times \\ & \times \left(\xi_1 + \xi_3 - c + \sigma_2^2/2 \right) \varphi(\rho_{11}, m_1, \xi_2) \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi_4) \exp \left[(\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4)/2 \right] \times \\ & \quad \times \chi(\xi_2, \xi_1, z_0^2/2) \chi(\xi_4, \xi_3, \rho_{21}^2 \mu_2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 / 2\pi z_0 \rho_{21} \sqrt{\pi \mu_2} \sigma_2^3, \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

$$\begin{aligned} \beta_4 = & \exp \left[-z_0^2/8 + c/2 \right] \int_0^c dx \int_0^\infty \int_0^\infty \chi(\xi_1, c-x, z_0^2/2) \exp \left[-\xi_1/2 - \xi/2 \right] \times \\ & \times \varphi(\rho_{21}, m_2, \xi_1) \varphi(\rho_{11}, m_2, \xi) \left\{ \left[2(\xi-x)/z_0^2 + 1/2 \right] \exp \left[-(\xi-x)^2/z_0^2 \right] - \right. \\ & \quad \left. - \left[1/2 - 2(\xi+x)/z_0^2 \right] \exp \left[-(\xi+x)^2/z_0^2 \right] \right\} d\xi d\xi_1 / z_0^2 \pi. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Заметим, что для сигнала прямоугольной формы $f(t) = A_r$ асимптотические выражения (1.3.4), (1.3.5) переходят в точные [72].

Если известны априорные вероятности гипотез $p_j = P(H_j)$, $j = 0, 1$, то качество обнаружения можно характеризовать условной средней вероятностью ошибки [4, 8, 60]

$$P_e(\theta_{01}, \theta_{02}) = p_0 \alpha + p_1 \beta(\theta_{01}, \theta_{02}), \quad (1.3.10)$$

а при известной априорной плотности вероятности момента появления и исчезновения $W_{pr}(\theta_1, \theta_2)$ — безусловной средней вероятностью ошибки [4, 8, 60]

$$P_e = p_0 \alpha + p_1 \beta, \quad (1.3.11)$$

где $\beta = \int_{\theta_{1\min}}^{\theta_{1\max}} \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \beta(\theta_1, \theta_2) W_{pr}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$ — безусловная вероятность пропуска сигнала.

В качестве примера рассмотрим МП обнаружение прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22). На рис. 1.19 – 1.21 представлены зависимости характеристик обнаружения сигнала (1.1.22) приёмником МП при $k = 4$, где штриховые кривые соответствуют $\gamma_0 = 0,1$ и $\gamma_0 = 10$, сплошные — $\gamma_0 = 1$. На рис. 1.19 изображены зависимости условной вероятности пропуска (1.3.5) от ОСШ z_r при фиксированной вероятности ложной тревоги (1.3.4). Рисунок под буквой а) соответствует $\alpha = 10^{-1}$, б) — $\alpha = 10^{-2}$, в) — $\alpha = 10^{-3}$.

На рис. 1.20 и 1.21 показаны соответственно условная (1.3.10) при $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 0,25$, $c = 0$ и безусловная (1.3.11) при $c = \arg \inf P_e$ средние вероятности ошибок обнаружения, $p_0 = 0,7$. Априорная плотность вероятности $W_{pr}(\theta_1, \theta_2)$ моментов появления и исчезновения при расчете безусловных характеристик была выбрана равномерной (1.2.21).

Как видно из рис. 1.19 – 1.21, МП алгоритм обнаружения (1.3.2) выигрывает по сравнению с КП алгоритмами (1.2.1) и (1.2.25). Однако вероятности ошибок обнаружения при известных моментах появления и исчезновения (1.1.5) меньше аналогичных вероятностей МП обнаружителя. Следовательно, МП алгоритм (1.3.2) проигрывает по сравнению с алгоритмом (1.1.4) обнаружения сигнала (1.1.1) при известных моментах появления и исчезновения.

Рассмотрим возможность применения классического байесовского подхода к обнаружению сигнала (1.1.1), согласно которому приёмник должен формировать случайную величину

$$\Lambda = \int_{\theta_{1\min}}^{\theta_{1\max}} \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \exp[L(\theta_1, \theta_2)] W_{pr}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (1.3.12)$$

— усредненный по априорному распределению $W_{pr}(\theta_1, \theta_2)$ функционал отношения правдоподобия $\Lambda(\theta_1, \theta_2) = \exp[L(\theta_1, \theta_2)]$, а $L(\theta_1, \theta_2)$ — логарифм (1.3.1) этого функционала.

Предположим, что априорная плотность вероятности $W_{pr}(\theta_1, \theta_2) = W_{1pr}(\theta_1)W_{2pr}(\theta_2)$. В силу возможности представления случайного поля $L(\theta_1, \theta_2)$ в виде суммы $L(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2)$ двух статистически независимых случайных процессов (1.2.26) и (1.2.27) перепишем выражение (1.3.12) в виде

$$\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2, \quad (1.3.13)$$

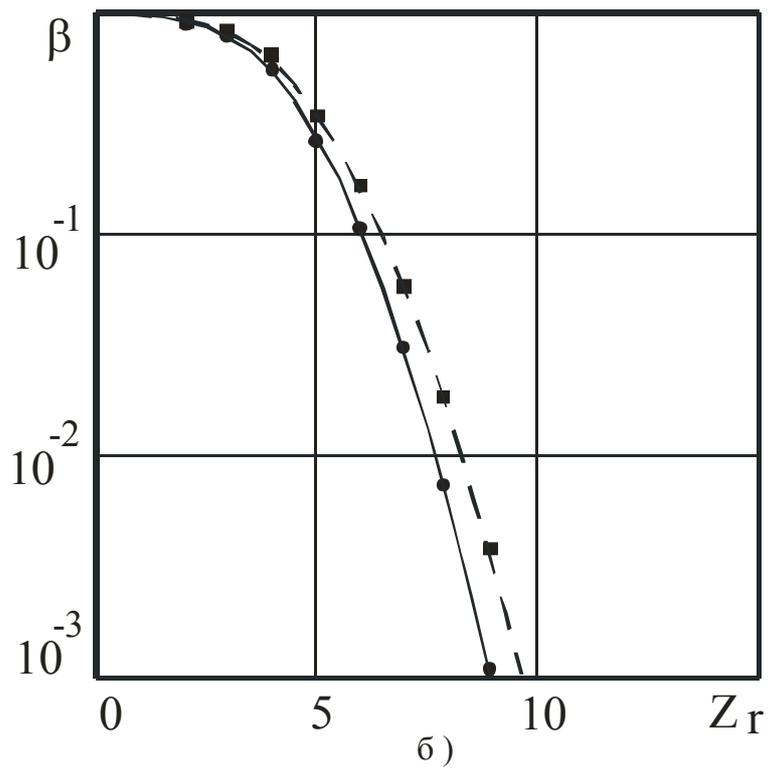
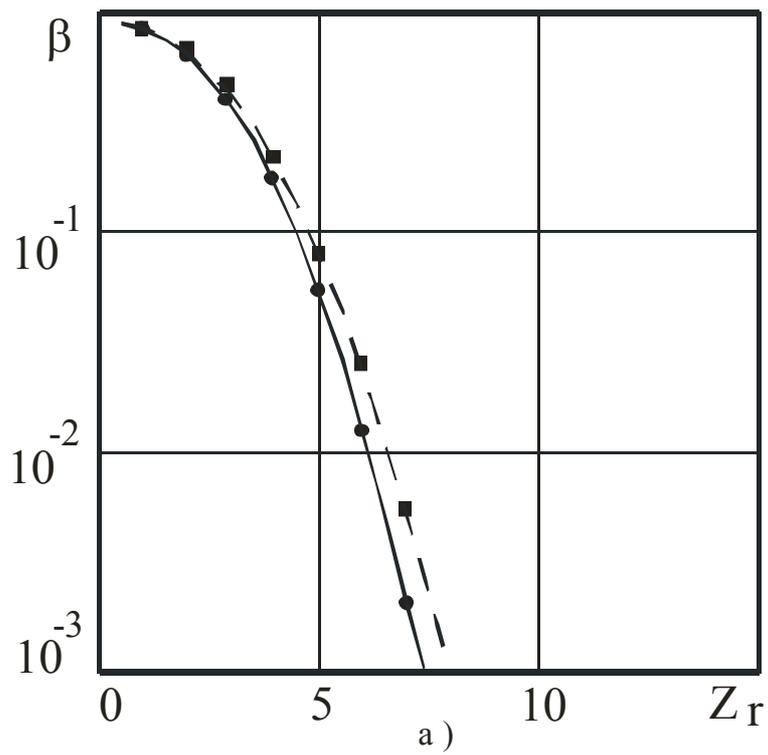


Рис. 1.19 Вероятности пропуска сигнала МП обнаружителем при фиксированной вероятности ложной тревоги

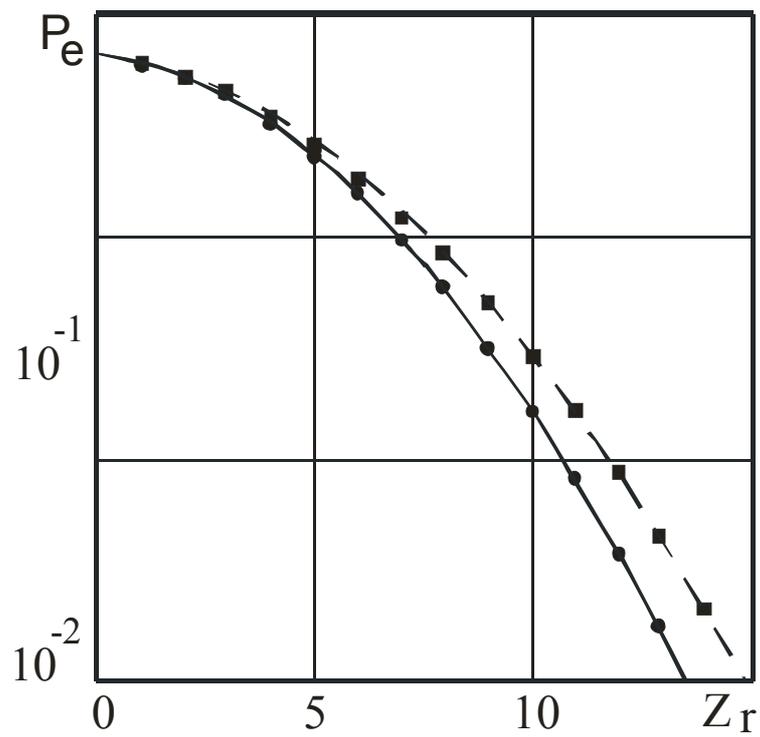
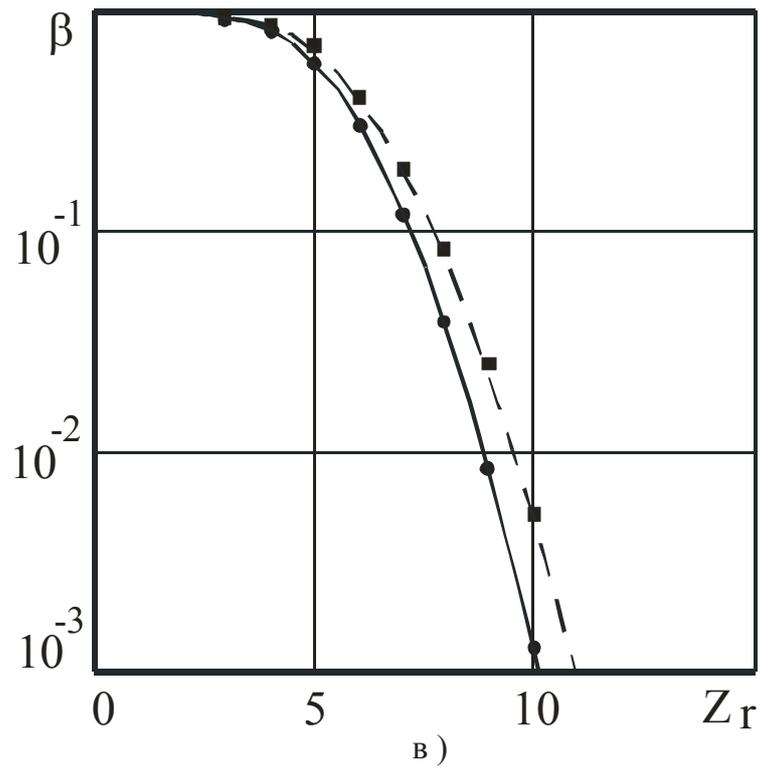


Рис. 1.20. Условная средняя вероятность ошибки МП обнаружителем

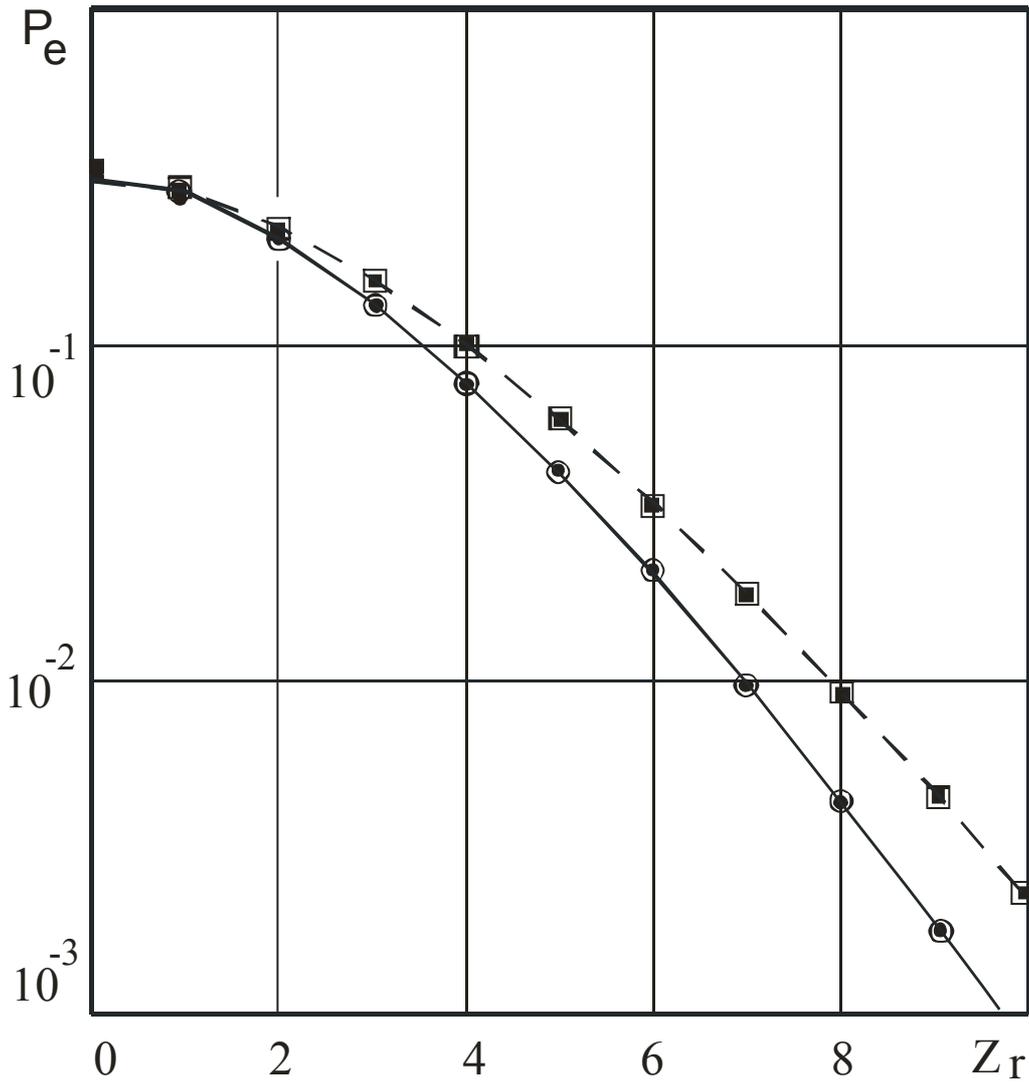


Рис. 1.21 Безусловная средняя вероятность ошибки МП и байесовского обнаружителей

где

$$\Lambda_i = \int_{\theta_{i\min}}^{\theta_{i\max}} \exp[L_i(\theta_i)] W_{ipr}(\theta_i) d\theta_i, \quad i=1,2. \quad (1.3.14)$$

При равномерной априорной плотности $W_i(\theta_i)$ (1.2.21)

$$\Lambda_i = \frac{1}{\theta_{i\max} - \theta_{i\min}} \int_{\theta_{i\min}}^{\theta_{i\max}} \exp[L_i(\theta_i)] d\theta_i, \quad i=1,2. \quad (1.3.15)$$

Решение о наличии или отсутствия сигнала в принятой реализации выносится в результате сравнения величины (1.3.12) с порогом (1.1.66).

Согласно (1.3.13), (1.3.14), возможную блок-схему байесовского обнаружителя можно изобразить в виде рис 1.22.

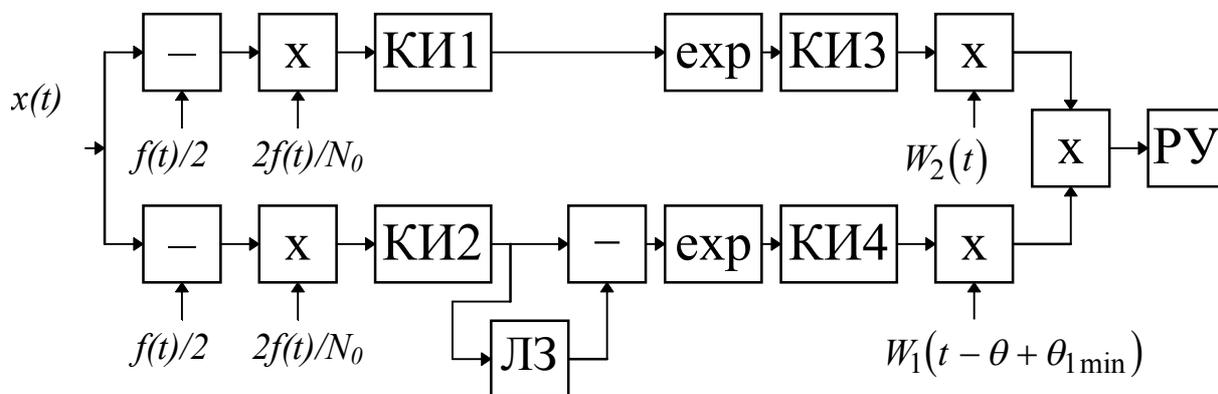


Рис. 1.22

Здесь коммутируемые интеграторы КИ работают в интервалах времени: $[\theta, \theta_{2\max}]$, $[\theta_{1\min}, \theta]$, $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$, $[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$, ЛЗ — линия задержки, осуществляющая задержку сигнала на время $t = \theta - \theta_{1\min}$. Сигнал на выходе КИ4 начинается в момент времени θ . Решающее устройство РУ вырабатывает решение в момент времени $t = \max(\theta_{2\max}, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min})$.

К сожалению, найти характеристики работы байесовского обнаружителя аналитически не удастся. Исследование эффективности байесовского обнаружителя возможно методами статистического моделирования на ЭВМ.

С целью проверки работоспособности синтезированных алгоритмов обнаружения сигнала (1.1.1), а также с целью установления границ применимости асимптотических выражений проводилось статистическое моделирование на ЭВМ МП и байесовского алгоритмов обнаружения. Методика статистического моделирования изложена в главе 4.

Результаты моделирования МП алгоритма обнаружения (1.3.2) показаны на рис. 1.19 – 1.21 квадратиками для $\gamma_0 = 0,1$ и $\gamma_0 = 10$, кружками для $\gamma_0 = 1$. Как видно, при $z_r \geq 2$ асимптотические характеристики (1.3.5) и (1.3.6) удовлетворительно описывают экспериментальные данные.

Окружностями и незаштрихованными квадратиками на рис. 1.21 изображены результаты моделирования байесовского алгоритма обнаружения (1.3.13) для $\gamma_0 = 1$ и $\gamma_0 = 0,1;10$ соответственно. Характеристики байесовского обнаружителя практически совпадают с характеристиками МП обнаружителя с оптимизированным порогом. Это позволяет рекомендовать

формулы (1.3.5), (1.3.6) для приближенного расчета характеристик байесовского алгоритма обнаружения.

В работе [75] получены максимально правдоподобный и оптимальный (байесовский) алгоритмы обнаружения и измерения моментов появления и исчезновения сигнала произвольной формы, наблюдаемого на фоне аддитивного белого гауссовского шума. Найдены асимптотические выражения для характеристик максимально правдоподобных алгоритмов. С помощью моделирования на ЭВМ определены характеристики байесовских алгоритмов. С помощью оригинальной замены переменных были получены точные выражения [79] для МП алгоритма обнаружения.

В случае неизвестной амплитуды сигнала в работе [89] установлена структура МП обнаружителя для сигнала с неизвестными амплитудой и моментами появления и исчезновения. Обсуждается существенная нелинейность алгоритма и сложность его реализации вследствие многоканальности структуры. Предложена двухканальная структура нелинейного квазиоптимального обнаружителя сигнала с неизвестными амплитудой, моментами появления и исчезновения, упрощающая реализацию приёмного устройства. Найдены асимптотические выражения для характеристик предложенного алгоритма. Проведен анализ потерь в эффективности квазиоптимального алгоритма обнаружения.

В работе [105] рассмотрены МП и квазиоптимальный алгоритмы обнаружения узкополосного радиосигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения, амплитудой и начальной фазой. В результате максимизации логарифма ФОП по амплитуде и начальной фазе получено выражение для решающей статистики и построена структура алгоритма обнаружения. Показано, что МП обнаружитель радиосигнала удаётся реализовать лишь в многоканальном варианте, что приводит к сложности его реализации на практике. Использование квазиоптимального алгоритма обнаружения, согласно которому решающая статистика сначала представляется суммой двух независимых слагаемых, а затем выполняется максимизация отдельно каждого слагаемого по амплитуде и фазе, позволяет предложить двухканальную блок-схему обнаружителя, а также выполнить анализ алгоритма обнаружения. В результате анализа характеристик предлагаемого квазиоптимального алгоритма обнаружения установлено, что увеличение относительных длин априорных интервалов возможных значений моментов появления и исчезновения вносит существенный вклад в ухудшение эффективности квазиоптимального алгоритма обнаружения. С уменьшением допустимого уровня ложной тревоги относительный проигрыш в эффективности квазиоптимального алгоритма обнаружения вследствие априорного незнания начальной фазы сигнала увеличивается.

Глава 2. Оценка моментов появления и исчезновения

2.1. Оценка момента исчезновения сигнала

Помимо задачи обнаружения в практических приложениях теории связи, локации, навигации часто возникает необходимость в оценке моментов появления и исчезновения сигнала [2,32,34,48,129].

Пусть на входе приёмного устройства наблюдается реализация $x(t)$ аддитивной смеси сигнала (1.1.1) и гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . По-прежнему полагаем, что моменты появления и исчезновения сигнала принимают свои значения из априорных интервалов (1.1.2).

Предположим, требуется найти оценку момента исчезновения θ_{02} . Тогда, располагая реализацией $x(t) = s(t, \theta_{01}, \theta_{02}) + n(t)$ смеси сигнала и шума на входе приёмного устройства, необходимо сформировать оценку момента исчезновения.

Будем также считать, что на приёмной стороне неизвестны форма сигнала и момент его появления, в оценке которого нет необходимости. Одним из способов преодоления априорной неопределённости относительно принимаемого сигнала является применение КП алгоритма оценивания [29,30,61], согласно которому, приёмник должен формировать случайный процесс $L^*(\theta_2) = L^*(\theta_1^*, \theta_2)$ для всех возможных значений момента исчезновения (1.1.2), где случайное поле $L^*(\theta_1, \theta_2)$ определено в (1.2.2) и представляет собой логарифм ФОП для ожидаемого сигнала формы $g(t)$, а θ_1^* — момент появления ожидаемого сигнала из области (1.1.2). Тогда КП оценка момента исчезновения определяется как положение максимума процесса $L^*(\theta_2)$

$$\tilde{\theta}_2 = \arg \sup L^*(\theta_2). \quad (2.1.1)$$

Блок-схему КП измерителя момента исчезновения (2.1.1) можно изобразить в виде рис.2.1, где КИ — коммутируемый интегратор, работающий на отрезке времени $[\theta_1^*, \theta_{2\max}]$, Э — экстрематор, определяющий положение максимума выходного сигнала интегратора на отрезке времени $t \in [\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$.

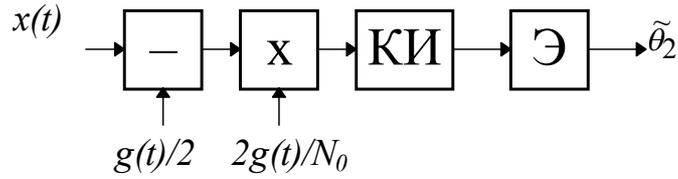


Рис. 2.1

Для нахождения характеристик КП оценки (2.1.1) рассмотрим случайный процесс $L^*(\theta_2)$, который, согласно (1.2.2), является гауссовским. Следовательно, для полного статистического описания процесса $L^*(\theta_2)$ необходимо найти его математическое ожидание

$$S^*(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\theta_1^*, \theta_{01})}^{\min(\theta_2, \theta_{02})} f(t)g(t)dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2} g^2(t)dt \quad (2.1.2)$$

и корреляционную функцию

$$B^*(\theta_{12}, \theta_{22}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\min(\theta_{12}, \theta_{22})} g^2(t)dt. \quad (2.1.3)$$

Будем полагать, что ОСШ на выходе приёмника достаточно велико $z^2 = S^{*2}(\theta_{2m})/B^*(\theta_{2m}, \theta_{2m}) \gg 1$, где

$$\theta_{2m} = \operatorname{argsup} S^*(\theta_2) \quad (2.1.4)$$

— положение максимума математического ожидания (2.1.2). Тогда искомое положение максимума (2.1.1) случайного процесса $L^*(\theta_2)$ располагается в малой окрестности точки (2.1.4). Следовательно, важно исследовать поведение случайного процесса $L^*(\theta_2)$ лишь в окрестности этой точки [61,67]. Разложим первое слагаемое в выражении (2.1.2) в ряд Маклорена по $\min(\theta_2 - \theta_{2m}, \theta_{02} - \theta_{2m})$, а второе слагаемое — по $\theta_2 - \theta_{2m}$, получим

$$S^*(\theta_2) = Z_0 - z_0^2/2 - \rho_{21}^2(\theta_2 - \theta_{2m})/2T_{\max} + \rho_{21}^2 q(\theta_{2m}) \min(\theta_2 - \theta_{2m}, \theta_{02} - \theta_{2m})/T_{\max}. \quad (2.1.5)$$

Корреляционную функцию (2.1.3) разлагаем в ряд Маклорена по $\min(\theta_{12} - \theta_{2m}, \theta_{22} - \theta_{2m})$, тогда

$$B^*(\theta_{12}, \theta_{22}) = z_0^2 + \rho_{21}^2 \min(\theta_{12} - \theta_{2m}, \theta_{22} - \theta_{2m})/T_{\max}. \quad (2.1.6)$$

В выражениях (2.1.5) и (2.1.6) отброшены все члены разложения выше первой степени и введены обозначения

$$q(t) = f(t)/g(t), \quad \rho_{21}^2 = 2g^2(\theta_{2m})T_{\max}/N_0, \quad (2.1.7)$$

$$z_0^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_{2m}} g^2(t) dt, \quad Z_0 = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\theta_{01}, \theta_1^*)}^{\theta_{2m}} f(t)g(t) dt.$$

Будем аппроксимировать случайный процесс $L^*(\theta_2)$ гауссовским случайным процессом $M(\theta_2)$ с математическим ожиданием $S^*(\theta_2)$ (2.1.5) корреляционной функцией $B^*(\theta_{12}, \theta_{22})$ (2.1.6). Очевидно, такой аппроксимацией можно пользоваться при неотрицательной дисперсии

$$D^*(\theta_2) = B^*(\theta_2, \theta_2) = z_0^2 + \rho_{21}^2(\theta_2 - \theta_{2m})^2/T_{\max} \quad (2.1.8)$$

случайного процесса $M(\theta_2)$. Нетрудно убедиться, что функция (2.1.8) отрицательна при $\theta_2 < \theta_{2n} = \theta_{2m} - z_0^2 T_{\max} / \rho_{21}^2$. Если $\theta_{2n} \in [\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$, будем рассматривать случайный процесс $M(\theta_2)$ на отрезке $[\theta_{2n}, \theta_{2\max}]$, на левой границе которого $\theta_2 = \theta_{2n}$, он обладает нулевой дисперсией и равен

$$M(\theta_{2n}) = B = S^*(\theta_{2n}) = Z_0 - \rho_{21}^2 q(\theta_{2m}) \max\left(z_0^2 / \rho_{21}^2, (\theta_{2m} - \theta_{02}) / T_{\max}\right).$$

Пользуясь выражениями (2.1.5), (2.1.6), а также теоремой Дуба [13,54,55] в изложении [126], можно показать, что случайный процесс $M(\theta_2)$ является марковским с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \frac{\rho_{21}^2}{2T_{\max}} \begin{cases} q_2, & \max(\theta_{2\min}, \theta_{2n}) \leq \theta_2 \leq \theta_{2m}, \\ -1, & \theta_{2m} < \theta_2 \leq \theta_{2\max}, \end{cases} \quad k_2 = \rho_{21}^2 / T_{\max} \quad (2.1.9)$$

соответственно, где $q_2 = 2q(\theta_{2m}) - 1$.

В приложении найдена плотность вероятности (П.30) положения наибольшего максимума марковского случайного процесса $Y(t), t \in [T_1, T_2]$, с коэффициентами сноса и диффузии (П.1). Сопоставляя выражения (2.1.9) и (П.1), видим, что для получения плотности вероятности КП оценки (2.1.1) необходимо воспользоваться плотностью (П.30) при $d_1^2 = \rho_{21}^2 q_2^2 / 2T_{\max}$, $d_2^2 = \rho_{21}^2 / 2T_{\max}$, $R = q_2$,

$$z_1^2 = d_1^2 (\theta_{2m} - \max(\theta_{2\min}, \theta_{2n})) = \rho_{21}^2 q_2^2 \min(\mu_2, z_0^2 / \rho_{21}^2) / 2,$$

$$z_2^2 = d_2^2 (\theta_{2\max} - \theta_{2m}) = \rho_{21}^2 m_2 / 2, \quad t_0 = \theta_{2m}, \quad (2.1.10)$$

$$\mu_2 = (\theta_{2m} - \theta_{2\min}) / T_{\max}, \quad m_2 = (\theta_{2\max} - \theta_{2m}) / T_{\max} = \eta_2 - \mu_2.$$

В результате записываем асимптотическую условную плотность вероятности КП оценки момента исчезновения (2.1.1) в виде

$$W(\theta_2) = \frac{\rho_{21}^2}{T_{\max}} \begin{cases} q_2^2 \Psi \left[\rho_{21}^2 q_2^2 (\theta_{2m} - \theta_2) / 2T_{\max}, z_1^2, z_2^2, 1/q_2 \right], \\ \max(\theta_{2\min}, \theta_{2n}) \leq \theta_2 \leq \theta_{2m}, \\ \Psi \left[\rho_{21}^2 (\theta_2 - \theta_{2m}) / 2T_{\max}, z_2^2, z_1^2, q_2 \right], \quad \theta_{2m} < \theta_2 \leq \theta_{2\max}, \end{cases} \quad (2.1.11)$$

где функция $\Psi(y, y_1, y_2, y_3)$ определена в (П.31). В приложении рассмотрены первые два момента случайной величины, описываемой плотностью (П.30), (2.1.11). Используя выражения (П.32) и (П.34), находим асимптотические выражения для смещения и рассеяния КП оценки (2.1.1)

$$b(\tilde{\theta}_2 | \theta_{02}) = \Delta_2 + 2T_{\max} F_b \left[z_2^2, z_1^2, q_2 \right] / \rho_{21}^2 - 2T_{\max} F_b \left(z_1^2, z_2^2, 1/q_2 \right) / \rho_{21}^2 q_2^2, \quad (2.1.12)$$

$$V(\tilde{\theta}_2 | \theta_{02}) = 4T_{\max}^2 F_V \left(z_2^2, z_1^2, q_2 \right) / \rho_{21}^4 + 4T_{\max}^2 F_V \left(z_1^2, z_2^2, 1/q_2 \right) / \rho_{21}^4 q_2^4 + \\ + 2b(\tilde{\theta}(\theta_{01}, \theta_{02}) \Delta_2 - \Delta_2^2,$$

где $\Delta_2 = \theta_{2m} - \theta_{02}$, а функции $F_b(y_1, y_2, y_3)$ и $F_V(y_1, y_2, y_3)$ определены в (П.33) и (П.35) соответственно.

При дальнейшем увеличении ОСШ $\rho_{21} \rightarrow \infty$ плотность вероятности (2.1.11) приобретает вид

$$W(\mu) = \begin{cases} W_0(|\mu|, 1/q_2), & \mu \leq 0, \\ W_0(|\mu|, q_2), & \mu > 0. \end{cases} \quad (2.1.13)$$

Здесь перешли к новой переменной $\mu = \rho_{21}^2 q_2^2 (\theta_2 - \theta_{2m}) / 2T_{\max}$ при $\theta_2 \leq \theta_{2m}$ и $\mu = \rho_{21}^2 (\theta_2 - \theta_{2m}) / 2T_{\max}$ при $\theta_2 > \theta_{2m}$ и воспользовались выражением (П.37)

$$W_0(x, y) = \Psi(x, \infty, \infty, y) = 1 - \Phi \left\{ \sqrt{(x/2)} \right\} + \\ + (2y + 1) \exp \left\{ y(y + 1) \left(x \left\{ 1 - \Phi \left\{ (2y + 1) \sqrt{(x/2)} \right\} \right\} \right) \right\}.$$

С помощью выражения (2.1.13) нетрудно найти асимптотические выражения для условных смещений и рассеяний КП оценки момента исчезновения в виде [90]

$$b(\tilde{\theta}_2 | \theta_{02}) = \Delta_2 + 2T_{\max} \left[q_2^3 (q_2 + 2) - (2q_2 + 1) \right] / \rho_{21}^2 q_2^2 (q_2 + 1)^2, \\ V(\tilde{\theta}_2 | \theta_{02}) = 8T_{\max}^2 \left[q_2^5 (2q_2^2 + 6q_2 + 5) + (5q_2^2 + 6q_2 + 2) \right] / \rho_{21}^4 q_2^4 (q_2 + 1)^3 + \\ + 2\Delta_2 b(\tilde{\theta}_2 | \theta_{02}) - \Delta_2^2. \quad (2.1.14)$$

Согласно (2.1.13) и (2.1.14), эффективность КП оценки момента исчезновения (2.1.1) асимптотически не зависит от незнания момента появления сигнала.

Исследуем теперь состоятельность КП оценки (2.1.1) момента исчезновения. Для этого рассмотрим производную математического ожидания (2.1.2)

$$\frac{dS(\theta_1, \theta_2)}{d\theta_2} = \frac{1}{N_0} \begin{cases} 2g(\theta_2)f(\theta_2) - g^2(\theta_2), \theta_2 < \theta_{02}, \\ -g^2(\theta_2), \theta_2 > \theta_{02}. \end{cases} \quad (2.1.15)$$

Согласно (2.1.15), справа от истинного значения θ_{02} момента исчезновения функция (2.1.2) убывает. Чтобы ее максимальное значение располагалось в точке θ_{02} необходимо, чтобы она возрастала слева от этой точки, то есть

$$g^2(\theta_2) < 2g(\theta_2)f(\theta_2), \quad \theta_2 \in [\theta_{2\min}, \theta_{02}].$$

Это означает, что на отрезке $[\theta_{2\min}, \theta_{02}]$ функции f и g должны быть одного знака и должны удовлетворять соотношению

$$|g(\theta_2)| < 2|f(\theta_2)|. \quad (2.1.16)$$

Таким образом, доказано

Утверждение 1.

Для того, чтобы КП оценка момента исчезновения (2.1.1) была состоятельной необходимо выполнение при $\theta_2 \in [\theta_{2\min}, \theta_{02}]$ двух неравенств: $|g(\theta_2)| < 2|f(\theta_2)|$ и $f(\theta_2)g(\theta_2) > 0$. Тогда $\theta_{2m} = \theta_{02}$, а условные смещение и рассеяние оценки принимают наиболее простой вид

$$b(\tilde{\theta}_2 | \theta_{02}) = 0, \quad V(\tilde{\theta}_2 | \theta_{02}) = 26T_{\max}^2 / \rho_{21}^4. \quad (2.1.17)$$

Заметим также, что выражениями (2.1.17) можно пользоваться при совпадении формы принимаемого и ожидаемого сигналов. Действительно, при $f(t) = g(t)$, $q_2 = 1$, а положение максимума (2.1.4) математического ожидания (2.1.2) совпадает с истинным значением момента исчезновения $\theta_{2m} = \theta_{02}$, $\Delta_2 = 0$.

Рассмотрим в качестве примера КП оценку момента исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22). Будем полагать, что форма опорного сигнала (1.1.23) совпадает с формой принимаемого. Тогда величины (2.1.7) приобретают вид

$$\begin{aligned} q(t) &= 1, \quad \rho_{21}^2 = 3z_r^2 [1 + (1 - \gamma_0)\tau_0/\gamma_0]^2 / 4(1 + \gamma_0 + \gamma_0^2), \\ z_0^2 &= z_r^2 h(\lambda_1^*), \quad Z_0 = z_r^2 h[\min(\lambda_1^*, \lambda_{01})], \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

$$h(x) = \left[(1-\gamma_0)^2 (\lambda_{02}^3 + x^3) + 3(1-\gamma_0^2) (\lambda_{02}^2 - x^2) \right] / 2 + \\ + 3(1+\gamma_0)^2 (\lambda_{02} + x) / 4 \Big/ (\gamma_0^2 + \gamma_0 + 1),$$

где $z_r^2 = 2A_r^2 T_{\max} / N_0$, $\lambda_{02} = (\theta_{02} - \theta) / T_{\max}$ — нормированная положение момента исчезновения принятого сигнала, $\lambda_{01} = (\theta - \theta_{01}) / T_{\max}$ — нормированное положение момента появления принятого сигнала, $\lambda_1^* = (\theta - \theta_1^*) / T_{\max}$ — нормированное положения момента появления ожидаемого сигнала. Согласно (2.1.10) и (2.1.18), наличие расстройки приёмника по моменту появления сигнала $\Delta\lambda_1 = \lambda_1^* - \lambda_{01} \neq 0$ может оказывать влияние на эффективность КП оценки момента исчезновения лишь при $z_0^2 < \rho_{21}^2 \mu_2$. Применительно к сигналу (1.1.22) последнее неравенство имеет вид

$$\left[(1-\gamma_0)^2 (\lambda_{02}^3 + \lambda_1^{*3}) + 3(1-\gamma_0^2) (\lambda_{02}^2 - \lambda_1^{*2}) \right] / 2 + \\ + 3(1+\gamma_0)^2 (\lambda_{02} + \lambda_1^*) / 4 \Big/ (\gamma_0^2 + \gamma_0 + 1) < 3 \left[(1+\gamma_0) + 2(1-\gamma_0)\lambda_{02} \right] (\lambda_{02} - 1/2k) / 4.$$

Как показывает численный расчет на ЭВМ [47,117] смещения и рассеяния (2.1.12), наличие расстройки $\Delta\lambda_1 \in [-0,25; 0,25]$ для всех $\gamma_0 \in [0,01; 100]$ приводит к увеличению рассеяния (2.1.12) лишь при малых ОСШ $z_r < 1$ не более чем на 1%. При больших ОСШ $z_r > 1$ снижения эффективности КП оценки из-за незнания момента появления сигнала не наблюдается. Это позволяет сделать вывод об асимптотической независимости КП оценки момента исчезновения сигнала от незнания его момента появления.

Если форма и моменты исчезновения принятого и опорного сигналов одинаковы, то КП оценка (2.1.1) совпадает с оценкой МП [1,5,6]. Таким образом, МП алгоритм оценивания момента исчезновения заключается в формировании логарифма ФОП $L(\theta_2)$ (1.1.3) для всех возможных значений момента исчезновения (1.1.2) и находить МП оценку как

$$\hat{\theta}_2 = \arg \sup L(\theta_2) \quad (2.1.19)$$

положение максимума сформированной решающей статистики. Блок-схему МП измерителя момента исчезновения можно изобразить в виде рис.2.2.

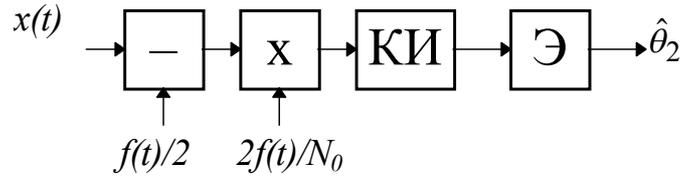


Рис. 2.2.

Здесь коммутируемый интегратор КИ работает на отрезке времени $[\theta_{01}, \theta_{2\max}]$, экстрематор Э, определяет положение максимума выходного сигнала интегратора на отрезке времени $t \in [\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$.

Поскольку МП оценка (2.1.19) является частным случаем КП оценки (2.1.1) при $f(t) = g(t)$, ее асимптотические характеристики можно записать на основе выражений (2.1.11) – (2.1.14):

условная плотность вероятности МП оценки момента исчезновения

$$W(\theta_2) = \frac{\rho_{21}^2}{T_{\max}} \begin{cases} \Psi \left[\rho_{21}^2 (\theta_{02} - \theta_2) / 2T_{\max}, z_1^2, z_2^2, 1 \right], & \max(\theta_{2\min}, \theta_{2n}) \leq \theta_2 \leq \theta_{02}, \\ \Psi \left[\rho_{21}^2 (\theta_2 - \theta_{02}) / 2T_{\max}, z_2^2, z_1^2, 1 \right], & \theta_{02} < \theta_2 \leq \theta_{2\max}, \end{cases} \quad (2.1.20)$$

условные смещения и рассеяние оценки МП

$$\begin{aligned} b(\hat{\theta}_2 | \theta_{02}) &= 2T_{\max} \left\{ F_b \left[z_2^2, z_1^2, 1 \right] - F_b \left(z_1^2, z_2^2, 1 \right) \right\} / \rho_{21}^2, \\ V(\hat{\theta}_2 | \theta_{02}) &= 4T_{\max}^2 \left\{ F_V \left[z_2^2, z_1^2, 1 \right] + F_V \left[z_1^2, z_2^2, 1 \right] \right\} / \rho_{21}^4, \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

где

$$\begin{aligned} z_1^2 &= \rho_{21}^2 \min(\mu_2, z_0^2 / \rho_{21}^2) / 2, \quad z_2^2 = \rho_{21}^2 m_2 / 2, \\ \mu_2 &= (\theta_{02} - \theta_{2\min}) / T_{\max}, \quad m_2 = (\theta_{2\max} - \theta_{02}) / T_{\max} = \eta_2 - \mu_2, \\ \rho_{21}^2 &= 2f^2(\theta_{02})T_{\max} / N_0, \quad z_0^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t) dt. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

С увеличением ОСШ величины (2.1.21) приобретают наиболее простой вид

$$b(\hat{\theta}_2 | \theta_{02}) = 0, \quad V(\hat{\theta}_2 | \theta_{02}) = 26T_{\max}^2 / \rho_{21}^4. \quad (2.1.23)$$

Как видно из (2.1.20) – (2.1.23), точность МП оценки момента исчезновения асимптотически не зависит от формы сигнала, а зависит лишь от величины скачка сигнала в момент исчезновения.

Если известна априорная плотность вероятности момента исчезновения $W_{pr}(\theta_2)$, эффективность оценки можно характеризовать безусловным рассеянием [30,112,118]

$$V(\hat{\theta}_2) = \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} W_{pr}(\theta_2) V(\hat{\theta}_2|\theta_2) d\theta_2. \quad (2.1.24)$$

В качестве примера рассмотрим МП оценку (2.1.19) момента исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22). Введем нормированные условное и безусловное рассеяния МП оценки момента исчезновения

$$V_{0m} = V(\hat{\theta}_2|\theta_{02})/T_{\max}^2, \quad V_m = V(\hat{\theta}_2)/T_{\max}^2 \quad (2.1.25)$$

соответственно, которые характеризуют относительную погрешность оценки.

На рис. 2.3 и 2.4 представлены зависимости $V_{0m}(z_r)$, $V_m(z_r)$ соответственно для сигнала (1.1.1), (1.1.22) и $k=4$, $\theta_{01} = \theta_{1\min}$. Сплошными и штриховыми линиями на обоих рисунках показаны нормированные рассеяния (2.1.25), рассчитанные с использованием выражений (2.1.21) и предельных значений (2.1.23) соответственно. Кривые 1 соответствуют наклону скошенной вершины $\gamma_0 = 0,2$, кривые 2 — $\gamma_0 = 1$, кривые 3 — $\gamma_0 = 5$. При расчете условных характеристик оценки предполагалось, что момент исчезновения принятого сигнала равен $\theta_{02} = \theta + T_{\max}/4$, а при расчете безусловных характеристик априорная плотность вероятности момента исчезновения была выбрана равномерной (1.1.30).

Анализ зависимостей рис.2.3, 2.4 показывает, что с увеличением параметра наклона импульса γ_0 снижается эффективность МП оценки момента исчезновения. Это можно объяснить тем, что с ростом γ_0 уменьшается величина скачка сигнала в момент его исчезновения $f(\theta_{02})$.

Рассмотрим возможность применения байесовского подхода к оценке момента исчезновения сигнала. Для синтеза байесовского алгоритма оценивания воспользуемся квадратичной функцией потерь [21,59]

$$C(\gamma_2, \theta_2) = a_2 (\theta_2 - \gamma_2)^2, \quad (2.1.26)$$

где a_2 — некоторая положительная константа. Тогда минимизация апостериорного риска [30,112]

$$R_{ps}(\gamma_2) = k_2 a_2 \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} (\theta_2 - \gamma_2)^2 W_{pr}(\theta_2) \exp[L(\theta_2)] d\theta_2, \quad (2.1.27)$$

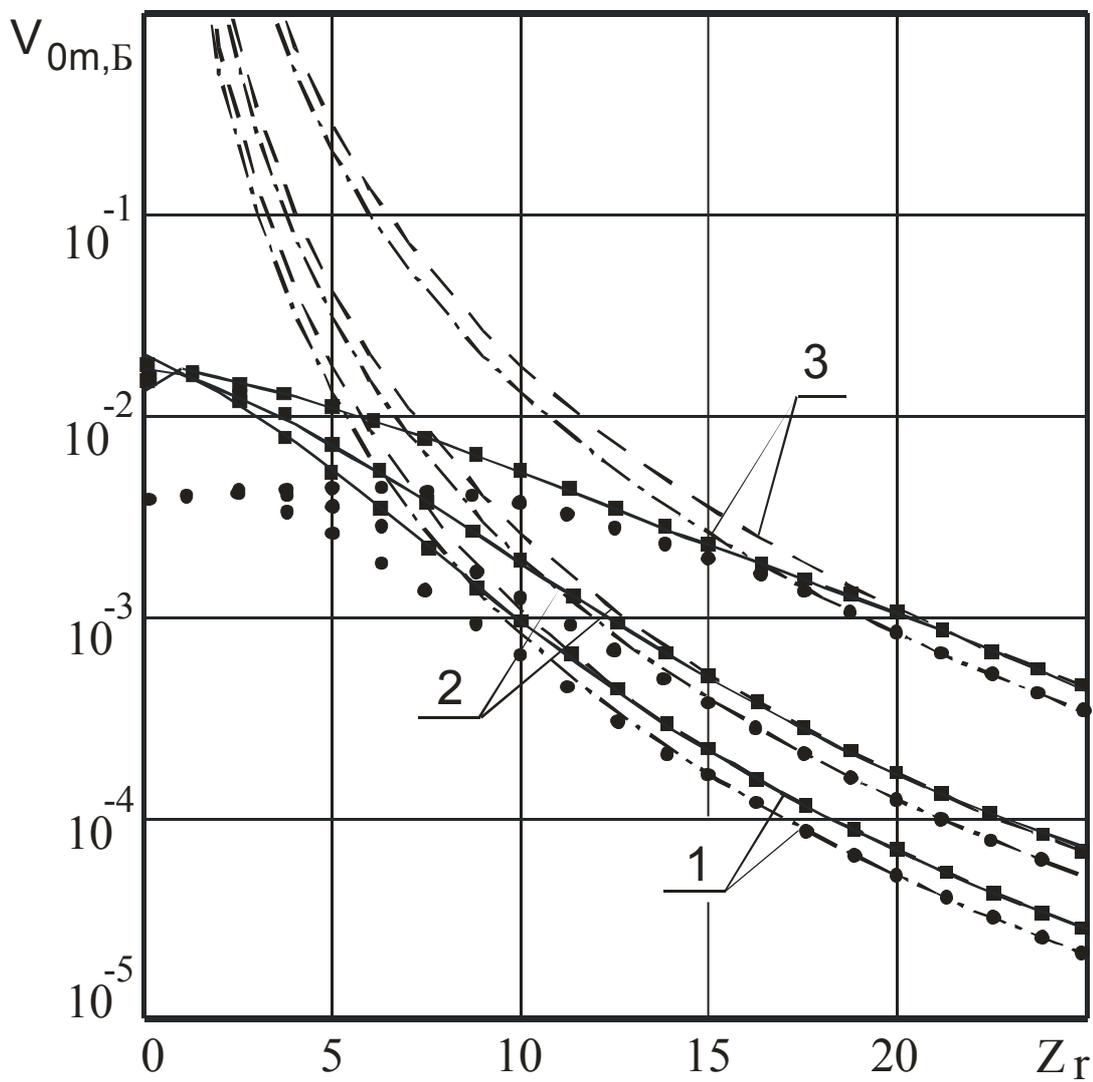


Рис. 2.3 Условные рассеяния оценок момента исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной

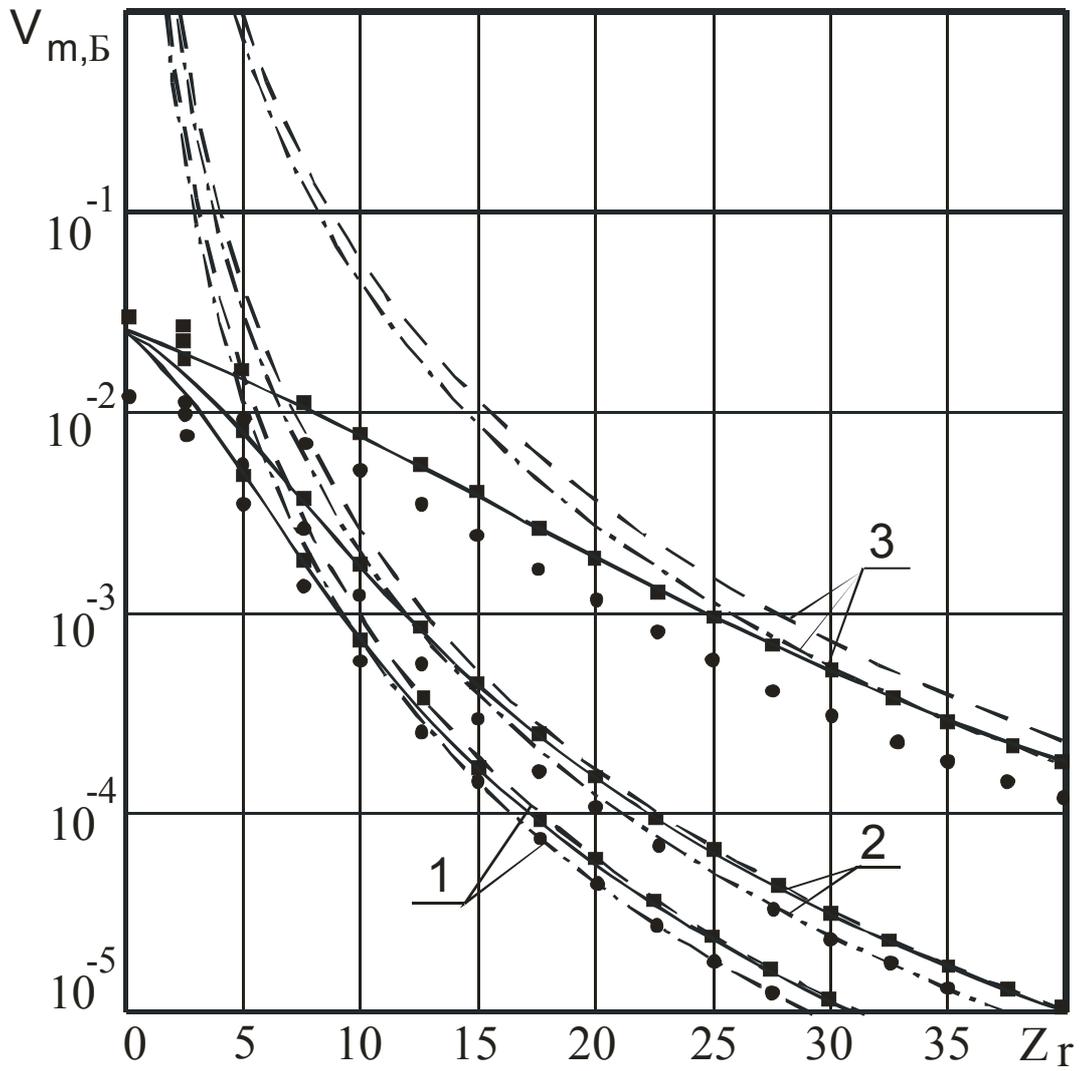


Рис. 2.4 Безусловные рассеяния оценок момента исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной

где $k_2^{-1} = \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} W_{pr}(\theta_2) \exp[L(\theta_2)] d\theta_2$ – не зависящая от θ_2 константа, рав-

носившая минимизации среднего квадрата ошибки (рассеяния) оценки. Положение минимума риска (2.1.27) находим из решение уравнения

$\left[dR_{ps}(\gamma_2)/d\gamma_2 \right]_{\gamma_2=\theta_2} = 0$ и получаем для байесовской оценки

$$\theta_{2B} = \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \theta_2 W_{pr}(\theta_2) \exp[L(\theta_2)] d\theta_2 / \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} W_{pr}(\theta_2) \exp[L(\theta_2)] d\theta_2. \quad (2.1.28)$$

Поскольку оценка (2.1.28) не зависит от величины a_2 , то без ограничения общности можно положить $a_2 = 1$. Тогда байесовский риск [30,112]

$$R_B = V(\theta_{2B}) \quad (2.1.29)$$

совпадает с безусловным рассеянием оценки.

Блок-схему байесовского измерителя (2.1.28) момента исчезновения можно изобразить в виде рис. 2.5, где коммутируемые интеграторы КИ1, КИ2 работают в интервалах времени: $[\theta_{01}, \theta_{2\max}]$, $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$ соответственно. Оценка формируется в момент времени $t = \theta_{2\max}$.

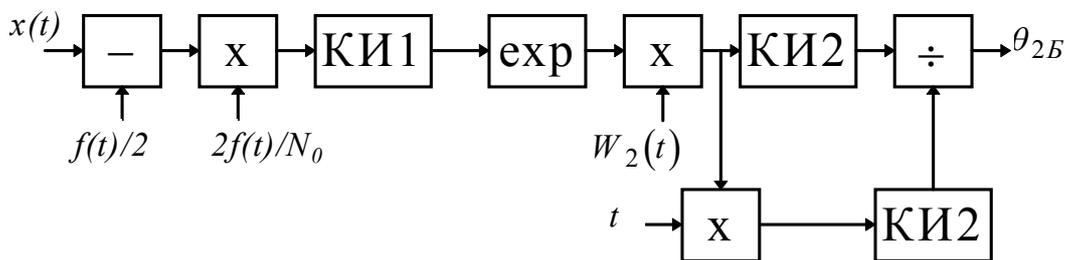


Рис. 2.5.

Теоретический анализ байесовского измерителя момента исчезновения сигнала наталкивается на серьезные математические трудности. Однако, используя результаты [14], можно записать приближенное выражение для условного рассеяния байесовской оценки (2.1.28), справедливое при больших ОСШ

$$b(\theta_{2B}|\theta_{02}) = 0, \quad V(\theta_{2B}|\theta_{02}) = 19,5T_{\max}^2 / \rho_{21}^4. \quad (2.1.30)$$

Тогда аналогично (2.1.24) запишем предельное значение безусловного рассеяния байесовской оценки момента исчезновения

$$V(\theta_{2B}) = 19,5T_{\max}^2 \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} W(\theta_{02}) \rho_{21}^{-4} d\theta_{02}. \quad (2.1.31)$$

На рис. 2.3 и 2.4 штрих-пунктирными линиями показаны зависимости нормированных рассеяний

$$V_{0з} = V(\theta_{2Б} | \theta_{02}) / T_{\max}^2 \quad \text{и} \quad V_B = V(\theta_{2Б}) / T_{\max}^2 \quad (2.1.32)$$

соответственно от ОСШ z_r для прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22), $k=4$. При расчете условных характеристик оценки предполагалось, что момент исчезновения принятого сигнала равен $\theta_{02} = \theta + T_{\max}/4$, а при расчете безусловных характеристик априорная плотность вероятности момента исчезновения была выбрана равномерной (1.1.30).

С целью проверки работоспособности синтезированных алгоритмов и установления границ применимости асимптотических выражений для характеристик оценок проводилось статистическое моделирование МП (2.1.19) и байесовского (2.1.28) алгоритмов оценивания момента исчезновения сигнала на примере прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22). Методика моделирования описана в главе 4.

Результаты статистического моделирования показаны на рис. 2.3, 2.4. Квадратиками изображены экспериментальные значения рассеяний МП оценки момента исчезновения, кружками — байесовской оценки момента исчезновения. Как видно из рисунков, асимптотические зависимости рассеяний, рассчитанные с использованием выражений (2.1.21), в более широком диапазоне ОСШ удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, чем зависимости, рассчитанные с использованием выражений (2.1.23). Заметим, что согласование рассеяний, полученных в результате моделирования с предельными значениями (2.1.23) существенным образом зависит от величины скачка сигнала в оцениваемый момент появления или исчезновения. Например, для $\gamma_0 = 5$ (скачок сигнала в момент исчезновения меньше) экспериментальные значения рассеяния МП оценки момента исчезновения совпадают с рассеянием (2.1.23) при $z_r > 30$, а для $\gamma_0 = 0,2$ (скачок сигнала больше) — при $z_r > 7$. Асимптотические выражения (2.1.21) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные зависимости при $z_r > 4$.

В работе [76] синтезированы максимально правдоподобный и оптимальный (байесовский) алгоритмы измерения длительности сигнала произвольной формы при совпадающих формах принимаемого и опорного сигналов. Получены точные выражения для характеристик максимально правдоподобных алгоритмов. С помощью моделирования на ЭВМ определены характеристики байесовских алгоритмов. При оценке длительности сигнала, если не требуется очень высокая точность оценки, возможно применение максимально правдоподобного измерителя, который более просто реализу-

ется аппаратурно. Если же необходимо обеспечить предельную достижимую точность оценки, то целесообразно использовать байесовский измеритель. Точные характеристики эффективности максимально правдоподобного алгоритма оценивания длительности зависят от формы сигнала, однако асимптотические (при больших отношениях сигнал/шум) условные характеристики максимально правдоподобной и байесовской оценок определяются только величиной скачка сигнала в момент его исчезновения.

Большое практическое значение имеют также случаи, когда передача ведётся по неустойчивому каналу связи, в котором возможно пропадание сигнала. Такими являются каналы, использующие отражение радиоволн от метеорных следов или от спорадического слоя E в нижних слоях ионосферы, а также каналы подвижной радиосвязи в условиях пересечённой местности и др. Если сам факт присутствия сигнала во входной реализации не является информативным, то приходим к задаче оценки длительности пропадающего сигнала. В работе [77] рассмотрены МП и байесовский алгоритмы оценки длительности сигнала произвольной формы, присутствующего в принятой реализации с вероятностью, меньшей 1. Выполнен синтез квази- и максимально правдоподобных алгоритмов оценки, найдены точные выражения для их характеристик. Выполнено статистическое моделирование на ЭВМ байесовских и квазيبайесовских алгоритмов оценки на примере импульса со скошенной вершиной. Оптимальные алгоритмы, учитывающие возможное пропадание сигнала требуют вынесения комплексного решения о наличии или отсутствии сигнала (обнаружения) совместно с оценкой его длительности. Обнаружение осуществляется путём сравнения решающей статистики с порогом. В работе [78] исследованы байесовский и максимально правдоподобный алгоритмы совместного обнаружения и оценки длительности сигнала. Исследовано влияние выбора порога на эффективность функционирования обобщённого МП алгоритма совместного обнаружения и оценивания с целью минимизации безусловного среднего рассеяния. Выбор оптимального порога в максимально правдоподобном приёмнике позволяет существенно улучшить эффективность обработки при совместном обнаружении-оценке. В этом случае при одинаковом объёме используемой априорной информации и равномерном априорном распределении неизвестной длительности, средняя вероятность ошибки обнаружения байесовского и максимально правдоподобного алгоритмов практически совпадают. В то же время байесовский алгоритм обеспечивает оценку с меньшим безусловным рассеянием по сравнению с оценкой максимального правдоподобия. Однако использование байесовского алгоритма приводит к относительно более сложной аппаратурной реализации приёмного устройства. Таким образом, байесовский алгоритм целесообразно применять при высоких требованиях к качеству оценки, а максимально правдоподобный алго-

ритм с оптимизированным порогом при необходимости достаточно простой аппаратной реализации.

В практических приложениях, требующих как можно более быстрого принятия решения можно использовать однопороговый последовательный алгоритм оценивания. В работе [63] выполнен синтез однопорогового последовательного алгоритма оценки длительности сигнала произвольной формы, полагая, что сигнал присутствует в наблюдаемой реализации с вероятностью 1. Приведена блок-схема порогового обнаружителя. Показана возможность представления решающей статистики в виде марковского случайного процесса. Найдены точные выражения для рассеяния оценки и времени формирования оценки. Применение порогового алгоритма может привести к существенным потерям в точности оценки по сравнению с алгоритмом максимального правдоподобия.

Если мощность принимаемого сигнала априори неизвестна, необходимо использовать алгоритмы оценивания длительности сигнала с неизвестной амплитудой. В работе [88] решается задача синтеза и анализа оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов оценивания длительности сигнала произвольной формы с неизвестной амплитудой. Синтезированы квази-правдоподобный и максимально правдоподобный алгоритмы оценки длительности сигнала произвольной формы с неизвестной амплитудой. Найдены характеристики эффективности функционирования синтезированных алгоритмов. С помощью ЭВМ проверена работоспособность алгоритмов и определены границы применимости асимптотических выражений.

В тех практических приложениях, где используются сигналы с высокочастотным заполнением (радиосигналы), с неизвестными начальной фазой или начальной фазой и амплитудой целесообразно применять результаты работ [23] и [25]. В указанных работах синтезированы квази-правдоподобный и максимально правдоподобный алгоритмы оценки длительности радиосигнала произвольной формы с неизвестными начальной фазой [23] и амплитудой и начальной фазой [25]. Предложены блок-схемы устройств, вырабатывающих оценку длительности. Выполнено сравнение сложности технической или программной реализации синтезированных алгоритмов. Найдены характеристики синтезированных алгоритмов и выполнено сравнение точности оценок длительности. Показано, что точность квази-правдоподобной оценки может существенно уступать точности максимально правдоподобной оценки. В качестве примера рассмотрена оценка длительности прямоугольного импульса со скошенной вершиной.

В [24] исследована оценка длительности пропадающего сигнала. Рассмотрен квази-правдоподобный алгоритм оценки, не учитывающий возможного пропадания сигнала, а также МП алгоритм, функционирующий с учё-

том возможного пропадания и осуществляющий совместное обнаружение и оценку длительности радиосигнала.

2.2. Квазиправдоподобная оценка моментов появления и исчезновения

Предположим теперь, что подлежат оценке как момент исчезновения, так и момент появления сигнала (1.1.1), которые могут принимать свои значения из априорных интервалов (1.1.2). Следовательно, располагая наблюдаемой на входе приёмника реализацией $x(t) = s(t, \theta_{01}, \theta_{02}) + n(t)$ аддитивной смеси сигнала и шума $n(t)$, необходимо сформировать совместную оценку моментов появления θ_{01} и исчезновения θ_{02} . Если на приёмной стороне неизвестна также форма принимаемого сигнала, можно воспользоваться КП алгоритмом оценивания, согласно которому приёмник должен формировать решающую статистику (1.2.2) для всех возможных значений моментов появления и исчезновения (1.1.2) и сигнала некоторой ожидаемой формы $g(t)$. КП оценки этих моментов являются положениями абсолютно-го максимума поля (1.2.2)

$$(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = \arg \sup L^*(\theta_1, \theta_2). \quad (2.2.1)$$

Очевидно, необходимость формирования двумерного случайного поля $L^*(\theta_1, \theta_2)$ приводит к существенным трудностям в технической реализации приёмника. Частично избежать этих трудностей можно, если представить случайное поле (1.2.2) в виде суммы

$$L^*(\theta_1, \theta_2) = L(\theta_1) + L(\theta_2) \quad (2.2.2)$$

двух статистически независимых гауссовских случайных процессов (1.2.26) и (1.2.27). Тогда КП оценки моментов появления и исчезновения можно искать отдельно как

$$\tilde{\theta}_1 = \arg \sup L_1(\theta_1), \quad \tilde{\theta}_2 = \arg \sup L_2(\theta_2). \quad (2.2.3)$$

В силу статистической независимости процессов $L(\theta_1)$ и $L(\theta_2)$, оценки (2.2.3) также статистически независимы.

Таким образом, согласно представлению (2.2.2), приёмник должен формировать два статистически независимых случайных процесса $L(\theta_1)$, $L(\theta_2)$ и находить положения их максимумов на априорных отрезках возможных значений моментов появления и исчезновения. Блок-схема приёмника может быть реализована в виде рис.2.6.

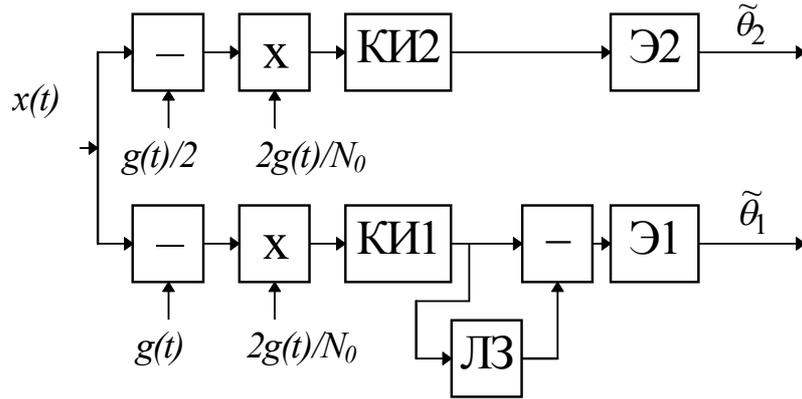


Рис. 2.6.

Здесь коммутируемые интеграторы КИ1 и КИ2 работают в интервалах времени $[\theta_{1\min}, \theta]$, $[\theta, \theta_{2\max}]$ соответственно. ЛЗ — линия задержки, осуществляющая задержку сигнала на время $t = \theta - \theta_{1\min}$, Э1 и Э2 — экстрематоры, определяющие положение максимума сигнала на интервалах времени $[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$, $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$.

Перейдем к анализу КП алгоритма оценивания (2.2.3) и найдем характеристики КП оценок моментов появления и исчезновения. Для этого воспользуемся асимптотическим представлением (1.2.52) для решающей статистики (1.2.2) в виде суммы двух случайных процессов $M_{11}(\theta_1)$ и $M_{21}(\theta_2)$. Следовательно, при больших ОСШ (1.2.35) $z \gg 1$ можем приближенно записать

$$\tilde{\theta}_1 = \arg \sup M_{11}(\theta_1), \quad \tilde{\theta}_2 = \arg \sup M_{21}(\theta_2). \quad (2.2.4)$$

Рассмотрим сначала процесс $M_{21}(\theta_2)$. Он является гауссовским марковским с математическим ожиданием (1.2.48), корреляционной функцией (1.2.50) и коэффициентами сноса и диффузии (1.2.64). Распределение положения максимума марковского случайного процесса с коэффициентами сноса и диффузии (П.1) найдено в приложении. Подставляя выражения (1.2.64) в (П30), получаем асимптотическую плотность вероятности КП оценки момента исчезновения (2.2.3)

$$W(\theta_2) = \frac{\rho_{21}^2}{T_{\max}} \begin{cases} q_2^2 \Psi \left[\rho_{21}^2 q_2^2 (\theta_{2m} - \theta_2) / 2T_{\max}, z_{12}^2, z_{22}^2, 1/q_2 \right], & \max(\theta_{2\min}, \theta_{2n}) \leq \theta_2 \leq \theta_{2m}, \\ \Psi \left[\rho_{21}^2 (\theta_2 - \theta_{2m}) / 2T_{\max}, z_{22}^2, z_{12}^2, q_2 \right], & \theta_{2m} < \theta_2 \leq \theta_{2\max}, \end{cases} \quad (2.2.5)$$

где функция $\Psi(y, y_1, y_2, y_3)$ определена в (П.31),

$$z_{12}^2 = \rho_{21}^2 q_2^2 \min(\mu_2, z_0^2 / 2\rho_{21}^2) / 2, \quad z_{22}^2 = \rho_{21}^2 m_2 / 2, \quad (2.2.6)$$

$$\mu_2 = (\theta_{2m} - \theta_{2\min})/T_{\max}, \quad m_2 = (\theta_{2\max} - \theta_{2m})/T_{\max} = \eta_2 - \mu_2,$$

величины ρ_{21} , z_0 введены в (1.2.41), θ_{2m} — в (1.2.34), а θ_{2n} — в (1.2.57).

Случайный процесс $M_{11}(\theta_1)$ является гауссовским с математическим ожиданием (1.2.47) и корреляционной функцией (1.2.49), которые после замены переменных $\lambda = -\theta_1$ приобретают вид (1.2.68) и (1.2.69) соответственно. Поскольку эти выражения с точностью до замены ρ_{11} на ρ_{21} , а λ_m на θ_{2m} совпадают с функциями (1.2.48) и (1.2.50), искомую асимптотическую плотность вероятности КП оценки момента появления можно записать на основе выражения (2.2.5). Заменяем в (2.2.5) ρ_{21} на ρ_{11} , q_2 на q_1 , θ_{2m} на $-\theta_{1m}$, θ_2 на $-\theta_1$, θ_{2n} на $-\theta_{1n}$, $\theta_{2\min}$ на $-\theta_{1\max}$ и $\theta_{2\max}$ на $-\theta_{1\min}$, получим

$$W(\theta_1) = \frac{\rho_{11}^2}{T_{\max}} \begin{cases} \Psi \left[\rho_{11}^2 (\theta_{1m} - \theta_1) / 2T_{\max}, z_{21}^2, z_{11}^2, q_1 \right], & \theta_{1\min} < \theta_1 \leq \theta_{1m}, \\ q_1^2 \Psi \left[\rho_{11}^2 q_1^2 (\theta_1 - \theta_{1m}) / 2T_{\max}, z_{11}^2, z_{21}^2, 1/q_1 \right], & \theta_{1m} \leq \theta_1 \leq \min(\theta_{1\max}, \theta_{1n}). \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Здесь обозначено

$$z_{11}^2 = \rho_{11}^2 q_1^2 \min(\mu_1, z_0^2 / 2\rho_{11}^2) / 2, \quad z_{21}^2 = \rho_{11}^2 m_1 / 2, \quad (2.2.8)$$

$$\mu_1 = (\theta_{1\max} - \theta_{1m}) / T_{\max}, \quad m_1 = (\theta_{1m} - \theta_{1\min}) / T_{\max} = \eta_1 - \mu_1,$$

величины ρ_{11} , z_0 введены в (1.2.41), θ_{1m} — в (1.2.34), а θ_{1n} — в (1.2.57).

Используя выражения (2.2.5) и (2.2.7), находим условные асимптотические смещения и рассеяния совместных КП оценок моментов появления и исчезновения

$$b(\tilde{\theta}_i | \theta_{01}, \theta_{02}) = \Delta_i + (-1)^i 2T_{\max} \left\{ F_b \left[z_{2i}^2, z_{1i}^2, q_i \right] / \rho_{i1}^2 - F_b \left(z_{1i}^2, z_{2i}^2, 1/q_i \right) / \rho_{i1}^2 q_i^2 \right\}, \quad (2.2.9)$$

$$V(\tilde{\theta}_i | \theta_{01}, \theta_{02}) = 4T_{\max}^2 F_V \left(z_{2i}^2, z_{1i}^2, q_i \right) / \rho_{i1}^4 + 4T_{\max}^2 F_V \left(z_{1i}^2, z_{2i}^2, 1/q_i \right) / \rho_{i1}^4 q_i^4 + \\ + 2b(\tilde{\theta}_i | \theta_{01}, \theta_{02}) \Delta_i - \Delta_i^2, \quad \Delta_i = \theta_{im} - \theta_{0i}, \quad i = 1, 2,$$

где функции $F_b(y_1, y_2, y_3)$ и $F_V(y_1, y_2, y_3)$ определены в (П.33) и (П.35) соответственно.

Введем в рассмотрение нормированные отклонения КП оценок моментов появления и исчезновения от положений максимума (1.2.34) математического ожидания (1.2.31) решающей статистики (1.2.2)

$$\tilde{l}_1 = \begin{cases} \rho_{11}^2 (\theta_{1m} - \tilde{\theta}_1) / 2T_{\max}, & \theta_{1\min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1m}, \\ \rho_{11}^2 q_1^2 (\theta_{1m} - \tilde{\theta}_1) / 2T_{\max}, & \theta_{1m} < \theta_1 \leq \min(\theta_{1\max}, \theta_{1n}), \end{cases} \quad (2.2.10)$$

$$\tilde{l}_2 = \begin{cases} \rho_{21}^2 q_2^2 (\tilde{\theta}_2 - \theta_{2m}) / 2T_{\max}, & \max(\theta_{2\min}, \theta_{2n}) \leq \theta_2 \leq \theta_{2m}, \\ \rho_{21}^2 (\tilde{\theta}_2 - \theta_{2m}) / 2T_{\max}, & \theta_{2m} < \theta_2 \leq \theta_{2\max}. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Учитывая правила преобразования переменных в плотности вероятности, запишем асимптотическую плотность вероятности случайных величин (2.2.10) и (2.2.11) в виде

$$W(l_i) = \begin{cases} \Psi[|l_i|, z_{1i}^2, z_{2i}^2, 1/q_i], & 0 \leq l_i, \\ \Psi[|l_i|, z_{2i}^2, z_{1i}^2, q_i], & l_i > 0, \end{cases} \quad i=1,2. \quad (2.2.12)$$

При дальнейшем увеличении ОСШ $\rho_{i1} \rightarrow \infty$, $i=1,2$, согласно (П.38), перепишем плотность (2.2.12) как

$$W(l_i) = \begin{cases} W_0(|l_i|, 1/q_i), & 0 \leq l_i, \\ W_0(|l_i|, q_i), & l_i > 0, \end{cases} \quad i=1,2, \quad (2.2.13)$$

где функция $W_0(x, y)$ определена в (П.37).

С помощью выражения (2.2.13) нетрудно найти предельные выражения для условных смещений и рассеяний КП оценки моментов появления и исчезновения при $\rho_{i1} \rightarrow \infty$

$$b(\tilde{\theta}_i | \theta_{01}, \theta_{02}) = \Delta_i + (-1)^i 2T_{\max} \left[q_i^3 (q_i + 2) - (2q_i + 1) \right] / \rho_{i1}^2 q_i^2 (q_i + 1)^2, \quad (2.2.14)$$

$$V(\tilde{\theta}_i | \theta_{01}, \theta_{02}) = 8T_{\max}^2 \left[q_i^5 (2q_i^2 + 6q_i + 5) + (5q_i^2 + 6q_i + 2) \right] / \rho_{i1}^4 q_i^4 (q_i + 1)^3 + 2\Delta_i b(\tilde{\theta}_i | \theta_{01}, \theta_{02}) - \Delta_i^2. \quad (2.2.15)$$

Исследуем теперь состоятельность КП оценок (2.2.3) моментов появления и исчезновения. Для этого рассмотрим математическое ожидание (1.2.31) решающей статистики (1.2.2) и найдем его частные производные

$$\frac{\partial S^*(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = \frac{1}{N_0} \begin{cases} g^2(\theta_1), & \theta_1 < \theta_{01}, \\ -2g(\theta_1)f(\theta_1) + g^2(\theta_1), & \theta_1 > \theta_{01}, \end{cases} \quad (2.2.16)$$

$$\frac{\partial S^*(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = \frac{1}{N_0} \begin{cases} 2g(\theta_2)f(\theta_2) - g^2(\theta_2), & \theta_2 < \theta_{02}, \\ -g^2(\theta_2), & \theta_2 > \theta_{02}. \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Поскольку частная производная (2.2.16) по θ_1 не зависит от θ_2 , и наоборот производная (2.2.17) по θ_2 не зависит от θ_1 , то положение максимума (1.2.34) $(\theta_{1m}, \theta_{2m})$ математического ожидания (1.2.31) по каждому из аргументов можно искать отдельно. Согласно (2.2.16), слева от истинного значения момента появления $\theta_1 < \theta_{01}$ функция (1.2.31) возрастает по перемен-

ной θ_1 . Чтобы положение ее максимума θ_{1m} совпадало с θ_{01} необходимо, чтобы она убывала справа от θ_{01} , то есть

$$g^2(\theta_1) < 2g(\theta_1)f(\theta_1), \theta_1 \in [\theta_{01}, \theta_{1\max}].$$

Это означает, что на отрезке $[\theta_{01}, \theta_{1\max}]$ функции f и g должны быть одного знака и должны удовлетворять неравенству

$$|g(\theta_1)| < 2|f(\theta_1)|. \quad (2.2.18)$$

Согласно (2.2.17), математическое ожидание (1.2.31) убывает при $\theta_2 > \theta_{02}$ по переменной θ_2 . Чтобы максимальное значение θ_{2m} функции (1.2.31) располагалось в точке θ_{02} необходимо, чтобы она возрастала при $\theta_2 < \theta_{02}$, то есть

$$g^2(\theta_2) < 2g(\theta_2)f(\theta_2), \theta_2 \in [\theta_{2\min}, \theta_{02}].$$

Это означает, что на отрезке $[\theta_{2\min}, \theta_{02}]$ функции f и g должны быть одного знака и должны удовлетворять неравенству (2.2.18).

Таким образом, доказано

Утверждение 2.

А) Чтобы положение максимума функции (1.2.31) по переменной θ_1 совпадало с истинным значением момента появления $\theta_{1m} = \theta_{01}$, а, следовательно, КП оценка момента появления была состоятельной, необходимо, выполнение при $\theta_1 \in [\theta_{01}, \theta_{1\max}]$ двух неравенств: $|g(\theta_1)| < 2|f(\theta_1)|$ и $f(\theta_1)g(\theta_1) > 0$.

Б) Чтобы положение максимума функции (1.2.31) по переменной θ_2 совпадало с истинным значением момента появления $\theta_{2m} = \theta_{02}$, а, следовательно, КП оценка момента исчезновения была состоятельной, необходимо выполнение при $\theta_2 \in [\theta_{2\min}, \theta_{02}]$ двух неравенств: $|g(\theta_1)| < 2|f(\theta_1)|$ и $f(\theta_2)g(\theta_2) > 0$.

Тогда условные смещения (2.2.14) и рассеяния (2.2.15) КП оценок моментов появления и исчезновения принимают вид

$$b(\tilde{\theta}_i | \theta_{01}, \theta_{02}) = (-1)^i 2T_{\max} \left[q_i^3 (q_i + 2) - (2q_i + 1) \right] / \rho_{i1}^2 q_i^2 (q_i + 1)^2, \quad (2.2.19)$$

$$V(\tilde{\theta}_i | \theta_{01}, \theta_{02}) = 8T_{\max}^2 \frac{q_i^5 (2q_i^2 + 6q_i + 5) + (5q_i^2 + 6q_i + 2)}{\rho_{i1}^4 q_i^4 (q_i + 1)^3}. \quad (2.2.20)$$

Заметим, что смещения (2.2.19) оценок при этом обусловлены только разным наклоном математического ожидания (1.2.31) слева и справа от истинных значений θ_{01}, θ_{02} . С увеличением отношения сигнал/шум смещения (2.2.19) стремятся к нулю и не влияют на состоятельность оценок.

Анализ выражений (2.2.15)–(2.2.20) позволяет сделать вывод о том, что асимптотически точность КП оценок моментов появления и исчезновения не зависит от формы принимаемого и опорного сигналов. Она зависит от величины скачка сигнала в моментах появления и исчезновения. Кроме этого, отличие формы опорного сигнала от принимаемого влияет на точность оценок только посредством величин $q_i, i=1,2$, то есть различие форм играет роль лишь в точке $(\theta_{1m}, \theta_{2m})$ (1.2.34), где математическое ожидание (1.2.31) решающей статистики (1.2.2) принимает максимальное значение.

Рассмотрим частный случай, когда опорный сигнал представляет собой ступенчатый импульс (1.2.77). Тогда КП приёмник должен формировать случайное поле (1.2.78) для всех возможных моментов появления и исчезновения и определять КП оценки как положения максимума сформированного поля. Поскольку решающую статистику (1.2.78) можно представить в виде суммы двух статистически независимых случайных процессов (1.2.79), блок-схему КП измерителя моментов появления и исчезновения можно изобразить в виде рис. 2.7

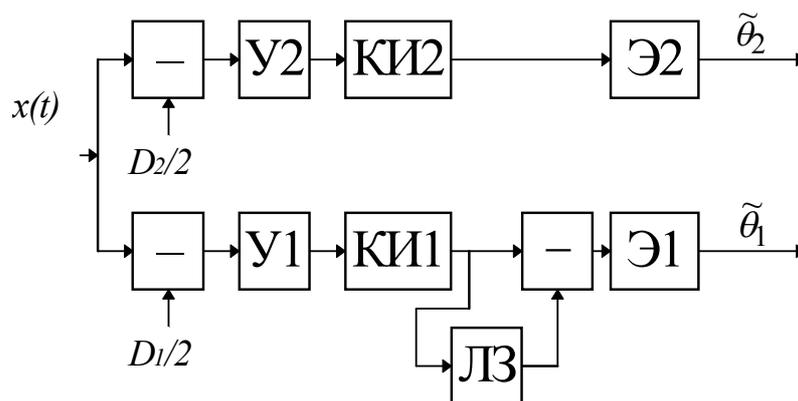


Рис. 2.7.

Здесь усилители $U1$ и $U2$ обладают коэффициентами усиления $2D_1/N_0$ и $2D_2/N_0$, коммутируемые интеграторы $KI1$ и $KI2$ работают в интервалах времени $[\theta_{1\min}, \theta]$, $[\theta, \theta_{2\max}]$ соответственно. ЛЗ — линия задержки, осуществляющая задержку сигнала на время $t = \theta - \theta_{1\min}$, Э1 и Э2 — экстрематоры, определяющие положение максимума сигнала на интервалах времени $[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$, $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$.

Применительно к КП оценкам моментов появления и исчезновения при ступенчатом опорном сигнале (1.2.77) справедливы выражения (2.2.5), (2.2.7) для асимптотических плотностей вероятности, (2.2.9) для смещений и рассеяний оценок, (2.2.14), (2.2.15) для предельных значений смещений и рассеяний оценок, где

$$z_0^2 = 2 \left[D_1^2 (\theta - \theta_{1m}) + D_2^2 (\theta_{2m} - \theta) \right] / N_0, \\ \rho_{i1}^2 = 2D_i^2 T_{\max} / N_0, \quad q_i = f(\theta_{im}) / D_i, \quad i=1,2. \quad (2.2.21)$$

При равной высоте ступенек $D_1 = D_2 = D$ блок схема КП измерителя моментов появления и исчезновения упрощается и принимает вид, показанный на рис 2.8, где усилитель $У$ обладает коэффициентом усиления $2D/N_0$, а все остальные блоки совпадают с аналогичными блоками рис. 2.7.

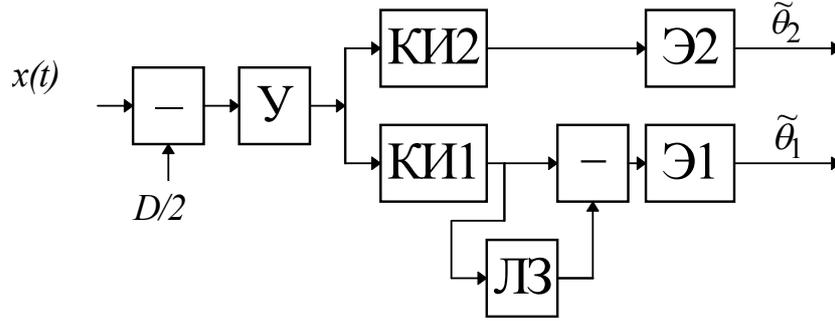


Рис. 2.8.

В качестве примера рассмотрим КП оценку моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22). Выберем опорный сигнал в виде (1.2.77), причем $D_1 < 2f(\theta_1)$ при $\theta_1 \in [\theta_{01}, \theta_{1\max}]$ и $D_2 < 2f(\theta_2)$ при $\theta_2 \in [\theta_{2\min}, \theta_{02}]$. Тогда, согласно Утверждению 2, КП оценки моментов появления и исчезновения являются состоятельными, $\Delta_i = \theta_{im} - \theta_{0i} = 0, i=1,2$. Обозначим $A_r^* = (D_1 + D_2)/2$, $\gamma = D_1/D_2$ и перепишем выражения (2.2.21) в виде

$$q_1 = (1 + \gamma) d \left[1 - 2(\mu_1 + 1/2k)(1 - \gamma_0)/(1 + \gamma_0) \right] / \gamma - 1, \\ q_2 = (1 + \gamma) d \left[1 + 2(\mu_2 + 1/2k)(1 - \gamma_0)/(1 + \gamma_0) \right] - 1, \\ \rho_{11} = 2z_r \gamma / (1 + \gamma), \quad \rho_{21} = 2z_r / (1 + \gamma), \quad (2.2.22) \\ z_0^2 = 4z_r^2 \left[\gamma^2 (\mu_1 + 1/2k) + (\mu_2 + 1/2k) \right] / (1 + \gamma)^2, \\ z_r^2 = 2A_r^{*2} T_{\max} / N_0, \quad d = 3A_r (1 + \gamma)^2 / 4A_r^* (1 + \gamma + 2), \\ \mu_1 = (\theta_{1\max} - \theta_{01}) / T_{\max}, \quad \mu_2 = (\theta_{02} - \theta_{2\min}) / T_{\max}.$$

На рис.2.9 показаны зависимости от γ нормированных условных рассеяний (2.2.9) $V_i = V(\tilde{\theta}_i | \theta_{01}, \theta_{02}) / T_{\max}^2$ КП оценок моментов появления и исчезновения сигнала (1.1.22) при $k = 4$, $\mu_1 = \mu_2 = (k - 2)/4k$ и ступенчатом опорном сигнале (1.2.77). При построении предполагалось, что $d = 1$, $z_r = 10$.

Для наклона скошенной вершины $\gamma_0 = 5$ пунктирная линия соответствует рассеянию момента исчезновения, штрих-пунктирная — момента появления. При $\gamma_0 = 1/5$ кривые меняются местами.

Как видно из рис. 2.9, для $\gamma_0 = 5$ рассеяние момента появления имеет слабовыраженный минимум в точке $\gamma = 2$. Нетрудно убедиться, что при выбранных для построения параметрах при $\gamma = 2$ величины $q_1 = q_2 = 1$. Следовательно, в случае совпадения высоты ступеньки опорного сигнала с величиной скачка принятого сигнала $D_1 = f(\theta_{01})$ КП оценка момента появления имеет минимальное рассеяние. Однако, снижение высоты ступеньки опорного сигнала и скачка принятого сигнала в момент исчезновения приводит к монотонному росту рассеяния как функции γ (штрих-пунктирная кривая).

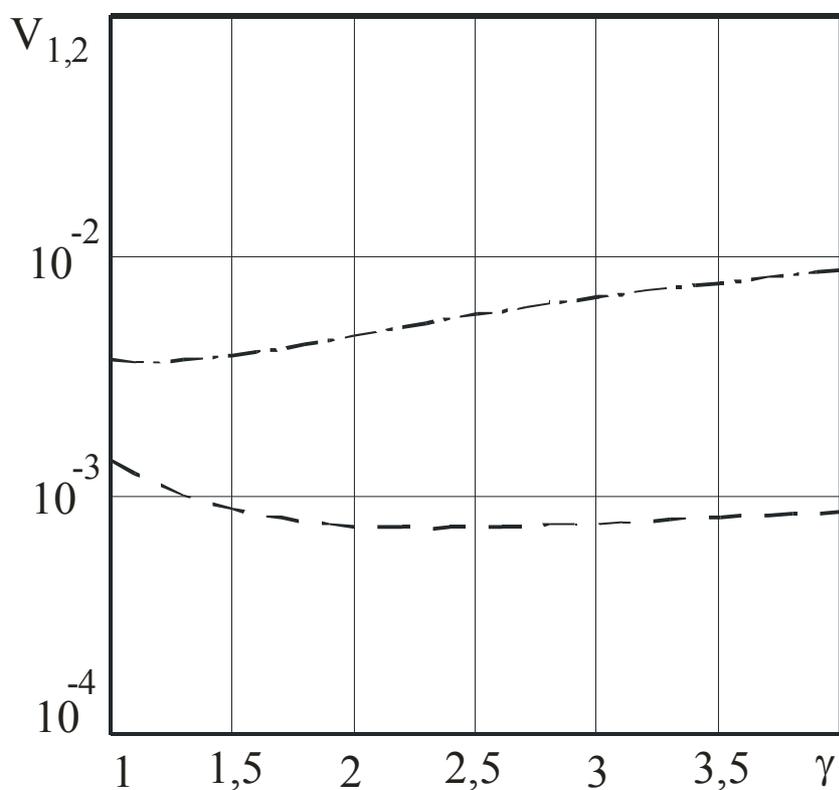


Рис. 2.9 Зависимости условного рассеяния КП оценок моментов появления и исчезновения при ступенчатом опорном сигнале

Это свидетельствует о том, что при малых скачках сигнала большее влияние на эффективность КП оценок моментов появления и исчезновения оказывает сама величина скачка. При увеличении величины скачка наи-

большая эффективность оценок достигается при совпадении величины скачка с высотой ступеньки опорного сигнала.

В работе [84] синтезирован КП алгоритм оценки моментов появления и исчезновения сигнала неизвестной формы. Найдены статистические характеристики оценок. Исследовано влияние априорного незнания формы сигнала на точность КП оценок моментов появления и исчезновения при использовании опорного сигнала прямоугольной формы.

Алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения сигнала с высокочастотным заполнением (радиосигнала) исследованы в работах [97-99,112]. Оценка моментов появления и исчезновения радиосигнала с неизвестной начальной фазой рассмотрена в [112]. Синтезированы КП, МП и квазиоптимальный (КО) алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения радиосигнала с произвольной формой огибающей и неизвестной начальной фазой. При формировании КП оценок моментов появления и исчезновения вместо неизвестной начальной фазы было использовано некоторое её прогнозируемое значение, МП оценок — оценка начальной фазы. Найдены асимптотические характеристики качества функционирования синтезированных алгоритмов. Наилучшей точностью оценки среди рассмотренных обладает МП алгоритм. Однако его аппаратная или программная реализация является наиболее сложной. Для упрощения реализации был предложен КО алгоритм. Точность более простого КО алгоритма оценки асимптотически совпадает с точностью МП алгоритма. Показано, что априорное незнание начальной фазы сигнала при больших отношениях сигнал/шум асимптотически не влияет на точность МП и КО оценок моментов появления и исчезновения сигнала.

КП оценки моментов появления и исчезновения радиосигнала с неизвестными амплитудой и начальной фазой синтезированы в [98]. Квазиправдоподобный приёмник должен формировать решающую статистику и находить оценки моментов появления и исчезновения формируются для некоторых ожидаемых значений амплитуды и начальной фазы. Исследовано влияние априорного незнания амплитуды и начальной фазы на точность оценок моментов появления и исчезновения.

Работы [97,99] посвящены исследованию КП оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного радиоимпульса с неизвестными амплитудой, начальной фазой и частотой. Вместо неизвестной частоты, как предписывает КП алгоритму, было использовано некоторое ожидаемое её значение. Тем самым присутствует расстройка приёмного устройства по частоте. В работе [97] преодоление априорного незнания амплитуды и начальной фазы выполнено на основе КП подхода, то есть вместо неизвестных амплитуды и начальной фазы тоже были использованы их прогнозируемые значения. В [99] была выполнена адаптация приёмного

устройства по амплитуде и начальной фазе. Полученный алгоритм оценивания моментов появления и исчезновения обладает многоканальной структурой. Был предложен эвристический более простой квазиоптимальный алгоритм оценивания, который удаётся реализовать в двухканальной варианте. Он основан на разбиении решающей статистики на сумму двух случайных процессов с последующей адаптацией каждого из них отдельно по неизвестным амплитуде и начальной фазе. Точность квазиоптимальных оценок моментов появления и исчезновения при больших отношениях сигнал/шум асимптотически совпадает с точностью квазиравдоподобных оценок при известных амплитуде и начальной фазе.

2.3. Оптимальная оценка моментов появления и исчезновения

Предположим теперь, что принятый и опорный сигналы имеют одинаковую форму $f(t) = g(t)$. Тогда КП оценки моментов появления и исчезновения (2.2.1) совпадают с оценками МП. Следовательно, алгоритм нахождения оценок МП моментов появления и исчезновения состоит в поиске положения абсолютного максимума логарифма ФОП $L(\theta_1, \theta_2)$ (1.3.1)

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \arg \sup L(\theta_1, \theta_2). \quad (2.3.1)$$

Поскольку случайное поле (1.3.1) аналогично (1.2.26), (1.2.27) можно представить в виде суммы двух статистически независимых случайных процессов

$$L(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2), \quad (2.3.2)$$

$$L_1(\theta_1) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} [x(t) - f(t)/2] f(t) dt, \quad (2.3.3)$$

$$L_2(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} [x(t) - f(t)/2] f(t) dt, \quad (2.3.4)$$

то положение максимума логарифма ФОП $L(\theta_1, \theta_2)$ по переменной θ_1 совпадает с положением максимума случайного процесса $L(\theta_1)$, а по переменной θ_2 – с положением максимума $L(\theta_2)$. В результате для оценок МП (2.3.1) моментов появления и исчезновения аналогично (2.2.3) запишем

$$\hat{\theta}_i = \arg \sup L_i(\theta_i), \quad \theta_i \in [\theta_{i \min}, \theta_{i \max}], i = 1, 2. \quad (2.3.5)$$

Структурную схему МП измерителя моментов появления и исчезновения можно изобразить в виде рис. 2.10.

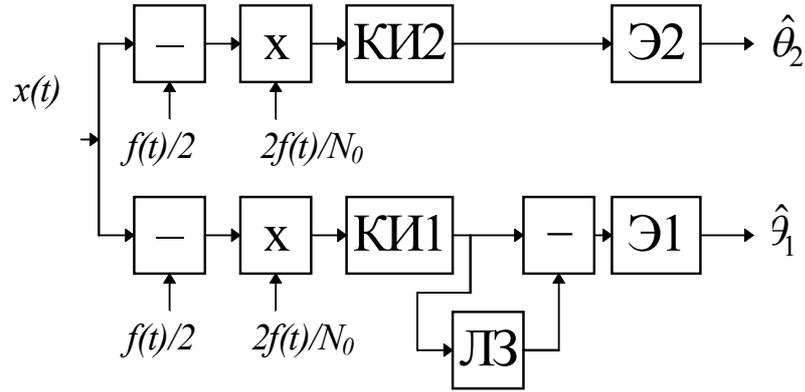


Рис. 2.10.

Здесь коммутируемые интеграторы КИ1 и КИ2 работают в интервалах времени $[\theta_{1\min}, \theta]$, $[\theta, \theta_{2\max}]$ соответственно. ЛЗ — линия задержки, осуществляющая задержку сигнала на время $t = \theta - \theta_{1\min}$, Э1 и Э2 — экстрематоры, определяющие на интервалах времени $[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$ $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$ положения абсолютных максимумов сигналов, которые являются оценками МП моментов появления и исчезновения сигнала (1.1.1).

Как известно [30,60], положение максимума математического ожидания поля (1.3.1) совпадает с истинным значением моментов появления и исчезновения, то есть $\theta_{im} = \theta_{0i}$. Отношение сигнал/шум (1.2.35) на выходе приёмника МП равно

$$z_0^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t) dt. \quad (2.3.6)$$

Асимптотические характеристики МП оценок (2.3.1) запишем на основе аналогичных характеристик КП оценок (2.2.1). Для условных плотностей вероятностей оценок (2.3.1) моментов появления и исчезновения воспользуемся выражениями (2.2.7) и (2.2.5) соответственно, где необходимо положить

$$\rho_{i1}^2 = 2T_{\max} f^2(\theta_{0i}) / N_0, \quad q_i = 1, \quad i = 1, 2. \quad (2.3.7)$$

В результате получаем условные плотности вероятностей оценок (2.3.1)

$$W(\theta_1 | \theta_{01}, \theta_{02}) = \frac{\rho_{11}^2}{T_{\max}} \begin{cases} \Psi \left[\rho_{11}^2 (\theta_{01} - \theta_1) / 2T_{\max}, z_{21}^2, z_{11}^2, 1 \right], & \theta_{1\min} < \theta_1 \leq \theta_{01}, \\ \Psi \left[\rho_{11}^2 (\theta_1 - \theta_{01}) / 2T_{\max}, z_{11}^2, z_{21}^2, 1 \right], & \theta_{01} \leq \theta_1 \leq \min(\theta_{1\max}, \theta_{1n}). \end{cases} \quad (2.3.8)$$

$$W(\theta_2 | \theta_{01}, \theta_{02}) = \frac{\rho_{21}^2}{T_{\max}} \begin{cases} \Psi \left[\rho_{21}^2 (\theta_{02} - \theta_2) / 2T_{\max}, z_{12}^2, z_{22}^2, 1 \right], \\ \max(\theta_{2\min}, \theta_{2n}) \leq \theta_2 \leq \theta_{02}, \\ \Psi \left[\rho_{21}^2 (\theta_2 - \theta_{02}) / 2T_{\max}, z_{22}^2, z_{12}^2, 1 \right], \theta_{02} < \theta_2 \leq \theta_{2\max}, \end{cases} \quad (2.3.9)$$

где функция $\Psi(y, y_1, y_2, y_3)$ определена в (П.31) и обозначено

$$\begin{aligned} z_{1i}^2 &= \rho_{21}^2 \min(\mu_i, z_0^2 / 2\rho_{i1}^2) / 2, & z_{2i}^2 &= \rho_{21}^2 m_i / 2, \\ \mu_1 &= (\theta_{1\max} - \theta_{01}) / T_{\max}, & m_1 &= (\theta_{01} - \theta_{1\min}) / T_{\max} = \eta_1 - \mu_1, \\ \mu_2 &= (\theta_{02} - \theta_{2\min}) / T_{\max}, & m_2 &= (\theta_{2\max} - \theta_{02}) / T_{\max} = \eta_2 - \mu_2, \\ \theta_{1n} &= \theta_{01} + T_{\max} z_0^2 / 2\rho_{11}^2, & \theta_{2n} &= \theta_{02} - T_{\max} z_0^2 / 2\rho_{21}^2. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Используя выражения (2.3.8) и (2.3.9), находим условные асимптотические смещения и рассеяния совместных МП оценок моментов появления и исчезновения

$$b(\hat{\theta}_i | \theta_{01}, \theta_{02}) = (-2)^i T_{\max} \left\{ F_b(z_{2i}^2, z_{1i}^2, 1) - F_b(z_{1i}^2, z_{2i}^2, 1) \right\} / \rho_{i1}^2, \quad (2.3.11)$$

$$V(\hat{\theta}_i | \theta_{01}, \theta_{02}) = 4T_{\max}^2 \left\{ F_V(z_{2i}^2, z_{1i}^2, 1) + F_V(z_{1i}^2, z_{2i}^2, 1) \right\} / \rho_{i1}^4, \quad i = 1, 2, \quad (2.3.12)$$

где функции $F_b(y_1, y_2, y_3)$ и $F_V(y_1, y_2, y_3)$ определены в (П.33) и (П.35) соответственно. Точность выражений (2.3.8) – (2.3.12) возрастает с увеличением ОСШ (2.3.6). Заметим также, что для сигнала прямоугольной формы $f(t) = A_r$ эти асимптотические выражения переходят в точные [72].

Введем в рассмотрение нормированные отклонения МП оценок моментов появления и исчезновения от истинных значений моментов появления и исчезновения принятого сигнала

$$\hat{l}_i = (-1)^i \rho_{i1}^2 (\hat{\theta}_i - \theta_{0i}) / 2T_{\max}, \quad i = 1, 2. \quad (2.3.13)$$

Согласно (2.3.8), (2.3.9), плотности вероятности случайных величин (2.3.13) имеют вид

$$W(l_i) = \begin{cases} \Psi \left[|l_i|, z_{1i}^2, z_{2i}^2, 1 \right], & 0 \leq l_i, \\ \Psi \left[|l_i|, z_{2i}^2, z_{1i}^2, 1 \right], & l_i < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (2.3.14)$$

Переходя в (2.3.14) к пределу при $\rho_{i1} \rightarrow \infty$, находим предельную плотность вероятности ошибки оценки МП моментов появления и исчезновения (2.3.13)

$$W_a(l_i) = W_0(l_i, 1) = 3 \exp(2|l_i|) \left[1 - \Phi\left(3\sqrt{|l_i|/2}\right) \right] + \Phi\left(\sqrt{|l_i|/2}\right) - 1, \quad (2.3.15)$$

где функция $W_0(x, y)$ определена в (П.37). Впервые плотность вероятности (2.3.15), по-видимому получена в [50], а ее свойства изучены и описаны в [61]. Плотность (2.3.15) существенно отличается от гауссовской, имеет нулевые математическое ожидание и коэффициент асимметрии, обладает дисперсией $13/2$ и коэффициентом эксцесса $1779/169 \approx 10,53$.

Используя (2.3.13) и (2.3.15), для предельных значений смещения (2.3.11) и рассеяния (2.3.12) оценок МП (2.3.1) моментов появления и исчезновения можем записать

$$b(\hat{\theta}_i | \theta_{01}, \theta_{02}) = 0, \quad V(\hat{\theta}_i | \theta_{01}, \theta_{02}) = 26T_{\max}^2 / \rho_{i1}^4. \quad (2.3.16)$$

Если воспользоваться представлением оценок МП моментов появления и исчезновения в виде (2.3.5), то формулы (2.3.16) непосредственно следуют из результатов [15]. Действительно, оценки (2.3.5) можно интерпретировать как оценки момента скачкообразного изменения сигнала, наблюдаемого на фоне гауссовского белого шума.

Пусть известна априорная плотность вероятности моментов появления и исчезновения, для которой допустимо представление

$$W_{pr}(\theta_1, \theta_2) = W_{1pr}(\theta_1)W_{2pr}(\theta_2). \quad (2.3.17)$$

Тогда точность оценок МП (2.3.1) можно характеризовать величинами безусловных рассеяний оценок

$$V(\hat{\theta}_i) = \int_{\theta_{1\min}}^{\theta_{1\max}} \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} V(\hat{\theta}_i | \theta_1, \theta_2) W_{pr}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2, \quad (2.3.18)$$

где $V(\hat{\theta}_i | \theta_1, \theta_2)$ определяются из (2.3.12) или (2.3.16).

В качестве примера рассмотрим оценку моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22) [12]. Длины априорных интервалов моментов появления и исчезновения по-прежнему будем характеризовать величиной k (1.1.20), которая может принимать значения из промежутка $[1, \infty)$. При $k=1$ априорные интервалы стягиваются в точку, что соответствует приёму сигнала с известными моментами появления и исчезновения. Длительность такого сигнала равна T_{\max} . Нормированные длины априорных интервалов (1.2.62) равны $\eta_i = (k-1)/2k$, $i=1,2$.

На рис. 2.11 показаны зависимости от ОСШ z_r нормированных на T_{\max}^2 условных рассеяний оценок моментов появления и исчезновения импульса (1.1.22). Предполагалось, что моменты появления и исчезновения принятого сигнала располагаются посередине отрезков $[\theta_{1\min}, \theta]$, $[\theta, \theta_{2\max}]$ соответ-

венно, то есть $\mu_i = (k - 2)/4k$, а величина k была выбрана $k = 4$. При наклоне импульса $\gamma_0 = 5$ кривые 1 на рис.2.11 соответствуют рассеянию момента появления, кривые 2 — момента исчезновения. Если наклон импульса $\gamma_0 = 1/5$, то кривые 1 и 2 меняются местами, то есть кривая 1 иллюстрирует рассеяние момента исчезновения, а кривая 2 — момента появления. Сплошными линиями на рис.2.11 и 2.12 показаны рассеяния, рассчитанные с использованием выражений (2.3.12), штриховыми — с использованием предельных значений рассеяний (2.3.16).

Заметим, что применительно к прямоугольному импульсу с плоской вершиной ($\gamma_0 = 1$) [72] рассеяния оценок МП моментов появления и исчезновения совпадают. На рис. 2.12 изображены зависимости нормированных T_{\max}^2 условных рассеяний оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса, рассчитанные по формуле (2.3.12) (сплошная кривая) и по формулам для предельных значений (2.3.16) (штриховая кривая).

Как видно из рис. 2.11 — 2.12, точность оценок МП тем выше, чем больше скачок сигнала в моментах появления и исчезновения.

Рассмотрим теперь возможность применения байесовского подхода к оценке моментов появления и исчезновения. Положим, что известна априорная плотность вероятности (2.3.17). Для синтеза байесовского алгоритма измерения моментов появления и исчезновения сигнала используем квадратичную функцию потерь [112]

$$C(\chi_1, \chi_2, \theta_1, \theta_2) = a_1(\chi_1 - \theta_1)^2 + a_2(\chi_2 - \theta_2)^2, \quad (2.3.20)$$

где a_i , $i=1,2$ — некоторые положительные константы. При выполнении (2.3.2) и (2.3.17) минимизация апостериорного риска [30,60]

$$R_{ps}(\chi_1, \chi_2) = \sum_{i=1}^2 k_i a_i \int_{\theta_{i\min}}^{\theta_{i\max}} (\theta_i - \chi_i)^2 W_{i\text{pr}}(\theta_i) \exp[L_i(\theta_i)] d\theta_i, \quad (2.3.21)$$

где $k_i^{-1} = \int_{\theta_{i\min}}^{\theta_{i\max}} W_{i\text{pr}}(\theta_i) \exp[L_i(\theta_i)] d\theta_i$, $i=1,2$ — не зависящие от θ_1, θ_2 вели-

чины, равносильна минимизации средних квадратов ошибок (рассеяний) оценок. Положение минимума апостериорного риска (2.3.21) находим из решения системы уравнений $\left[\frac{\partial R_{ps}(\gamma_1, \gamma_2)}{\partial \gamma_i} \right]_{\gamma_i = \theta_{is}} = 0$. Тогда байесовские оценки

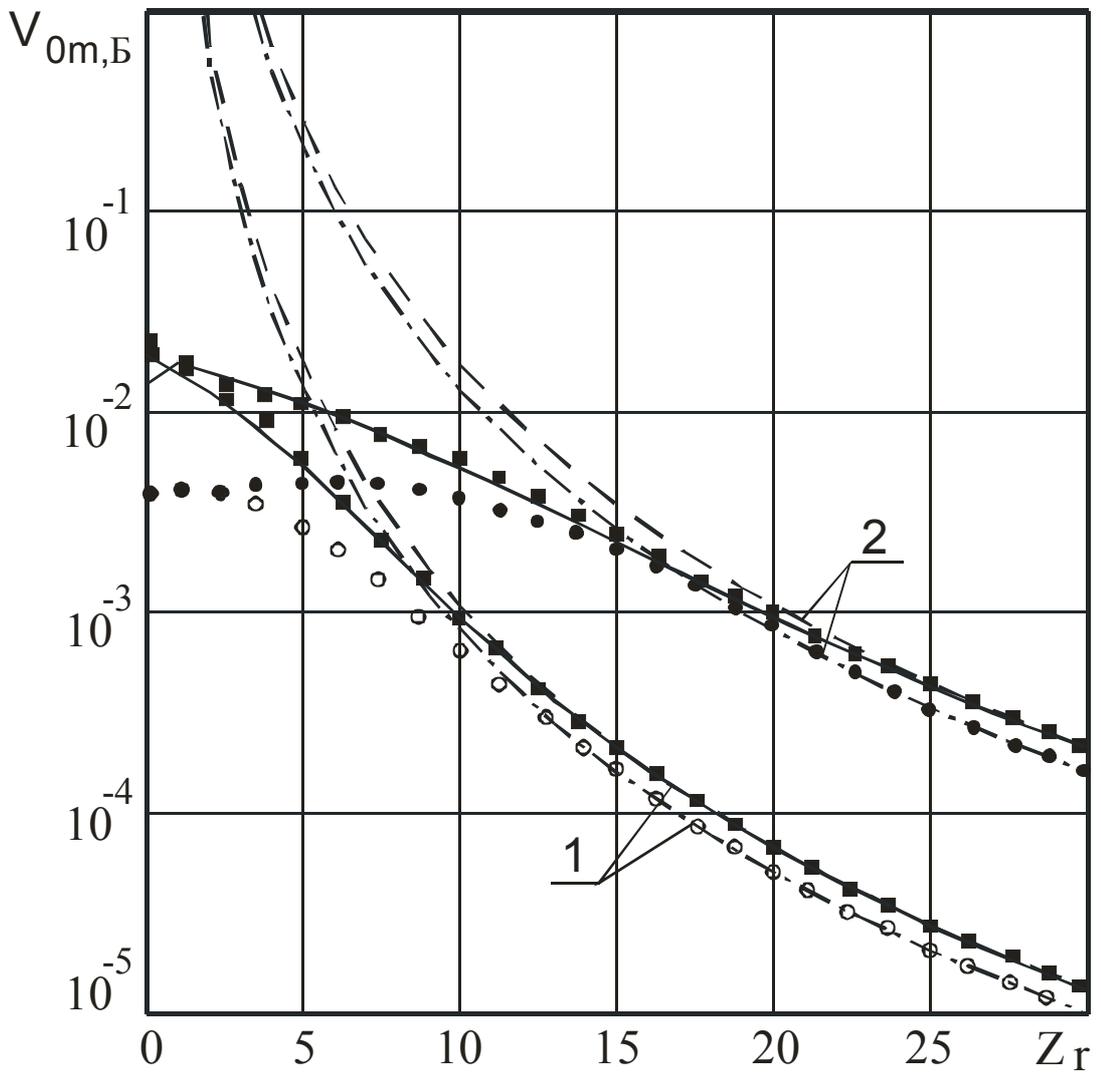


Рис. 2.11 Условные рассеяния оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной

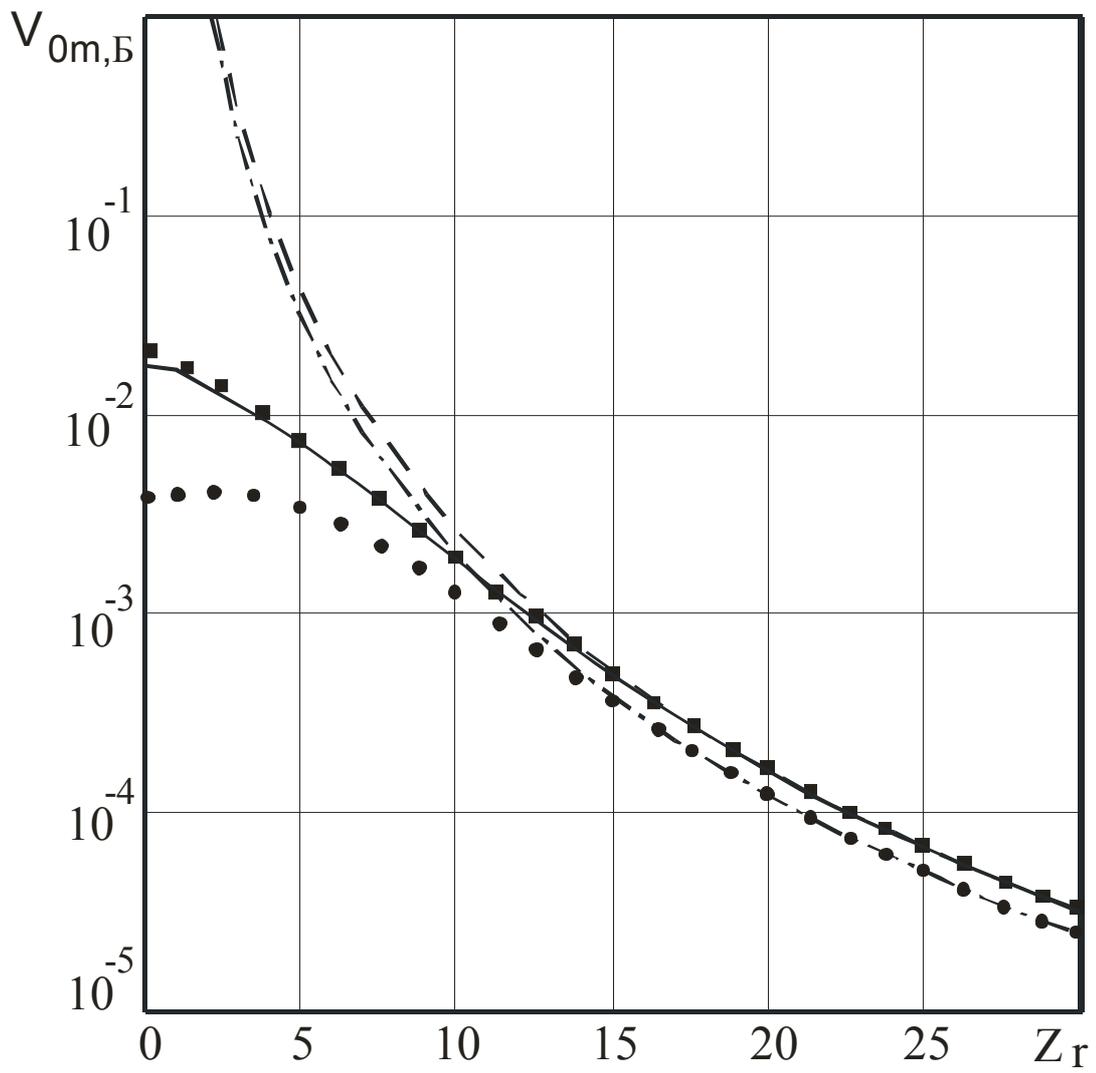


Рис. 2.12 Условные рассеяния оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса

$$\theta_{iB} = \int_{\theta_{i\min}}^{\theta_{i\max}} \theta_i W_{ipr}(\theta_i) \exp[L_i(\theta_i)] d\theta_i / \int_{\theta_{i\min}}^{\theta_{i\max}} W_{ipr}(\theta_i) \exp[L_i(\theta_i)] d\theta_i, i=1,2. \quad (2.3.22)$$

Поскольку оценки (2.3.22) не зависят от величин a_i , то без ограничения общности можно положить $a_i = 1, i = 1, 2$. Следовательно, байесовский риск [30,60]

$$R_B = V(\theta_{1B}) + V(\theta_{2B}) \quad (2.3.23)$$

представляет собой сумму безусловных рассеяний (средних квадратов ошибок) байесовских оценок моментов появления и исчезновения. Аналогично (2.3.23) можно записать риск при использовании МП оценок моментов появления и исчезновения

$$R_{Mn} = V(\hat{\theta}_1) + V(\hat{\theta}_2), \quad (2.3.24)$$

где безусловные рассеяния $V(\hat{\theta}_1), V(\hat{\theta}_2)$ МП оценки определены в (2.3.18).

Структурная схема байесовского алгоритма оценивания моментов появления и исчезновения изображена на рис. 2.13, где коммутируемые интеграторы КИ1 – КИ4 работают в интервалах времени $[\theta, \theta_{2\max}]$, $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$, $[\theta_{1\min}, \theta]$, $[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$ соответственно. Верхний канал схемы в момент времени $t = \theta_{2\max}$ формирует байесовскую оценку момента исчезновения. Нижний канал схемы в момент времени $t = \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}$ формирует оценку момента появления. Линия задержки ЛЗ задерживает сигнал на время $t = \theta - \theta_{1\min}$.

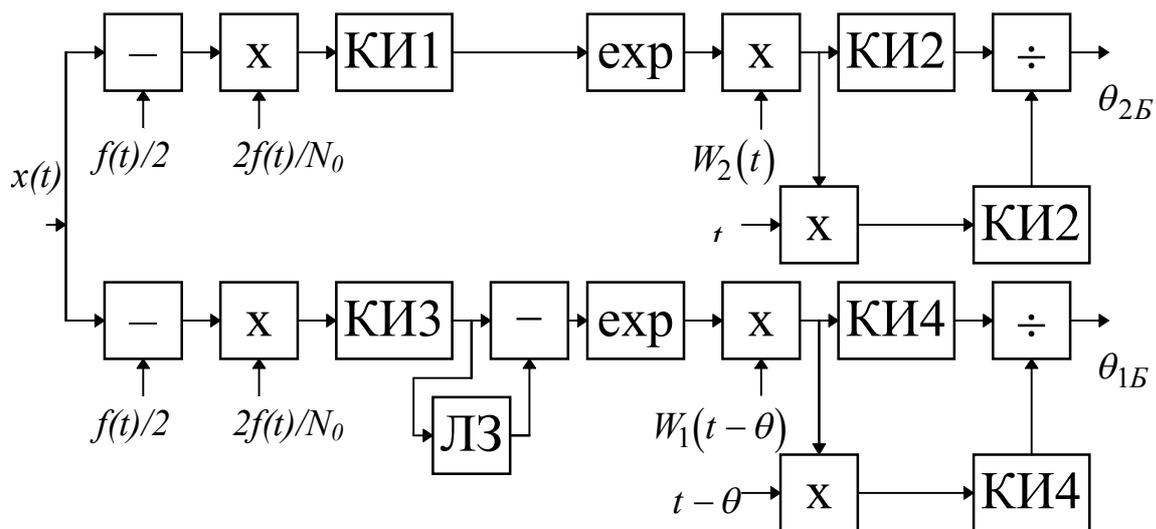


Рис. 2.13.

Как видно из рис 2.13, аппаратная реализация байесовского измерителя моментов появления и исчезновения несколько сложнее МП измерителя. Тем не менее, блок-схема байесовского измерителя является одноканальной по каждому оцениваемому параметру. Это существенно облегчает реализацию байесовского алгоритма оценки.

Теоретический анализ байесовских оценок наталкивается на существенные математические трудности. Однако, используя результаты [15], можно записать приближенные выражения для условных рассеяний байесовских оценок (2.3.22), справедливые при больших ОСШ

$$V_a(\theta_{iB}|\theta_{0i}) \approx 19,5T_{\max}^2 / \rho_{i1}^4. \quad (2.3.25)$$

При выполнении (2.3.17) для байесовского риска (2.3.23) из (2.3.25) находим приближенное выражение

$$R_3 \approx 19,5T_{\max}^2 \sum_{i=1}^2 \int_{\theta_{i\min}}^{\theta_{i\max}} \rho_{i1}^{-4} W_i(\theta) d\theta. \quad (2.3.26)$$

На рис. 2.11, 2.12 штрих-пунктирными линиями показаны зависимости асимптотических условных рассеяний (2.3.25) байесовских оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22).

Зависимости от z_r , нормированных на T_{\max}^2 безусловных рассеяний оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22) при $k=4$ показаны на рис.2.14. При построении предполагалось, что априорная плотность вероятности моментов появления и исчезновения равномерна (1.2.21). Аналогично рисунку 2.11 кривые 1 отражают зависимости рассеяний момента появления при $\gamma_0 = 5$ и момента исчезновения при $\gamma_0 = 1/5$, кривые 2 — зависимости момента исчезновения при $\gamma_0 = 5$ и момента появления при $\gamma_0 = 1/5$. Сплошными линиями изображены асимптотические рассеяния оценок МП (2.3.1), рассчитанные с использованием выражений (2.3.12), штриховыми — те же рассеяния, рассчитанные с помощью формул (2.3.16). Штрих-пунктирные линии соответствуют асимптотическим рассеяниям (2.3.25) байесовских оценок (2.3.22).

При плоской вершине импульса безусловные рассеяния оценок моментов появления и исчезновения совпадают [72]. На рис.2.15 представлены зависимости от z_r , нормированных на T_{\max}^2 безусловных рассеяний (2.3.12) (сплошная кривая) и (2.3.16) (штриховая кривая) МП оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса. Асимптотические рассеяния байесовских оценок показаны штрих-пунктирной линией.

На рис.2.16 изображены зависимости от ОСШ z_r , нормированных на T_{\max}^2 байесовского риска при использовании оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса с плоской (кривые 1) и со скошенной вершиной $\gamma = 5,1/5$ (кривые 2). Априорная плотность вероятности моментов появления и исчезновения считалась равномерной (1.2.21), а $k = 4$. Сплошные и штриховые линии на рис.2.16 иллюстрируют риск (2.3.24) МП оценок, рассчитанный с помощью выражений (2.3.12) и (2.3.16) соответственно. Байесовский риск (2.3.26) показан на рис.2.16 штрих-пунктирной линией.

Из анализа рис. 2.11, 2.12, 2.14 и 2.15 следует, что эффективность МП оценок моментов появления и исчезновения асимптотически не зависит от формы принимаемого сигнала, а определяется величиной скачка сигнала в моменты его появления и исчезновения.

С целью проверки работоспособности синтезированных алгоритмов совместных оценок моментов появления и исчезновения, а также установления границ применимости асимптотических выражений для характеристик оценок было проведено статистическое моделирование на ЭВМ МП и байесовского алгоритмов оценивания (2.3.1) и (2.3.22) соответственно применительно к сигналу (1.1.22). Методика моделирования описана в главе 4.

На рис. 2.11 и 2.12 показаны экспериментальные зависимости условных, а на рис. 2.14 и 2.15 — безусловных нормированных на T_{\max}^2 рассеяний МП (квадратики) и байесовских (кружки) оценок моментов появления и исчезновения.

Как видно из рисунков, асимптотические зависимости рассеяний, рассчитанные с использованием выражений (2.3.12), в более широком диапазоне ОСШ удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, чем зависимости, рассчитанные с использованием выражений (2.3.16). Отметим, что согласование рассеяний, полученных в результате моделирования с предельными значениями (2.3.16) существенным образом зависит от величины скачка сигнала в оцениваемый момент появления или исчезновения. Например, при $\gamma_0 = 5$ экспериментальные значения рассеяний момента появления (скачок сигнала больше) совпадают с рассеяниями (2.3.16) при $z_r > 10$, а момента исчезновения (скачок сигнала меньше) — при $z_r > 20$. Асимптотические выражения (2.3.12) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные зависимости при $z_r > 3$.

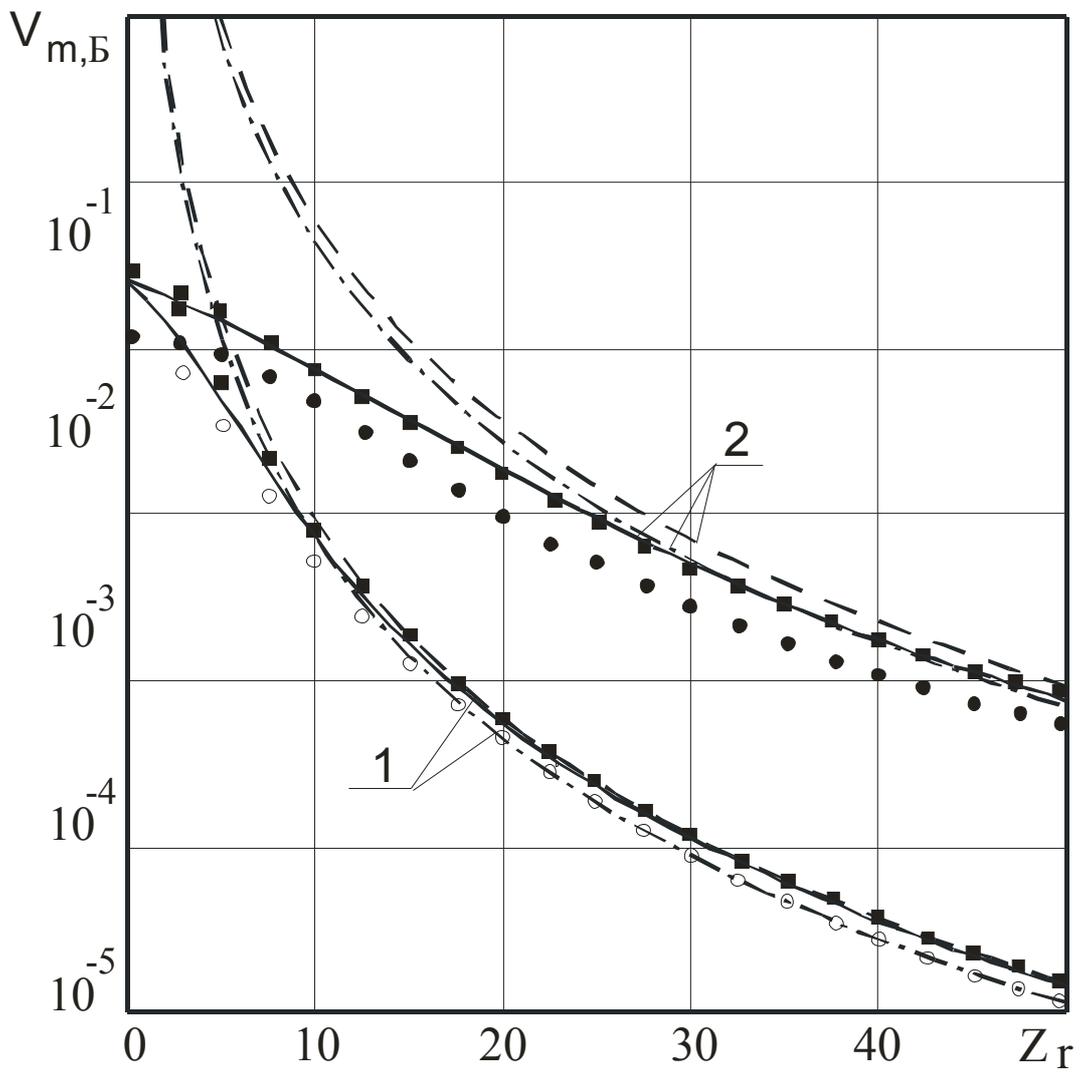


Рис. 2.14 Безусловные рассеяния оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной

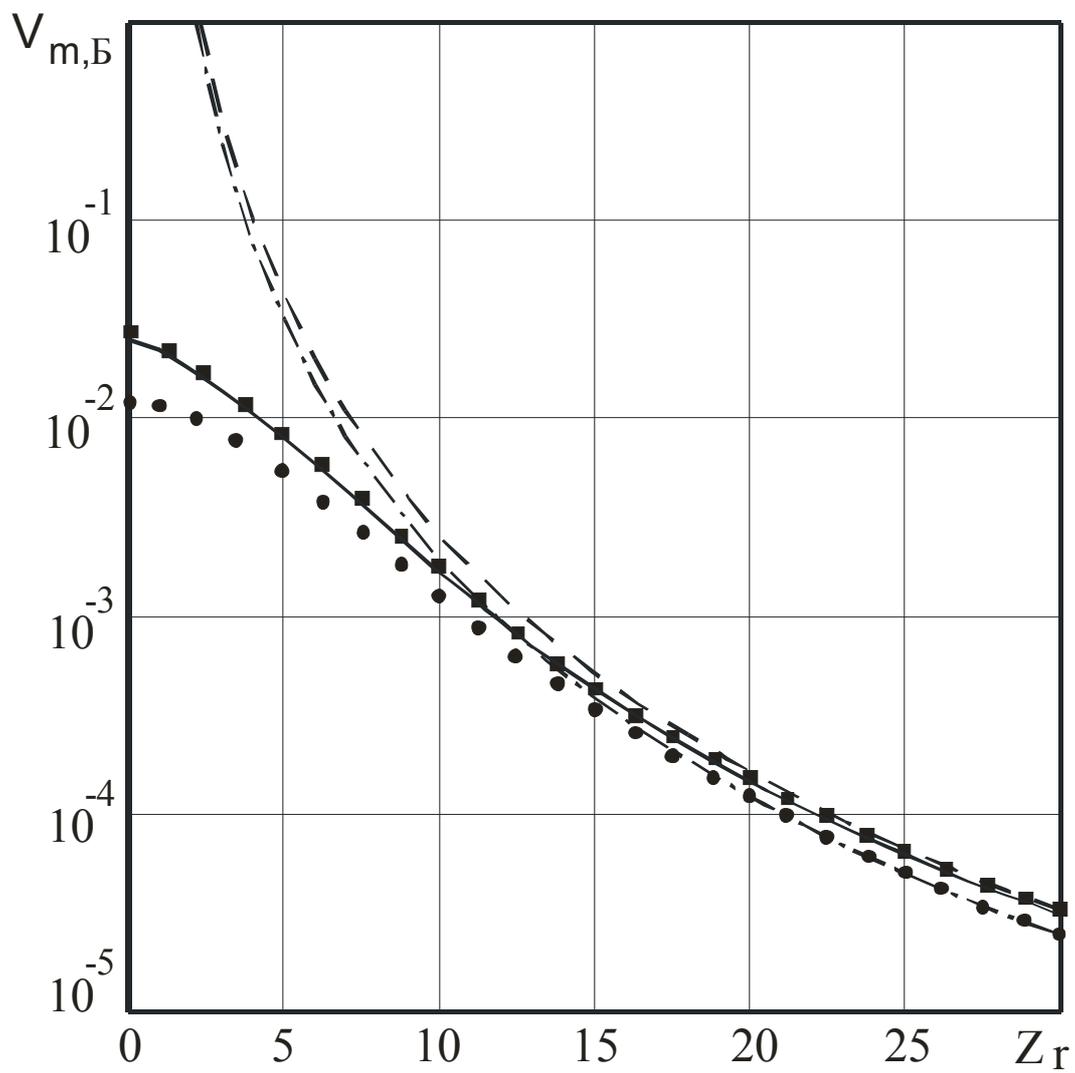


Рис. 2.15 Безусловные рассеяния оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса

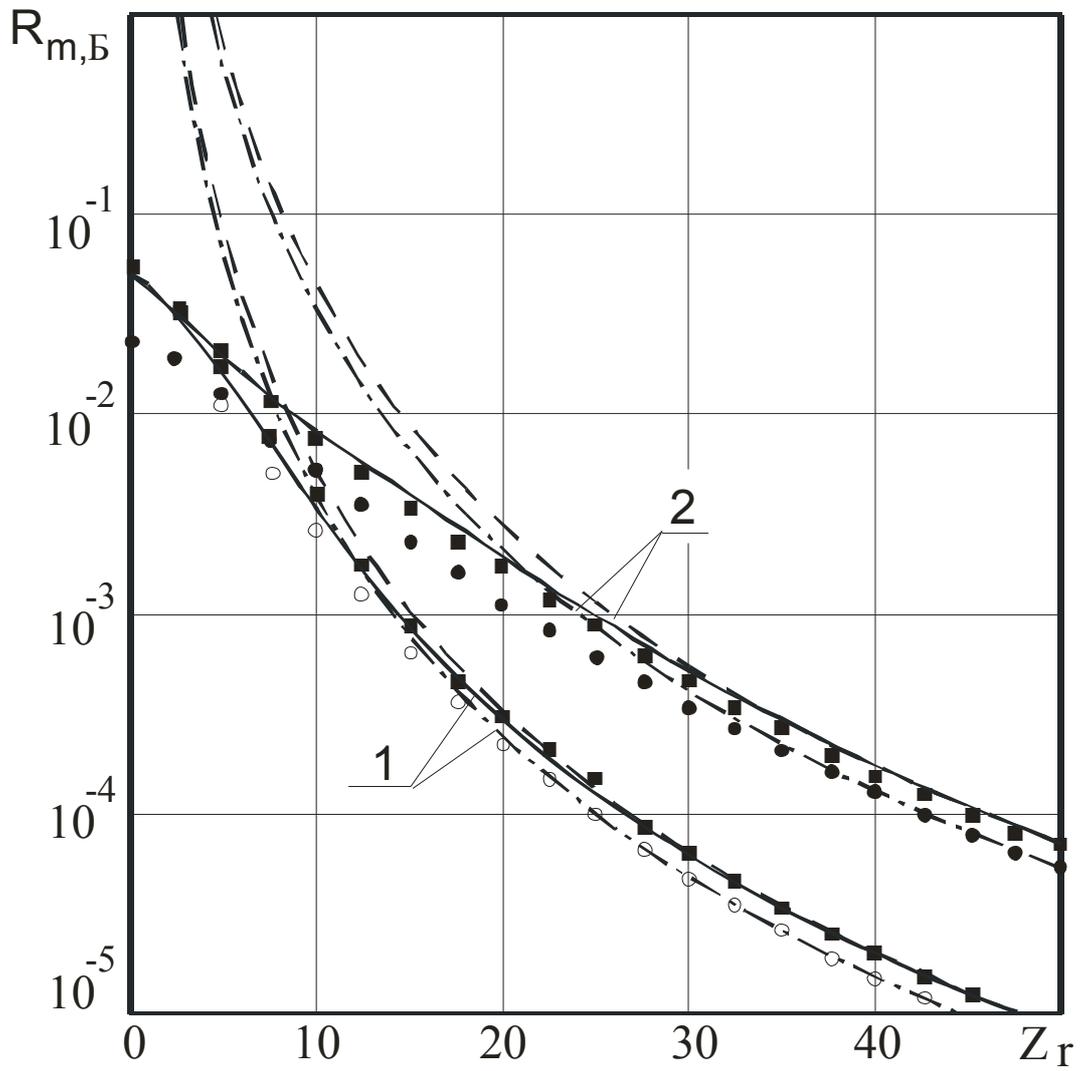


Рис. 2.16 Риск при использовании оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной

На рис. 2.16 показаны экспериментальные зависимости нормированных на T_{\max}^2 байесовского риска (2.3.23) (кружки) и риска оценок МП (2.3.24) (квадратики). Риск оценок МП, рассчитанные с помощью выражений (2.3.12) при $z_r > 2$ удовлетворительно аппроксимирует зависимости, полученные в результате моделирования. При наклоне скошенной вершины импульса $\gamma_0 = 5$ риски байесовской (2.3.26) и МП (2.3.24), (2.3.16) оценок момента появления хорошо согласуются с экспериментальными данными при $z_r > 20$, а оценок момента исчезновения — при $z_r > 55$.

В работе [75] получены максимально правдоподобный и оптимальный (байесовский) алгоритмы измерения моментов появления и исчезновения сигнала произвольной формы, наблюдаемого на фоне аддитивного белого гауссовского шума. Найдены асимптотические выражения для характеристик максимально правдоподобных алгоритмов. С помощью моделирования на ЭВМ определены характеристики байесовских алгоритмов. С использованием оригинальной замены переменных были получены точные выражения [79] для МП алгоритма обнаружения.

При неизвестной мощности принимаемого сигнала актуальна задача оценки моментов появления и исчезновения сигнала с неизвестной амплитудой, рассмотренная в [90]. Синтезированы квазиправдоподобный по амплитуде, максимально правдоподобный и квазиоптимальный алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения сигнала произвольной формы с неизвестной амплитудой. Найдены асимптотические характеристики оценок. Выполнено статистическое моделирование синтезированных алгоритмов на ЭВМ. Наилучшей точностью оценки среди рассмотренных обладает максимально правдоподобный алгоритм. Однако его техническая или программная реализация является наиболее сложной. Точность более простого квазиоптимального алгоритма оценки асимптотически совпадает с точностью максимально правдоподобного алгоритма. Показано, что априорное незнание амплитуды сигнала при больших отношениях сигнал/шум асимптотически не влияет на точность максимально правдоподобных и квазиоптимальных оценок моментов появления и исчезновения сигнала.

В работе [98] синтезированы КП, МП и КО алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения радиосигнала с произвольной формой огибающей функции и неизвестными амплитудой и начальной фазой. Найдены асимптотические характеристики качества функционирования синтезированных алгоритмов. Наилучшей точностью оценки среди рассмотренных обладает максимально правдоподобный алгоритм, однако его техническая или программная реализация является наиболее сложной. Точность более простого квазиоптимального алгоритма оценки асимптотически совпадает с точностью максимально правдоподобного алгоритма. Показано, что апри-

орное незнание амплитуды и начальной фазы сигнала при больших отношениях сигнал/шум асимптотически не влияет на точность максимально правдоподобных и квазиоптимальных оценок моментов появления и исчезновения сигнала.

2.4. Совместная оценка времени прихода и длительности сигнала

Синтезируем алгоритм совместной оценки времени прихода λ_0 и длительности τ_0 сигнала [66]

$$s(t, \lambda_0, \tau_0) = f(t)I[(t - \lambda_0)/\tau_0], \quad (2.4.1)$$

принимаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Здесь $f(t)$ – непрерывная функция, описывающая форму сигнала, $I(x) = 1$ при $|x| \leq 1/2$ и $I(x) = 0$ при $|x| > 1/2$. Будем полагать, что неизвестные время прихода и длительность могут принимать значения из априорной области Λ , которая задана неравенствами [66]

$$|\lambda_0| \leq \Lambda_0/2; \quad T_1 \leq \tau_0 \leq T_2. \quad (2.4.2)$$

Таким образом, располагая наблюдаемой на входе приёмника реализацией $x(t) = s(t, \lambda_0, \tau_0) + n(t)$, необходимо сформировать совместную оценку времени прихода и длительности. Пусть помимо времени прихода и длительности сигнала (2.4.1) на приёмной стороне неизвестна и его форма. Для синтеза алгоритма оценки параметров можно применить КП алгоритм. Приёмник должен формировать решающую статистику

$$L^*(\lambda, \tau) = \frac{2}{N_0} \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} g(t) [x(t) - g(t)/2] dt, \quad (2.4.3)$$

которая представляет собой логарифм ФОП для сигнала некоторой ожидаемой формы $g(t)$ и находить КП оценки как

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{\tau}) = \arg \sup L^*(\lambda, \tau) \quad (2.4.4)$$

положения абсолютного (наибольшего) максимума поля (2.4.3) при $(\lambda, \tau) \in \Lambda$. Предположим также, что в моменты появления $t = \theta_{01} = \lambda_0 - \tau_0/2$ и исчезновения $t = \theta_{02} = \lambda_0 + \tau_0/2$ функции $f(t)$ и $g(t)$ не обращаются в ноль, $f(\lambda_0 \pm \tau_0/2) \neq 0$, $g(\lambda_0 \pm \tau_0/2) \neq 0$, то есть сигнал (2.4.1) является разрывным [60,110]. Ограничимся аналогично [66] рассмотрением КП оценок, когда область Λ удовлетворяет неравенству

$$\Lambda_0 \leq T_1. \quad (2.4.5)$$

Выражения (2.4.3) и (2.4.4) определяют структуру приёмного устройства, которая в общем случае требует применения многоканального приёмника. Однако, при выполнении неравенства (2.4.5) можно предложить более простую двухканальную блок-схему. Для этого перейдем в выражении (2.4.3) к новым параметрам

$$\theta_1 = \lambda - \tau/2, \quad \theta_2 = \lambda + \tau/2 \quad (2.4.6)$$

– положениям моментов появления и исчезновения сигнала. Обозначим область их возможных значений Θ . Очевидно, что линейные преобразования (2.4.6) взаимно однозначны, поэтому используя совместные КП оценки моментов появления и исчезновения $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ (2.2.1), можно затем найти КП оценки $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\tau}$ времени прихода и длительности. Расширим аналогично [66] область возможных значений положений моментов появления и исчезновения сигнала до области Θ_a – квадрата минимальной площади со сторонами, параллельными осям θ_1, θ_2 , включающего в себя область Θ . Тогда Θ_a задается неравенствами

$$\begin{aligned} \theta_{1\min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1\max}, \quad \theta_{2\min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2\max}, \\ \theta_{1\min} = -(T_2 - \Lambda_0)/2, \quad \theta_{1\max} = -(T_1 - \Lambda_0)/2, \quad \theta_{2\min} = (T_1 - \Lambda_0)/2, \\ \theta_{2\max} = (T_2 - \Lambda_0)/2. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Для параметров θ_1, θ_2 решающая статистика (2.4.3) принимает вид (1.2.2). Учитывая возможность представления случайного поля (1.2.2) в виде суммы двух статистически независимых гауссовских случайных процессов (1.2.26) и (1.2.27), где θ – произвольная точка из отрезка $[-(T_1 - \Lambda_0)/2, (T_1 - \Lambda_0)/2]$, и используя преобразования (2.4.6), изобразим блок-схему КП измерителя времени прихода и длительности сигнала (2.4.1) в виде рис. 2.17.

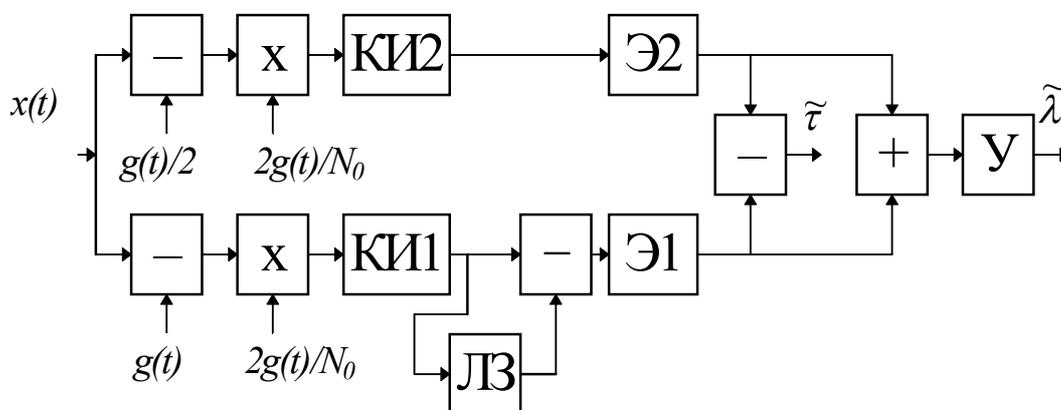


Рис. 2.17.

Здесь коммутируемые интеграторы КИ1 и КИ2 работают в интервалах времени $[\theta_{1\min}, \theta]$, $[\theta, \theta_{2\max}]$ соответственно. ЛЗ — линия задержки, осуществляющая задержку сигнала на время $t = \theta - \theta_{1\min}$, Э1 и Э2 — экстрематоры, определяющие положение максимума сигнала на интервалах времени $[\theta, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min}]$, $[\theta_{2\min}, \theta_{2\max}]$, У — усилитель с коэффициентом усиления $1/2$. Совместные КП оценки времени прихода и длительности сигнала формируются в момент времени $t = \max(\theta_{2\max}, \theta + \theta_{1\max} - \theta_{1\min})$.

Перейдем к анализу синтезированного алгоритма оценивания (2.4.4). Статистические характеристики совместных КП оценок времени прихода и длительности нетрудно получить на основе характеристик КП оценок моментов появления и исчезновения (2.2.1). Пользуясь статистической независимостью оценок (2.2.1), запишем их условную совместную плотность вероятности в виде

$$W(\theta_1, \theta_2) = W_1(\theta_1)W_2(\theta_2), \quad (2.4.8)$$

где асимптотические плотности вероятностей КП оценок моментов появления и исчезновения $W_1(\theta_1)$ и $W_2(\theta_2)$ найдены в (2.2.5) и (2.2.7) соответственно. Согласно (2.4.6) и (2.4.8), совместная плотность вероятности КП оценок (2.4.4) при $(\lambda, \tau) \in \Lambda_a$ имеет вид

$$W(\lambda, \tau) = W_1(\lambda - \tau/2)W_2(\lambda + \tau/2). \quad (2.4.9)$$

Область Λ_a соответствует Θ_a (2.4.7). Она отличается от действительной области возможных значений оцениваемых параметров Λ , однако, как показано в [66], включает в себя все точки области Λ .

Асимптотические выражения для смещений и рассеяний КП оценок времени прихода и длительности сигнала запишем с учетом (2.4.6) на основе смещений и рассеяний КП оценок моментов появления и исчезновения (2.2.9)

$$b(\tilde{\tau}|\tau_0, \lambda_0) = b(\tilde{\theta}_2|\theta_{01}, \theta_{02}) - b(\tilde{\theta}_1|\theta_{01}, \theta_{02}), \quad (2.4.10)$$

$$b(\tilde{\lambda}|\tau_0, \lambda_0) = [b(\tilde{\theta}_2|\theta_{01}, \theta_{02}) + b(\tilde{\theta}_1|\theta_{01}, \theta_{02})]/2, \quad (2.4.11)$$

$$V(\tilde{\tau}|\tau_0, \lambda_0) = V(\tilde{\theta}_2|\theta_{01}, \theta_{02}) + V(\tilde{\theta}_1|\theta_{01}, \theta_{02}), \quad (2.4.12)$$

$$V(\tilde{\lambda}|\tau_0, \lambda_0) = [V(\tilde{\theta}_2|\theta_{01}, \theta_{02}) + V(\tilde{\theta}_1|\theta_{01}, \theta_{02})]/4 = V(\tilde{\tau}|\tau_0, \lambda_0)/4. \quad (2.4.13)$$

Используя предельные выражения (2.2.14) и (2.2.15) смещений и рассеяний КП оценок моментов появления и исчезновения, получаем аналогичные предельные значения для характеристик КП оценок времени прихода и длительности сигнала

$$b(\tilde{\tau}|\tau_0, \lambda_0) = \Delta_2 - \Delta_1 + 2T_{\max} \left[q_2^3(q_2 + 2) - (2q_2 + 1) \right] / \rho_{21}^2 q_2^2 (q_2 + 1)^2 - \\ - 2T_{\max} \left[q_1^3(q_1 + 2) - (2q_1 + 1) \right] / \rho_{11}^2 q_1^2 (q_1 + 1)^2, \quad (2.4.14)$$

$$b(\tilde{\lambda}|\tau_0, \lambda_0) = T_{\max} \left[q_2^3(q_2 + 2) - (2q_2 + 1) \right] / \rho_{21}^2 q_2^2 (q_2 + 1)^2 - \\ - T_{\max} \left[q_1^3(q_1 + 2) - (2q_1 + 1) \right] / \rho_{11}^2 q_1^2 (q_1 + 1)^2 + (\Delta_2 + \Delta_1)/2, \quad (2.4.15)$$

$$V(\tilde{\tau}|\tau_0, \lambda_0) = 8T_{\max}^2 \left[q_1^5(2q_1^2 + 6q_1 + 5) + (5q_1^2 + 6q_1 + 2) \right] / \rho_{11}^4 q_1^4 (q_1 + 1)^3 + \\ + 8T_{\max}^2 \left[q_2^5(2q_2^2 + 6q_2 + 5) + (5q_2^2 + 6q_2 + 2) \right] / \rho_{21}^4 q_2^4 (q_2 + 1)^3 + \quad (2.4.16)$$

$$+ 2\Delta_1 b(\tilde{\theta}_1|\theta_{01}, \theta_{02}) + 2\Delta_2 b(\tilde{\theta}_2|\theta_{01}, \theta_{02}) - \Delta_1^2 - \Delta_2^2,$$

$$V(\tilde{\lambda}|\tau_0, \lambda_0) = V(\tilde{\tau}|\tau_0, \lambda_0)/4. \quad (2.4.17)$$

Исследуем состоятельность КП оценок времени прихода и длительности. Легко видеть, что если КП оценки (2.2.1) являются состоятельными, то КП оценки времени прихода и длительности также состоятельны. Следовательно, используя Утверждения 1 и 2 сформулируем достаточные условия состоятельности оценок (2.4.4).

Утверждение 3.

Достаточным для состоятельности совместных КП оценок времени прихода и длительности сигнала (2.4.1) является условие:

$$|g(t)| < 2|f(t)| \text{ и } f(t)g(t) > 0 \text{ при } t \in [\theta_{01}, \theta_{02}]. \quad (2.4.18)$$

Тогда $\Delta_i = 0, i = 1, 2$, что приводит к упрощению статистических характеристик (2.4.14) – (2.4.17) оценок (2.4.4).

Предположим теперь, что принятый и опорный сигналы имеют одинаковую форму $f(t) = g(t)$. Тогда КП оценки моментов появления и исчезновения (2.4.4) совпадают с оценками МП. Следовательно, алгоритм нахождения оценок МП моментов появления и исчезновения состоит в поиске положения абсолютного максимума логарифма ФОП

$$L(\lambda, \tau) = \frac{2}{N_0} \int_{\lambda - \tau/2}^{\lambda + \tau/2} f(t) [x(t) - f(t)/2] dt, \quad (2.4.19)$$

$$(\hat{\lambda}, \hat{\tau}) = \arg \sup L(\lambda, \tau) \quad (2.4.20)$$

при $(\lambda, \tau) \in \Lambda$. Перейдем в выражении (2.4.19) к новым аргументам – положениям моментов появления и исчезновения (2.4.6), получим логарифм ФОП (1.3.1). Положения максимума (2.3.1) логарифма ФОП (1.3.1) являются МП оценками моментов появления и исчезновения сигнала (1.1.1). Ис-

комые МП оценки времени прихода и длительности сигнала можно получить, используя МП оценки $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ (2.3.1) и преобразования, обратные к (2.4.6). Оценки моментов появления и исчезновения будем искать на расширенной области Θ_a , границы которой определены в (2.4.7). Тогда блок-схему МП измерителя времени прихода и длительности сигнала (1.1.1) можно изобразить в виде рис.2.17, где вместо формы опорного сигнала $g(t)$ необходимо использовать форму принимаемого сигнала $f(t)$.

Перейдем к анализу совместных оценок (2.4.20), предполагая, что ОСШ на выходе приёмника (2.3.6) достаточно велико $z_0 \gg 1$. Аналогично (2.4.8), используя статистическую независимость оценок МП моментов появления и исчезновения, запишем их совместную условную плотность вероятности

$$W(\theta_1, \theta_2) = W_1(\theta_1)W_2(\theta_2), \quad (2.4.21)$$

где асимптотические плотности вероятностей МП оценок моментов появления и исчезновения $W_1(\theta_1)$ и $W_2(\theta_2)$ найдены в (2.3.8) и (2.3.9) соответственно. Согласно (2.4.6) и (2.4.21), совместная плотность вероятности МП оценок (2.4.20) при $(\lambda, \tau) \in \Lambda_a$ имеет вид

$$W(\lambda, \tau) = W_1(\lambda - \tau/2)W_2(\lambda + \tau/2). \quad (2.4.22)$$

Введем в рассмотрение нормированные ошибки ОМП времени прихода и длительности сигнала (2.4.1):

$$\mu = (\hat{\lambda} - \lambda_0) \rho_{21} \rho_{11} / T_{\max}, \quad \nu = (\hat{\tau} - \tau_0) \rho_{11} \rho_{21} / 2T_{\max}. \quad (2.4.23)$$

Переходя в (2.4.22) к новым переменным и полагая $z_0 \gg 1$ находим предельную двумерную плотность вероятности нормированных ошибок совместных оценок [52,85]

$$W_2(\mu, \nu) = \frac{1}{2} W_a\left(\frac{\mu - \nu}{2}\right) W_a\left(\frac{\mu + \nu}{2}\right), \quad (2.4.24)$$

где плотность вероятности $W_a(x)$, определена в (2.3.15).

Совместная плотность вероятности (2.4.24) позволяет рассчитать асимптотические значения смещений, рассеяний и коэффициента корреляции оценок МП $\hat{\lambda}$ и $\hat{\tau}$:

$$b(\hat{\lambda} | \lambda_0, \tau_0) = \langle \hat{\lambda} - \lambda_0 \rangle = 0, \quad b(\hat{\tau} | \lambda_0, \tau_0) = \langle \hat{\tau} - \tau_0 \rangle = 0, \quad (2.4.25)$$

$$V(\hat{\lambda} | \lambda_0, \tau_0) = \left\langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \right\rangle = 13\tau_0^2 / z^4, \quad (2.4.26)$$

$$V(\hat{\tau} | \lambda_0, \tau_0) = \left\langle (\hat{\tau} - \tau_0)^2 \right\rangle = 52\tau_0^2 / z^4, \quad (2.4.27)$$

$$K_1(\hat{\lambda}, \hat{\tau} | \lambda_0, \tau_0) = \frac{\langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)(\hat{\tau} - \tau_0) \rangle}{\sqrt{\langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle \langle (\hat{\tau} - \tau_0)^2 \rangle}} = (q^2 - q^{-2}) / (q^2 + q^{-2}), \quad (2.4.28)$$

$$q^2 = \rho_{11}^2 / \rho_{21}^2 = f^2(\lambda_0 - \tau_0/2) / f^2(\lambda_0 + \tau_0/2),$$

$$z^2 = \rho_{11}^2 \rho_{21}^2 \sqrt{2 / (\rho_{11}^4 + \rho_{21}^4)} \quad (2.4.29)$$

— обобщенное ОСШ для сигнала (2.4.1).

В частном случае, когда сигнал имеет прямоугольную форму, то есть $f(t) \equiv A_r$ и $q=1$ характеристики совместных оценок времени прихода и длительности (2.4.25) – (2.4.28) принимают вид

$$b_r(\hat{\lambda} | \lambda_0, \tau_0) = 0, \quad b_r(\hat{\tau} | \lambda_0, \tau_0) = 0,$$

$$V_r(\hat{\lambda} | \lambda_0, \tau_0) = 13\tau_0^2 / z_r^4, \quad V_r(\hat{\tau} | \lambda_0, \tau_0) = 52\tau_0^2 / z_r^4, \quad (2.4.30)$$

$$K_{1r}(\hat{\lambda}, \hat{\tau} | \lambda_0, \tau_0) = 0, \quad z = z_r = A_r \sqrt{2T_{\max} / N_0},$$

что полностью совпадает с аналогичными выражениями, найденными в [66]. Как видно из (2.4.30), совместные оценки времени прихода и длительности прямоугольного импульса некоррелированы, следовательно между ними отсутствует линейная статистическая зависимость. Однако рассеяния совместных оценок МП (2.4.30) в два раза превышают рассеяния соответствующих отдельных оценок [14, 58, 110], что свидетельствует о существовании между $\hat{\lambda}$ и $\hat{\tau}$ нелинейной статистической взаимосвязи. Количественно охарактеризовать эту связь можно коэффициентом корреляции между квадратами ошибок оценок [66], который для сигнала (2.4.1) асимптотически равен

$$K_2 = \frac{\langle (\mu^2 - \langle \mu^2 \rangle)(\nu^2 - \langle \nu^2 \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle (\mu^2 - \langle \mu^2 \rangle)^2 \rangle \langle (\nu^2 - \langle \nu^2 \rangle)^2 \rangle}} = \frac{2117(q^4 + q^{-4}) / 4 - 169}{2117(q^4 + q^{-4}) / 4 + 169}. \quad (2.4.31)$$

В частном случае прямоугольного импульса, то есть при $q=1$, коэффициент квадратичной корреляции $K_{2r} = 1779/2455 \approx 0,725$ [66].

Для того, чтобы охарактеризовать влияние отклонения формы импульса от прямоугольной на характеристики ОМП времени прихода и длительности, введем в рассмотрение отношения

$$\kappa = \frac{V(\hat{\lambda} | \lambda_0, \tau_0)}{V_r(\hat{\lambda} | \lambda_0, \tau_0)} = \frac{V(\hat{\tau} | \lambda_0, \tau_0)}{V_r(\hat{\tau} | \lambda_0, \tau_0)} = \frac{z_r^4}{2} \left(\frac{1}{\rho_{11}^4} + \frac{1}{\rho_{21}^4} \right), \quad (2.4.32)$$

$$\kappa_2 = \frac{K_2}{K_{2r}} = \frac{2455}{1779} \frac{2117(q^4 + q^{-4})/4 - 169}{2117(q^4 + q^{-4})/4 + 169}. \quad (2.4.33)$$

Здесь индексом r отмечены характеристики (2.4.30) оценок для прямоугольного импульса.

Рассмотрим далее влияние априорного незнания одного из параметров сигнала (2.4.1) на точность оценки другого. Если длительность τ_0 импульса (2.4.1) априори известна, то рассеяние отдельной оценки времени прихода равно [67]

$$V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 13/2\delta_\lambda^2, \quad (2.4.34)$$

где

$$\delta_\lambda = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0^+} \left\{ \left[S(\lambda_0, \lambda_0, \tau_0, \tau_0) - S(\lambda_0, \lambda_0 + \Delta\lambda, \tau_0, \tau_0) \right] / \Delta\lambda \right\}, \quad (2.4.35)$$

$$S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) = \frac{z^2}{\tau_0} \int_{\max(\lambda_0 - \tau_0/2, \lambda - \tau/2)}^{\min(\lambda_0 + \tau_0/2, \lambda + \tau/2)} f^2(t) dt, \quad |\lambda - \lambda_0| \leq (\tau + \tau_0)/2, \\ S(\lambda, \lambda_0, \tau, \tau_0) = 0, \quad |\lambda - \lambda_0| > (\tau + \tau_0)/2, \quad (2.4.36)$$

— сигнальная функция [30].

Подставляя (2.4.36) в (2.4.35) и вычисляя предел, находим, что

$$\delta_\lambda = \left(\rho_{11}^2 + \rho_{21}^2 \right) / 2T_{\max}. \quad (2.4.37)$$

Используя выражение (2.4.37), запишем рассеяние отдельной оценки МП времени прихода (2.4.34) в виде $V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 26T_{\max}^2 / \left(\rho_{11}^2 + \rho_{21}^2 \right)^2$.

Если же априори известно время прихода λ_0 , то рассеяние отдельной оценки длительности равно [67]

$$V_0(\hat{\tau}|\tau_0) = 13/2\delta_\tau^2, \quad (2.4.38)$$

где

$$\delta_\tau = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0^+} \left\{ \left[S(\lambda_0, \lambda_0, \tau_0, \tau_0) - S(\lambda_0, \lambda_0, \tau_0, \tau_0 + \Delta\tau) \right] / \Delta\tau \right\}. \quad (2.4.39)$$

Подставляя (3.4.36) в (2.4.39) и вычисляя предел, находим, что

$$\delta_\tau = \left(\rho_{11}^2 + \rho_{21}^2 \right) / 4T_{\max}. \quad (2.4.40)$$

Согласно (2.4.38), (2.4.40) рассеяние отдельной оценки МП длительности принимает вид $V_0(\hat{\tau}|\tau_0) = 104T_{\max}^2 / \left(\rho_{11}^2 + \rho_{21}^2 \right)^2$. Проигрыш в эффективности оценивания времени прихода из-за незнания длительности сигнала и проигрыш в эффективности оценивания длительности из-за незнания времени прихода можно охарактеризовать отношением

$$\chi = \frac{V(\hat{\lambda}|\lambda_0, \tau_0)}{V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0)} = \frac{V(\hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0)}{V_0(\hat{\tau}|\tau_0)} = \frac{1}{4}(q^2 + q^{-2})(q + q^{-1})^2. \quad (2.4.41)$$

Конкретизируем полученные выражения для прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22), предполагая, что формы опорного и принимаемого сигнала совпадают $A_r = A_r^*$, $\gamma = \gamma_0$. Априорную область Λ возможных значений времени прихода и длительности выберем так, чтобы $\Lambda_0 = T_1/4$, $T_2 = 23T_1/2$. Тогда для границ расширенной априорной области моментов появления и исчезновения (2.4.7) можем записать

$$\theta_{2\min} = -\theta_{1\max} = 3T_1/4, \quad \theta_{2\max} = -\theta_{1\min} = 3T_1, \quad (2.4.42)$$

$$\theta = (\theta_{2\max} + \theta_{1\min})/2 = (\theta_{2\min} + \theta_{1\max})/2 = 0,$$

$$k = T_{\max}/T_{\min} = (\theta_{2\max} - \theta_{1\min})/(\theta_{2\min} - \theta_{1\max}) = 4.$$

Подставляя (1.1.22) в (2.4.29), а затем (2.4.29) в (2.4.25) – (2.4.28) и (2.4.32) получаем асимптотические характеристики МП оценок времени прихода и длительности в виде

$$b(\hat{\lambda}|\lambda_0, \tau_0) = \langle \hat{\lambda} - \lambda_0 \rangle = 0, \quad b(\hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0) = \langle \hat{\tau} - \tau_0 \rangle = 0, \quad (2.4.43)$$

$$V(\hat{\lambda}|\lambda_0, \tau_0) = 104T_{\max}^2 (1 + \gamma + \gamma^2)^2 \left\{ [(1 + \gamma) - 2(1 - \gamma)\lambda_{01}]^{-4} + \right. \\ \left. + [(1 + \gamma) + 2(1 - \gamma)\lambda_{02}]^{-4} \right\} / 3z_r^4, \quad (2.4.44)$$

$$V(\hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0) = 416T_{\max}^2 (1 + \gamma + \gamma^2)^2 \left\{ [(1 + \gamma) - 2(1 - \gamma)\lambda_{01}]^{-4} + \right. \\ \left. + [(1 + \gamma) + 2(1 - \gamma)\lambda_{02}]^{-4} \right\} / 3z_r^4, \quad (2.4.45)$$

$$K_1(\hat{\lambda}, \hat{\tau}|\lambda_0, \tau_0) = \frac{[(1 + \gamma) - 2(1 - \gamma)\lambda_{01}]^4 - [(1 + \gamma) + 2(1 - \gamma)\lambda_{02}]^4}{[(1 + \gamma) - 2(1 - \gamma)\lambda_{01}]^4 + [(1 + \gamma) + 2(1 - \gamma)\lambda_{02}]^4}, \quad (2.4.46)$$

$$K_2 = \left[\frac{2117}{4} \left\{ \frac{[(1 + \gamma) - 2(1 - \gamma)\lambda_{01}]^4}{[(1 + \gamma) + 2(1 - \gamma)\lambda_{02}]^4} + \frac{[(1 + \gamma) + 2(1 - \gamma)\lambda_{02}]^4}{[(1 + \gamma) - 2(1 - \gamma)\lambda_{01}]^4} \right\} - 169 \right] \times \\ \times \left[\frac{2117}{4} \left\{ \frac{[(1 + \gamma) - 2(1 - \gamma)\lambda_{01}]^4}{[(1 + \gamma) + 2(1 - \gamma)\lambda_{02}]^4} + \frac{[(1 + \gamma) + 2(1 - \gamma)\lambda_{02}]^4}{[(1 + \gamma) - 2(1 - \gamma)\lambda_{01}]^4} \right\} + 169 \right]^{-1}, \quad (2.4.47)$$

С использованием выражений (2.4.44), (2.4.45) и (2.4.30), величину (2.4.33), характеризующую влияние отклонения формы сигнала от прямоугольной на точность МП оценок можно записать как

$$\kappa = 8(1 + \gamma + \gamma^2)^2 \left\{ [(1 + \gamma) - 2(1 - \gamma)\lambda_{01}]^{-4} + [(1 + \gamma) + 2(1 - \gamma)\lambda_{02}]^{-4} \right\} / 3, (2.4.48)$$

а проигрыш (2.4.41)

$$\begin{aligned} \chi = & \left\{ [(1 + \gamma) - 2(1 - \gamma)\lambda_{01}]^4 + [(1 + \gamma) + 2(1 - \gamma)\lambda_{02}]^4 \right\} \times \\ & \times \left\{ [(1 + \gamma) - 2(1 - \gamma)\lambda_{01}]^2 + [(1 + \gamma) + 2(1 - \gamma)\lambda_{02}]^2 \right\}^2 \times \\ & \times [(1 + \gamma) - 2(1 - \gamma)\lambda_{01}]^{-4} [(1 + \gamma) + 2(1 - \gamma)\lambda_{02}]^{-4}. \end{aligned} \quad (2.4.49)$$

На рис. 2.18 сплошной и пунктирной линиями показаны зависимости нормированных на T_{\max}^2 условных рассеяний (2.4.44) и (2.4.45) оценок МП времени прихода и длительности прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22) от наклона вершины γ соответственно при ОСШ $z_r = 1$. На рис. 2.19 показаны зависимости от γ коэффициента корреляции (2.4.46) (сплошная линия) и коэффициента корреляции квадратов ошибок оценок (2.4.47) (пунктирная линия). На рис. 2.20 показаны проигрыш в эффективности оценивания из-за отличия формы сигнала от прямоугольной (2.4.48) (сплошная кривая) и проигрыш в эффективности оценивания одного параметра из-за незнания другого (2.4.49) (пунктирная кривая). При построении предполагалось, что истинные значения оцениваемых параметров принимают значения $\lambda_0 = 0$, $\tau_0 = 3T_1$, так что соответствующие им моменты появления и исчезновения принимаемого сигнала располагаются посередине отрезков $[\theta_{1\min}, \theta]$ и $[\theta, \theta_{2\max}]$ соответственно, то есть $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 0,25$.

На рис. 2.21а и 2.21б показаны зависимости нормированных на T_{\max}^2 условных рассеяний оценок МП времени прихода и длительности сигнала (1.1.22) от ОСШ z_r при $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 0,25$. Кривые 1 соответствуют наклону импульса $\gamma = 1$, кривые 2 – $\gamma = 5,1/5$. Сплошные кривые на рис. 2.21 рассчитаны с использованием плотности вероятности (2.4.22), а штриховые – по формулам (2.4.44) и (2.4.45).

С целью проверки работоспособности синтезированных алгоритмов оценивания и установления границ применимости асимптотических выражений для характеристик оценок проводилось статистическое моделирование на ЭВМ оценок МП времени прихода и длительности сигнала (1.1.22), (2.4.42). Методика моделирования изложена в главе 4. На рис. 2.21 квадратами для $\gamma = 1$ и кружками для $\gamma = 5,1/5$ показаны рассеяния, полученные в результате моделирования.

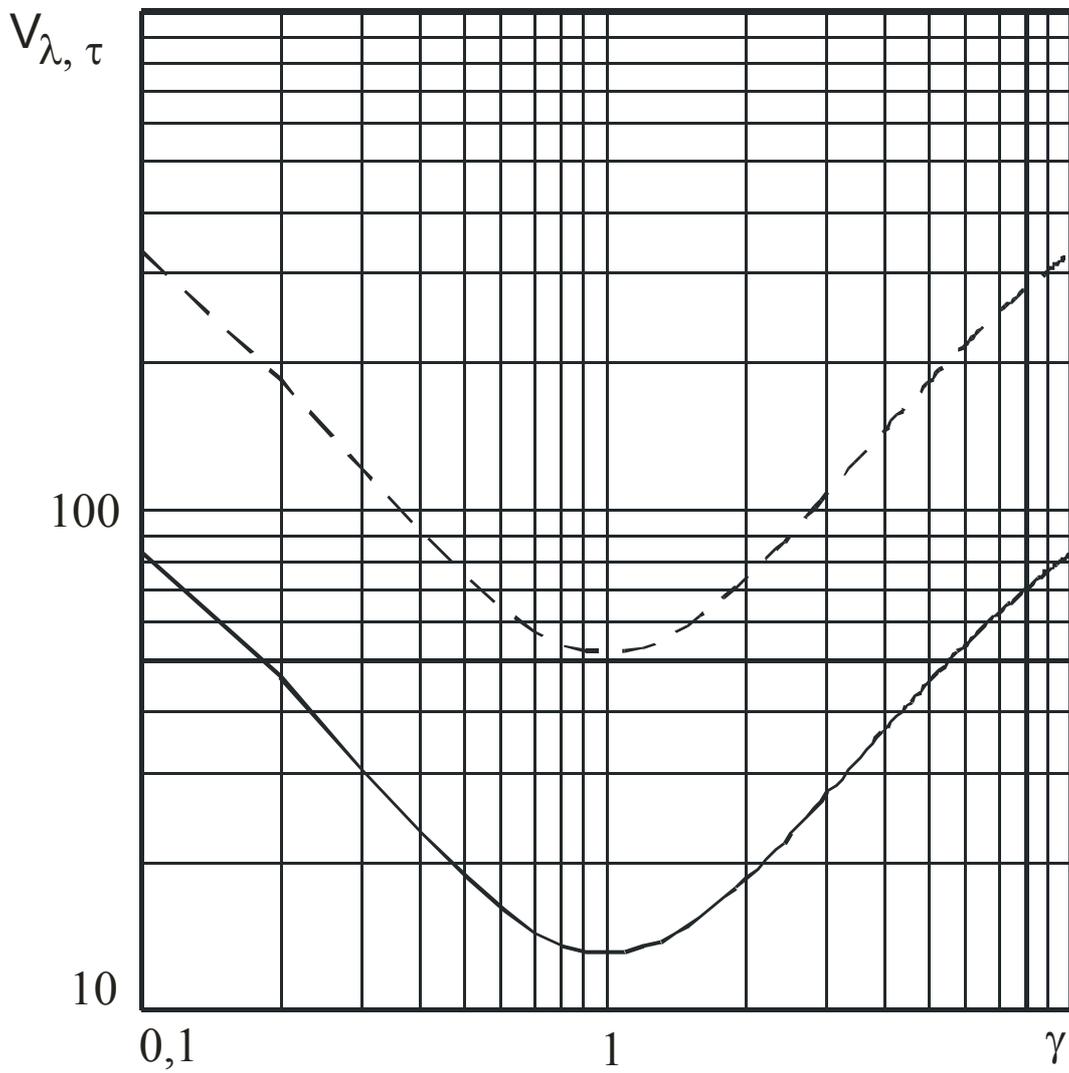


Рис. 2.18 Зависимости рассеяний оценок МП времени прихода и длительности импульса со скошенной вершиной от наклона вершины импульса

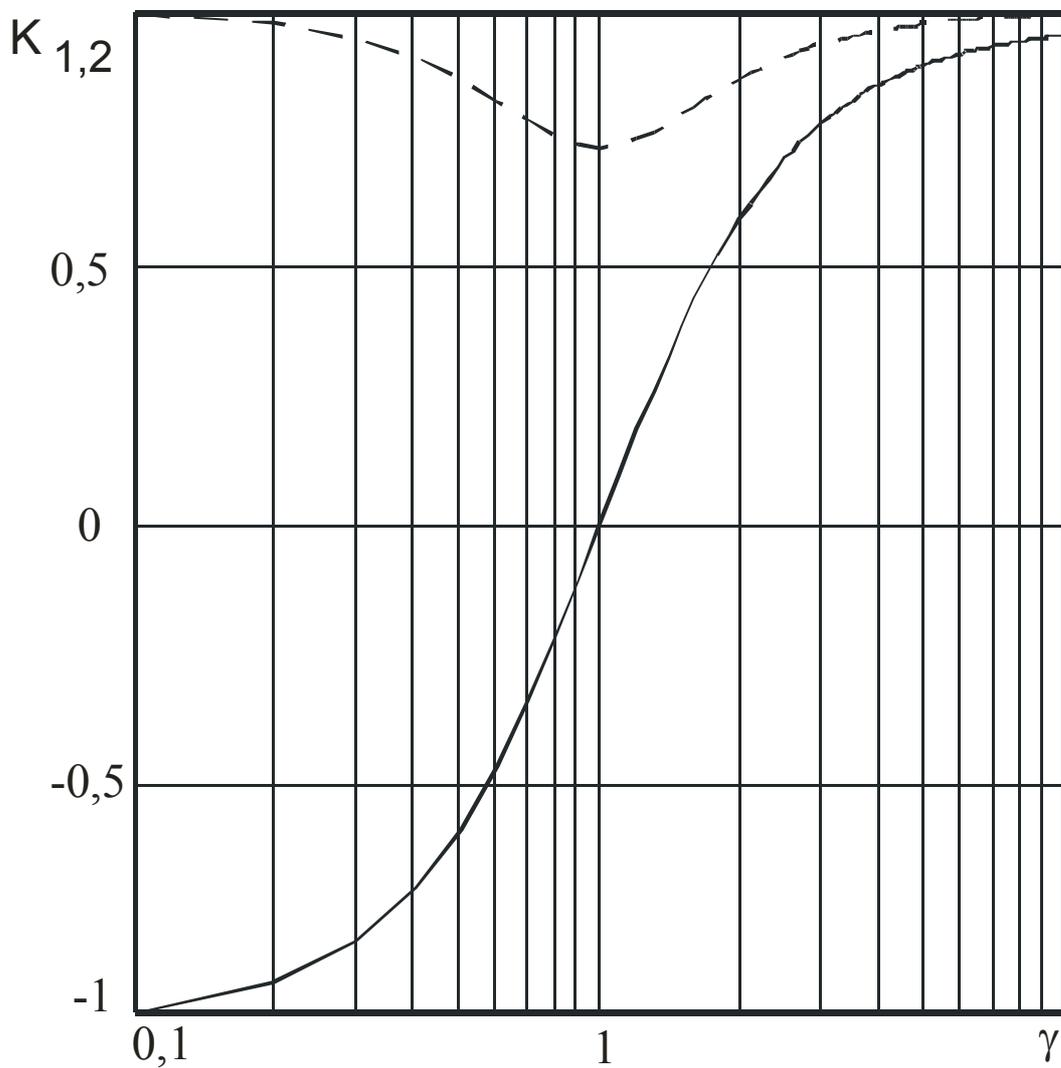


Рис. 2.19 Коэффициенты корреляции оценок и квадратов ошибок оценок МП времени прихода и длительности импульса со скошенной вершиной

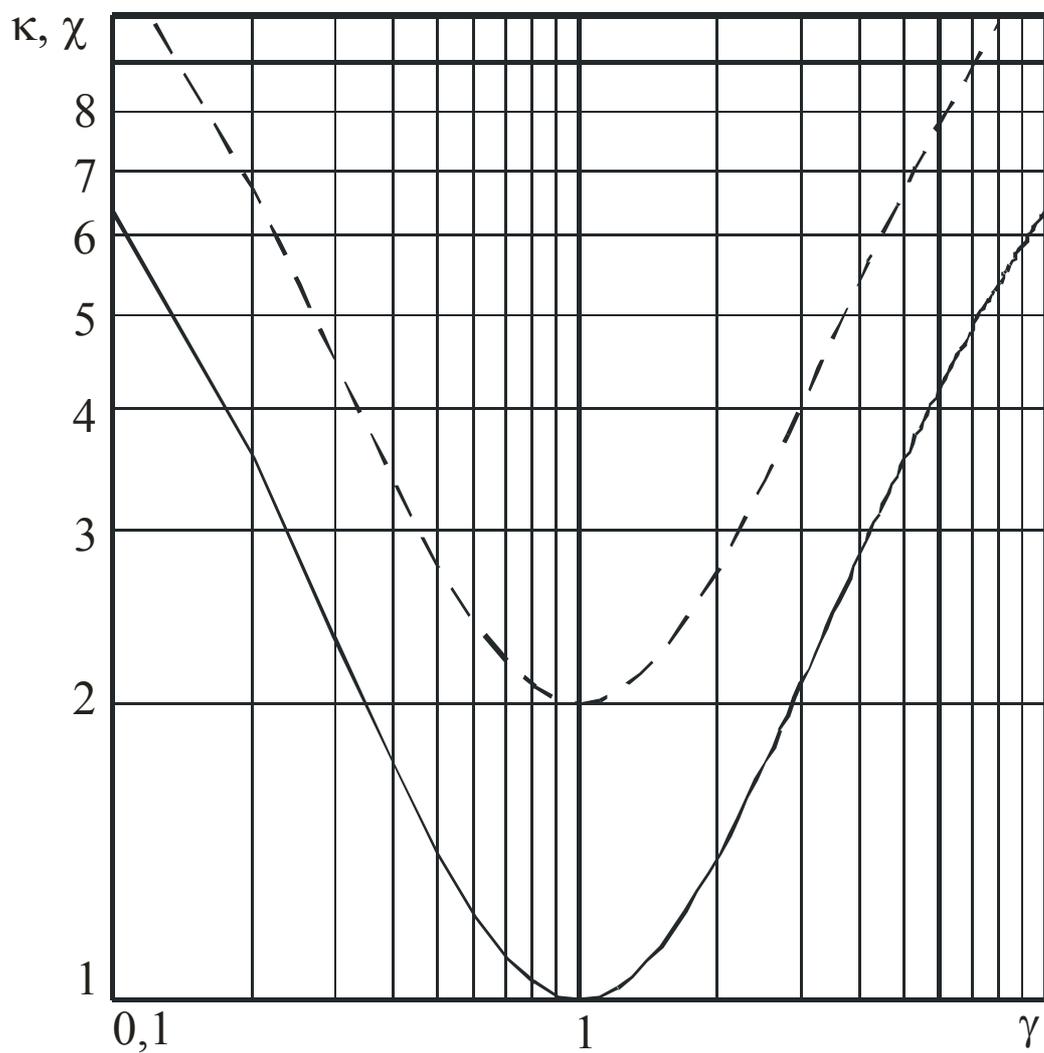
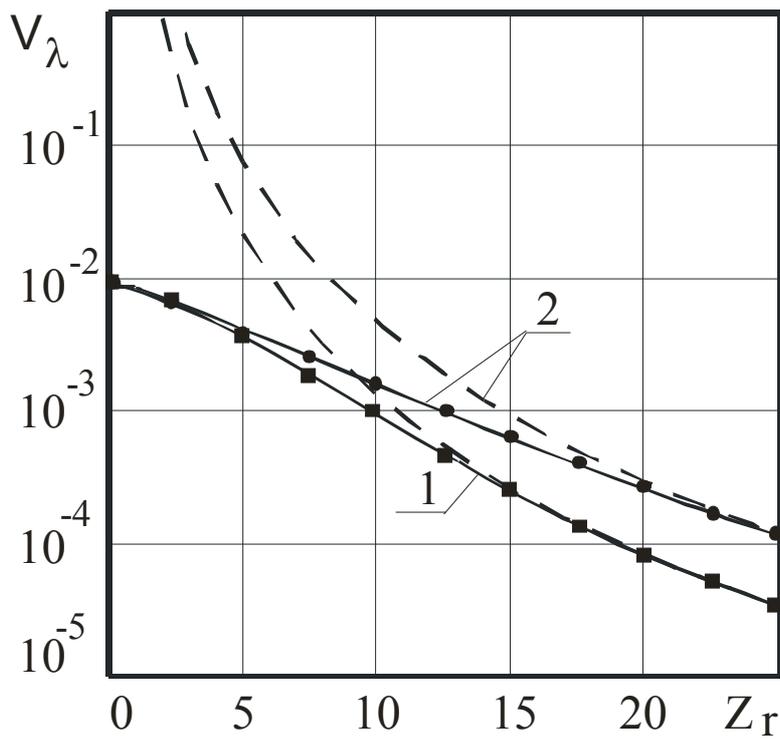
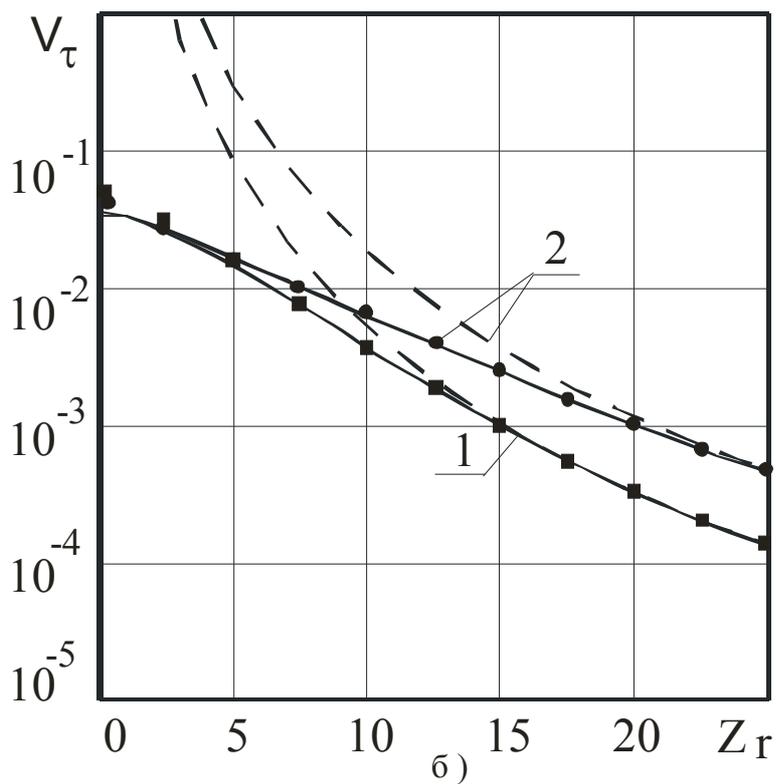


Рис. 2.20 Зависимости проигрышей оценок МП времени прихода и длительности импульса от наклона вершины импульса



a)



б)

Рис.2.21 Зависимости рассеяний МП оценок времени прихода и длительности прямоугольного импульса со скошенной вершиной

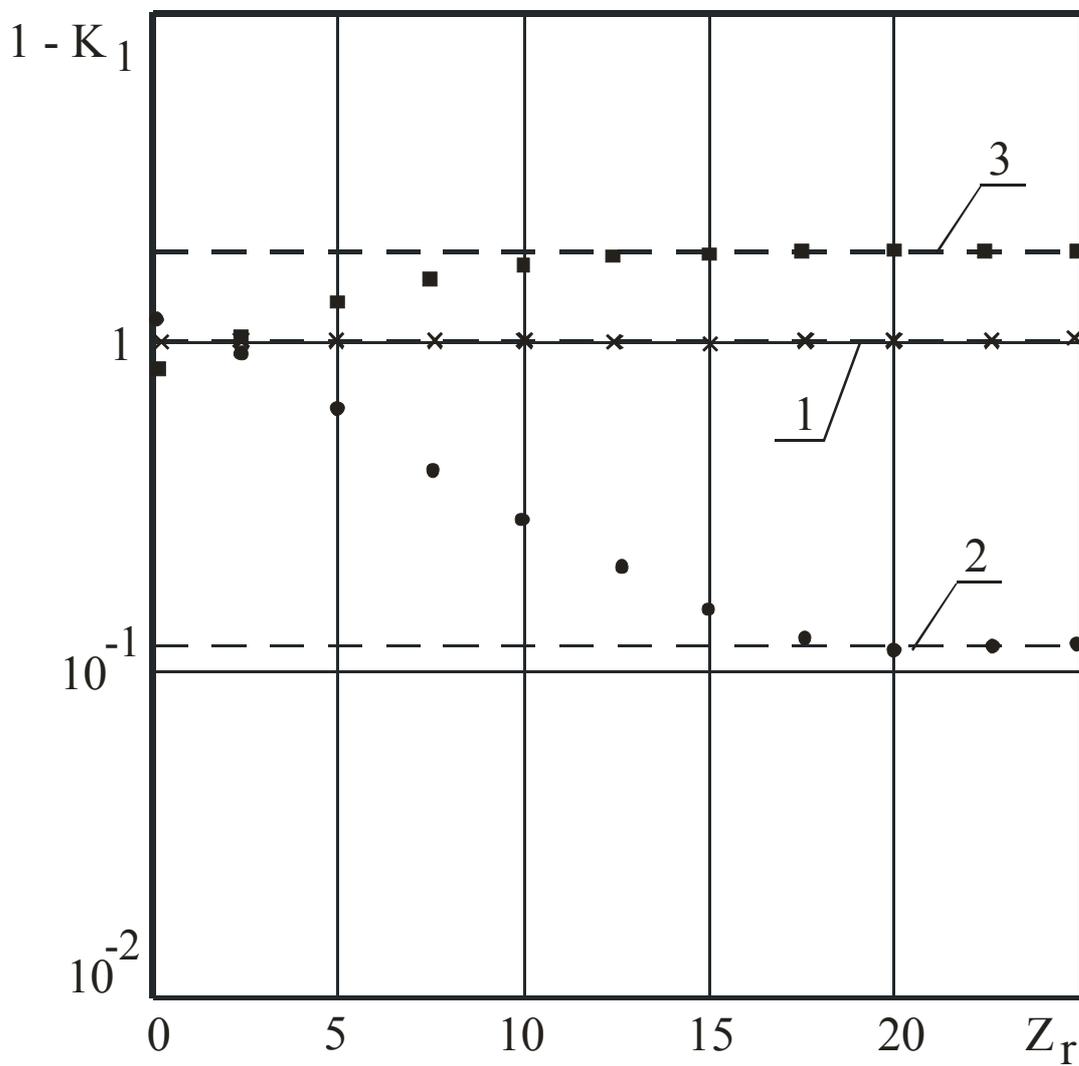


Рис. 2.22 Коэффициент корреляции МП оценок времени прихода и длительности прямоугольного импульса со скошенной вершиной

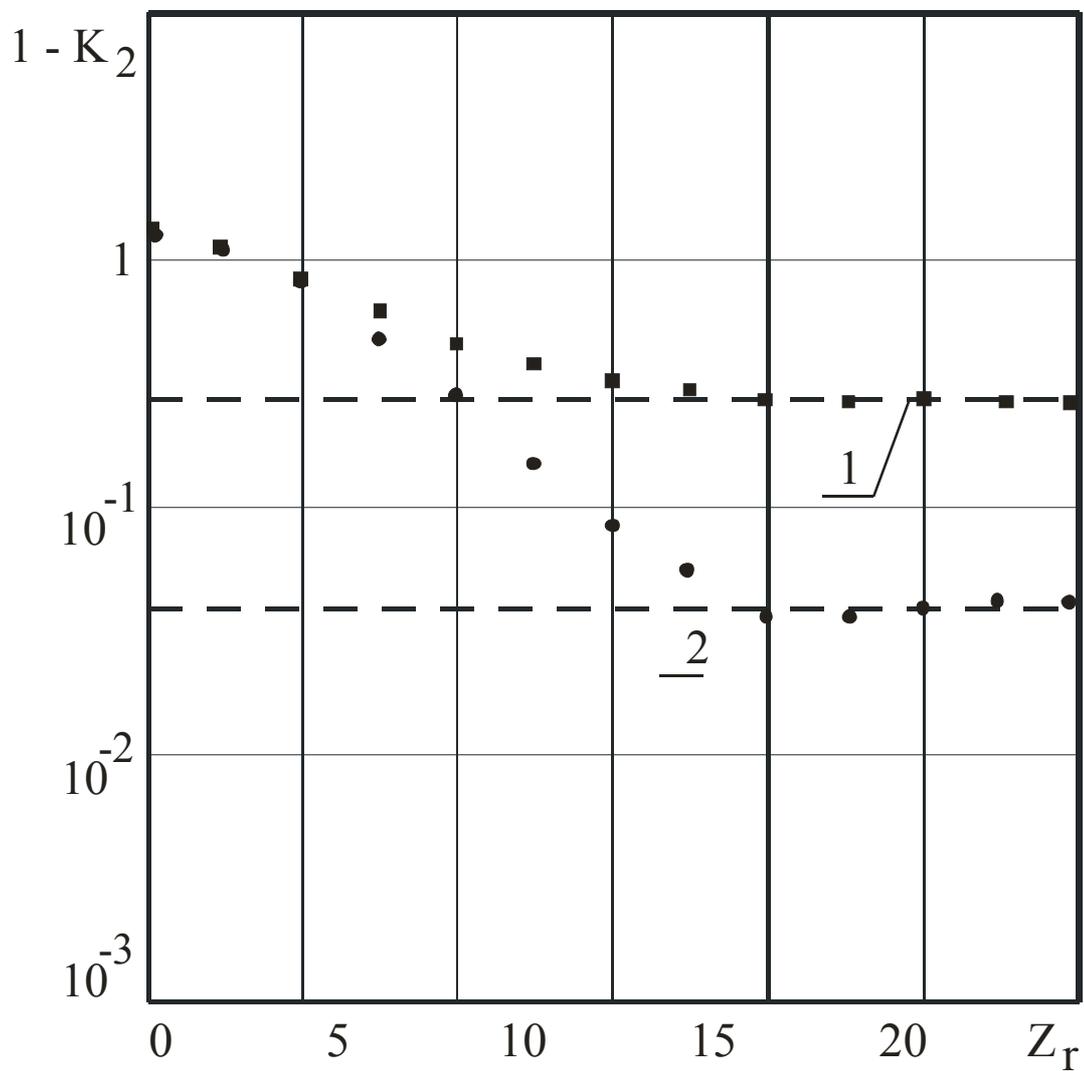


Рис. 2.23 Коэффициент корреляции между квадратами ошибок оценок МП времени прихода и длительности прямоугольного импульса со скошенной вершиной

Как видно из рис. 2.21 – 2.23, асимптотические зависимости рассеяний, рассчитанные с использованием плотности вероятности (2.4.22) удовлетворительно описывают экспериментальные данные при $z_r > 2$. Точность предельных выражений для рассеяний (2.4.26) и (2.4.27) зависит от наклона импульса. Так, для прямоугольного импульса $\gamma = 1$ предельные выражения (2.4.26) и (2.4.27) удовлетворительно согласуются с экспериментом при $z_r > 13$, а для импульса с наклонами $\gamma = 5,1/5$ – лишь при $z_r > 23$.

На рис. 2.22 показаны зависимости от z_r коэффициента корреляции оценок (2.4.46) при $\gamma = 1$ (кривые 1), $\gamma = 5$ (кривые 2) и $\gamma = 0,2$ (кривые 3) и $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 0,25$. Результаты моделирования изображены крестиками для $\gamma = 1$, кружками для $\gamma = 5$ и квадратиками для $\gamma = 0,2$. Коэффициент корреляции между квадратами ошибок оценок (2.4.47) как функция ОСШ z_r при $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 0,25$ показан на рис. 2.23, где кривая 1 и крестики соответствуют наклону импульса $\gamma = 1$, а кривая 2 и кружки – $\gamma = 5$ и $\gamma = 0,2$.

Реальные условия генерации и распространения приводят к необходимости оценивания времени прихода и длительности сигнала, мощность которого на приёмной стороне неизвестна. В работе [91] рассмотрена задача оценивания времени прихода и длительности сигнала произвольной формы с неизвестной амплитудой. Синтезирован КП приёмник, который формирует решающую статистику для некоторой ожидаемой амплитуды и всех возможных значений времени прихода и длительности. КП оценки определяются как координаты положения наибольшего максимума решающей статистики. Исследовано влияние априорного незнания амплитуды на точности оценок времени прихода и длительности. Синтезирован МП алгоритм оценок. Показано, что точность МП оценок времени прихода и длительности асимптотически не зависит от наличия у сигнала неизвестной амплитуды. Найден выигрыш в точности МП оценок по сравнению с КП оценками.

В работе [81] выполнены синтез и анализ квазиправдоподобных алгоритмов оценки времени прихода и длительности сигнала неизвестной формы, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. Исследованы квазиправдоподобные оценки времени прихода и длительности при использовании в приёмном устройстве прямоугольного и ступенчатого опорного сигналов. Выполнено сравнение точности оценок времени прихода и длительности при различных опорных сигналах. На примере оценок параметров прямоугольного импульса со скошенной вершиной даны рекомендации по выбору высоты ступенек опорного сигнала, обеспечивающих наибольшую точность квазиправдоподобных оценок.

Глава 3. Оценка параметров сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения

3.1. Оценка параметров сигнала с неизвестным моментом исчезновения

Предположим теперь, что сигнал (1.1.1) содержит вектор $\vec{l}_0 = (l_{01}, \dots, l_{0p})$ неизвестных параметров, подлежащих оценке, то есть

$$s(t, \theta_{01}, \theta_{02}, \vec{l}_0) = \begin{cases} f(t, \vec{l}_0), & \theta_{01} \leq t \leq \theta_{02}, \\ 0, & t < \theta_{01}, t > \theta_{02}, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

а моменты появления и исчезновения по-прежнему принимают значения из априорных интервалов (1.1.2). Тогда, располагая наблюдаемой на входе приёмника в течение времени $[0, T]$ реализацией

$$x(t) = s(t, \theta_{01}, \theta_{02}, \vec{l}_0) + n(t) \quad (3.1.2)$$

аддитивной смеси сигнала и гауссовского белого шума, необходимо сформировать оценку векторного параметра \vec{l}_0 .

Если форма сигнала и моменты его появления и исчезновения априори известны, для синтеза алгоритма оценки параметра \vec{l} можно использовать метод МП. Согласно этому методу приёмник должен формировать логарифм ФОП

$$L_0(\vec{l}) = L(\theta_{01}, \theta_{02}, \vec{l}), \quad (3.1.3)$$

$$L(\theta_1, \theta_2, \vec{l}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [x(t) - f(t, \vec{l})/2] f(t, \vec{l}) dt \quad (3.1.4)$$

и находить оценку МП как положение максимума поля (3.1.3) в априорной области возможных значений параметра \vec{l} , то есть

$$\hat{\vec{l}} = \arg \sup L_0(\vec{l}). \quad (3.1.5)$$

Подставляя (3.1.2) в (3.1.4), запишем логарифм ФОП (3.1.3) как

$$L_0(\vec{l}) = S_0(\vec{l}) + N_0(\vec{l}), \quad (3.1.6)$$

где

$$S_0(\vec{l}) = S_0(\vec{l}, \vec{l}_0) - Q_0(\vec{l})/2 \quad (3.1.7)$$

— сигнальная составляющая [30],

$$S_0(\vec{l}, \vec{l}_0) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f(t, \vec{l}) f(t, \vec{l}_0) dt \quad (3.1.8)$$

— сигнальная функция [30],

$$Q_0(\vec{l}) = S_0(\vec{l}, \vec{l}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t, \vec{l}) dt, \quad (3.1.9)$$

$$N_0(\vec{l}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f(t, \vec{l}) n(t) dt. \quad (3.1.10)$$

Шумовая составляющая (3.1.10) представляет собой центрированное гауссовское случайное поле с корреляционной функцией

$$B_0(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \langle N_0(\vec{l}_1) N_0(\vec{l}_2) \rangle = S_0(\vec{l}_1, \vec{l}_2), \quad (3.1.11)$$

совпадающей с (3.1.8). Будем считать, что сигнал (3.1.1) дифференцируем по l_i , $i = \overline{1, p}$ хотя бы дважды. Тогда параметры l_i являются регулярными [21, 50, 57]. Считая, что ОСШ для принятого сигнала достаточно велико

$$z_0^2 = Q_0(\vec{l}_0) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f^2(t, \vec{l}_0) dt \gg 1, \quad (3.1.12)$$

перейдем к нормированному логарифму ФОП $L_z(\vec{l}) = L_0(\vec{l}) / z_0^2$, и, применяя метод малого параметра [30], находим, что оценки МП (3.1.5) обладают асимптотически нулевыми смещениями и корреляционной матрицей

$$\hat{K}_0 = S^{-1}, \quad (3.1.13)$$

где S — матрица вторых производных сигнальной составляющей (3.1.7) с элементами

$$S_{ij} = - \left[\frac{\partial^2 S_0(\vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \right]_{\vec{l}_0} = \left[\frac{\partial^2 S_0(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial l_{1i} \partial l_{2j}} \right]_{\vec{l}_0 = \vec{l}_1 = \vec{l}_2} = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} \left[\frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}_0} \left[\frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_j} \right]_{\vec{l}_0} dt, \quad (3.1.14)$$

$i, j = \overline{1, p}.$

Обозначим

$$F_{ij}(\theta_1, \theta_2, \vec{l}_0) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{\partial f(t, \vec{l}_1)}{\partial l_{1i}} \right]_{\vec{l}_0} \left[\frac{\partial f(t, \vec{l}_2)}{\partial l_{2i}} \right]_{\vec{l}_0} dt \quad (3.1.15)$$

и перепишем асимптотическое выражение (3.1.13) для корреляционной матрицы оценок (3.1.5) в виде

$$\hat{K}_0 = \|F_{ij}(\theta_{01}, \theta_{02}, \bar{l}_0)\|^{-1}. \quad (3.1.16)$$

Пусть теперь момент исчезновения сигнала (3.1.1) априори неизвестен, но в его оценке нет необходимости, то есть θ_{02} является неизвестным неинформативным параметром.

Один из способов преодоления априорной параметрической неопределенности — использование КП алгоритма, согласно которому, приёмник формирует логарифм ФОП (3.1.4) для некоторого ожидаемого момента исчезновения θ_2^* из области (1.1.2)

$$L^*(\bar{l}) = L(\theta_{01}, \theta_2^*, \bar{l}) \quad (3.1.17)$$

и ищет положение его максимума. Таким образом, на выходе приёмника формируется КП оценка

$$\tilde{l} = \arg \sup L^*(\bar{l}). \quad (3.1.18)$$

Найдем асимптотические характеристики КП оценки (3.1.18). Подставляя принятую реализацию (3.1.2) в выражение (3.1.4), запишем для логарифма ФОП (3.1.17)

$$L^*(\bar{l}) = S^*(\bar{l}) + N^*(\bar{l}), \quad (3.1.19)$$

где

$$S^*(\bar{l}) = S^*(\bar{l}, \bar{l}_0) - Q^*(\bar{l})/2, \quad (3.1.20)$$

$$S^*(\bar{l}, \bar{l}_0) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\min(\theta_2^*, \theta_{02})} f(t, \bar{l}) f(t, \bar{l}_0) dt, \quad (3.1.21)$$

$$Q^*(\bar{l}) = S^*(\bar{l}, \bar{l}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2^*} f^2(t, \bar{l}) dt, \quad (3.1.22)$$

$$N^*(\bar{l}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2^*} f(t, \bar{l}) n(t) dt. \quad (3.1.23)$$

Шумовая составляющая (3.1.23) представляет собой центрированное гауссовское случайное поле с корреляционной функцией

$$B^*(\bar{l}_1, \bar{l}_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2^*} f(t, \bar{l}_1) f(t, \bar{l}_2) dt. \quad (3.1.24)$$

Абсолютный максимум сигнальной составляющей (3.1.20) располагается в некоторой точке

$$\bar{l}^* = \operatorname{argsup} S^*(\bar{l}). \quad (3.1.25)$$

Будем полагать, что ОСШ на выходе приёмника

$$z = \sqrt{S^{*2}(\bar{l}^*)/B(\bar{l}^*, \bar{l}^*)} \gg 1, \quad (3.1.26)$$

велико, так что можно ввести малый параметр $\varepsilon = 1/z$ и перейти к нормированному логарифму ФОП $L_z^*(\bar{l}) = L^*(\bar{l})/z^2$, для которого запишем

$$L_z^*(\bar{l}) = S(\bar{l}) + \varepsilon N(\bar{l}), \quad (3.1.27)$$

где

$$S(\bar{l}) = S^*(\bar{l})/z^2, \quad N(\bar{l}) = N^*(\bar{l})/z \quad (3.1.28)$$

— нормированные сигнальная и шумовая составляющие. Корреляционная функция нормированной шумовой составляющей равна

$$B(\bar{l}_1, \bar{l}_2) = B^*(\bar{l}_1, \bar{l}_2)/z^2. \quad (3.1.29)$$

Для нахождения КП оценки будем решать систему уравнений правдоподобия

$$\left[\partial S(\bar{l})/\partial l_i + \varepsilon \partial N(\bar{l})/\partial l_i \right]_{\bar{l}} = 0, \quad i = \overline{1, p}. \quad (3.1.30)$$

Поскольку при больших ОСШ (3.1.26) положение максимума решающей статистики (3.1.27) располагается в малой окрестности положения максимума (3.1.25) сигнальной составляющей (3.1.28), (3.1.20), будем искать решение системы уравнений (3.1.30) в виде ряда по степеням ε

$$\tilde{\bar{l}} = \bar{l}^* + \varepsilon \bar{l}_1 + \varepsilon^2 \bar{l}_2 + \dots \quad (3.1.31)$$

Разлагая функцию в квадратных скобках (3.1.30) в ряд Тейлора в окрестности точки (3.1.25), ограничившись первым приближением, получим систему уравнений для КП оценки

$$s_i + \varepsilon n_i = - \sum_{j=1}^p (s_{ij} + \varepsilon n_{ij}) \varepsilon l_{1j}, \quad (3.1.32)$$

где обозначено

$$s_i = \left[\partial S(\bar{l})/\partial \bar{l}_i \right]_{\bar{l}^*}, \quad n_i = \left[\partial N(\bar{l})/\partial \bar{l}_i \right]_{\bar{l}^*}, \\ s_{ij} = \left[\partial^2 S(\bar{l})/\partial \bar{l}_i \partial \bar{l}_j \right]_{\bar{l}^*}, \quad n_{ij} = \left[\partial^2 N(\bar{l})/\partial \bar{l}_i \partial \bar{l}_j \right]_{\bar{l}^*}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в (3.1.32), имеем

$$n_i = - \sum_{j=1}^p s_{ij} l_{1j}, \quad \vec{n} = S \vec{l}_1, \quad (3.1.33)$$

систему уравнений для первого приближения КП оценки. Здесь \vec{n} — вектор первых производных шумовой составляющей с компонентами n_1, \dots, n_p , S — матрица вторых производных сигнальной составляющей с элементами

$$S_{ij} = -s_{ij} = -\frac{2}{N_0 z^2} \int_{\theta_{01}}^{\min(\theta_{02}, \theta_2^*)} \left[\frac{\partial^2 f(t, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \right]_{\vec{l}^*} f(t, \vec{l}_0) dt + \\ + \frac{2}{N_0 z^2} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2^*} \left[\frac{\partial^2 f(t, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \right]_{\vec{l}^*} f(t, \vec{l}^*) dt + \frac{2}{N_0 z^2} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2^*} \left[\frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}^*} \left[\frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_j} \right]_{\vec{l}^*} dt. \quad (3.1.34)$$

Решение системы (3.1.33) можно представить в виде [21]

$$\vec{l}_1 = A \vec{n}, \quad l_{1i} = \sum_{j=1}^p a_{ij} n_j, \quad (3.1.35)$$

где A — матрица, обратная к S , с элементами a_{ij} . Используя (3.1.35), нетрудно найти асимптотические выражения для характеристик КП оценок: смещения

$$b_i(\vec{l}_i | \vec{l}_0) = \langle \vec{l}_i - l_{0i} \rangle = l_i^* - l_{0i}, \quad (3.1.36)$$

и корреляционной матрицы

$$\hat{K} = \varepsilon^2 \langle \vec{l}_1 \vec{l}_1^T \rangle = \varepsilon^2 A B A^T, \quad (3.1.37)$$

где $B = \langle \vec{n} \vec{n}^T \rangle$ — матрица вторых производных корреляционной функции (3.1.29) с элементами

$$b_{ij} = \langle n_i n_j \rangle = \left[\frac{\partial^2 B(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{\partial l_{1j} \partial l_{2j}} \right]_{\vec{l}^*} = F_{ij}(\theta_{01}, \theta_2^*, \vec{l}^*) / z^2. \quad (3.1.38)$$

Заметим, что при $\theta_2^* < \theta_{02}$ положение максимума (3.1.25) сигнальной составляющей (3.1.20) совпадает с истинным значением параметров $\vec{l}^* = \vec{l}_0$. Тогда КП оценки (3.1.18) являются состоятельными, а асимптотические выражения для их смещений и корреляционной матрицы принимают наиболее простой вид

$$\vec{b}_i(\vec{l}_i | \vec{l}_0) = 0, \quad \hat{K} = \left\| F_{ij}(\theta_{01}, \theta_2^*, \vec{l}_0) \right\|^{-1}. \quad (3.1.39)$$

Как известно [30, 65, 110], повысить точность оценок (3.1.18) можно, если вместо ожидаемого момента исчезновения использовать его оценку МП. Поэтому необходимо рассмотреть совместные оценки МП момента исчезновения и непрерывных параметров сигнала. Приёмник формирует логарифм ФОП

$$L(\theta_2, \vec{l}) = L(\theta_{01}, \theta_2, \vec{l}) \quad (3.1.40)$$

для всех возможных значений неизвестных параметров и находит совместные оценки МП как координаты его абсолютного максимума

$$\left(\hat{\theta}_2, \hat{\vec{l}}\right) = \arg \sup L(\theta_2, \vec{l}). \quad (3.1.41)$$

Для анализа алгоритма оценивания (3.1.41) введем в рассмотрение нормированный логарифм ФОП

$$L_z(\theta_2, \vec{l}) = L(\theta_2, \vec{l}) / z_0^2, \quad (3.1.42)$$

где z_0 — ОСШ для принятого сигнала (3.1.12). Подставляя в (3.1.4), (3.1.42) реализацию наблюдаемых данных $x(t)$ (3.1.2), получаем

$$L_z(\theta_2, \vec{l}) = S(\theta_2, \vec{l}) + \varepsilon N(\theta_2, \vec{l}), \quad (3.1.43)$$

$$N(\theta_2, \vec{l}) = \frac{2}{zN_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2} f(t, \vec{l}) n(t) dt \quad (3.1.44)$$

— нормированная шумовая составляющая,

$$S(\theta_2, \vec{l}) = S(\theta_{02}, \vec{l}_0, \theta_2, \vec{l}) - S(\theta_2, \vec{l}, \theta_2, \vec{l}) / 2 \quad (3.1.45)$$

— нормированная сигнальная составляющая,

$$S(\theta_{12}, \vec{l}_1, \theta_{22}, \vec{l}_2) = \frac{2}{z^2 N_0} \int_{\theta_{01}}^{\min(\theta_{12}, \theta_{22})} f(t, \vec{l}_1) f(t, \vec{l}_2) dt \quad (3.1.46)$$

— нормированная сигнальная функция, которая совпадает с корреляционной функцией шумовой составляющей (3.1.44), а $\varepsilon = 1/z_0$ — малый параметр при $z_0 \gg 1$.

Найдем сначала характеристики оценки момента исчезновения, которую перепишем аналогично [67] как

$$\hat{\theta}_2 = \arg \sup L(\theta_2), \quad (3.1.47)$$

$$L(\theta_2) = \sup_{\vec{l}} L(\theta_2, \vec{l}) = L(\theta_2, \hat{\vec{l}}). \quad (3.1.48)$$

Случайный процесс (3.1.48) представляет собой логарифм ФОП, промаксимизированный по регулярным параметрам. Пусть совместные оценки (3.1.41) имеют высокую апостериорную точность, что возможно при достаточно больших ОСШ $z_0 \gg 1$. В этом случае для определения их характеристик достаточно исследовать поведение логарифма ФОП (3.1.40) в малой окрестности истинных значений θ_{02}, \vec{l}_0 неизвестных параметров.

Для нахождения функции (3.1.48) будем аппроксимировать логарифм ФОП (3.1.40) отрезком p -мерного разложения Тейлора в окрестности \vec{l}_0 при фиксированном моменте исчезновения θ_2 .

$$L(\theta_2, \vec{l}) = S(\theta_2) + \varepsilon N(\theta_2) + \sum_{i=1}^p [S_i(\theta_2) + \varepsilon N_i(\theta_2)](l_i - l_{0i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p [S_{ij}(\theta_2) + \varepsilon N_{ij}(\theta_2)](l_i - l_{0i})(l_j - l_{0j}) + o[(l_i - l_{0i})(l_j - l_{0j})], \quad (3.1.49)$$

где

$$S(\theta_2) = S(\theta_2, \vec{l}_0), \quad N(\theta_2) = N(\theta_2, \vec{l}_0), \\ S_i(\theta_2) = \left[\partial S(\theta_2, \vec{l}) / \partial l_i \right]_{\vec{l}_0}, \quad S_{ij}(\theta_2) = \left[\partial^2 S(\theta_2, \vec{l}) / \partial l_i \partial l_j \right]_{\vec{l}_0}, \quad (3.1.50) \\ N_i(\theta_2) = \left[\partial N(\theta_2, \vec{l}) / \partial l_i \right]_{\vec{l}_0}, \quad N_{ij}(\theta_2) = \left[\partial^2 N(\theta_2, \vec{l}) / \partial l_i \partial l_j \right]_{\vec{l}_0}, \quad i, j = \overline{1; p}.$$

Введем такое \vec{l}^* , где функция (3.1.49) достигает максимума при фиксированном значении θ_2

$$\left[\partial L(\theta_2, \vec{l}) / \partial l_i \right]_{\vec{l}^*} = 0. \quad (3.1.51)$$

Подставляя (3.1.49) в (3.1.51), приходим к системе уравнений

$$-\sum_{j=1}^p [S_{ij}(\theta_2) + \varepsilon N_{ij}(\theta_2)](\vec{l}_j - l_{0j}) = S_i(\theta_2) + \varepsilon N_i(\theta_2). \quad (3.1.52)$$

Обозначим \vec{l}^* — решение системы уравнений (3.1.52) при $\varepsilon = 0$. Полагая в (3.1.52) $\varepsilon = 0$ получаем решение в виде

$$l_i^* = l_{0i} + \sum_{j=1}^p \frac{A_{ij}(\theta_2)}{B(\theta_2)} S_j(\theta_2),$$

где $B(\theta_2)$ — определитель порядка p с элементами $[-S_{ij}(\theta_2)]$, $A_{ij}(\theta_2)$ — алгебраические дополнения этого определителя. При $\varepsilon \rightarrow 0$ приближенное решение системы (3.1.52) будем искать в виде ряда по степеням ε [21,53]:

$$\vec{l}_i = l_i^* + \varepsilon \vec{l}_{1i} + \varepsilon^2 \vec{l}_{2i} + \dots \quad (3.1.53)$$

Подставляя (3.1.53) в (3.1.52), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и ограничиваясь первым приближением, находим

$$\begin{aligned} \tilde{l}_i = l_{0i} + \sum_{j=1}^p \frac{A_{ij}(\theta_2)}{B(\theta_2)} \left\{ S_j(\theta_2) + \varepsilon \left[N_j(\theta_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m=1}^p \sum_{k=1}^p \frac{A_{mk}(\theta_2)}{B(\theta_2)} S_k(\theta_2) N_{jm}(\theta_2) \right] \right\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.1.54)$$

Подстановка (3.1.54) в разложение (3.1.49) приводит к приближенному выражению для функции (3.1.48)

$$L(\theta_2) = \tilde{S}(\theta_2) + \varepsilon \tilde{N}(\theta_2). \quad (3.1.55)$$

Здесь отброшены члены порядка малости ε^2 и менее, а также обозначено

$$\tilde{S}(\theta_2) = S(\theta_2) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{A_{ij}(\theta_2)}{B(\theta_2)} S_i(\theta_2) S_j(\theta_2), \quad (3.1.56)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\theta_2) = N(\theta_2) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{A_{ij}(\theta_2)}{B(\theta_2)} \{ S_i(\theta_2) N_j(\theta_2) + S_j(\theta_2) N_i(\theta_2) \} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{d=1}^p \frac{A_{ij}(\theta_2) A_{md}(\theta_2)}{B^2(\theta_2)} S_{im}(\theta_2) [S_d(\theta_2) N_j(\theta_2) + S_j(\theta_2) N_d(\theta_2)]. \end{aligned} \quad (3.1.57)$$

Рассмотрим производные сигнальной составляющей (3.1.45) по регулярным параметрам

$$S_i(\theta_2) = \frac{2}{z_0^2 N_0} \left[\int_{\theta_{01}}^{\min(\theta_2, \theta_{02})} f(t, \vec{l}_0) \frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_i} dt - \int_{\theta_{01}}^{\theta_2} f(t, \vec{l}_0) \frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_i} dt \right]_{\vec{l}_0}, \quad (3.1.58)$$

$$\begin{aligned} S_{ij}(\theta_2) = \frac{2}{z_0^2 N_0} \left\{ \int_{\theta_{01}}^{\min(\theta_2, \theta_{02})} f(t, \vec{l}_0) \frac{\partial^2 f(t, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} dt - \int_{\theta_{01}}^{\theta_2} \left[f(t, \vec{l}_0) \frac{\partial^2 f(t, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_i} \frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_j} \right] dt \right\}_{\vec{l}_0}. \end{aligned} \quad (3.1.59)$$

Согласно (3.1.58) и (3.1.59), при $|\theta_2 - \theta_{02}| \rightarrow 0$

$$S_i(\theta_2) = O(|\theta_2 - \theta_{02}|), \quad S_{ij}(\theta_2) = -S_{ij} + O(|\theta_2 - \theta_{02}|), \quad (3.1.60)$$

$$S_{ij} = -S_{ij}(\theta_{02}) = \frac{2}{z_0^2 N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} \frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_i} \frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_j} \Big|_{\vec{l}_0} dt.$$

Учитывая (3.1.60), получаем, что сигнальная составляющая $\tilde{S}(\theta_2)$ в (3.1.55) описывается асимптотическим выражением

$$S(\theta_2) = S(\theta_2, \vec{l}_0) = 1/2 - \delta_2 |\theta_2 - \theta_{02}| + o(|\theta_2 - \theta_{02}|), \quad (3.1.61)$$

где $\delta_2 = f^2(\theta_{0n}, \vec{l}_0) / z_0^2 N_0 > 0$. Шумовая функция $\tilde{N}(\theta_2)$ в (3.1.55) является центрированным гауссовским случайным процессом.

Обозначим $\eta_2(\theta_2) = \tilde{N}_2(\theta_2) - \tilde{N}_2(\theta'_2)$ — приращение шумовой составляющей (3.1.57), где θ'_2 — точка из области возможных значений момента исчезновения (1.1.2).

Полагая $\Delta = \max\{|\theta_{12} - \theta'_2|, |\theta_{22} - \theta'_2|, |\theta_{12} - \theta_{02}|, |\theta_{22} - \theta_{02}|\} \rightarrow 0$, для функции корреляции случайного процесса $\eta_2(\theta_2)$ можно записать

$$K_{\Delta 2}(\theta_{12}, \theta_{22}) = \begin{cases} 2\delta_2 \min(|\theta_{12} - \theta'_2|, |\theta_{22} - \theta'_2|), & (\theta_{12} - \theta'_2)(\theta_{22} - \theta'_2) > 0, \\ 0, & (\theta_{12} - \theta'_2)(\theta_{22} - \theta'_2) < 0. \end{cases} \quad (3.1.62)$$

Свойства сигнальной составляющей (3.1.61) и приращений шумовой составляющей (3.1.62) позволяют использовать для расчета характеристик оценки МП момента исчезновения метод локально-марковской аппроксимации [57]. В результате при $z_0 \rightarrow \infty$ находим, что оценка МП момента исчезновения несмещенная и обладает рассеянием [53]

$$V(\hat{\theta}_2 | \theta_{02}, \vec{l}_0) = \left\langle (\hat{\theta}_2 - \theta_{02})^2 \right\rangle = 13/2 z_0^4 \delta_2^2 = 13 N_0^2 / 2 f^4(\theta_{02}, \vec{l}_0). \quad (3.1.63)$$

Как и следовало ожидать [53], асимптотическое выражение (3.1.63) для условного рассеяния оценки МП момента исчезновения при неизвестных регулярных параметрах сигнала с точностью до обозначения $\rho_{21}^2 = 2 f^2(\theta_{02}, \vec{l}_0) T_{\max} / N_0$ совпадает с аналогичным рассеянием (2.1.23) при известных регулярных параметрах. Следовательно, незнание регулярных параметров сигнала асимптотически не влияет на точность оценки момента его исчезновения [67].

Рассмотрим далее асимптотические характеристики оценок регулярных параметров которые запишем в виде

$$\begin{aligned} \hat{l} &= \arg \sup L(\vec{l}), \\ L(\vec{l}) &= \sup_{\theta_2} L(\theta_2, \vec{l}) = L(\hat{\theta}_2, \vec{l}). \end{aligned} \quad (3.1.64)$$

Здесь оценка $\hat{\theta}_2$ определяется из (3.1.47) и согласно (3.1.63), при $\varepsilon \rightarrow 0$ может быть представлена как

$$\hat{\theta}_2 = \theta_{02} + \varepsilon^2 \chi_2 + o(\varepsilon^2), \quad (3.1.65)$$

где χ_2 — случайная величина, первые два момента которой не зависят от ε и равны соответственно $|\chi_2| = 0$, $|\chi_2^2| = 13/2\delta_2^2$. Оценки МП регулярных параметров будем искать из решения системы уравнений правдоподобия [30]

$$\left[\partial L(\vec{l}) / \partial l_i \right]_{\hat{l}} = 0, \quad i = \overline{1; p}. \quad (3.1.66)$$

Полагая, что оценки имеют высокую апостериорную точность, найдем приближенное значение оценок (3.1.64). Подставляя (3.1.65) в разложение (3.1.49), а затем полученный результат в (3.1.66), перепишем систему уравнений правдоподобия как

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^p S_{ij}(\theta_{02} + \varepsilon^2 \chi_2)(\hat{l}_j - l_{0j}) + S_i(\theta_{02} + \varepsilon^2 \chi_2) + \\ & + \varepsilon \left[N_i(\theta_{02} + \varepsilon^2 \chi_2) + \sum_{j=1}^p N_{ij}(\theta_{02} + \varepsilon^2 \chi_2)(\hat{l}_j - l_{0j}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.1.67)$$

При $\varepsilon = 0$ решение системы уравнений (3.1.67) совпадает с истинным значением регулярных параметров $\hat{l}_i = l_{0i}, i = \overline{1; p}$. В случае высокой апостериорной точности оценок величина ε мала. Тогда приближенное решение системы (3.1.67) нетрудно найти в виде ряда [30,67]

$$\hat{l}_i = l_{0i} + \varepsilon l_{1i} + \varepsilon^2 l_{2i} + \dots \quad (3.1.68)$$

Используя результаты работы [67], уравнение для первого приближения оценок регулярных параметров с точностью до членов порядка малости $o(|\varepsilon|)$ запишем в виде

$$\sum_{j=1}^p S_{ij} l_{1j} = N_i(\theta_{02}). \quad (3.1.69)$$

Решая эту систему аналогично [30,67], находим элементы корреляционной матрицы оценок МП регулярных параметров

$$K_{ij}(\hat{l} | \theta_{02}, \vec{l}_0) = \langle (\hat{l}_i - l_{0i})(\hat{l}_j - l_{0j}) \rangle = A_{ij} / z_0^2 B, \quad (3.1.70)$$

где B — определитель порядка p с элементами S_{ij} (3.1.60), а A_{ij} — его алгебраические дополнения. Заметим, что используя обозначения (3.1.15), корреляционную матрицу (3.1.70) можно переписать в виде (3.1.16). Таким образом, наличие у сигнала неизвестного момента исчезновения асимптотически не влияет на точность оценок МП его регулярных параметров [67].

Рассмотрим в качестве примера совместную оценку МП момента исчезновения (длительности) и параметров фазовой модуляции прямоугольного радиоимпульса [37]

$$s(t, \theta_{02}, \vec{l}_0) = \begin{cases} a \cos[\omega t + \Psi(t, \vec{l}_0)], & 0 \leq t \leq \theta_{02}, \\ 0, & t < 0, t > \theta_{02}, \end{cases} \quad (3.1.71)$$

где a — амплитуда, ω — несущая частота, $\Psi(t, \vec{l}_0)$ — закон фазовой модуляции, медленно меняющийся по сравнению с колебанием несущей частоты и дифференцируемый по компонентам вектора \vec{l}_0 . Приёмник МП должен формировать логарифм ФОП

$$L(\theta_2, \vec{l}) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(t, \theta_2, \vec{l}) dt - \frac{a^2 \theta_2}{2N_0} \quad (3.1.72)$$

и находить совместные оценки как (3.1.41). Выражение (3.1.72) определяет структуру приёмного устройства. Асимптотические при $z^2 = a^2 \theta_{02} / N_0 \rightarrow \infty$ характеристики совместных оценок МП момента исчезновения и параметров фазовой модуляции запишем на основе выражений (3.1.63) и (3.1.70). Оценка МП момента исчезновения обладает асимптотически нулевым смещением и рассеянием [81]

$$V(\hat{\theta}_2 | \theta_{02}, \vec{l}_0) = 26\theta_{02}^2 / z^4. \quad (3.1.73)$$

Оценки МП параметров \vec{l}_0 асимптотически несмещенные и обладают корреляционной матрицей $K_{ij}(\hat{l} | \theta_{02}, \vec{l}_0) = A_{ij} / z^2 B$, где B — определитель матрицы с элементами [37]

$$S_{ij} = \frac{1}{\theta_{02}} \int_0^{\theta_{02}} \frac{\partial \Psi(t, \vec{l})}{\partial l_i} \frac{\partial \Psi(t, \vec{l})}{\partial l_j} dt, \quad i, j = 1, 2, \quad \vec{l} = \vec{l}_0$$

A_{ij} — алгебраические дополнения этого определителя.

Если сигнал (3.1.71) представляет собой прямоугольный радиоимпульс $\Psi(t, \vec{l}_0) = \Omega_0 t + \psi(t)$, а вектор \vec{l}_0 имеет единственную компоненту Ω_0 — доплеровский сдвиг частоты, то рассеяние оценки момента исчезновения (длительности) определяется асимптотическим выражением (3.1.73), а для рассеяния оценки параметра Ω_0 запишем $V(\hat{\Omega} | \theta_{02}, \Omega_0) = 3/z^2 \theta_{02}^2$ [36].

Если сигнал (3.1.71) представляет собой ЛЧМ радиоимпульс [37] $\Psi(t, \vec{l}_0) = \Omega_0 t + \lambda_0 t^2 / 2T$, $\vec{l}_0 = (\Omega_0, \lambda_0)$, Ω_0 — доплеровский сдвиг частоты,

λ_0 — полоса качания частоты сигнала, то корреляционную матрицу оценок параметров Ω_0 , λ_0 можно записать в виде

$$\hat{K} = \frac{1}{z^2 \theta_{02}^2} \begin{vmatrix} 48 & -120\eta \\ -120\eta & 320\eta^2 \end{vmatrix},$$

где $\eta = T/\theta_{02}$.

В работе [92] синтезированы квазиправдоподобный и максимально правдоподобный алгоритмы оценки амплитуды сигнала произвольной формы с неизвестной длительностью, а в работе [113] — радиосигнала с неизвестными длительностью и начальной фазой. Найдены характеристики синтезированных алгоритмов и выполнено сравнение точности оценок амплитуды. Для КП алгоритмов оценки амплитуды вместо неизвестной длительности было использовано её некоторое ожидаемое значение, которое может не совпадать с истинным. Исследовано влияние расстройки между ожидаемым и истинными значениями длительности на точность КП оценки амплитуды.

В работах [100,101] получены алгоритмы оценки амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала (СШП КРС) в случае прямоугольной [101] и непрямоугольной [100] модулирующей функции. Рассмотрены КП и МП алгоритмы оценки амплитуды СШП КРС с неизвестной длительностью. Под СШП КРС понимался сигнал, структура которого подобна узкополосному радиосигналу, однако условие относительной узкополосности не выполняется. Предложены блок-схемы устройств, вырабатывающих оценки амплитуды. Выполнено сравнение сложности технической или программной реализации синтезированных алгоритмов. Показано, что МП алгоритмы оценивания являются более сложными, чем квазиправдоподобные алгоритмы.

Выполнен анализ синтезированных алгоритмов, найдены характеристики точности оценок амплитуды. Показано, что незнание длительности сигнала может приводить к существенному снижению точности КП оценки. Точность МП оценки амплитуды асимптотически с увеличением отношения сигнал/шум приближается к точности оценки амплитуды при известной длительности.

3.2. Оценка параметров сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения

Рассмотрим оценку регулярных параметров сигнала (3.1.1) при неизвестных моментах его появления и исчезновения [73]. Если в оценке этих моментов нет необходимости, можно использовать КП алгоритм для оценки

регулярных параметров \vec{l} , согласно которому приёмник формирует логарифм ФОП (3.1.4) для некоторых ожидаемых моментов появления θ_1^* и исчезновения θ_2^* из априорной области (1.1.2).

$$L^*(\vec{l}) = L(\theta_1^*, \theta_2^*, \vec{l}). \quad (3.2.1)$$

В качестве КП оценок регулярных параметров выбираются координаты положения максимума случайного поля (3.2.1)

$$\vec{l}^* = \arg \sup L^*(\vec{l}). \quad (3.2.2)$$

Найдем асимптотические характеристики КП оценки (3.2.2). Подставляя принятую реализацию (3.1.2) в выражение (3.1.4), а затем (3.1.4) в (3.2.1), запишем для логарифма ФОП

$$L^*(\vec{l}) = S^*(\vec{l}) + N^*(\vec{l}), \quad (3.2.3)$$

где

$$S^*(\vec{l}) = S^*(\vec{l}, \vec{l}_0) - Q^*(\vec{l})/2, \quad (3.2.4)$$

$$S^*(\vec{l}, \vec{l}_0) = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\theta_1^*, \theta_{01})}^{\min(\theta_2^*, \theta_{02})} f(t, \vec{l}) f(t, \vec{l}_0) dt, \quad (3.2.5)$$

$$Q^*(\vec{l}) = S^*(\vec{l}, \vec{l}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f^2(t, \vec{l}) dt, \quad (3.2.6)$$

$$N^*(\vec{l}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f(t, \vec{l}) n(t) dt. \quad (3.2.7)$$

Шумовая составляющая (3.2.7) представляет собой центрированное гауссовское случайное поле с корреляционной функцией

$$B^*(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} f(t, \vec{l}_1) f(t, \vec{l}_2) dt. \quad (3.2.8)$$

Обозначим

$$\vec{l}^* = \arg \sup S^*(\vec{l}) \quad (3.2.9)$$

– положение абсолютного максимума сигнальной составляющей (3.2.4). Будем полагать, что ОСШ на выходе приёмника

$$z = \sqrt{S^{*2}(\vec{l}^*) / B(\vec{l}^*, \vec{l}^*)} \gg 1 \quad (3.2.10)$$

велико, так что можно ввести малый параметр $\varepsilon = 1/z$ и перейти к нормированному логарифму ФОП $L_z^*(\vec{l}) = L^*(\vec{l})/z^2$, для которого запишем

$$L_z^*(\vec{l}) = S(\vec{l}) + \varepsilon N(\vec{l}), \quad (3.2.11)$$

где

$$S(\vec{l}) = S^*(\vec{l})/z^2, \quad N(\vec{l}) = N^*(\vec{l})/z \quad (3.2.12)$$

— нормированные сигнальная и шумовая составляющие. Корреляционная функция нормированной шумовой составляющей равна

$$B(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = B^*(\vec{l}_1, \vec{l}_2)/z^2. \quad (3.2.13)$$

Уравнение для нахождения КП оценки запишем в виде (3.1.30). Поскольку при больших ОСШ (3.2.10) положение максимума решающей статистики (3.2.11) располагается в малой окрестности положения максимума (3.2.9) сигнальной составляющей (3.2.12), (3.2.4), будем искать приближенное решение уравнения (3.1.30) методом малого параметра [30] в виде ряда (3.1.31). Тогда для первого приближения КП оценок получаем выражение (3.1.35), где \vec{n} — вектор с компонентами $n_i = \left[\frac{\partial N(\vec{l})}{\partial \vec{l}_i} \right]_{\vec{l}^*}$, $i = \overline{1, p}$, A —

матрица с элементами a_{ij} , обратная к матрице

$S = \|-s_{ij}\| = \left\| - \left[\frac{\partial^2 S(\vec{l})}{\partial \vec{l}_i \partial \vec{l}_j} \right]_{\vec{l}^*} \right\|$ вторых производных сигнальной составляющей (3.2.12). Выполняя дифференцирование, находим

$$s_{ij} = \frac{2}{N_0} \frac{1}{z^2} \int_{\max(\theta_{01}, \theta_1^*)}^{\min(\theta_{02}, \theta_2^*)} \left[\frac{\partial^2 f(t, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \right]_{\vec{l}^*} f(t, \vec{l}_0) dt - \frac{2}{N_0} \frac{1}{z^2} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} \left[\frac{\partial^2 f(t, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} \right]_{\vec{l}^*} f(t, \vec{l}^*) dt - \frac{2}{N_0} \frac{1}{z^2} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} \left[\frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_i} \right]_{\vec{l}^*} \left[\frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_j} \right]_{\vec{l}^*} dt. \quad (3.2.14)$$

Используя первое приближение (3.1.35), нетрудно найти асимптотические выражения для КП оценок [79]: смещение

$$b_i(\vec{l}_i | \vec{l}_0) = \langle \tilde{l}_i - l_{0i} \rangle = l_i^* - l_{0i}, \quad (3.2.15)$$

и корреляционную матрицу

$$\hat{K} = \varepsilon^2 \langle \vec{l}_1 \vec{l}_1^T \rangle = \varepsilon^2 A B A^T, \quad (3.2.16)$$

где $B = \langle \vec{n} \vec{n}^T \rangle$ — матрица вторых производных корреляционной функции (3.2.13) с элементами

$$b_{ij} = \langle n_i n_j \rangle = \left[\partial^2 B(\bar{l}_1, \bar{l}_2) / \partial l_{1j} \partial l_{2j} \right]_{\bar{l}^*} = F_{ij}(\theta_1^*, \theta_2^*, \bar{l}^*) / z^2. \quad (3.2.17)$$

Заметим, что при одновременном выполнении неравенств $\theta_1^* > \theta_{01}$ и $\theta_2^* < \theta_{02}$ положение максимума (3.2.9) сигнальной составляющей (3.2.4) совпадает с истинным значением параметров $\bar{l}^* = \bar{l}_0$. Тогда КП оценки (3.2.2) являются состоятельными, а асимптотические выражения для смещений и корреляционной матрицы принимают наиболее простой вид

$$\bar{b}_i(\bar{l}_i | \bar{l}_0) = 0, \quad \hat{K} = \left\| F_{ij}(\theta_1^*, \theta_2^*, \bar{l}_0) \right\|^{-1}. \quad (3.2.18)$$

Как известно [30], повысить точность КП оценок (3.2.2) можно, если вместо ожидаемых моментов появления и исчезновения использовать их оценки МП. Поэтому необходимо рассмотреть совместные оценки МП моментов появления, исчезновения и регулярных параметров сигнала [91]. Приёмник МП должен формировать логарифм ФОП (3.1.4) для всех возможных значений неизвестных параметров и находить совместные оценки МП как координаты его абсолютного максимума

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{l}) = \arg \sup L(\theta_1, \theta_2, \bar{l}). \quad (3.2.19)$$

Введем в рассмотрение нормированный логарифм ФОП

$$L_z(\theta_1, \theta_2, \bar{l}) = L(\theta_1, \theta_2, \bar{l}) / z_0^2, \quad (3.2.20)$$

где z_0 — ОСШ для принятого сигнала (3.1.12). Подставляя в (3.2.20) реализацию наблюдаемых данных (3.1.2), получаем

$$L_z(\theta_1, \theta_2, \bar{l}) = S(\theta_1, \theta_2, \bar{l}) + \varepsilon N(\theta_1, \theta_2, \bar{l}), \quad (3.2.21)$$

$$N(\theta_1, \theta_2, \bar{l}) = \frac{2}{z_0 N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(t, \bar{l}) n(t) dt \quad (3.2.22)$$

— нормированная шумовая составляющая,

$$S(\theta_1, \theta_2, \bar{l}) = S(\theta_{01}, \theta_{02}, \bar{l}_0, \theta_1, \theta_2, \bar{l}) - S(\theta_1, \theta_2, \bar{l}, \theta_1, \theta_2, \bar{l}) / 2 \quad (3.2.23)$$

— нормированная сигнальная составляющая,

$$S(\theta_{11}, \theta_{12}, \bar{l}_1, \theta_{21}, \theta_{22}, \bar{l}_2) = \frac{2}{z_0^2 N_0} \int_{\max(\theta_{11}, \theta_{21})}^{\min(\theta_{12}, \theta_{22})} f(t, \bar{l}_1) f(t, \bar{l}_2) dt \quad (3.2.24)$$

— нормированная сигнальная функция, которая совпадает с корреляционной функцией шумовой составляющей (3.2.22) [30, 110], а $\varepsilon = 1/z_0$ — малый параметр при $z_0 \gg 1$.

Пусть при истинных значениях неизвестных параметров сигнала функция $f(t, \vec{l})$ в моменты появления и исчезновения не обращается в ноль, то есть $f(\theta_{0n}, \vec{l}_0) \neq 0$, $n=1,2$. Тогда, согласно (3.2.23), (3.2.24), когда $\Delta = \max(|\theta_1 - \theta_{01}|, |\theta_2 - \theta_{02}|) \rightarrow 0$ функцию (3.2.23) при $\vec{l} = \vec{l}_0$ можно представить в виде

$$S(\theta_1, \theta_2) = S(\theta_1, \theta_2, \vec{l}_0) = 1/2 - \delta_1 |\theta_1 - \theta_{01}| - \delta_2 |\theta_2 - \theta_{02}| + o(\Delta), \quad (3.2.25)$$

где $\delta_n = f^2(\theta_{0n}, \vec{l}_0) / z_0^2 N_0 > 0$.

Поскольку параметры l_i , $i = \overline{1, p}$ считаются регулярными [15,60,110], то при всех θ_1, θ_2 и $\max(|l_i - l_{0i}|, i = \overline{1, p}) \rightarrow 0$ функцию (3.2.23) можно аппроксимировать отрезком p - мерного разложения Тейлора в окрестности истинного значения \vec{l}_0

$$S(\theta_1, \theta_2, \vec{l}) = S(\theta_1, \theta_2) + \sum_{i=1}^p S_i(\theta_1, \theta_2)(l_i - l_{0i}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p S_{ij}(\theta_1, \theta_2)(l_i - l_{0i})(l_j - l_{0j}) + o[(l_i - l_{0i})(l_j - l_{0j})],$$

где

$$S_i(\theta_1, \theta_2) = \frac{2}{z_0^2 N_0} \left[\int_{\max(\theta_1, \theta_{01})}^{\min(\theta_2, \theta_{02})} f(t, \vec{l}_0) \frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_i} dt - \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(t, \vec{l}_0) \frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_i} dt \right]_{\vec{l}_0}, \quad (3.2.26)$$

$$S_{ij}(\theta_1, \theta_2) = \frac{2}{z_0^2 N_0} \left\{ \int_{\max(\theta_1, \theta_{01})}^{\min(\theta_2, \theta_{02})} f(t, \vec{l}_0) \frac{\partial^2 f(t, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} dt - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[f(t, \vec{l}_0) \frac{\partial^2 f(t, \vec{l})}{\partial l_i \partial l_j} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_i} \frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_j} \right] dt \right\}_{\vec{l}_0}. \quad (3.2.27)$$

Согласно (3.2.26) и (3.2.27), при $\Delta \rightarrow 0$

$$S_i(\theta_1, \theta_2) = O(\Delta), \quad S_{ij}(\theta_1, \theta_2) = -S_{ji} + O(\Delta), \quad (3.2.28)$$

где

$$S_{ij} = -S_{ji}(\theta_{01}, \theta_{02}) = \frac{2}{z_0^2 N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} \frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_i} \frac{\partial f(t, \vec{l})}{\partial l_j} \Big|_{\vec{l}_0} dt. \quad (3.2.29)$$

Перепишем оценки (3.2.19) моментов появления и исчезновения аналогично [67,73] в виде

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \arg \sup L(\theta_1, \theta_2), \quad (3.2.30)$$

$$L(\theta_1, \theta_2) = \sup_{\vec{l}} L(\theta_1, \theta_2, \vec{l}) = L(\theta_1, \theta_2, \hat{\vec{l}}). \quad (3.2.31)$$

Пусть совместные оценки МП (3.2.19) имеют высокую апостериорную точность, что возможно при достаточно больших ОСШ (3.1.12). В этом случае для определения характеристик МП оценок достаточно исследовать поведение логарифма ФОП (3.2.20) в малой окрестности истинных значений $\theta_{01}, \theta_{02}, \vec{l}_0$ неизвестных параметров. Для нахождения функции (3.2.31) будем аппроксимировать логарифм ФОП (3.2.21) отрезком p - мерного разложения Тейлора в окрестности \vec{l}_0 при фиксированных моментах появления и исчезновения θ_1, θ_2 :

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2, \vec{l}) &= S(\theta_1, \theta_2) + \varepsilon N(\theta_1, \theta_2) + \sum_{i=1}^p [S_i(\theta_1, \theta_2) + \varepsilon N_i(\theta_1, \theta_2)](l_i - l_{0i}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p [S_{ij}(\theta_1, \theta_2) + \varepsilon N_{ij}(\theta_1, \theta_2)](l_i - l_{0i})(l_j - l_{0j}) + o \left[(l_i - l_{0i})(l_j - l_{0j}) \right], \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

где

$$N_i(\theta_1, \theta_2) = \left[\partial N(\theta_1, \theta_2, \vec{l}) / \partial l_i \right]_{\vec{l}_0}, N_{ij}(\theta_1, \theta_2) = \left[\partial^2 N(\theta_1, \theta_2, \vec{l}) / \partial l_i \partial l_j \right]_{\vec{l}_0}, \quad i, j = \overline{1; p}. \quad (3.2.33)$$

Очевидно, (3.2.32) достигает максимума при фиксированных значениях θ_1 и θ_2 , когда $\vec{l} = \vec{\tilde{l}}$, где $\vec{\tilde{l}}$ определяется из системы уравнений

$$\left[\partial L(\theta_1, \theta_2, \vec{l}) / \partial l_i \right]_{\vec{\tilde{l}}} = 0. \quad (3.2.34)$$

Подставляя (3.2.32) в (3.2.34), приходим к системе

$$-\sum_{j=1}^p [S_{ij}(\theta_1, \theta_2) + \varepsilon N_{ij}(\theta_1, \theta_2)](\tilde{l}_j - l_{0j}) = S_i(\theta_1, \theta_2) + \varepsilon N_i(\theta_1, \theta_2). \quad (3.2.35)$$

Обозначим \vec{l}^* — решение системы уравнений (3.2.35) при $\varepsilon = 0$. Полагая в (3.2.35) $\varepsilon = 0$ получаем решение в виде

$$l_i^* = l_{0i} + \sum_{j=1}^p \frac{A_{ij}(\theta_1, \theta_2)}{B(\theta_1, \theta_2)} S_j(\theta_1, \theta_2),$$

где $B(\theta_1, \theta_2)$ – определитель порядка p с элементами $[-S_{ij}(\theta_1, \theta_2)]$, $A_{ij}(\theta_1, \theta_2)$ – алгебраические дополнения этого определителя. В рассматриваемом случае высокой апостериорной точности величина ε мала, поэтому решение системы (3.2.35) будем искать в виде ряда по степеням ε [30]

$$\tilde{l}_i = l_i^* + \varepsilon \tilde{l}_{1i} + \varepsilon^2 \tilde{l}_{2i} + \dots \quad (3.2.36)$$

Подставляя (3.2.36) в (3.2.35), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε и ограничиваясь первым приближением, находим [73]

$$\begin{aligned} \tilde{l}_i = l_{0i} + \sum_{j=1}^p \frac{A_{ij}(\theta_1, \theta_2)}{B(\theta_1, \theta_2)} \left\{ S_j(\theta_1, \theta_2) + \varepsilon \left[N_j(\theta_1, \theta_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m=1}^p \sum_{k=1}^p \frac{A_{mk}(\theta_1, \theta_2)}{B(\theta_1, \theta_2)} S_k(\theta_1, \theta_2) N_{jm}(\theta_1, \theta_2) \right] \right\} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Подстановка (3.2.37) в разложение (3.2.32) приводит к приближенному выражению для функции (3.2.31)

$$L(\theta_1, \theta_2) = \tilde{S}(\theta_1, \theta_2) + \varepsilon \tilde{N}(\theta_1, \theta_2). \quad (3.2.38)$$

Здесь отброшены члены порядка малости ε^2 и менее, а также обозначено

$$\tilde{S}(\theta_1, \theta_2) = S(\theta_1, \theta_2) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{A_{ij}(\theta_1, \theta_2)}{B(\theta_1, \theta_2)} S_i(\theta_1, \theta_2) S_j(\theta_1, \theta_2),$$

$$\tilde{N}(\theta_1, \theta_2) = N(\theta_1, \theta_2) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{A_{ij}(\theta_1, \theta_2)}{B(\theta_1, \theta_2)} \{ S_i(\theta_1, \theta_2) N_j(\theta_1, \theta_2) + S_j(\theta_1, \theta_2) N_i(\theta_1, \theta_2) \} +$$

$$\begin{aligned} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{d=1}^p \frac{A_{ij}(\theta_1, \theta_2) A_{md}(\theta_1, \theta_2)}{B^2(\theta_1, \theta_2)} S_{im}(\theta_1, \theta_2) [S_d(\theta_1, \theta_2) N_j(\theta_1, \theta_2) + \\ + S_j(\theta_1, \theta_2) N_d(\theta_1, \theta_2)]. \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Учитывая (3.2.28), получаем, что при $\Delta \rightarrow 0$ сигнальная составляющая $\tilde{S}(\theta_1, \theta_2)$ в (3.2.38) описывается асимптотическим выражением (3.2.25).

Шумовая составляющая $\tilde{N}(\theta_1, \theta_2)$ является, согласно (3.2.39), центрированным гауссовским случайным полем. Корреляционная функция этого поля, как следует из (3.2.24), (3.2.25), при $\Delta \rightarrow 0$ допускает асимптотическое представление

$$\tilde{K}(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}) = \tilde{K}_1(\theta_{11}, \theta_{21}) + \tilde{K}_2(\theta_{12}, \theta_{22}) + o(\Delta), \quad (3.2.40)$$

$$\tilde{K}_i(\theta_{1i}, \theta_{2i}) = 1/2 + 2\delta_i \min \left[(-1)^i (\theta_{1i} - \theta_{0i}); (-1)^i (\theta_{2i} - \theta_{0i}) \right] - \quad (3.2.41)$$

$$-F_i \left\{ \max \left[(-1)^i (\theta_{1i} - \theta_{0i}), 0 \right] + \max \left[(-1)^i (\theta_{2i} - \theta_{0i}), 0 \right] \right\}, \quad i = 1; 2,$$

$$F_i = \sum_{n=1}^p \sum_{j=1}^p D_{nj} (C_{inj} + C_{ijn}) + \sum_{n=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{k=1}^p S_{nm} D_{nj} D_{mk} (C_{ijk} + C_{ikj}),$$

$$C_{nij} = \frac{2}{z^2 N_0} f(\theta_{0n}, \bar{l}_0) \left[\frac{\partial f(\theta_{0n}, \bar{l})}{\partial l_i} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} f(t, \bar{l}_0) \frac{\partial f(t, \bar{l})}{\partial l_j} dt \right]_{\bar{l}_0},$$

$$D_{ij} = A_{ij}(\theta_{01}, \theta_{02}) / B(\theta_{01}, \theta_{02}), \quad i, j = \overline{1; p}, \quad n = 1, 2.$$

Найдем теперь характеристики совместных оценок МП (3.2.30) моментов появления и исчезновения [73]. Введем в малой окрестности истинных значений $(\theta_{01}, \theta_{02})$ моментов появления и исчезновения два статистически независимых гауссовских случайных процесса $L_n(\theta_n)$, $n = 1, 2$ с математическими ожиданиями

$$\langle L_n(\theta_n) \rangle = \tilde{S}_n(\theta_n) = 1/4 - \delta_n |\theta_n - \theta_{0n}|, \quad n = 1, 2 \quad (3.2.42)$$

и корреляционными функциями (3.2.41). Тогда при $\Delta \rightarrow 0$ сумма процессов $L_1(\theta_1)$ и $L_2(\theta_2)$ имеет математическое ожидание (3.2.25) и корреляционную функцию (3.2.40). Ввиду того, что гауссовский случайный процесс полностью описывается своими математическим ожиданием и корреляционной функцией, выражение (3.2.38) при $\Delta \rightarrow 0$ можно представить как

$$L(\theta_1, \theta_2) = L_1(\theta_1) + L_2(\theta_2). \quad (3.2.43)$$

Согласно (3.2.43), положение максимума случайного поля $L(\theta_1, \theta_2)$ по переменной θ_1 совпадает с положением максимума процесса $L_1(\theta_1)$, а положение максимума поля $L(\theta_1, \theta_2)$ по переменной θ_2 — с положением максимума $L_2(\theta_2)$. Таким образом, характеристики совместных оценок МП $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ определяются свойствами процессов $L_1(\theta_1)$ и $L_2(\theta_2)$ соответственно. В силу независимости $L_1(\theta_1)$ и $L_2(\theta_2)$, МП оценки моментов появления и исчезновения асимптотически статистически независимы.

Обозначим $\eta_2(\theta_2) = \tilde{N}_2(\theta_2) - \tilde{N}_2(\theta'_2)$ — приращение шумовой составляющей $\tilde{N}_2(\theta_2) = L_2(\theta_2) - \tilde{S}_2(\theta_2)$ случайного процесса $L_2(\theta_2)$, где θ'_2 — точка из области возможных значений момента исчезновения (1.1.2), такая, что $|\theta_{02} - \theta'_2| < \Delta$. Согласно (3.2.41), корреляционную функцию случайного процесса $\eta_2(\theta_2)$ можно записать как [73]

$$K_{\Delta 2}(\theta_{12}, \theta_{22}) = \begin{cases} 2\delta_2 \min(|\theta_{12} - \theta'_2|, |\theta_{22} - \theta'_2|), & (\theta_{12} - \theta'_2)(\theta_{22} - \theta'_2) > 0, \\ 0, & (\theta_{12} - \theta'_2)(\theta_{22} - \theta'_2) < 0. \end{cases} \quad (3.2.44)$$

Свойства сигнальной составляющей (3.2.42) и приращений шумовой составляющей (3.2.44) позволяют использовать для расчета характеристик оценок МП момента исчезновения метод локально-марковской аппроксимации [110]. В результате при $z \rightarrow \infty$ находим, что оценка МП момента исчезновения несмещенная и обладает рассеянием [91]

$$V(\hat{\theta}_2 | \theta_{01}, \theta_{02}, \vec{l}_0) = \left\langle (\hat{\theta}_2 - \theta_{02})^2 \right\rangle = 13/2z_0^4 \delta_2^2. \quad (3.2.45)$$

Для определения характеристик оценки момента появления $\hat{\theta}_1$ перейдем к новой переменной $\lambda = -\theta_1$. Тогда математическое ожидание случайного процесса $L_1^*(\lambda) = L_1(-\lambda)$ совпадает с (3.2.42) при $n=1$, а корреляционная функция приращения $\eta_1^*(\lambda) = \tilde{N}_1^*(\lambda) - \tilde{N}_1^*(\lambda')$ шумовой составляющей $\tilde{N}_1^*(\lambda) = L_1^*(\lambda) - \tilde{S}_1^*(\lambda)$ при замене θ_2 на λ , θ'_2 на λ' и δ_2 на δ_1 совпадает с (3.2.44). Применяя метод локально-марковской аппроксимации [110], находим, что МП оценка момента появления асимптотически несмещенная и обладает рассеянием

$$V(\hat{\theta}_1 | \theta_{01}, \theta_{02}, \vec{l}_0) = \left\langle (\hat{\theta}_1 - \theta_{01})^2 \right\rangle = 13/2z_0^4 \delta_1^2. \quad (3.2.46)$$

Отметим, что асимптотические характеристики МП оценок моментов появления и исчезновения (3.2.45), (3.2.46) при неизвестных значениях регулярных параметров \vec{l}_0 с точностью до обозначений $\rho_{i1}^2 = 2f^2(\theta_{0i})T_{\max}/N_0$ совпадают с аналогичными характеристиками (2.3.16) при априори известных значениях \vec{l}_0 . Следовательно, точность оценок МП моментов появления и исчезновения асимптотически не зависит от наличия у сигнала конечного числа неизвестных регулярных параметров.

Перепишем далее ОМП (3.2.19) регулярных параметров в виде [91]

$$\hat{\vec{l}} = \arg \sup L(\vec{l}), \quad (3.2.47)$$

$$L(\vec{l}) = \sup_{\theta_1, \theta_2} L(\theta_1, \theta_2, \vec{l}) = L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \vec{l}).$$

Здесь оценки $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ определяются из (3.2.30) и согласно (3.2.45), (3.2.46) при $\varepsilon \rightarrow 0$ могут быть представлены как

$$\hat{\theta}_n = \theta_{0n} + \varepsilon^2 \chi_n + o(\varepsilon^2), \quad n=1,2, \quad (3.2.48)$$

где χ_n — статистически независимые случайные величины, первые два момента которых не зависят от ε и равны соответственно $|\chi_n| = 0$, $|\chi_n^2| = 13/2\delta_n^2$, $n = 1, 2$. Для регулярных параметров оценки МП будем искать из решения системы уравнений правдоподобия [30]

$$\left[\partial L(\vec{l}) / \partial l_i \right]_{\hat{l}_i} = 0, \quad i = \overline{1; p}. \quad (3.2.49)$$

Полагая, что оценки имеют высокую апостериорную точность, найдем приближенное значение оценок (3.2.47). Подставляя оценки моментов появления и исчезновения (3.2.48) в разложение (3.2.32), а затем полученный результат в (3.2.49), перепишем систему уравнений правдоподобия как

$$\sum_{j=1}^p S_{ij}(\theta_{01} + \varepsilon^2 \chi_1, \theta_{02} + \varepsilon^2 \chi_2) (\hat{l}_j - l_{0j}) + S_i(\theta_{01} + \varepsilon^2 \chi_1, \theta_{02} + \varepsilon^2 \chi_2) + \varepsilon \left[N_i(\theta_{01}, \theta_{02}) + \Delta_i(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{\mu} N_{ij}(\theta_{01} + \varepsilon^2 \chi_1, \theta_{02} + \varepsilon^2 \chi_2) (\hat{l}_j - l_{0j}) \right] = 0, \quad (3.2.50)$$

где обозначено

$$\Delta_i(\varepsilon) = N_i(\theta_{01} + \varepsilon^2 \chi_1, \theta_{02} + \varepsilon^2 \chi_2) - N_i(\theta_{01}, \theta_{02}). \quad (3.2.51)$$

При $\varepsilon = 0$ решение системы уравнений (3.2.50) совпадает с истинным значением регулярных параметров $\hat{l}_i = l_{0i}$, $i = \overline{1; p}$. В случае высокой апостериорной точности оценок величина ε мала. Тогда решение системы (3.2.50) будем искать в виде ряда по степеням ε [30]

$$\hat{l}_i = l_{0i} + \varepsilon l_{1i} + \varepsilon^2 l_{2i} + \dots \quad (3.2.52)$$

Подставляя разложение (3.2.52) в систему (3.2.50) и приравнявая коэффициенты при первой степени ε , получаем систему уравнений для первого приближения оценок регулярных параметров

$$-\sum_{j=1}^p S_{ij}(\theta_{01} + \varepsilon^2 \chi_1, \theta_{02} + \varepsilon^2 \chi_2) l_{1j} = N_i(\theta_{01}, \theta_{02}) + \Delta_i(\varepsilon). \quad (3.2.53)$$

Учитывая выражения (3.2.28), при $\varepsilon \rightarrow 0$ коэффициенты системы (3.2.53) можно переписать как

$$-S_{ij}(\theta_{01} + \varepsilon^2 \chi_1, \theta_{02} + \varepsilon^2 \chi_2) = S_{ij} + o(\varepsilon^2). \quad (3.2.54)$$

Исследуем поведение слагаемого (3.2.51) в правой части выражения (3.2.53). При фиксированных χ_1 и χ_2 величина $\Delta_i(\varepsilon)$ представляет собой приращение гауссовского случайного поля $N_i(\theta_1, \theta_2)$ (3.2.33). Это поле обладает корреляционной функцией

$$K_i(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}) = \partial^2 S(\theta_{11}, \theta_{12}, \bar{l}_1, \theta_{21}, \theta_{22}, \bar{l}_2) / \partial l_{1i} \partial l_{2i},$$

где $\bar{l}_1 = \bar{l}_2 = \bar{l}_0$, а функция $S(\theta_{11}, \theta_{12}, \bar{l}_1, \theta_{21}, \theta_{22}, \bar{l}_2)$ определена в (3.2.24).

Воспользовавшись следствием из теоремы Ядренко [28], можем записать, что $N_i(\theta_{01} + \varepsilon^2 \chi_1, \theta_{02} + \varepsilon^2 \chi_2) = N_i(\theta_{01}, \theta_{02}) + o(\varepsilon^\gamma)$, откуда при $\varepsilon \rightarrow 0$ для приращения (3.2.51) следует

$$\Delta_i(\varepsilon) = o(\varepsilon^\gamma), \quad (3.2.55)$$

где $0 < \gamma < 1$.

Учитывая (3.2.54) и (3.2.55), с точностью до членов порядка малости $o(\varepsilon^\gamma)$ запишем систему уравнений (3.2.53) для первого приближения МП

оценок регулярных параметров в виде: $\sum_{j=1}^p S_{ij} l_{1j} = N_i(\theta_{01}, \theta_{02}), \quad i = \overline{1; p}$.

Решая эту систему аналогично [21,53], находим элементы корреляционной матрицы оценок МП регулярных параметров [91]

$$K_{ij}(\hat{l} | \theta_{01}, \theta_{02}, \bar{l}_0) = \langle (\hat{l}_i - l_{0i})(\hat{l}_j - l_{0j}) \rangle = A_{ij} / z^2 B, \quad (3.2.56)$$

где B — определитель порядка p с элементами S_{ij} (3.2.28), а A_{ij} — его алгебраические дополнения. Заметим, что используя обозначения (3.1.15), корреляционную матрицу (3.2.56) можно переписать в виде (3.1.16). Следовательно, корреляционная матрица (3.2.56) МП оценок регулярных параметров \hat{l} при неизвестных моментах появления и исчезновения θ_1, θ_2 совпадает с аналогичной матрицей при априори известных значениях θ_{01}, θ_{02} [30]. Следовательно, точность оценок регулярных параметров асимптотически не зависит от наличия у сигнала неизвестных моментов появления и исчезновения. Отличие имеется лишь в порядке малости относительной погрешности формулы (3.2.56). При априори известных моментах появления и исчезновения сигнала относительная погрешность формулы (3.2.56) имеет порядок малости ε [30]. Если же моменты появления и исчезновения априори неизвестны, то относительная погрешность формулы (3.2.56) имеет порядок малости $o(\varepsilon^\gamma)$, $\gamma < 1$.

Таким образом, при совместной оценке нескольких регулярных параметров и моментов появления и исчезновения точность оценки регулярных параметров асимптотически не зависит от наличия у сигнала неизвестных моментов появления и исчезновения. В то же время точность оценок мо-

ментов появления и исчезновения асимптотически не зависит от наличия у сигнала нескольких неизвестных регулярных параметров [73].

В работе [93] рассмотрены КП, КО и МП алгоритмы оценки амплитуды сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения. Предложены блок-схемы устройств, вырабатывающих оценки. Выполнено сравнение сложности технической или программной реализации синтезированных алгоритмов. Показано, что наиболее сложным из рассмотренных является МП алгоритм оценивания, а самым простым — КП алгоритм.

Выполнен анализ синтезированных алгоритмов, найдены характеристики точности оценок амплитуды. Показано, что незнание моментов появления и исчезновения сигнала может приводить к существенному снижению точности КП оценки. Точность КО и МП оценок амплитуды асимптотически с увеличением отношения сигнал/шум приближается к точности оценки амплитуды при известных моментах появления и исчезновения. В качестве примера рассмотрена оценка амплитуды прямоугольного импульса со скошенной вершиной.

Квазиправдоподобный алгоритм оценки регулярного параметра сигнала произвольной формы с неизвестными моментами появления и исчезновения, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума синтезирован в [83, 121]. Исследовано влияние априорного незнания моментов появления и исчезновения на точность квазиправдоподобной оценки регулярного параметра. В качестве примера рассмотрены квазиправдоподобные оценки амплитуды и начальной фазы прямоугольного радиосигнала. Найден проигрыш в точности оценки вследствие незнания моментов появления и исчезновения.

3.3. Оценка амплитуды и наклона вершины импульса

Рассмотрим совместную оценку МП амплитуды A и параметра наклона b прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.21). Вектор регулярных параметров, подлежащих оценке включает в себя две компоненты $\vec{l} = (A, b)$. Предположим вначале, что моменты появления и исчезновения сигнала априори известны. Тогда МП измеритель амплитуды и наклона импульса должен формировать логарифм ФОП (3.1.3), который применительно к сигналу (1.1.21) имеет вид

$$L_0(A, b) = \frac{2A}{N_0 \sqrt{1+b^2/12}} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} \left[x(t) - \frac{A}{2\sqrt{1+b^2/12}} (1 + b(t-\theta)/T_{\max}) \right] \times \quad (3.3.1) \\ \times (1 + b(t-\theta)/T_{\max}) dt.$$

Оценки МП параметров A и b определяются как координаты абсолютного максимума случайного поля (3.3.1)

$$(\hat{A}, \hat{b}) = \arg \sup L_0(A, b). \quad (3.3.2)$$

Обозначим $\lambda_{01} = (\theta - \theta_{01})/T_{\max}$, $\lambda_{02} = (\theta_{02} - \theta)/T_{\max}$ – нормированные положения моментов появления и исчезновения сигнала,

$$U = \sqrt{\frac{2}{N_0 T_{\max}}} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} x(t) dt, \quad V = \sqrt{\frac{2}{N_0 T_{\max}}} \int_{\theta_{01}}^{\theta_{02}} x(t) \frac{t - \theta}{T_{\max}} dt, \quad (3.3.3)$$

и перепишем решающую статистику (3.3.1) как

$$L_0(A, b) = \frac{A \sqrt{2T_{\max}}}{\sqrt{N_0}} \frac{U + bV}{\sqrt{1 + b^2/12}} - \frac{A^2 T_{\max}}{N_0} \frac{\lambda_{01} + \lambda_{02} + b(\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2) + b^2(\lambda_{02}^3 + \lambda_{01}^3)/3}{1 + b^2/12}. \quad (3.3.4)$$

Оценки (3.3.2) являются решениями системы уравнений правдоподобия

$$\begin{cases} [\partial L_0(A, b)/\partial A]_{\hat{A}, \hat{b}} = 0, \\ [\partial L_0(A, b)/\partial b]_{\hat{A}, \hat{b}} = 0, \end{cases} \quad (3.3.5)$$

решая которую, находим

$$\hat{b} = \frac{2V(\lambda_{01} + \lambda_{02}) - U(\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2)}{2U(\lambda_{01}^3 + \lambda_{02}^3)/3 - V(\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2)}, \quad (3.3.6)$$

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{N_0(1 + \hat{b}^2/12)}{2T_{\max}}} \frac{U + \hat{b}V}{\lambda_{01} + \lambda_{02} + \hat{b}(\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2) + \hat{b}^2(\lambda_{02}^3 + \lambda_{01}^3)/3}. \quad (3.3.7)$$

Выражения (3.3.6) и (3.3.7) определяют структуру приёмного устройства.

Согласно (3.1.14), характеристики совместных оценок МП (3.3.2) могут быть выражены через сигнальную функцию (3.1.8), которую для сигнала (1.1.21) запишем в виде

$$S_z(A_1, b_1, A_2, b_2) = z_r^2 \frac{A_1 A_2}{A_0^2} \left\{ \lambda_{01} + \lambda_{02} + \frac{b_1 + b_2}{2} (\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2) + \frac{b_1 b_2}{3} (\lambda_{02}^3 + \lambda_{01}^3) \right\} \times \\ \times (1 + b_1^2/12)^{-1/2} (1 + b_2^2/12)^{-1/2}, \quad (3.3.8)$$

где $z_r^2 = 2A_0^2 T_{\max}/N_0$, A_0 — амплитуда принятого сигнала. Находим матрицу S вторых производных сигнальной функции (3.3.8) с элементами (3.1.14)

$$S_{11} = 12z_r^2 \left[\lambda_{01} + \lambda_{02} + b_0(\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2) + b_0^2(\lambda_{02}^3 + \lambda_{01}^3)/3 \right] / A_0^2 (12 + b_0^2),$$

$$S_{12} = S_{21} = 12z_r^2 \frac{(12 - b_0^2)(\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2)/2 + 4b_0(\lambda_{02}^3 + \lambda_{01}^3) - b_0(\lambda_{01} + \lambda_{02})}{A_0(12 + b_0^2)},$$

$$S_{22} = z_r^2 \left[(b_0 + 12\lambda_{01})^3 - (b_0 - 12\lambda_{02})^3 \right] / 3(12 + b_0^2). \quad (3.3.9)$$

Оценки МП (3.3.2) обладают асимптотически нулевыми смещениями и корреляционной матрицей, обратной к S. В результате обращения матрицы S находим условные рассеяние оценки МП амплитуды

$$V(\hat{A}|A_0, b_0) = \frac{A_0^2}{12z_r^2} \frac{(12 + b_0^2)(b_0^2\tau_0 - 12b_0d_0 + 48\xi_0)}{(48 + b_0^4/3 + 8b_0^2)\xi_0\tau_0 - 12b_0^2d_0^2 - (12 + b_0^2)^2 d_0^2/4}, \quad (3.3.10)$$

рассеяние оценки МП параметра наклона импульса

$$V(\hat{A}|A_0, b_0) = \frac{1}{12z_r^2} \frac{(12 + b_0^2)^3 (\tau_0 + b_0d_0 + b_0^2\xi_0/3)}{(48 + b_0^4/3 + 8b_0^2)\xi_0\tau_0 - 12b_0^2d_0^2 - (12 + b_0^2)^2 d_0^2/4}, \quad (3.3.11)$$

и корреляционный момент оценок амплитуды и наклона

$$K(\hat{A}, \hat{b}|A_0, b_0) = \frac{A_0}{12z_r^2} \frac{(12 + b_0^2)^2 (48\xi_0 + (12 - b_0^2)d_0/2 - b_0\tau_0)}{(48 + b_0^4/3 + 8b_0^2)\xi_0\tau_0 - 12b_0^2d_0^2 - (12 + b_0^2)^2 d_0^2/4}, \quad (3.3.12)$$

где обозначено $\tau_0 = \lambda_{01} + \lambda_{02}$, $d_0 = \lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2$, $\xi_0 = \lambda_{01}^2 + \lambda_{02}^2$.

Предположим, что моменты появления и исчезновения сигнала (1.1.21) априори неизвестны. Как показано в предыдущем параграфе, при использовании совместных МП оценок амплитуды, параметра наклона вершины, а также моментов появления и исчезновения импульса, эффективность оценивания регулярных параметров асимптотически не зависит от наличия у сигнала неизвестных моментов появления и исчезновения. В этом случае приёмник МП должен формировать логарифм ФОП

$$L(A, b, \theta_1, \theta_2) = \frac{2A}{N_0\sqrt{1+b^2/12}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[x(t) - \frac{A}{2\sqrt{1+b^2/12}} (1 + b(t-\theta)/T_{\max}) \right] \times$$

$$\times (1 + b(t-\theta)/T_{\max}) dt \quad (3.3.13)$$

для всех возможных значений неизвестных параметров и находить оценки МП как

$$(\hat{A}, \hat{b}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \operatorname{argsup} L(A, b, \theta_1, \theta_2). \quad (3.3.14)$$

Асимптотические характеристики оценок (3.3.14) амплитуды и параметра наклона импульса совпадают с (3.3.10) – (3.3.12), а моментов появления и исчезновения — с (2.3.16).

На рис.3.1 представлены зависимости от ОСШ z_r нормированного условного рассеяния оценки амплитуды $V_a = V(\hat{A}|A_0, b_0)/A_0^2$ (рис. 3.1а) и условного рассеяния оценки наклона импульса $V_b = V(\hat{b}|A_0, b_0)$ (рис. 3.1б).

Сплошные кривые на рис.3.1 соответствуют наклону принимаемого сигнала $b_0 = 0$ (прямоугольный импульс с плоской вершиной), штриховые — наклону $b_0 = \pm 4/3$. На рис. 3.2 показаны зависимости от z_r нормированного коэффициента корреляции $R_{ab} = R(\hat{A}, \hat{b}|A_0, b_0)/A_0$, где

$$R(\hat{A}, \hat{b}|A_0, b_0) = K(\hat{A}, \hat{b}|A_0, b_0) / \sqrt{V(\hat{A}|A_0, b_0)V(\hat{b}|A_0, b_0)} \quad (3.3.15)$$

– коэффициент корреляции оценок \hat{A} и \hat{b} . Сплошная линия на рис.3.2 соответствует наклону принимаемого сигнала $b_0 = 0$, штриховая — $b_0 = 4/3$, штрих-пунктирная — $b_0 = -4/3$. При построении зависимостей на рис.3.1 и 3.2 предполагалось, что $k = 4$ и $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 1/4$, то есть моменты появления и исчезновения принимаемого сигнала располагаются посередине отрезков $[\theta_{1\min}, \theta]$ и $[\theta, \theta_{2\max}]$ соответственно.

С целью проверки работоспособности синтезированного алгоритма совместных оценок МП и установления границ применимости асимптотических выражений (3.3.10) – (3.3.12) проводилось статистическое моделирование алгоритма (3.3.14) на ЭВМ. Решающая статистика (3.3.13) была представлена в виде

$$L(A, b, \theta_1, \theta_2) = \frac{A\sqrt{2T_{\max}}}{\sqrt{N_0}} \frac{U(\theta_1, \theta_2) + bV(\theta_1, \theta_2)}{\sqrt{1 + b^2/12}} - \frac{A^2 T_{\max}}{N_0} \frac{\tau + bd + b^2 \xi / 3}{1 + b^2/12}, \quad (3.3.16)$$

$$U(\theta_1, \theta_2) = \sqrt{\frac{2}{N_0 T_{\max}}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} x(t) dt, \quad V(\theta_1, \theta_2) = \sqrt{\frac{2}{N_0 T_{\max}}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} x(t) \frac{t - \theta}{T_{\max}} dt, \quad (3.3.17)$$

где обозначено

$$\lambda_1 = (\theta - \theta_1)/T_{\max}, \quad \lambda_2 = (\theta_2 - \theta)/T_{\max}, \quad \tau = \lambda_1 + \lambda_2, \quad d = \lambda_2^2 - \lambda_1^2, \quad \xi = \lambda_1^2 + \lambda_2^2.$$

В результате максимизации решающей статистики (3.3.16) по параметрам A и b можем записать для оценок МП моментов появления и исчезновения

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \arg \sup L(\theta_1, \theta_2), \quad (3.3.18)$$

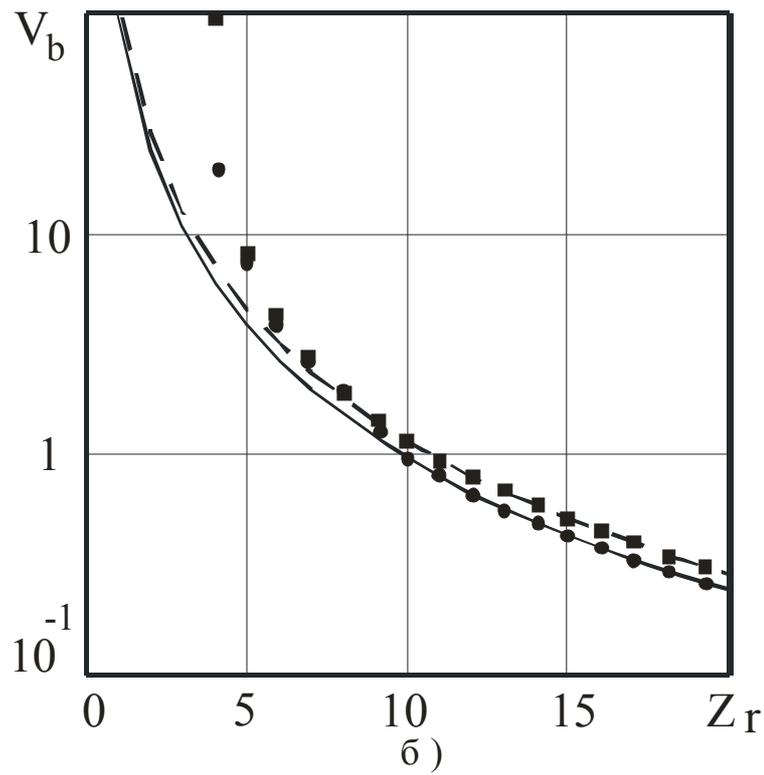
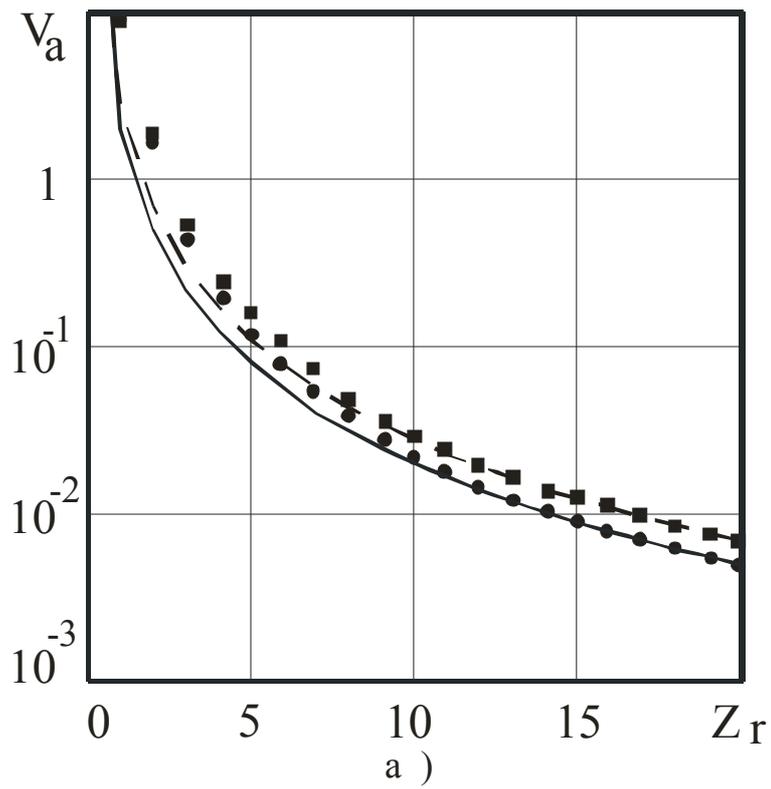


Рис.3.1 Нормированные условные рассеяния оценок МП амплитуды и наклона импульса

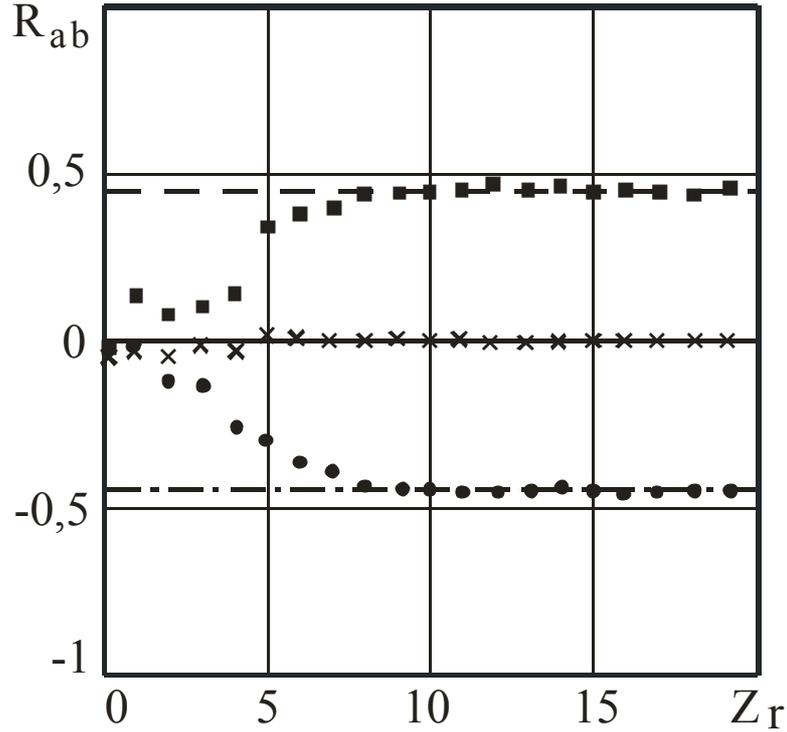


Рис.3.2 Нормированный условный коэффициент корреляции оценок МП амплитуды и наклона импульса

$$L(\theta_1, \theta_2) = \sup_{A, b} L(A, B, \theta_1, \theta_2) = 2 \left[U^2(\theta_1, \theta_2) \xi \left(4\xi\tau/9 - d^2/3 \right) + \right. \\ \left. + V^2(\theta_1, \theta_2) \tau \left(4\xi\tau/3 - d^2 \right) + U(\theta_1, \theta_2) V(\theta_1, \theta_2) d \left(d^2 - 4\xi\tau/3 \right) \right]^{-1} \times (3.3.19) \\ \times \left[U^2(\theta_1, \theta_2) \xi/3 - dU(\theta_1, \theta_2) V(\theta_1, \theta_2) + \tau V^2(\theta_1, \theta_2) \right]^2$$

— промаксимизированный по регулярным параметрам логарифм ФОП, и для оценок МП наклона вершины импульса амплитуды соответственно,

$$\hat{b} = \hat{b}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{2\hat{\tau}V(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) - \hat{d}U(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}{2U(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)\hat{\xi}/3 - \hat{d}V(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}, \quad (3.3.20)$$

$$\hat{A} = \hat{A}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \sqrt{\frac{N_0(1 + \hat{b}^2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)/12)}{2T_{\max}}} \frac{U(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) + \hat{b}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)V(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}{\hat{\tau} + \hat{b}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)\hat{d} + \hat{b}^2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)\hat{\xi}/3}, \quad (3.3.21)$$

где

$$\hat{\lambda}_1 = (\theta - \hat{\theta}_1)/T_{\max}, \quad \hat{\lambda}_2 = (\hat{\theta}_2 - \theta)/T_{\max}, \quad \hat{\tau} = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2, \quad \hat{d} = \hat{\lambda}_2^2 - \hat{\lambda}_1^2, \quad \hat{\xi} = \hat{\lambda}_1^2 + \hat{\lambda}_2^2.$$

Таким образом, для расчета совместных оценок МП (3.3.14) необходимо сформировать двумерные случайные поля (3.3.17) для всех возможных значений моментов появления и исчезновения, затем найти оценки моментов появления и исчезновения (3.3.18), подставив которые в выражения (3.3.20) и (3.3.21), получим оценки МП параметра наклона и амплитуды сигнала.

Случайные поля $U(\theta_1, \theta_2)$ и $V(\theta_1, \theta_2)$ представим в виде сумм

$$U(\theta_1, \theta_2) = U_1(\theta_1) + U_2(\theta_2), \quad V(\theta_1, \theta_2) = V_1(\theta_1) + V_2(\theta_2),$$

где

$$U_1(\theta_1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0 T_{\max}}} \int_{\theta_1}^{\theta} x(t) dt, \quad U_2(\theta_2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0 T_{\max}}} \int_{\theta}^{\theta_2} x(t) dt, \\ V_1(\theta_1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0 T_{\max}}} \int_{\theta_1}^{\theta} x(t) \frac{t - \theta}{T_{\max}} dt, \quad V_2(\theta_2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0 T_{\max}}} \int_{\theta}^{\theta_2} x(t) \frac{t - \theta}{T_{\max}} dt. \quad (3.3.22)$$

Таким образом формирование решающей статистики (3.3.19) сводится к формированию четырех случайных процессов (3.3.22). Рассмотрим статистические характеристики этих процессов. Согласно (3.3.22), случайные процессы $U_1(\theta_1)$ и $U_2(\theta_2)$ гауссовские, статистически независимые, обладают математическими ожиданиями

$$S_{U_1}(\theta_1) = \langle U_1(\theta_1) \rangle = z_r \min(\lambda_1, \lambda_{01}) \{1 - b_0 \min(\lambda_1, \lambda_{01})/2\}, \quad (3.3.23)$$

$$S_{U_2}(\theta_2) = \langle U_2(\theta_2) \rangle = z_r \min(\lambda_2, \lambda_{02}) \{1 + b_0 \min(\lambda_2, \lambda_{02})/2\} \quad (3.3.24)$$

и корреляционными функциями

$$K_{U_1}(\theta_{11}, \theta_{21}) = \langle [U_1(\theta_{11}) - S_{U_1}(\theta_{11})][U_1(\theta_{21}) - S_{U_1}(\theta_{21})] \rangle = \\ = \min(\theta - \theta_{11}, \theta - \theta_{21})/T_{\max}, \quad (3.3.25)$$

$$K_{U_2}(\theta_{12}, \theta_{22}) = \langle [U_2(\theta_{12}) - S_{U_2}(\theta_{12})][U_2(\theta_{22}) - S_{U_2}(\theta_{22})] \rangle = \\ = \min(\theta_{12} - \theta, \theta_{22} - \theta)/T_{\max}. \quad (3.3.26)$$

Случайные процессы $V_1(\theta_1)$ и $V_2(\theta_2)$ гауссовские, статистически независимые, обладают математическими ожиданиями

$$S_{V_1}(\theta_1) = \langle V_1(\theta_1) \rangle = z_r \min^2(\lambda_1, \lambda_{01}) [-1/2 + b_0 \min(\lambda_1, \lambda_{01})/3], \quad (3.3.27)$$

$$S_{V_2}(\theta_2) = \langle V_2(\theta_2) \rangle = z_r \min^2(\lambda_2, \lambda_{02}) [1/2 + b_0 \min(\lambda_2, \lambda_{02})/3] \quad (3.3.28)$$

и корреляционными функциями

$$\begin{aligned} K_{V_1}(\theta_{11}, \theta_{21}) &= \left\langle \left[V_1(\theta_{11}) - S_{V_1}(\theta_{11}) \right] \left[V_1(\theta_{21}) - S_{V_1}(\theta_{21}) \right] \right\rangle = \\ &= \min^3(\theta - \theta_{11}, \theta - \theta_{21}) / 3T_{\max}^3, \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

$$\begin{aligned} K_{V_2}(\theta_{12}, \theta_{22}) &= \left\langle \left[V_2(\theta_{12}) - S_{V_2}(\theta_{12}) \right] \left[V_2(\theta_{22}) - S_{V_2}(\theta_{22}) \right] \right\rangle = \\ &= \min^3(\theta_{12} - \theta, \theta_{22} - \theta) / 3T_{\max}^3. \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

Введем дискретизацию отрезка $[\theta_{1\min}, \theta_{2\max}]$ с шагом $\Delta\theta$. Обозначим $M = \text{ent}[(\theta_{2\max} - \theta_{1\min})/\Delta\theta] = \text{ent}[T_{\max}/\Delta\theta]$ — количество интервалов дискретизации на максимальной длительности сигнала, $\text{ent}(\cdot)$ — целая часть числа. Будем аппроксимировать случайные процессы (3.3.22) ступенчатыми функциями, значения которых в узлах дискретизации $\theta_{1i} = \theta - i\Delta\theta$ — слева от точки θ и $\theta_{2i} = \theta + i\Delta\theta$ — справа от нее, $i = \overline{1, \text{ent}(M/2)}$ равны

$$\begin{aligned} U_{1i} &= U_1(\theta_{1i}), \quad U_{2i} = U_2(\theta_{2i}), \\ V_{1i} &= V_1(\theta_{1i}), \quad V_{2i} = V_2(\theta_{2i}). \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

Заметим, что при $i = \overline{\text{ent}(M/2k), \text{ent}(M/2)}$ узлы дискретизации попадают в априорные отрезки моментов появления и исчезновения. Найдем среднеквадратические погрешности аппроксимаций (3.3.31)

$$\begin{aligned} \varepsilon_U^2 &= \sup_{\theta_2, \theta_{2i}} \left\langle \left[U_2(\theta_{2i}) - U_2(\theta_2) \right]^2 \right\rangle / K_{U_2}(\theta_{2i}, \theta_{2i}) = \\ &= \sup_{\theta_1, \theta_{1i}} \left\langle \left[U_1(\theta_{1i}) - U_1(\theta_1) \right]^2 \right\rangle / K_{U_1}(\theta_{1i}, \theta_{1i}) = k\delta, \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_V^2 &= \sup_{\theta_2, \theta_{2i}} \left\langle \left[V_2(\theta_{2i}) - V_2(\theta_2) \right]^2 \right\rangle / K_{V_2}(\theta_{2i}, \theta_{2i}) = \\ &= \sup_{\theta_1, \theta_{1i}} \left\langle \left[V_1(\theta_{1i}) - V_1(\theta_1) \right]^2 \right\rangle / K_{V_1}(\theta_{1i}, \theta_{1i}) = 3k\delta/2, \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

$$\theta_2 \in [\theta_{2i} - \Delta\theta/2, \theta_{2i} + \Delta\theta/2], \theta_1 \in [\theta_{1i} - \Delta\theta/2, \theta_{1i} + \Delta\theta/2].$$

Здесь $k = T_{\max}/T_{\min}$, $\delta = \Delta\theta/T_{\max}$ — нормированный интервал дискретизации. Следовательно, задавшись приемлемой максимальной погрешностью $\varepsilon = \max(\varepsilon_U, \varepsilon_V) = \sqrt{3k\delta/2}$ аппроксимации случайных процессов (3.3.22) своими отсчетами в узлах дискретизации, находим требуемый интервал $\delta = 2\varepsilon^2/3k$.

Выделим в (3.3.22) детерминированные и случайные составляющие

$$U_1(\theta_1) = S_{U_1}(\theta_1) + N_{U_1}(\theta_1), \quad U_2(\theta_2) = S_{U_2}(\theta_2) + N_{U_2}(\theta_2),$$

$$V_1(\theta_1) = S_{V1}(\theta_1) + N_{V1}(\theta_1), \quad V_2(\theta_2) = S_{V2}(\theta_2) + N_{V2}(\theta_2),$$

где

$$N_{U1}(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{N_0 T_{\max}}} \int_{\theta_1}^{\theta} n(t) dt, \quad N_{U2}(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{N_0 T_{\max}}} \int_{\theta}^{\theta_2} n(t) dt,$$

$$N_{V1}(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{N_0 T_{\max}}} \int_{\theta_1}^{\theta} n(t) \frac{t-\theta}{T_{\max}} dt, \quad N_{V2}(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{N_0 T_{\max}}} \int_{\theta}^{\theta_2} n(t) \frac{t-\theta}{T_{\max}} dt. \quad (3.3.34)$$

Значения случайных процессов (3.3.34) в узлах дискретизации представим в виде

$$N_{U1}(\theta_{1n}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0 T_{\max}}} \sum_{i=1}^n \int_{\theta_i}^{\theta_{i-1}} n(t) dt = \sqrt{\delta} \sum_{i=1}^n Y_{1i}, \quad (3.3.35)$$

$$N_{U2}(\theta_{2n}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0 T_{\max}}} \sum_{i=1}^n \int_{\theta_{2i-1}}^{\theta_{2i}} n(t) dt = \sqrt{\delta} \sum_{i=1}^n Y_{2i}, \quad (3.3.36)$$

$$N_{V1}(\theta_{1n}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0 T_{\max}}} \sum_{i=1}^n \int_{\theta_i}^{\theta_{i-1}} n(t) \frac{t-\theta}{T_{\max}} dt = -\delta \sqrt{\delta} \sum_{i=1}^n i Y_{1i}, \quad (3.3.37)$$

$$N_{V2}(\theta_{2n}) = \frac{1}{\sqrt{N_0 T_{\max}}} \sum_{i=1}^n \int_{\theta_{2i-1}}^{\theta_{2i}} n(t) \frac{t-\theta}{T_{\max}} dt = \delta \sqrt{\delta} \sum_{i=1}^n i Y_{2i}, \quad (3.3.38)$$

где $Y_{1i}, Y_{2i}, i = \overline{1, \text{ent}(M/2)}$ — статистически независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. В результате для отсчетов случайных процессов (3.3.22) можем записать

$$U_{1n} = U_1(\theta_{1n}) = z_r \delta \min(n, n_{01}) \{1 - b_0 \delta \min(n, n_{01})/2\} + \sqrt{\delta} \sum_{i=1}^n Y_{1i}, \quad (3.3.39)$$

$$U_{2n} = U_2(\theta_{2n}) = z_r \delta \min(n, n_{02}) \{1 + b_0 \delta \min(n, n_{02})/2\} + \sqrt{\delta} \sum_{i=1}^n Y_{2i}, \quad (3.3.39)$$

$$V_{1n} = V_1(\theta_{1n}) = z_r \delta^2 \min^2(n, n_{01}) [-1/2 + b_0 \delta \min(n, n_{01})/3] - \delta \sqrt{\delta} \sum_{i=1}^n i Y_{1i}, \quad (3.3.40)$$

$$V_{2n} = V_2(\theta_{2n}) = z_r \delta^2 \min^2(n, n_{02}) [1/2 + b_0 \delta \min(n, n_{02})/3] + \delta \sqrt{\delta} \sum_{i=1}^n i Y_{2i}. \quad (3.3.41)$$

Здесь

$$n_{01} = \text{ent}[(\theta - \theta_{01})/\Delta\theta] = \text{ent}[\lambda_{01}/\delta], \quad n_{02} = \text{ent}[(\theta_{02} - \theta)/\Delta\theta] = \text{ent}[\lambda_{02}/\delta].$$

Для моделирования совместных оценок МП были выбраны значения $k = 4$, $\varepsilon = 0,05$, $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 1/4$, $b_0 = 0; \pm 4/3$. В ходе моделирования многократно формировались случайные величины (3.3.39) – (3.3.41), вычислялись отсчеты случайного поля (3.3.19)

$$L_{ij} = L(\theta_{1i}, \theta_{2j}), i, j = \overline{1, \text{ent}(M/2)} \quad (3.3.42)$$

и определялись номера \hat{i} и \hat{j} , соответствующие максимальной из величин (3.3.42). Подставляя затем оценки МП моментов появления $\hat{\theta}_1 = \theta - \hat{i}\Delta\theta$ и исчезновения $\hat{\theta}_2 = \theta + \hat{j}\Delta\theta$ в выражения (3.3.20) и (3.3.21), находились оценки МП параметра наклона и амплитуды импульса. Было проведено 10^5 циклов испытаний. На рис. 3.1 нанесены полученные экспериментально зависимости от z_r условного нормированного рассеяния оценки амплитуды и условного рассеяния оценки параметра наклона импульса кружками для $b_0 = 0$, квадратиками для $b_0 = \pm 4/3$. На рис.3.2 показаны экспериментальные зависимости нормированного коэффициента корреляции оценок амплитуды и параметра наклона крестиками для $b_0 = 0$, квадратиками для $b_0 = 4/3$, кружками для $b_0 = -4/3$. Как видно из рисунков, при $z_r > 7..8$ зависимости, рассчитанные с помощью асимптотических выражений (3.3.10) – (3.3.12) удовлетворительно описывают результаты статистического моделирования.

Глава 4. Статистическое моделирование алгоритмов приёма сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения

4.1. Методы статистического моделирования алгоритмов обработки сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения

Экспериментальное исследование синтезированных алгоритмов приёма сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения проводилось методами статистического моделирования на ЭВМ. Целью статистического моделирования являлась проверка работоспособности алгоритмов обнаружения и оценки параметров, а также установление границ применимости асимптотических выражений для их характеристик. Моделировались МП (1.1.60), (1.3.2) и байесовские (1.1.65), (1.3.12) алгоритмы обнаружения, МП (2.1.19), (2.3.1) и байесовские (2.1.28), (2.3.22) алгоритмы оценки моментов появления и исчезновения.

Рассмотрим сначала методы моделирования приёма сигнала с неизвестным моментом исчезновения. Согласно (1.1.60), (1.1.65), (2.1.19), (2.1.28) МП и байесовские алгоритмы обнаружения и оценки момента исчезновения включают в себя формирование логарифма ФОП (1.1.3) для всех возможных значений момента исчезновения сигнала из априорной области (1.1.2). Обозначим $L_0(\theta_2) = L(\theta_2)$ при условии справедливости гипотезы H_0 и $L_1(\theta_2) = L(\theta_2)$ при условии справедливости гипотезы H_1 . Тогда, выделяя в (1.1.3) детерминированную и случайную составляющие, имеем

$$L_j(\theta_2) = S_j(\theta_2) + N(\theta_2), \quad j = 0, 1, \quad (4.1.1)$$

где

$$S_0(\theta_2) = -\frac{1}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad (4.1.2)$$

$$S_1(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\min(\theta_2, \theta_{02})} f^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad (4.1.3)$$

— математические ожидания случайных процессов $L_j(\theta_2)$, $j = 0, 1$,

$$N(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta_2} n(t) f(t) dt. \quad (4.1.4)$$

Случайная составляющая (4.1.4) при обеих гипотезах представляет собой гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$B(\theta_{12}, \theta_{22}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\min(\theta_{12}, \theta_{22})} f^2(t) dt. \quad (4.1.5)$$

Выберем априорные области (1.1.2) возможных значений моментов появления и исчезновения так, чтобы $\theta_{1\min}$ и $\theta_{2\max}$ были фиксированы, а $\theta_{1\max}$ и $\theta_{2\min}$ располагались симметрично относительно θ (1.1.19). Тогда длины априорных интервалов моментов появления и исчезновения одинаковы, а их изменение можно осуществлять согласованно с помощью величины k (1.1.20).

Введем дискретизацию отрезка $[\theta_{1\min}, \theta_{2\max}]$ с шагом $\Delta\theta$. Обозначим $M = \text{ent}[(\theta_{2\max} - \theta_{1\min})/\Delta\theta] = \text{ent}[T_{\max}/\Delta\theta]$ — количество интервалов дискретизации на максимальной длительности сигнала,

$$\theta_{1i} = \theta - i\Delta\theta, \quad \theta_{2i} = \theta + i\Delta\theta, \quad i = \overline{1, \text{ent}(M/2)} \quad (4.1.6)$$

— узлы дискретизации. Будем аппроксимировать случайный процесс (4.1.4) ступенчатой функцией, которая в узлах дискретизации θ_{2i} совпадает с $N(\theta_2)$, то есть

$$N_i = N(\theta_{2i}), \quad i = \overline{1, \text{ent}(M/2)}. \quad (4.1.7)$$

Точность аппроксимации случайного процесса (4.1.4) дискретными значениями (4.1.7) зависит от интервала дискретизации $\Delta\theta$. Введем относительную среднеквадратическую погрешность такой аппроксимации

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \max_{\theta_2, \theta_{2i}} \left\langle \left[N(\theta_2) - N(\theta_{2i}) \right]^2 \right\rangle / B(\theta_2, \theta_2) = \\ &= \max_{\theta_2, \theta_{2i}} \left| \int_{\theta_{2i}}^{\theta_2} f^2(t) dt \right| / \int_{\theta_{01}}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad \theta_2 \in [\theta_{2i} - \Delta\theta/2, \theta_{2i} + \Delta\theta/2]. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Для оценки верхней границы среднеквадратической погрешности (4.1.8) найдем отдельно минимальное значение знаменателя и максимальное значение числителя, тогда, используя приближенное равенство

$$\int_{\theta_{2i}}^{\theta_{2i} + \Delta\theta/2} f^2(t) dt \approx f(\theta_{2i}) \Delta\theta/2, \quad (4.1.9)$$

справедливое при малых $\Delta\theta$, получаем

$$\varepsilon^2 \leq \Delta\theta \max_{\theta_{2i}} \left[f^2(\theta_{2i}) \right] / \left(2 \int_{\theta_{01}}^{\theta_{2\min}} f^2(t) dt \right). \quad (4.1.10)$$

Таким образом, требуемый интервал дискретизации можно найти с помощью выражения (4.1.10), задавшись приемлемой погрешностью ε .

Представим дискретные отсчеты (4.1.7) случайного процесса (4.1.4) в виде [3]

$$N_i = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta} f(t)n(t)dt + \sum_{n=1}^i \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{2n}-\Delta\theta}^{\theta_{2n}} f(t)n(t)dt = y_0 + \sum_{n=1}^i y_n. \quad (4.1.11)$$

Здесь

$$y_0 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta} f(t)n(t)dt, \quad y_n = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{2n}-\Delta\theta}^{\theta_{2n}} f(t)n(t)dt, \quad n = \overline{1, \text{ent}(M/2)} \quad (4.1.12)$$

— статистически независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями

$$D_0 = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{01}}^{\theta} f^2(t)dt, \quad D_n = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{2n}-\Delta\theta}^{\theta_{2n}} f^2(t)dt \approx 2f^2(\theta_{2n})\Delta\theta/N_0. \quad (4.1.13)$$

Таким образом, для дискретного представления шумовой составляющей (4.1.4) можем записать [3]

$$N_i = x_0 \sqrt{D_0} + \sqrt{2\Delta\theta/N_0} \sum_{n=1}^i f(\theta_{2n})x_n, \quad i = \overline{0, \text{ent}(M/2)}. \quad (4.1.14)$$

На основе дискретных отсчетов шумовой составляющей (4.1.14) запишем дискретное представление логарифма ФОП (4.1.1) при условии справедливости гипотезы H_j , $j = 0, 1$:

$$L_j(i) = L_j(\theta_{2i}) = S_j(\theta_{2i}) + x_0 \sqrt{D_0} + \sqrt{2\Delta\theta/N_0} \sum_{n=1}^i f(\theta_{2n})x_n, \quad (4.1.15)$$

где x_n , $n = \overline{0, \text{ent}(M/2)}$ — гауссовские статистически независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями.

Согласно (1.1.60) для моделирования МП алгоритма обнаружения сигнала с неизвестным моментом исчезновения необходимо формировать случайные величины (4.1.15), находить среди них максимальную и сравнивать ее с порогом. Если при гипотезе H_0 величина $L_0 = \max(L_0(i), i = \overline{n_{\min}, n_{\max}})$ превысила порог, то фиксируется ошибка

ложной тревоги. Если при гипотезе H_1 выполняется неравенство $L_1 = \max(L_1(i), i = \overline{n_{\min}, n_{\max}}) < c$, то фиксируется пропуск сигнала. Здесь

$$n_{\min} = \text{ent} \left[\frac{\theta_{2\min} - \theta}{\Delta\theta} \right] = \text{ent}(1/2k\delta), \quad n_{\max} = \text{ent} \left[\frac{\theta_{2\max} - \theta}{\Delta\theta} \right] = \text{ent}(1/2\delta),$$

$\delta = \Delta\theta/T_{\max} = 1/M$ — нормированный интервал дискретизации.

При моделировании байесовского алгоритма обнаружения необходимо формировать случайную величину Λ (1.1.65), для которой при условии справедливости гипотезы с номером $j = 0, 1$ приближенно запишем

$$\Lambda_j = \Delta\theta \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_j(n)] W_{pr}(\theta_{2n}). \quad (4.1.16)$$

Ошибки 1-го и 2-го рода фиксируются при $\Lambda_0 > p_0/p_1$ и $\Lambda_1 < p_0/p_1$ соответственно. Относительные частоты появления ошибок обнаружения будем использовать для оценок соответствующих вероятностей ошибок обнаружения.

Согласно (2.1.19), для моделирования МП оценки момента исчезновения необходимо найти номер $\hat{n} = \arg \max L_1(i)$ максимальной из случайных величин (4.1.15). Тогда

$$\hat{\lambda}_2 = (\hat{\theta}_2 - \theta)/T_{\max} = \delta \hat{n}. \quad (4.1.17)$$

Байесовские оценки нетрудно получить, приближенно представив в (2.1.28) интегралы в виде конечных сумм, тогда

$$\lambda_{2B} = \frac{\theta_{23} - \theta}{T_{\max}} = \delta \frac{\sum_{i=n_{\min}}^{n_{\max}} i \exp[L_1(i)] W_{pr}(\theta_{2i})}{\sum_{i=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_1(i)] W_{pr}(\theta_{2i})}. \quad (4.1.18)$$

Рассмотрим теперь моделирование алгоритмов приёма сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения.

Согласно (1.3.2), (1.3.12), (2.3.1), (2.3.22) МП и байесовские алгоритмы обнаружения и оценивания моментов появления и исчезновения включают в себя формирование логарифма ФОП (1.3.1) для всех возможных значений моментов появления и исчезновения сигнала из априорной области (1.1.2). Воспользуемся представлением случайного поля (1.3.1) в виде суммы двух случайных процессов (1.2.26) и (1.2.27) при $f(t) = g(t)$. Тогда для моделирования алгоритмов приёма сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения необходимо формировать для обеих гипотез два гауссовских случайных процесса

$$L_1(\theta_1) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} [x(t) - f(t)/2] f(t) dt, \quad (4.1.19)$$

$$L_2(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} [x(t) - f(t)/2] f(t) dt. \quad (4.1.20)$$

Обозначим

$$L_{1j}(\theta_1) = L_1(\theta_1 | H_j), \quad L_{2j}(\theta_2) = L_2(\theta_2 | H_j), \quad j = 0, 1. \quad (4.1.21)$$

Выделяя в (4.1.21) детерминированные и случайные составляющие, запишем

$$L_{ij}(\theta_i) = S_{ij}(\theta_i) + N_i(\theta_i), \quad j = 0, 1, \quad i = 1, 2. \quad (4.1.22)$$

где

$$S_{10}(\theta_1) = -\frac{1}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt, \quad S_{20}(\theta_2) = -\frac{1}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad (4.1.23)$$

$$S_{11}(\theta_1) = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\theta_1, \theta_{01})}^{\theta} f^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt, \quad (4.1.24)$$

$$S_{21}(\theta_2) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\min(\theta_2, \theta_{02})} f^2(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad (4.1.25)$$

$$N_1(\theta_1) = -\frac{1}{N_0} \int_{\theta_1}^{\theta} f(t)n(t) dt, \quad N_2(\theta_2) = -\frac{1}{N_0} \int_{\theta}^{\theta_2} f(t)n(t) dt. \quad (4.1.26)$$

Случайные составляющие (4.1.26) представляют собой гауссовские случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями

$$B_1(\theta_{11}, \theta_{21}) = \frac{2}{N_0} \int_{\max(\theta_{11}, \theta_{21})}^{\theta} f^2(t) dt, \quad B_2(\theta_{12}, \theta_{22}) = \frac{2}{N_0} \int_{\theta}^{\min(\theta_{12}, \theta_{22})} f^2(t) dt \quad (4.1.27)$$

соответственно.

Будем аппроксимировать случайные процессы (4.1.26) ступенчатыми функциями, которые в узлах дискретизации (4.1.6) совпадают с $N_1(\theta_1)$ и $N_2(\theta_2)$

$$N_{1i} = N_1(\theta_{1i}), \quad N_{2i} = N_2(\theta_{2i}), \quad i = \overline{1, \text{ent}(M/2)} \quad (4.1.28)$$

и остаются постоянными на интервалах дискретизации [3].

Введем аналогично (4.1.8) относительную среднеквадратическую погрешность аппроксимации случайных процессов (4.1.26) дискретными функциями (4.1.28)

$$\varepsilon_1^2 = \max_{\theta_1, \theta_{1i}} \left\langle \left[N_1(\theta_1) - N_1(\theta_{1i}) \right]^2 \right\rangle / B_1(\theta_1, \theta_1) = \quad (4.1.29)$$

$$= \max_{\theta_1, \theta_{1i}} \left| \int_{\theta_1}^{\theta_{1i}} f^2(t) dt \right| / \int_{\theta_1}^{\theta} f^2(t) dt, \quad \theta_1 \in [\theta_{1i} - \Delta\theta/2, \theta_{1i} + \Delta\theta/2].$$

$$\varepsilon_2^2 = \max_{\theta_2, \theta_{2i}} \left\langle \left[N_2(\theta_2) - N_2(\theta_{2i}) \right]^2 \right\rangle / B_2(\theta_2, \theta_2) = \quad (4.1.30)$$

$$= \max_{\theta_2, \theta_{2i}} \left| \int_{\theta_{2i}}^{\theta_2} f^2(t) dt \right| / \int_{\theta}^{\theta_2} f^2(t) dt, \quad \theta_2 \in [\theta_{2i} - \Delta\theta/2, \theta_{2i} + \Delta\theta/2].$$

Находим отдельно минимальные значения знаменателей и максимальные значения числителей в выражениях (4.1.29) и (4.1.30), используя выражение (4.1.9) получаем верхние оценки погрешностей

$$\varepsilon_1^2 \leq \Delta\theta \max_{\theta_{1i}} \left[f^2(\theta_{1i}) \right] / 2 \int_{\theta_{1\max}}^{\theta} f^2(t) dt, \quad \varepsilon_2^2 \leq \Delta\theta \max_{\theta_{2i}} \left[f^2(\theta_{2i}) \right] / 2 \int_{\theta}^{\theta_{2\min}} f^2(t) dt. \quad (4.1.31)$$

Таким образом, задавшись приемлемой для моделирования погрешностью $\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, с помощью выражений (4.1.31) можно найти требуемый интервал дискретизации.

Представим далее дискретные отсчеты (4.1.28) случайных процессов (4.1.26) в виде [3]

$$N_{1i} = \frac{2}{N_0} \sum_{n=1}^i \int_{\theta_{1n}}^{\theta_{1n} + \Delta\theta} f(t) n(t) dt = \sum_{n=1}^i y_{1n}, \quad (4.1.32)$$

$$N_{2i} = \sum_{n=1}^i \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{2n} - \Delta\theta}^{\theta_{2n}} f(t) n(t) dt = \sum_{n=1}^i y_{2n}. \quad (4.1.33)$$

Здесь $n = \overline{1, \text{ent}(M/2)}$

$$y_{1n} = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{1n}}^{\theta_{1n} + \Delta\theta} f(t) n(t) dt, \quad y_{2n} = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{2n} - \Delta\theta}^{\theta_{2n}} f(t) n(t) dt, \quad (4.1.34)$$

— статистически независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями

$$D_{1n} = \langle y_{1n}^2 \rangle = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{1n}}^{\theta_{1n} + \Delta\theta} f^2(t) dt \approx 2f^2(\theta_{1n})\Delta\theta / N_0, \quad (4.1.35)$$

$$D_{2n} = \langle y_{2n}^2 \rangle = \frac{2}{N_0} \int_{\theta_{2n}-\Delta\theta}^{\theta_{2n}} f^2(t) dt \approx 2f^2(\theta_{2n})\Delta\theta/N_0. \quad (4.1.36)$$

Таким образом, для дискретных представлений шумовых составляющих (4.1.26) можем записать

$$N_{1i} = \sqrt{2\Delta\theta/N_0} \sum_{n=1}^i f(\theta_{1n})x_{1n}, \quad i = \overline{1, \text{ent}(M/2)}, \quad (4.1.37)$$

$$N_{2i} = \sqrt{2\Delta\theta/N_0} \sum_{n=1}^i f(\theta_{2n})x_{2n}, \quad i = \overline{1, \text{ent}(M/2)}. \quad (4.1.38)$$

На основе дискретных отсчетов шумовых составляющих (4.1.37), (4.1.38) запишем дискретное представление случайных процессов (4.1.21)

$$L_{1j}(i) = L_{1j}(\theta_{1i}) = S_{1j}(\theta_{1i}) + \sqrt{2\Delta\theta/N_0} \sum_{n=1}^i f(\theta_{1n})x_{1n}, \quad (4.1.39)$$

$$L_{2j}(i) = L_{2j}(\theta_{2i}) = S_{2j}(\theta_{2i}) + \sqrt{2\Delta\theta/N_0} \sum_{n=1}^i f(\theta_{2n})x_{2n}, \quad (4.1.40)$$

где x_{1n} и x_{2n} , $n = \overline{0, \text{ent}(M/2)}$ — гауссовские статистически независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями.

Согласно (1.3.2), (1.2.28) для моделирования МП алгоритма обнаружения сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения необходимо формировать случайные величины (4.1.39) и (4.1.40), находить максимальные значения

$$L_{1j} = \max(L_{1j}(i), i = \overline{n_{\min}, n_{\max}}), \quad L_{2j} = \max(L_{2j}(i), i = \overline{n_{\min}, n_{\max}}), \quad j = 0, 1.$$

Если при гипотезе H_0 величина $L_0 = L_{10} + L_{20}$ превысила порог, то фиксируется ошибка ложной тревоги. Если при гипотезе H_1 выполняется неравенство $L_1 = L_{11} + L_{21} < c$, то фиксируется пропуск сигнала.

При моделировании байесовского алгоритма обнаружения необходимо формировать случайную величину Λ (1.3.12). Предположим, что моменты появления и исчезновения статистически независимы, то есть априорная плотность вероятности представляет собой произведение $W_{pr}(\theta_1, \theta_2) = W_{1pr}(\theta_1)W_{2pr}(\theta_2)$ плотностей вероятностей моментов появления и исчезновения. Тогда при условии справедливости гипотезы с номером $j = 0, 1$ для случайной величины Λ приближенно запишем

$$\Lambda_j = \Delta\theta^2 \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_{1j}(n)]W_{1pr}(\theta_{1n}) \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_{2j}(n)]W_{2pr}(\theta_{2n}). \quad (4.1.41)$$

Ошибки 1-го и 2-го рода фиксируются при $\Lambda_0 > p_0/p_1$ и $\Lambda_1 < p_0/p_1$ соответственно. Для оценок вероятностей ошибок обнаружения будем использовать относительные частоты появления ошибок обнаружения.

Согласно (2.3.5), для моделирования МП оценок моментов появления и исчезновения необходимо найти номера $\hat{n}_1 = \arg \max L_{11}(i)$, $\hat{n}_2 = \arg \max L_{21}(i)$ максимальных из случайных величин (4.1.39) и (4.1.40). Тогда

$$\hat{\lambda}_1 = (\theta - \hat{\theta}_1)/T_{\max} = \delta \hat{n}_1, \quad \hat{\lambda}_2 = (\hat{\theta}_2 - \theta)/T_{\max} = \delta \hat{n}_2. \quad (4.1.42)$$

Байесовские оценки нетрудно получить, приближенно представив в (2.3.22) интегралы в виде конечных сумм

$$\lambda_{13} = \frac{\theta - \theta_{13}}{T_{\max}} = \delta \sum_{i=n_{\min}}^{n_{\max}} i \exp[L_{11}(i)]W_{1pr}(\theta_{1i}) / \sum_{i=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_{11}(i)]W_{1pr}(\theta_{1i}), \quad (4.1.43)$$

$$\lambda_{23} = \frac{\theta_{23} - \theta}{T_{\max}} = \delta \sum_{i=n_{\min}}^{n_{\max}} i \exp[L_{21}(i)]W_{2pr}(\theta_{2i}) / \sum_{i=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_{21}(i)]W_{2pr}(\theta_{2i}). \quad (4.1.44)$$

4.2. Моделирование алгоритмов обнаружения

Моделирование алгоритмов обнаружения было выполнено для прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.21). Предположим сначала, что момент появления сигнала априори известен и равен $\theta_{01} = \theta_{1\min}$, и рассмотрим моделирование МП обнаружения сигнала (1.1.22) с неизвестным моментом исчезновения. Согласно (4.1.15), необходимо формировать случайные величины

$$L_j(i) = S_j(\lambda_{2i}) + z_r x_0 \sqrt{0,5(1 - b_0/2(1 + b_0^2/12))} + z_r \sqrt{\delta} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} [1 + b\lambda_{2n}] / \sqrt{1 + b_0^2/12}, \quad (4.2.1)$$

$$S_0(\lambda_2) = -z_r^2 \left\{ \lambda_2 + 1/2 + b_0(\lambda_2^2 - 1/4) + b_0^2(\lambda_2^3 + 1/8)/3 \right\} / 2(1 + b_0^2/12), \quad (4.2.2)$$

$$S_1(\lambda_2) = z_r^2 \left\{ \min(\lambda_2, \lambda_{02}) + 1/2 + b_0(\min^2(\lambda_2, \lambda_{02}) - 1/4) + b_0^2(\min^3(\lambda_2, \lambda_{02}) + 1/8)/3 - \left[\lambda_2 + 1/2 + b_0(\lambda_2^2 - 1/4) + b_0^2(\lambda_2^3 + 1/8)/3 \right] / 2 \right\} / (1 + b_0^2/12), \quad (4.2.3)$$

$$\lambda_2 = (\theta_2 - \theta)/T_{\max}, \quad \lambda_{2i} = (\theta_{2i} - \theta)/T_{\max}, \quad n = \overline{n_{\min}, n_{\max}}, \quad j = 0, 1,$$

$$z_r^2 = 2A_r^2 T_{\max} / T_{\max}.$$

Нормированный интервал дискретизации δ нетрудно найти, используя выражение (4.1.10)

$$\delta = \varepsilon^2 \left\{ \frac{k-1}{k} + \frac{b_0}{2} \frac{1-k^2}{k^2} + \frac{b_0^2}{12} \frac{1+k^3}{k^3} \right\} / (1+b_0/2). \quad (4.2.4)$$

При моделировании МП алгоритма обнаружение (1.1.60) сигнала (1.1.21) многократно формировались случайные величины (4.2.1) для каждой гипотезы H_j , $j=0,1$ и $\varepsilon=0,05$, находилась максимальная из них L_j и сравнивалась с тремя различными порогами c . Первый из них был равен нулю $c=0$, второй находился по критерию Неймана–Пирсона [53], то есть из условия $\alpha = const$, где α — асимптотическое выражение для вероятности ложной тревоги (1.1.53), (1.1.64). Третий порог [60] (оптимизированный) был равен $c = \arg \inf P_e$, $P_e = p_0 \alpha + p_1 \beta$ — безусловная средняя вероятность

ошибки обнаружения, $\beta = \int_{\theta_{2\min}}^{\theta_{2\max}} \beta(\theta_2) W_{pr}(\theta_2) d\theta_2$ — безусловная вероят-

ность пропуска сигнала, α и $\beta(\theta_2)$ — асимптотические вероятности ложной тревоги (1.1.53), (1.1.64) и пропуска сигнала (1.1.63) соответственно. Априорная плотность вероятности момента исчезновения считалась равномерной (1.1.30). Для каждого из порогов подсчитывались количества зафиксированных ошибок 1-го и 2-го рода. Истинное значение момента исчезновения сигнала λ_{02} от испытания к испытанию выбиралось либо фиксированным $\lambda_{02} = 1/4$ (для нахождения условных характеристик обнаружения), либо случайным, равномерно распределенным на интервале $[1/2k, 1/2]$ (для нахождения безусловных характеристик).

Для моделирования байесовского алгоритма обнаружения (1.1.65) при равномерной априорной плотности вероятности момента исчезновения формировались случайные величины

$$\Lambda_j = \frac{\delta}{\eta_2} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_j(n)], \quad j=0,1, \quad (4.2.5)$$

η_2 — нормированная длина априорного интервала момента исчезновения (1.1.52), и сравнивались с порогом $c = p_0/p_1$. Если $\Lambda_0 > p_0/p_1$, фиксировалась ложная тревога, а при $\Lambda_1 < p_0/p_1$ — пропуск сигнала.

Результаты моделирования при $k=4$ приведены на рис. 1.7 – 1.9 и обсуждались в параграфе 1.1. На рис. 4.1 – 4.3 представлены результаты моделирования МП и байесовского алгоритмов обнаружения прямоугольного

импульса со скошенной вершиной и неизвестным моментом исчезновения при $k = 10$, $p_0 = 0,7$. Штриховыми, сплошными и штрих-пунктирными линиями на этих рисунках показаны асимптотические характеристики обнаружения приёмником МП (1.1.60) для $\gamma_0 = 0,1$, $\gamma_0 = 1$ и $\gamma_0 = 10$ соответственно.

На рис. 4.1 изображены зависимости от ОСШ z_r условной вероятности пропуска (1.1.63) при фиксированной вероятности ложной тревоги (1.1.53), (1.1.61), $\lambda_{02} = 0,25$. Рисунок под буквой а) соответствует $\alpha = 10^{-1}$, б) — $\alpha = 10^{-2}$, в) — $\alpha = 10^{-3}$.

На рис. 4.2 и 4.3 показаны соответственно условная $P_e(\theta_{02})$ при $\lambda_{02} = 0,25$, $c = 0$ и безусловная P_e при $c = \arg \inf P_e$ средние вероятности ошибок.

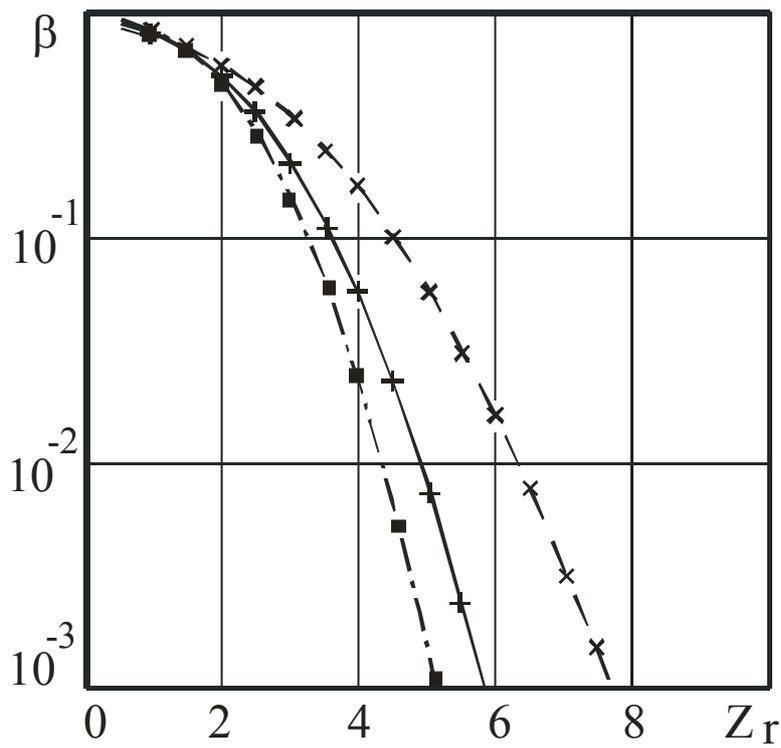
Результаты моделирования МП алгоритма обнаружения (1.1.60) показаны на рис. 4.1 — 4.3 крестиками для $\gamma_0 = 0,1$, плюсиками для $\gamma_0 = 1$ и квадратиками для $\gamma_0 = 10$. Как видно, при $z_r \geq 2$ асимптотические характеристики (1.1.53) и (1.1.63) удовлетворительно описывают экспериментальные данные.

Окружностями на рис. 4.3 изображены результаты моделирования байесовского алгоритма обнаружения (1.1.65), (4.2.5). Характеристики байесовского обнаружителя практически совпадают с характеристиками МП обнаружителя с оптимизированным порогом [109]. Это позволяет рекомендовать формулы (1.1.53), (1.1.63) для приближенного расчета характеристик байесовского алгоритма обнаружения.

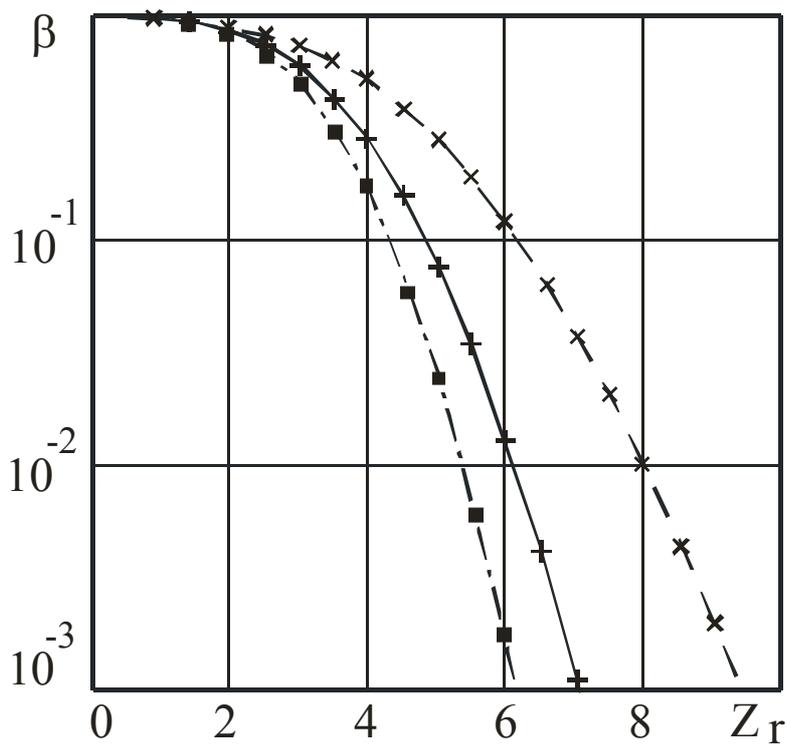
Сравнивая вероятности ошибок на рис. 4.1 – 4.3 с аналогичными вероятностями на рис. 1.7 – 1.9 видим, что с ростом величины k , то есть с увеличением длины априорного интервала момента исчезновения, эффективность обнаружения сигнала ухудшается.

В процессе моделирования было реализовано 10^5 циклов испытаний для каждого значения z_r . Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений средней вероятности ошибки не более чем на 15% при $P_e > 10^{-3}$.

Рассмотрим теперь моделирование обнаружения прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22) с неизвестными моментами появления и исчезновения. Для моделирования МП алгоритма обнаружения (1.3.2) многократно формировались случайные величины (4.1.39) и (4.1.40), которые применительно к сигналу (1.1.22) можно записать в виде

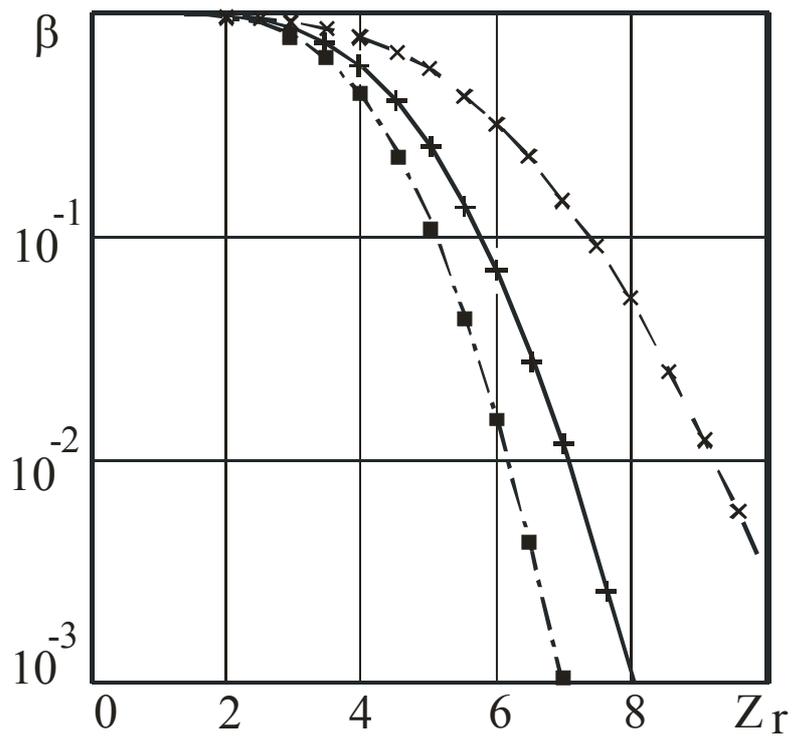


a)



б)

Рис. 4.1. Вероятности пропуска сигнала МП обнаружителем при фиксированной вероятности ложной тревоги.



В)

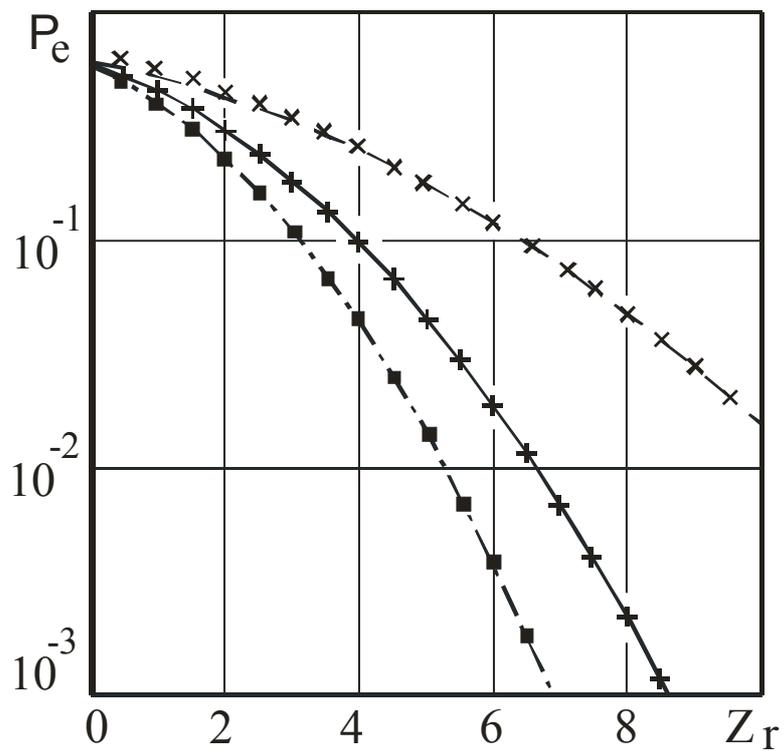


Рис.4.2 Условная средняя вероятность ошибки МП обнаружения

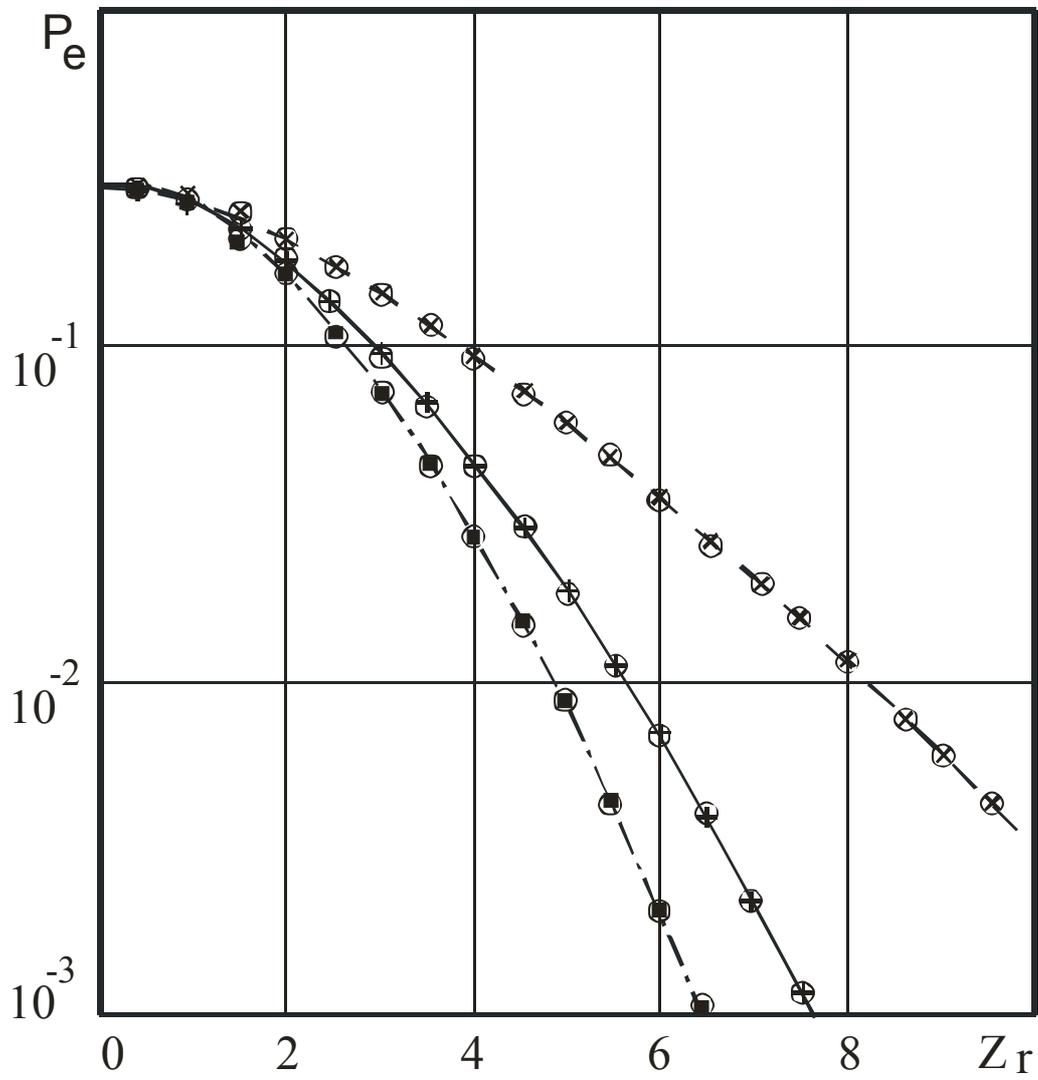


Рис. 4.3. Безусловные средние вероятности ошибки МП обнаружения при оптимизированном пороге.

$$L_{1j}(i) = S_{1j}(\lambda_{1i}) + z_r \sqrt{\delta} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} x_{1n} [1 - b_0 \lambda_{1n}] / \sqrt{1 + b_0^2/12}, \quad (4.2.6a)$$

$$L_{2j}(i) = S_{2j}(\lambda_{2i}) + z_r \sqrt{\delta} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} x_{2n} [1 + b_0 \lambda_{2n}] / \sqrt{1 + b_0^2/12}, \quad (4.2.6б)$$

где

$$S_{11}(\lambda_1) = z_r^2 \left[\min(\lambda_1, \lambda_{01}) - b_0 \min^2(\lambda_1, \lambda_{01}) + b_0^2 \min^3(\lambda_1, \lambda_{01})/3 - \right. \\ \left. - \lambda_1/2 + b_0 \lambda_1^2/2 - b_0^2 \lambda_1^3/6 \right] / (1 + b_0^2/12), \quad (4.2.7)$$

$$S_{21}(\lambda_2) = z_r^2 \left[\min(\lambda_2, \lambda_{02}) + b_0 \min^2(\lambda_2, \lambda_{02}) + b_0^2 \min^3(\lambda_2, \lambda_{02})/3 - \right. \\ \left. - \lambda_2/2 - b_0 \lambda_2^2/2 - b_0^2 \lambda_2^3/6 \right] / (1 + b_0^2/12), \quad (4.2.8)$$

$$S_{10}(\lambda_1) = -z_r^2 \lambda_1 \left\{ 1 - b_0 \lambda_1 + b_0^2 \lambda_1^2/3 \right\} / 2(1 + b_0^2/12), \quad (4.2.9)$$

$$S_{20}(\lambda_2) = -z_r^2 \lambda_2 \left\{ 1 + b_0 \lambda_2 + b_0^2 \lambda_2^2/3 \right\} / 2(1 + b_0^2/12), \quad (4.2.10)$$

$$\lambda_1 = (\theta - \theta_1)/T_{\max}, \quad \lambda_{1i} = (\theta - \theta_{1i})/T_{\max},$$

$$\lambda_2 = (\theta_2 - \theta)/T_{\max}, \quad \lambda_{2i} = (\theta_{2i} - \theta)/T_{\max},$$

$$n = n_{\min}, n_{\max}, \quad j = 0, 1.$$

Нормированный интервал дискретизации δ был выражен с помощью (4.1.31) через допустимую среднеквадратическую погрешность $\varepsilon = 0,05$

$$\delta = \varepsilon^2 \left[1 - (b_0 / (2k + b_0^2/12k^2)) \right] / k. \quad (4.2.11)$$

Истинные значения моментов появления и исчезновения сигнала, характеризующиеся величинами λ_{01} , λ_{02} , от испытания к испытанию выбирались либо фиксированным $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 1/4$ (для нахождения условных характеристик обнаружения), либо случайным, равномерно распределенным на интервале $[1/2k, 1/2]$ (для нахождения безусловных характеристик), что соответствует равномерной априорной плотности вероятности моментов появления и исчезновения (1.2.21).

При моделировании МП алгоритма обнаружение (1.3.2) сигнала (1.1.22) формировались случайные величины (4.1.39), (4.1.40) для каждой гипотезы H_j , $j = 0, 1$, находились максимальные из них L_{1j} , L_{2j} и их сумма $L_j = L_{1j} + L_{2j}$ сравнивалась с тремя различными порогами. Первый из них был равен нулю $c = 0$, второй находился по критерию Неймана–Пирсона [42], то есть из условия $\alpha = const$, где α — асимптотическое выражение

для вероятности ложной тревоги (1.3.4). Третий порог выбирался по критерию минимума асимптотической безусловной средней вероятности ошибки обнаружения (1.3.11) $c = \arg \inf P_e$ [60].

Для моделирования байесовского алгоритма обнаружения (1.3.12) при равномерной априорной плотности вероятности моментов появления и исчезновения формировались случайные величины

$$\Lambda_j = \frac{\delta^2}{\eta_1 \eta_2} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_{1j}(n)] \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \exp[L_{2j}(n)], \quad j=0,1, \quad (4.2.12)$$

η_1 и η_2 — нормированные длины априорных интервалов моментов появления и исчезновения (1.2.62) соответственно. Производилось сравнение величин (4.2.12) с порогом $c = p_0/p_1$. Если $\Lambda_0 > p_0/p_1$, фиксировалась ложная тревога, а при $\Lambda_1 < p_0/p_1$ — пропуск сигнала.

Результаты моделирования для $k=4$ показаны на рис. 1.18 – 1.20 и обсуждались в параграфе 1.3. Здесь на рис. 4.4 – 4.6 показаны результаты моделирования для $k=10$, $p_0=0,7$.

На рис. 4.4 – 4.6 представлены зависимости характеристик обнаружения сигнала (1.1.22) приёмником МП, где штриховые кривые соответствуют $\gamma_0=0,1$ и $\gamma_0=10$, сплошные — $\gamma_0=1$. На рис. 4.4 изображены зависимости условной вероятности пропуска (1.3.5) от ОСШ z_r при фиксированной вероятности ложной тревоги (1.3.4). Рисунок под буквой а) соответствует $\alpha=10^{-1}$, б) — $\alpha=10^{-2}$, в) — $\alpha=10^{-3}$.

На рис. 4.5 и 4.6 показаны соответственно условная (1.3.10) при $\lambda_{01}=\lambda_{02}=0,25$, $c=0$ и безусловная (1.3.11) при $c = \arg \inf P_e$ средние вероятности ошибок обнаружения. Априорная плотность вероятности $W_{pr}(\theta_1, \theta_2)$ моментов появления и исчезновения при расчете безусловных характеристик была выбрана равномерной (1.2.21).

Результаты моделирования МП алгоритма обнаружения (1.3.2) показаны на рис. 4.4 – 4.6 квадратиками для $\gamma_0=0,1$ и $\gamma_0=10$, кружками для $\gamma_0=1$. Как видно, при $z_r \geq 2$ асимптотические характеристики (1.3.4) и (1.3.5) удовлетворительно описывают экспериментальные данные.

Окружностями и незаштрихованными квадратиками на рис.4.6 изображены результаты моделирования байесовского алгоритма обнаружения (1.3.13) для $\gamma_0=1$ и $\gamma_0=0,1;10$ соответственно. Характеристики байесовского обнаружителя практически совпадают с характеристиками МП обнаружителя с оптимизированным порогом. Это позволяет рекомендовать формулы (1.3.4), (1.3.5) для приближенного расчета характеристик байесовского алгоритма обнаружения.

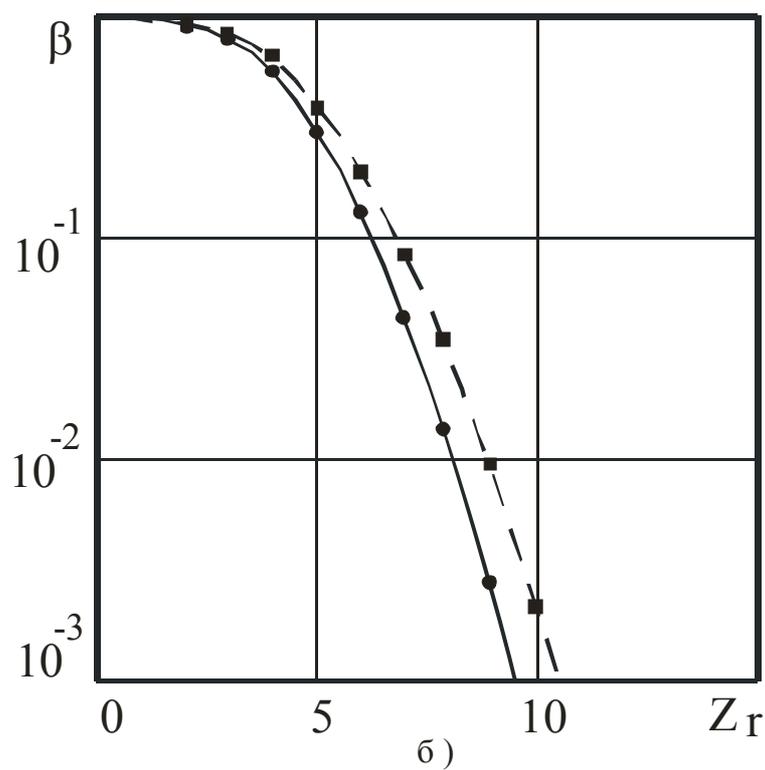
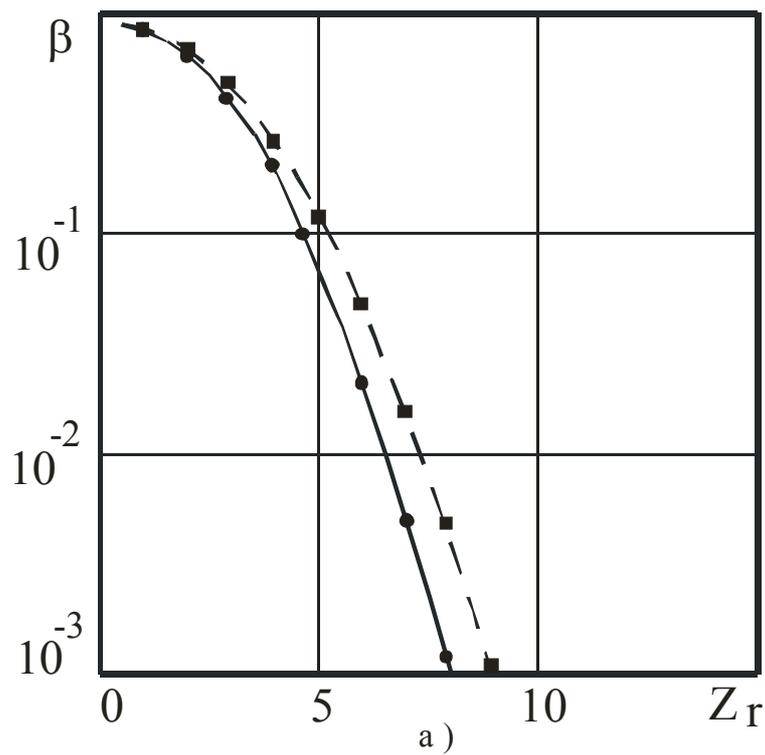


Рис. 4.4 Вероятности пропуска сигнала МП обнаружителем при фиксированной вероятности ложной тревоги

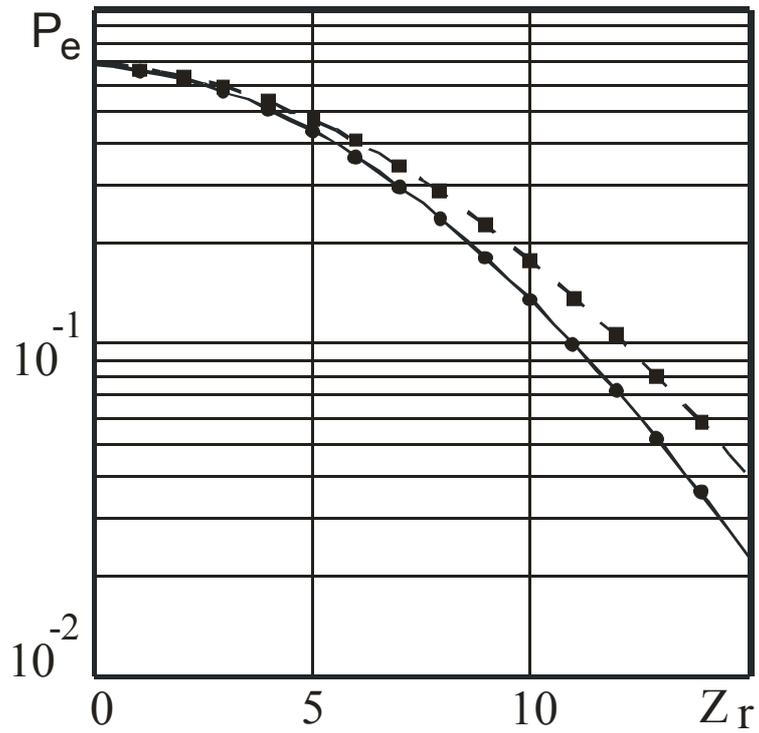
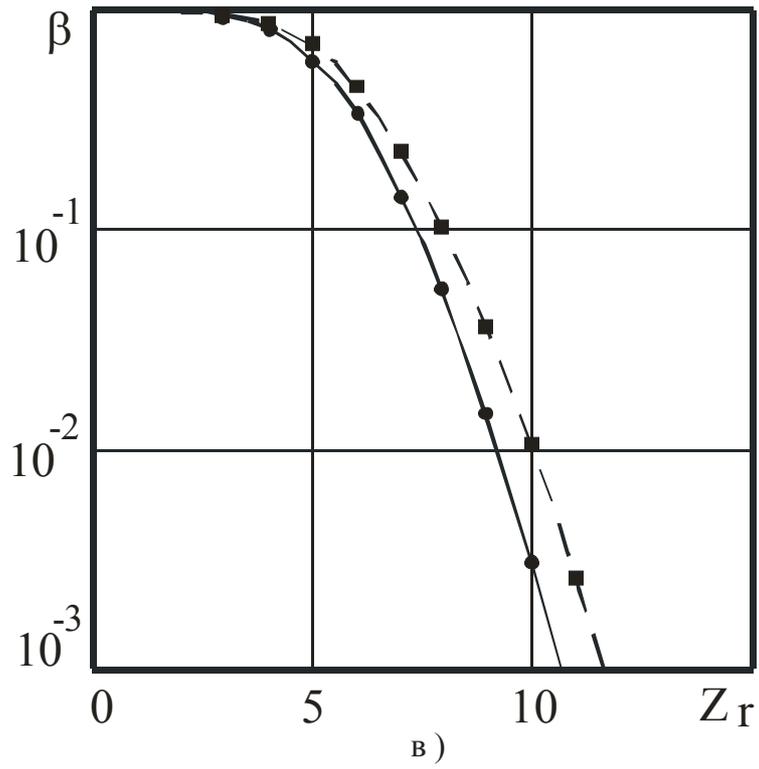


Рис. 4.5. Условная средняя вероятность ошибки МП обнаружителем

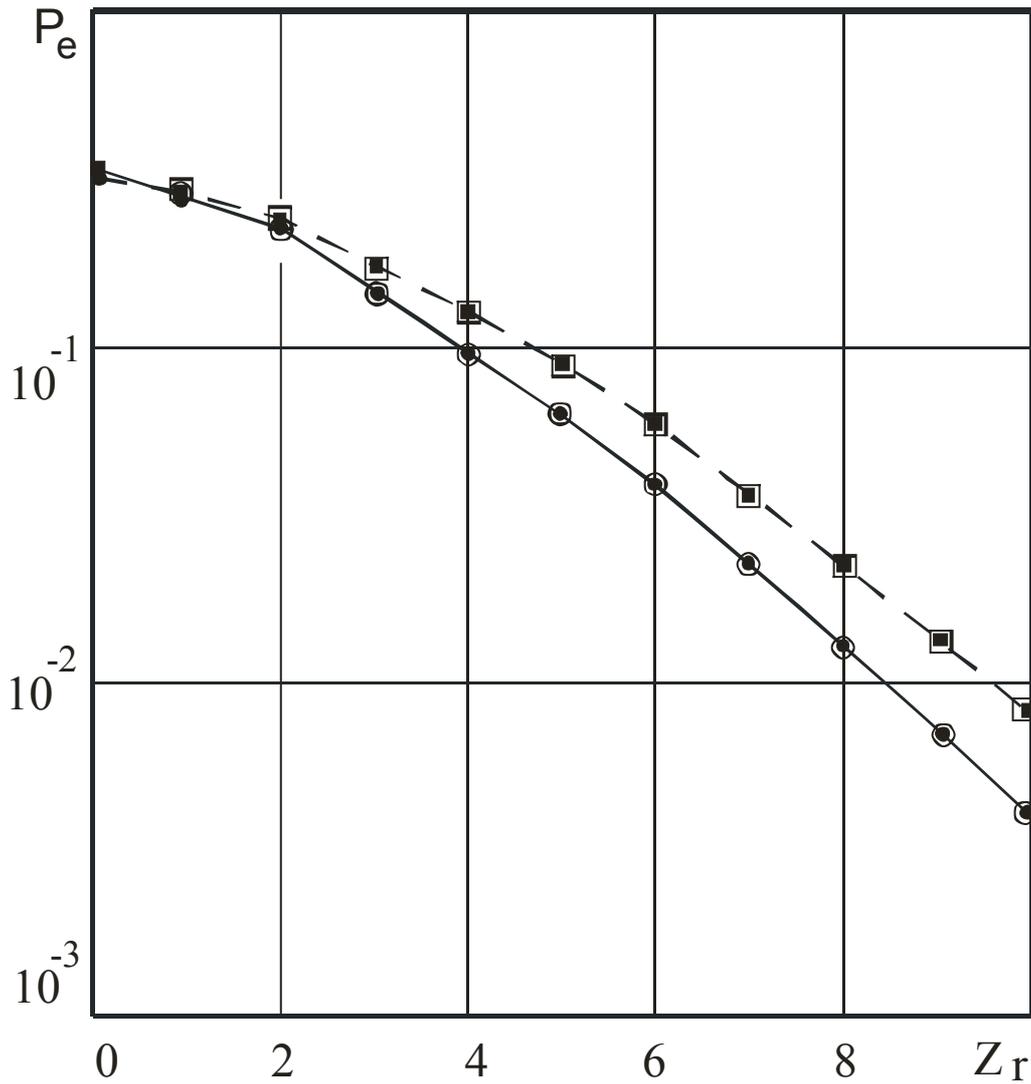


Рис. 4.6 Безусловная средняя вероятность ошибки МП и байесовского обнаружителей

Сравнение характеристик обнаружения на рис. 1.18 – 1.20 при $k = 4$ с аналогичными характеристиками на рис. 4.4 – 4.6 при $k = 10$ позволяет сделать вывод о том, что с ростом длины априорных интервалов моментов появления и исчезновения эффективность обнаружения сигнала снижается.

В процессе моделирования было реализовано 10^5 циклов испытаний для каждого значения z_r . Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений средней вероятности ошибки не более чем на 15% при $P_e > 10^{-3}$.

4.3. Моделирование алгоритмов оценок

Выполнялось статистическое моделирование МП и байесовских алгоритмов оценивания моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22). Предполагалось сначала, что момент появления сигнала априори известен и равен $\theta_{01} = \theta_{1\min}$. Согласно (4.1.17), для моделирования МП оценки момента исчезновения многократно формировались случайные величины (4.2.1) при $j=1$ и находилась максимальная из них. Байесовская оценка момента исчезновения формировалась как (4.1.18), где априорная плотность вероятности $W_{pr}(\theta_2)$ считалась равномерной. Величина нормированного интервала дискретизации δ находилась из выражения (4.2.4), где относительная погрешность аппроксимации логарифма ФОП своими дискретными отсчетами принималась равной $\varepsilon = 0,05$. Для расчета смещения и рассеяния оценок от испытания к испытанию накапливались суммы отклонений и квадратов отклонений оценки от истинного значения λ_{02} момента исчезновения. Величина λ_{02} в каждом испытании выбиралась либо фиксированной и равной $\lambda_{02} = 1/4$ (для моделирования условных характеристик оценки), либо случайной, равномерно распределенной на интервале $[1/2k, 1/2]$ (для моделирования безусловных характеристик).

В процессе моделирования было реализовано 10^5 циклов испытаний для каждого значения z_r . Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений условного и безусловного рассеяний не более чем на 15% при $V_{0m,3}/T_{\max}^2 > 10^{-3}$, $V_{m,3}/T_{\max}^2 > 10^{-3}$.

Результаты статистического моделирования для $k=4$ приведены на рис. 2.3, 2.4 и обсуждались в параграфе 2.1. Здесь представлены результаты моделирования для $k=10$. На рис. 4.7 и 4.8 изображены зависимости от ОСШ z_r нормированных условного и безусловного рассеяний (2.1.25), (2.1.32) оценок момента исчезновения. Сплошными и штриховыми линиями на рисунках показаны рассеяния МП оценки, рассчитанные с помощью выражений (2.1.21) и предельных значений (2.1.23) соответственно, штрихпунктирными линиями — предельные значения рассеяния (2.1.31) байесовской оценки. Кривые 1 соответствуют наклону скошенной вершины $\gamma_0 = 0,2$, кривые 2 — $\gamma_0 = 1$, кривые 3 — $\gamma_0 = 5$.

Квадратиками на рис.4.7, 4.8 изображены экспериментальные значения нормированных рассеяний МП оценки момента исчезновения, кружками — байесовской оценки момента исчезновения. Как видно из рисунков, экспе-

риментальные зависимости удовлетворительно описываются асимптотическими выражениями для рассеяний оценок. Как и следовало ожидать, рассеяния, рассчитанные с помощью предельных значений (2.1.23) в менее широком диапазоне ОСШ удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, чем рассеяния, рассчитанные с использованием выражений (2.1.21). Заметим также, что с ростом величины скачка сигнала в момент исчезновения согласование рассеяний, полученных в результате моделирования с предельными значениями (2.1.23) наблюдается при меньших ОСШ. Например, для $\gamma_0 = 5$ экспериментальные значения рассеяний МП оценки момента исчезновения совпадают с рассеяниями (2.1.23) при $z_r > 35$, а для $\gamma_0 = 0,2$ — при $z_r > 7..8$.

Для моделирования совместных МП оценок моментов появления и исчезновения (2.3.5), импульса (1.1.22), многократно формировались случайные величины (4.2.6) при $j = 1$ и определялись нормированные положения оценок (4.1.42). При моделировании байесовского алгоритма оценивания (2.3.22) формировались величины (4.1.43) и (4.1.44), которые являются нормированными значениями байесовских оценок.

Нормированный интервал дискретизации δ находился из выражения (4.2.11), где относительная погрешность аппроксимации логарифма ФОП своими дискретными отсчетами принималась равной $\varepsilon = 0,05$.

Истинные значения моментов появления и исчезновения сигнала, характеризующиеся величинами λ_{01} , λ_{02} , при каждом испытании выбирались либо фиксированным $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 1/4$ (для нахождения условных характеристик оценок), либо случайным, равномерно распределенным на интервале $[1/2k, 1/2]$ (для нахождения безусловных характеристик), что соответствует равномерной априорной плотности вероятности моментов появления и исчезновения (1.2.21). Для расчета смещения и рассеяния оценок от испытания к испытанию накапливались суммы отклонений и квадратов отклонений оценок от истинных значений λ_{01} , λ_{02} моментов появления и исчезновения.

Сформированные оценки моментов появления и исчезновения использовались для нахождения оценок времени прихода и длительности сигнала (2.4.20).

Результаты моделирования алгоритмов совместного оценивания моментов появления и исчезновения сигнала при $k = 4$ приведены на рис. 2.11 — 2.16. Здесь представлены результаты моделирования при $k = 10$.

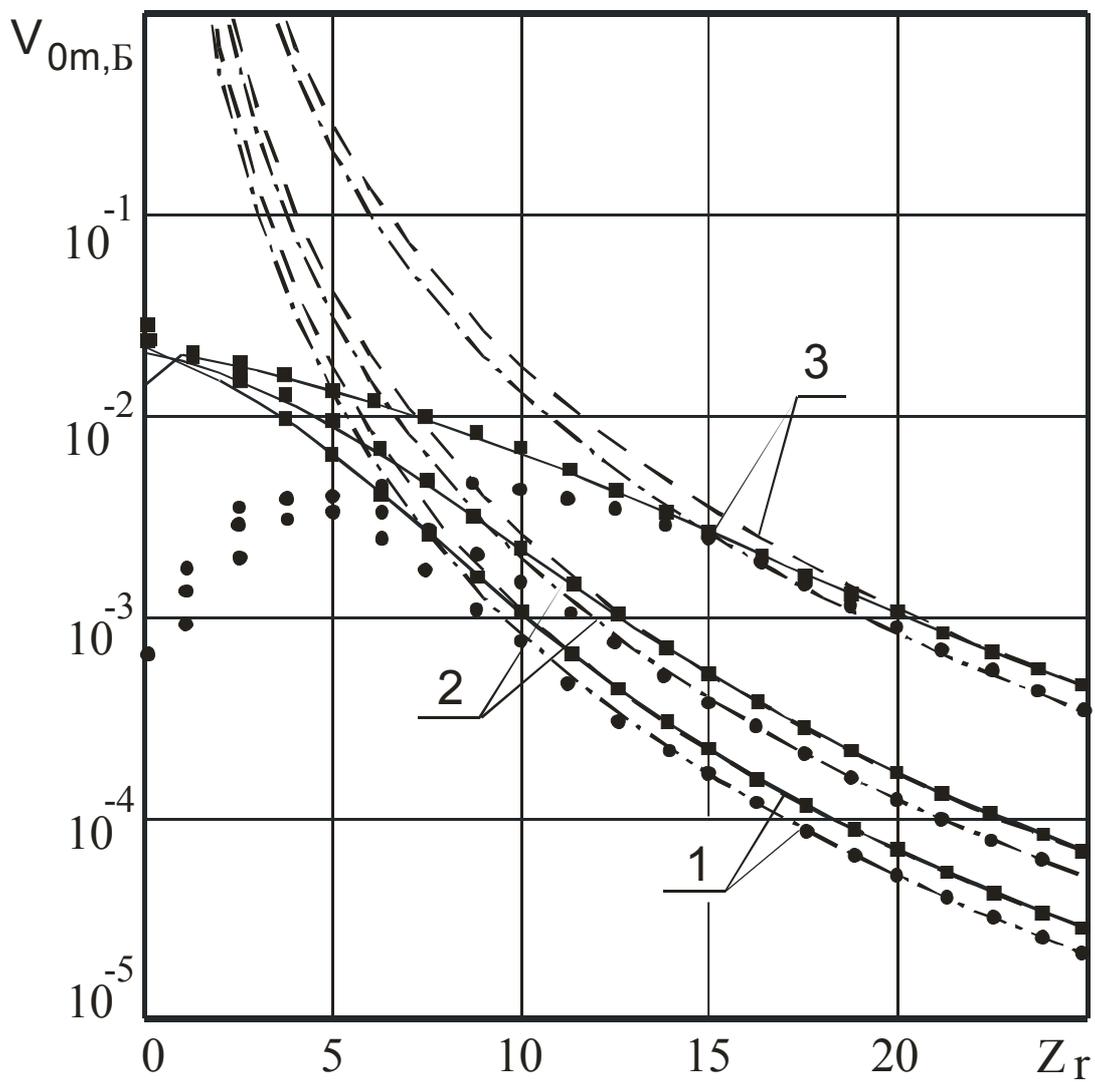


Рис. 4.7 Условные рассеяния оценок момента исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной

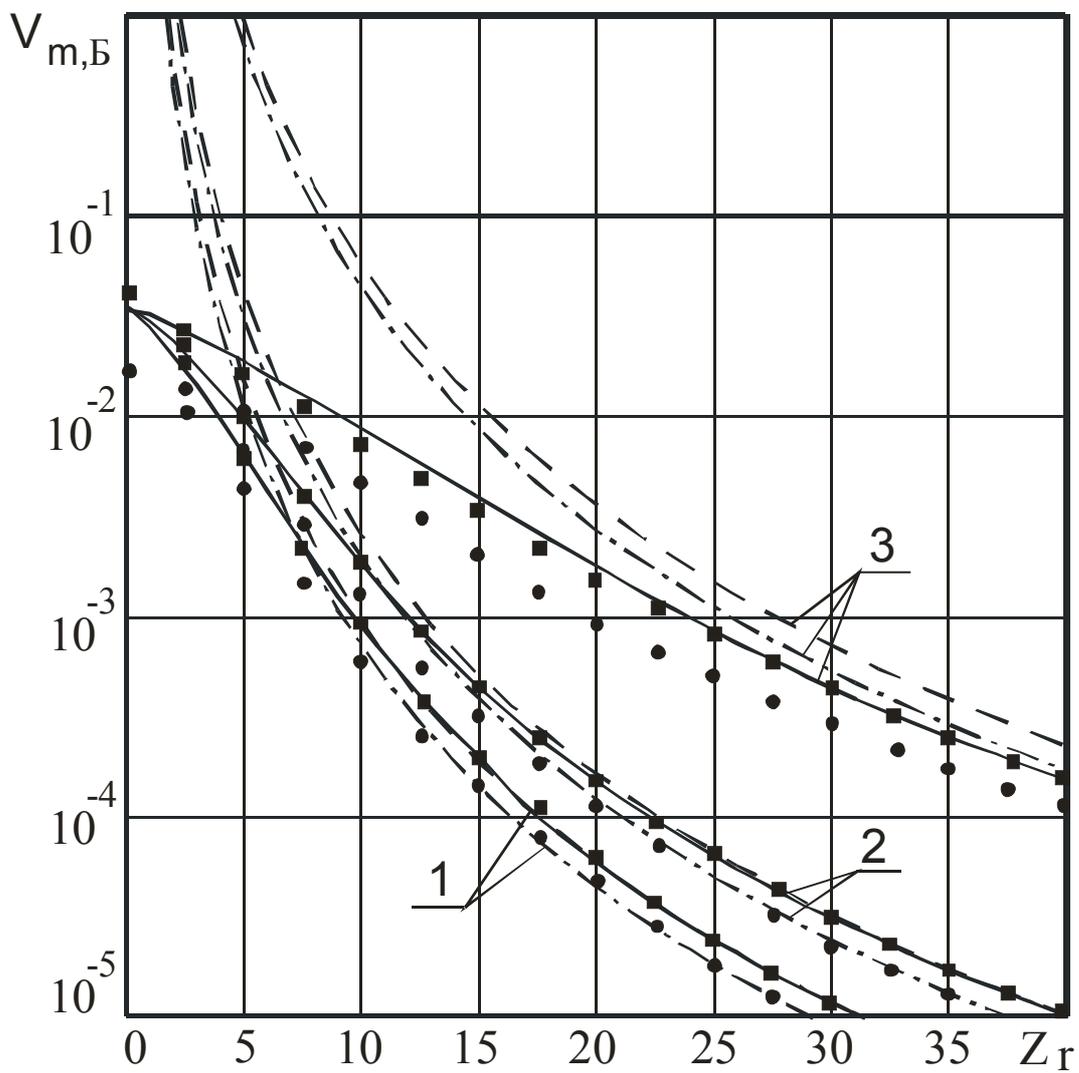


Рис. 4.8 Безусловные рассеяния оценок момента исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной

На рис. 4.9 показаны зависимости от ОСШ z_r , нормированных на T_{\max}^2 условных при $\lambda_i = 1/4$ рассеяний оценок моментов появления и исчезновения импульса (1.1.22). При наклоне импульса $\gamma_0 = 5$ кривые 1 на рис.4.9 соответствуют рассеянию момента появления, кривые 2 — момента исчезновения. Если наклон импульса $\gamma_0 = 1/5$, то кривые 1 и 2 меняются местами, то есть кривая 1 иллюстрирует рассеяние момента исчезновения, а кривая 2 — момента появления. Сплошными линиями на рис.4.9 показаны рассеяния МП оценок, рассчитанные с использованием выражений (2.3.12), штриховыми — с использованием предельных значений рассеяний (2.3.16).

Заметим, что применительно к прямоугольному импульсу с плоской вершиной ($\gamma_0 = 1$) рассеяния оценок МП моментов появления и исчезновения совпадают. На рис. 4.10 изображены зависимости рассеяний оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса, рассчитанные по формуле (2.3.12) (сплошная кривая) и по формулам для предельных значений (2.3.16) (штриховая кривая).

Штрих-пунктирными линиями на рис. 4.9, 4.10 показаны зависимости нормированных на T_{\max}^2 асимптотических условных рассеяний (2.3.25) байесовских оценок моментов появления и исчезновения (2.3.22).

Зависимости от z_r , нормированных на T_{\max}^2 безусловных рассеяний оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной (1.1.22) показаны на рис.4.11. При построении предполагалось, что априорная плотность вероятности моментов появления и исчезновения равномерна (1.2.21). Аналогично рисунку 4.9 кривые 1 отражают зависимости рассеяний момента появления при $\gamma_0 = 5$ и момента исчезновения при $\gamma_0 = 1/5$, кривые 2 — зависимости момента исчезновения при $\gamma_0 = 5$ и момента появления при $\gamma_0 = 1/5$. Сплошными линиями изображены асимптотические рассеяния оценок МП (2.3.1), рассчитанные с использованием выражений (2.3.12), штриховыми — те же рассеяния, рассчитанные с помощью формул (2.3.16). Штрих-пунктирные линии соответствуют асимптотическим рассеяниям (2.3.25) байесовских оценок (2.3.22).

При плоской вершине импульса безусловные рассеяния оценок моментов появления и исчезновения совпадают. На рис.4.12 представлены зависимости от z_r , нормированных на T_{\max}^2 безусловных рассеяний (2.3.12) (сплошная кривая) и (2.3.16) (штриховая кривая) МП оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса. Асимптотические рассеяния байесовских оценок показаны штрих-пунктирной линией.

На рис.4.13 изображены зависимости от ОСШ z_r байесовского риска, нормированного на T_{\max}^2 при использовании оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса с плоской (кривые 1) и со скошенной вершиной $\gamma = 5,1/5$ (кривые 2). Сплошные и штриховые линии на рис.2.16 иллюстрируют риск (2.3.24) МП оценок, рассчитанный с помощью выражений (2.3.12) и (2.3.16) соответственно. Байесовский риск (2.3.26) показан на рис.4.13 штрих-пунктирной линией.

На рис. 4.9 и 4.10 нанесены экспериментальные значения условных, а на рис. 4.11 и 4.12 — безусловных рассеяний МП (квадратики) и байесовских (кружки) оценок моментов появления и исчезновения.

Как видно из рисунков, асимптотические зависимости рассеяний, рассчитанные с использованием выражений (2.3.12), в более широком диапазоне ОСШ удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, чем зависимости, рассчитанные с использованием выражений (2.3.16). Заметим, что согласование рассеяний, полученных в результате моделирования с предельными значениями (2.3.16) существенным образом зависит от величины скачка сигнала в оцениваемый момент появления или исчезновения. Например, при $\gamma_0 = 5$ экспериментальные значения рассеяний момента появления (скачок сигнала больше) совпадают с рассеяниями (2.3.16) при $z_r > 12$, а момента исчезновения (скачок сигнала меньше) — при $z_r > 20$. Асимптотические выражения (2.3.12) удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные зависимости при $z_r > 3$.

На рис. 4.13 показаны экспериментальные зависимости байесовского риска (2.3.23) (кружки) и риска оценок МП (2.3.24) (квадратики). Риск оценок МП, рассчитанный с помощью выражений (2.3.12) при $z_r > 2$ удовлетворительно аппроксимирует зависимости, полученные в результате моделирования.

При наклоне скошенной вершины импульса $\gamma_0 = 5$ риски байесовской (2.3.26) и МП (2.3.24), (2.3.16) оценок момента появления хорошо согласуются с экспериментальными данными при $z_r > 20$, а оценок момента исчезновения — при $z_r > 55$.

Сравнение рис. 4.9 – 4.13 при $k = 10$ с аналогичными рис. 2.11 – 2.16 при $k = 4$ свидетельствует об ухудшении качества оценок моментов появления и исчезновения при малых ОСШ с увеличением длин априорных интервалов и о асимптотической независимости эффективности оценивания от длины априорных интервалов моментов появления и исчезновения при больших ОСШ.

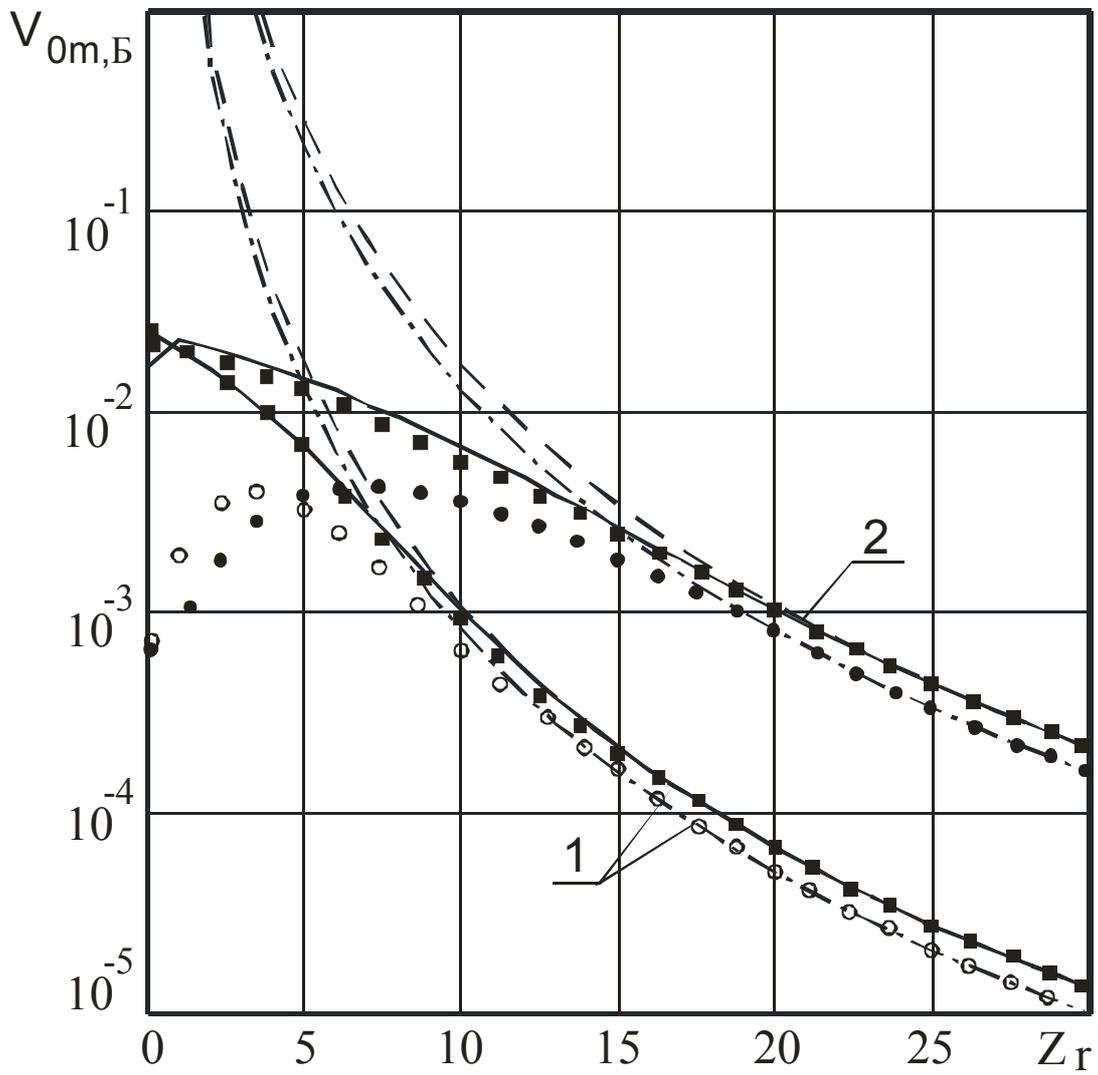


Рис. 4.9 Условные рассеяния оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной

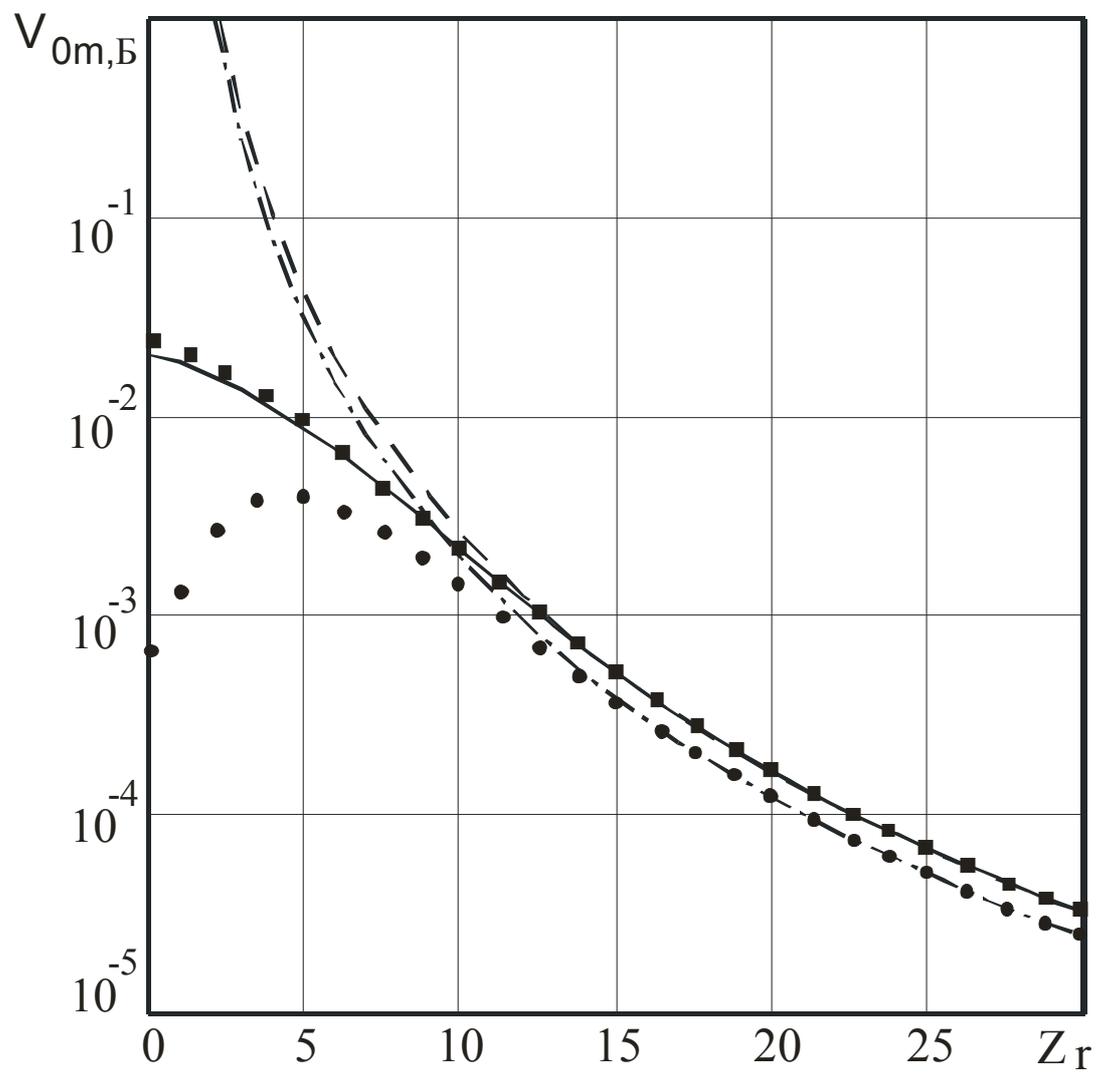


Рис. 4.10 Условные рассеяния оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса

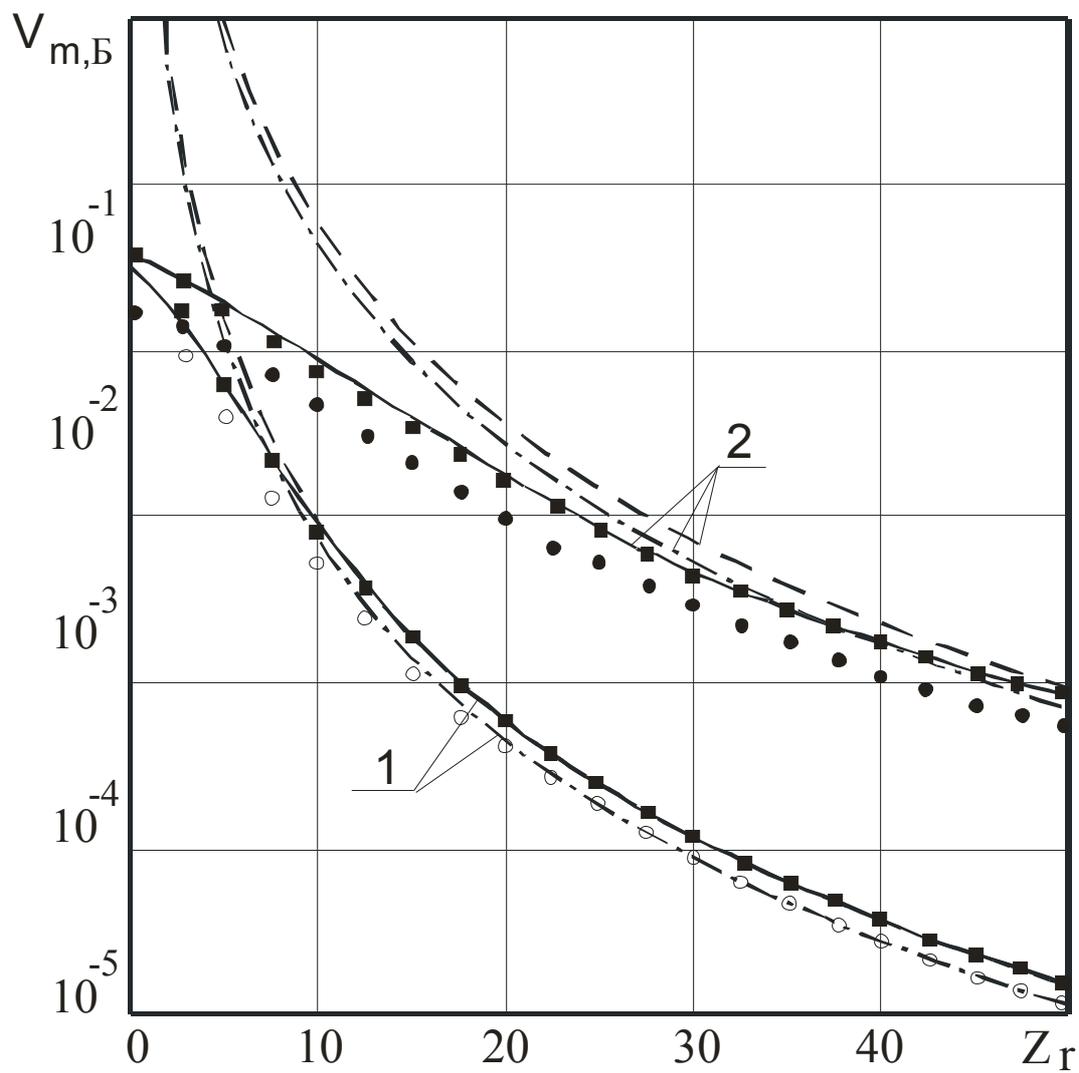


Рис. 4.11 Безусловные рассеяния оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной

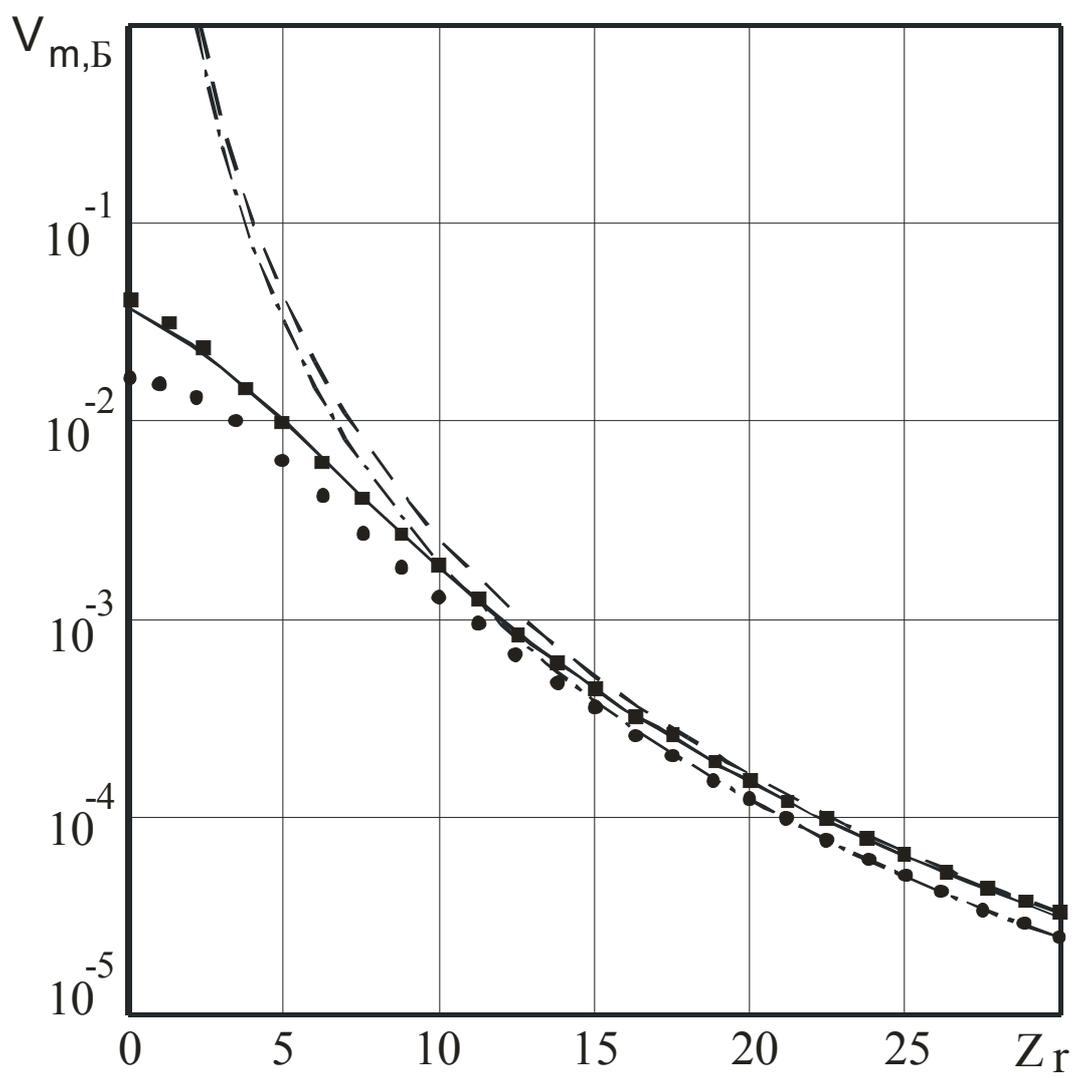


Рис. 4.12 Безусловные рассеяния оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса

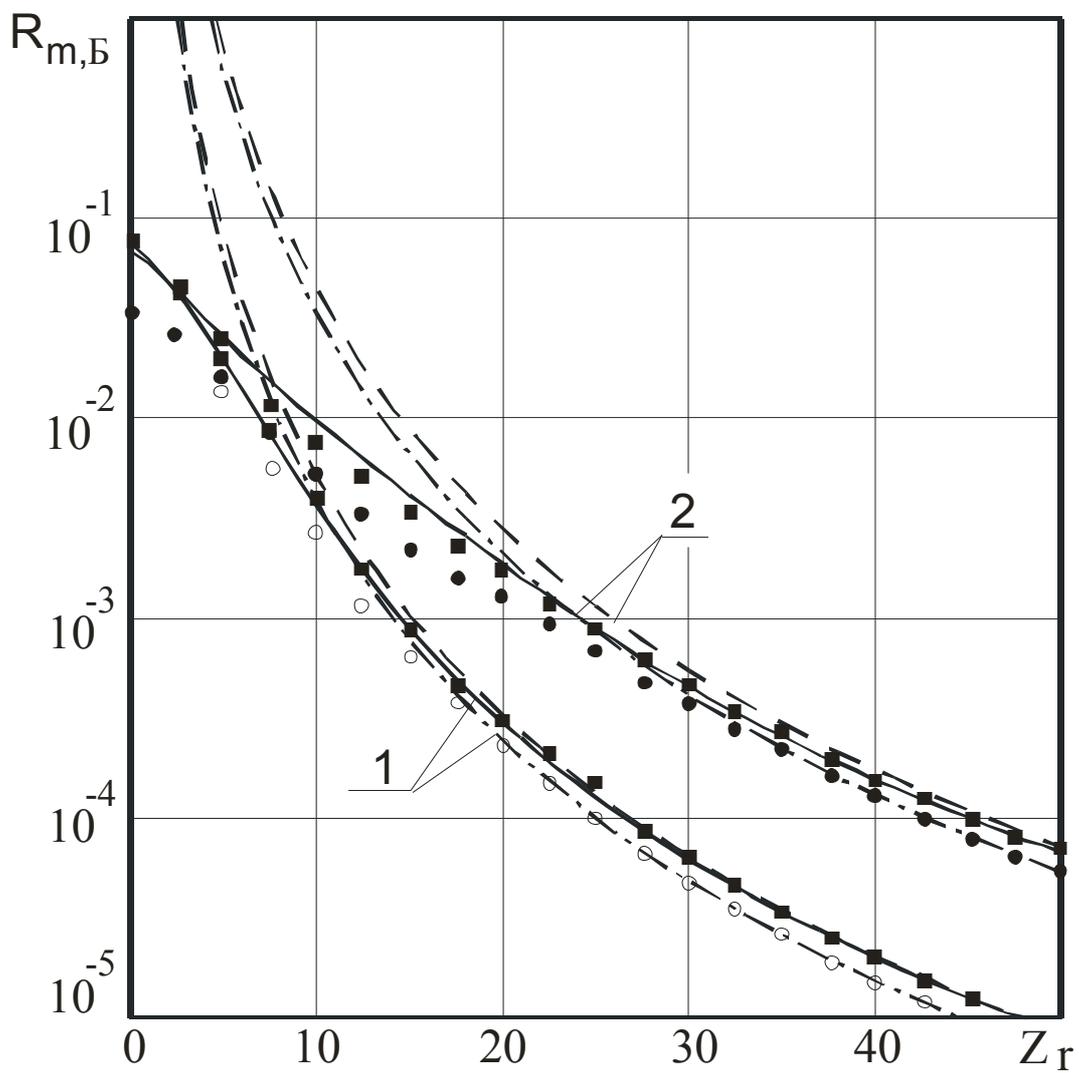


Рис. 4.13 Риск при использовании оценок моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной

Приложение. Исследование распределений величины и положения максимума марковского случайного процесса

При решении многих задач статистической радиофизики имеется необходимость исследования распределения величины и положения максимума случайного процесса [56,85,110]. Точное решение такой задачи можно получить для марковского процесса [9] на основе решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК). Например, при анализе алгоритмов приёма разрывных сигналов использование марковской или локально-марковской аппроксимации для решающей статистики позволяет получить асимптотические характеристики обнаружения и оценок параметров сигнала. Поэтому рассмотрим распределение величины и положения максимума марковского случайного процесса.

Пусть на отрезке $[T_1, T_2]$ задан марковский случайный процесс $Y(t)$, обладающий коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \begin{cases} a_1, & T_1 \leq t \leq t_0, \\ -a_2, & t_0 < t \leq T_2, \end{cases} \quad k_2 = b \quad (\text{П.1})$$

соответственно, где $a_i, i = 1, 2$ и b — положительные константы.

Найдем функцию распределения величины максимума случайного процесса $Y(t)$

$$F(H) = P\{\sup Y(t) < H\}, \quad t \in [T_1, T_2] \quad (\text{П.2})$$

и плотность вероятности положения его максимума

$$\hat{t} = \arg \sup Y(t), \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (\text{П.3})$$

Обозначим аналогично [9,59,110]

$$F_2(u, v, T) = P\left\{ \begin{array}{l} \sup_{T_1 \leq t \leq T} Y(t) < u, \\ \sup_{T \leq t \leq T_2} Y(t) < v \end{array} \right\} \quad (\text{П.4})$$

— двумерная функция распределения величины максимума процесса $Y(t)$.

Тогда функция распределения (П.2) равна $F(H) = F_2(H, H, T_2)$, а плотность вероятности случайной величины \hat{t} (П.3) определяется выражением [110]

$$W(T) = dF(T)/dT, \quad F(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial F(u, v, T)}{\partial u} \Big|_{v=u} \right] du. \quad (\text{П.5})$$

Следовательно, для вычисления искомого распределения (П.2) и плотности вероятности (П.5), необходимо найти функцию (П.4).

Введем вспомогательный случайный процесс

$$X(t) = \begin{cases} u - Y(t), & T_1 \leq t \leq T, \\ v - Y(t), & T < t \leq T_2. \end{cases} \quad (\text{П.6})$$

Используя $X(t)$, можем переписать $F_2(u, v, T)$ (П.4) как

$$F_2(u, v, T) = P\{X(t) > 0, t \in [T_1, T_2]\}. \quad (\text{П.7})$$

Функция (П.4) представляет собой вероятность недостижения процессом $X(t)$ границ $x=0$ и $x=\infty$. По определению (П.6) случайный процесс $X(t)$ является марковским с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \begin{cases} -a_1, & T_1 \leq t \leq t_0, \\ a_2, & t_0 < t \leq T_2, \end{cases} \quad k_2 = b. \quad (\text{П.8})$$

Следовательно, вычисление вероятности (П.7) сводится к задаче о достижении границ $x=0$ и $x=\infty$ марковским случайным процессом $X(t)$ на отрезке $[T_1, T_2]$ [17,54,55].

Искомую вероятность (П.7) можно выразить через плотность вероятности $W(x, t)$ реализаций процесса $X(t)$, ни разу не достигших границ $x=0$, $x=\infty$

$$F_2(u, v, T) = \int_0^{\infty} W(x, T_2) dx. \quad (\text{П.9})$$

Функция $W(x, t)$ является решением уравнения ФПК [9,54,55]

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [k_1(x, t)W(x, t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [k_2(x, t)W(x, t)] = 0 \quad (\text{П.10})$$

при начальном условии

$$W(x, t) = W(x, T_1) = W_Y(u - x, T_1) \quad (\text{П.11})$$

и граничных условиях

$$W(x=0, t) = W(x=\infty, t) = 0. \quad (\text{П.12})$$

Здесь $W_Y(y, T_1)$ и $W(x, T_1)$ — плотности вероятностей случайных величин $Y(T_1)$ и $X(T_1) = u - Y(T_1)$ соответственно.

Решение уравнения (П.10) будем искать отдельно для $T < t_0$ и $T > t_0$. Пусть сначала $T < t_0$. Найдем решения последовательно на отрезках $[T_1, T]$, $[T, t_0]$, $[t_0, T_2]$.

Нетрудно убедиться [34,40], что замена переменных

$$W(x, t) = U(x, t) \exp\left[\frac{k_1}{k_2}x - \frac{k_1^2}{2k_2}t\right], \quad U(x, t) = W(x, t) \exp\left[-\frac{k_1}{k_2}x + \frac{k_1^2}{2k_2}t\right] \quad (\text{П.13})$$

при постоянных коэффициентах сноса и диффузии $k_i = \text{const}$, $i = 1, 2$ приводит уравнение (П.10) к каноническому виду

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}. \quad (\text{П.14})$$

Согласно (П.13), граничные условия для полученного уравнения аналогичны граничным условиям (П.12), а именно

$$U(x=0,t) = U(x=\infty,t) = 0. \quad (\text{П.15})$$

Решение уравнения (П.14) известно [34]:

$$U(x,t) = \int_0^\infty W(\xi, T_1) \exp\left[a_1 \xi / b + a_1^2 T_1 / 2b\right] \chi[x, \xi, b(t - T_1)] d\xi / \sqrt{2\pi b(t - T_1)}. \quad (\text{П.16})$$

Здесь использованы коэффициенты сноса и диффузии (П.8) на отрезке $[T_1, T]$ и обозначено

$$\chi(x, y, z) = \left\{ \exp\left[-(x - y)^2 / 2z\right] - \exp\left[-(x + y)^2 / 2z\right] \right\}.$$

С помощью преобразования (П.13) переходим к плотности вероятности $W(x, t)$ — получаем решение уравнения ФПК для $t \in [T_1, T]$

$$W(x, t) = \frac{\exp\left[-a_1 x / b - a_1^2 (t - T_1) / 2b\right]}{\sqrt{2\pi b(t - T_1)}} \int_0^\infty W(\xi, T_1) \exp\left[a_1 \xi / b\right] \chi[x, \xi, b(t - T_1)] d\xi. \quad (\text{П.17})$$

Выражение (П.17) при $t = T$ представляет собой начальное условие для следующего отрезка $[T, t_0]$

$$W(x, T) = \exp\left[-a_1(x + u - v) / b - a_1^2(t - T_1) / 2b\right] \int_0^\infty W(\xi, T_1) \exp\left[a_1 \xi / b\right] \times \quad (\text{П.18}) \\ \times \chi[x + u - v, \xi, b(t - T_1)] d\xi / \sqrt{2\pi b(t - T_1)}.$$

Здесь учтено, что по определению (П.6) в точке $t = T$ случайный процесс $X(t)$ претерпевает скачок величиной $v - u$, поэтому $W(x, T + 0) = W(x + u - v, T - 0)$. Опять с помощью преобразования (П.13) приводим уравнение (П.10) к каноническому виду (П.14), решение которого на отрезке $[T, t_0]$ запишем аналогично (П.16)

$$U(x, t) = \int_0^\infty W(\xi_1, T) \exp\left[a_1 \xi_1 / b + a_1^2 T / 2b\right] \chi[x, \xi_1, b(t - T)] d\xi_1 / \sqrt{2\pi b(t - T)}. \quad (\text{П.19})$$

Подставляем начальное условие (П.18) в решение (П.19) и переходим с помощью замены (П.14) к плотности вероятности $W(x, t)$, получаем решение уравнения ФПК для $t \in [T, t_0]$

$$W(x, t) = \frac{\exp\left[-a_1(u - v + x)/b - a_1^2(t - T_1)/2b\right]}{2\pi b_1 \sqrt{(t - T)(T - T_1)}} \int_0^\infty \int_0^\infty W(\xi, T_1) \exp[a_1 \xi / b] \times \quad (\text{П.20})$$

$$\times \chi[\xi_1 + u - v, \xi, b(t - T_1)] \chi[x, \xi_1, b(t_0 - T)] d\xi d\xi_1.$$

При $t = t_0$ выражение (П.20) представляет собой начальное условие для следующего отрезка $[t_0, T_2]$. Учитывая, что коэффициент сноса (П.8) в точке $t = t_0$ изменяется, записываем аналогично (П.16) и (П.19) решение уравнения (П.14) на последнем отрезке $[t_0, T_2]$

$$U(x, t) = \int_0^\infty W(\xi_2, t_0) \exp\left[-a_2 \xi_2 / b + a_2^2 t_0 / 2b\right] \chi[x, \xi_2, b(t - t_0)] d\xi_2 \sqrt{2\pi b(t - t_0)} \quad (\text{П.21})$$

Подставляем плотность вероятности (П.20) при $t = t_0$ в решение (П.21), получаем с учетом (П.13):

$$W(x, t) = \frac{\exp\left[-a_1(u - v)/b + a_2 x / b - a_1^2(t_0 - T_1)/2b - a_2^2(t - t_0)/2b\right]}{2\pi b \sqrt{2\pi b(t_0 - T)(T - T_1)(t - t_0)}} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty W(\xi, T_1) \times \quad (\text{П.22})$$

$$\times \exp\left[a_1 \xi / b - (a_1 + a_2) \xi_2 / b\right] \chi[\xi_1 + u - v, \xi, b(T - T_1)] \times$$

$$\times \chi[\xi_2, \xi_1, b(t_0 - T)] \chi[x, \xi_2, b(t - t_0)] d\xi d\xi_1 d\xi_2.$$

Формула (П.22) есть решение уравнения ФПК для $t \in [t_0, T_2]$.

Пусть теперь $T > t_0$. Найдем решения последовательно на отрезках $[T_1, t_0]$, $[t_0, T]$, $[T, T_2]$.

Решение на первом отрезке совпадает с (П.17). При $t = t_0$ выражение (П.17) представляет собой начальное условие для следующего отрезка $[t_0, T]$. Решение уравнения (П.14) на этом отрезке запишем аналогично (П.16)

$$U(x, t) = \int_0^\infty W(\xi_1, t_0) \exp\left[-a_2 \xi_1 / b + a_2^2 t_0 / 2b\right] \chi[x, \xi_1, b(t - t_0)] d\xi_1 \sqrt{2\pi b(t - t_0)}. \quad (\text{П.23})$$

Подставляем (П.17) при $t = t_0$ в решение (П.23) и записываем выражение для плотности вероятности при $t \in [t_0, T]$

$$W(x,t) = \frac{\exp\left[a_2x/b - a_1^2(t_0 - T_1)/2b - a_2^2(t - t_0)/2b\right]}{2\pi b\sqrt{(t - t_0)(t_0 - T_1)}} \int_0^\infty \int_0^\infty W(\xi, T_1) \times \\ \times \exp\left[a_1\xi/b - (a_1 + a_2)\xi_1/b\right] \chi\left[\xi, \xi_1, b(t_0 - T)\right] \chi\left[x, \xi_1, b(t - t_0)\right] d\xi d\xi_1. \quad (\text{П.24})$$

По определению (П.6) при $t = T$ случайный процесс $X(t)$ претерпевает скачок величиной $v - u$, поэтому начальное условие для отрезка $[T, T_2]$ равно $W(x + u - v, T)$, где $W(x, t)$ — функция (П.24). И, наконец, решение на последнем отрезке $[T, T_2]$ запишем аналогично (П.23)

$$U(x,t) = \int_0^\infty W(\xi_2 + u - v, T) \exp\left[-a_2\xi_2/b + a_2^2T/2b\right] \chi\left[x, \xi_2, b(t - T)\right] d\xi_2 / \sqrt{2\pi b(t - T)}. \quad (\text{П.25})$$

Подставляем плотность вероятности (П.24) в решение (П.25) получаем

$$W(x,t) = \frac{\exp\left[a_2(x + u - v)/b - a_1^2(t_0 - T_1)/2b - a_2^2(t - t_0)/2b\right]}{2\pi b\sqrt{2\pi b(T - t_0)(t_0 - T_1)(t - T)}} \int_0^\infty \int_0^\infty W(\xi, T_1) \times \\ \times \exp\left[a_1\xi/b - (a_1 + a_2)\xi_1/b\right] \chi\left[\xi_2 + u - v, \xi_1, b(T - t_0)\right] \times \\ \times \chi\left[\xi_1, \xi, b(t_0 - T_1)\right] \chi\left[x, \xi_2, b(t - T)\right] d\xi d\xi_1 d\xi_2. \quad (\text{П.26})$$

Формула (П.26) есть решение уравнения ФПК для $t \in [T, T_2]$.

Подставим далее выражения (П.22) и (П.26) в (П.9), получим искомую двумерную функцию распределения максимума случайного процесса $Y(t)$

$$F(u, v, T) = \frac{\exp\left[-a_1(u - v)/b - a_1^2(t_0 - T_1)/2b\right]}{2\pi b\sqrt{(t_0 - T)(T - T_1)}} \int_0^\infty \int_0^\infty W_Y(u - \xi, T_1) \exp\left[-a_1(\xi_2 - \xi)/b\right] \times \\ \times \chi\left[\xi_1 + u - v, \xi, b(T - T_1)\right] \chi\left[\xi_2, \xi_1, b(t_0 - T)\right] \varphi\left[2a_2/\sqrt{b}, T_2 - t_0, 2a_2\xi_2/b\right] d\xi d\xi_1 d\xi_2, \quad (\text{П.27a})$$

$T < t_0,$

$$F_2(u, v, T) = \frac{\exp\left[a_2(u - v)/b - a_1^2(t_0 - T_1)/2b - a_2^2(T - t_0)/2b\right]}{2\pi b\sqrt{(T - t_0)(t_0 - T_1)}} \int_0^\infty \int_0^\infty W_Y(u - \xi, T_1) \times \\ \times \exp\left[a_1\xi/b + a_2\xi_2/b - (a_1 + a_2)\xi_1/b\right] \chi\left[\xi_2 + u - v, \xi_1, b(T_2 - t_0)\right] \times \\ \times \chi\left[\xi_1, \xi, b(t_0 - T_1)\right] \varphi\left[2a_2/\sqrt{b}, T_2 - T, 2a_2\xi_2/b\right] d\xi d\xi_1 d\xi_2, \quad (\text{П.27б})$$

$T > t_0,$

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = \Phi\left(\frac{y_1}{2}\sqrt{y_2} + \frac{y_3}{y_1\sqrt{y_2}}\right) - \exp(-y_3)\Phi\left(\frac{y_1}{2}\sqrt{y_2} - \frac{y_3}{y_1\sqrt{y_2}}\right). \quad (\text{П.28})$$

Одномерная функция распределения (П.2) может быть легко получена из (П.27) $F(H) = F_2(H, H, T_2)$, следовательно [11]

$$F(H) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W_Y(H - \xi, T_1) \chi[\xi_1, \xi, b(t_0 - T_1)] \varphi\left[2a_2/\sqrt{b}, T_2 - t_0, 2a_2\xi_1/b\right] \times \exp\left[a_1(\xi - \xi_1)/b\right] d\xi d\xi_1 \exp\left[-a_1^2(t_0 - T_1)/2b\right] / \sqrt{2\pi b(t_0 - T_1)}. \quad (\text{П.29})$$

Согласно (П.27) и (П.5), плотность вероятности положения максимума процесса $Y(t)$ представима в виде

$$W(T) = \begin{cases} d_1^2 \Psi(d_1^2(t_0 - T), z_1^2, z_2^2, 1/R), & T \leq t_0, \\ d_2^2 \Psi(d_2^2(T - t_0), z_2^2, z_1^2, R), & T > t_0, \end{cases} \quad (\text{П.30})$$

где обозначено $d_1^2 = 2a_1^2/b$, $d_2^2 = 2a_2^2/b$, $R = a_1/a_2$, $z_1^2 = d_1^2(t_0 - T_1)$, $z_2^2 = d_2^2(T_2 - t_0)$,

$$\Psi(y, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}y^{3/2}} \left\{ \frac{\exp[-(y_1 - y)/4]}{\sqrt{\pi[y_1 - y]}} + \Phi\left(\sqrt{\frac{y_1 - y}{2}}\right) \right\} \times \int_0^{\infty} x \exp\left\{-\frac{(x + y)^2}{4y}\right\} \left[\Phi\left(\frac{y_2 + y_3x}{\sqrt{2y_2}}\right) - \exp(-y_3x)\Phi\left(\frac{y_2 - y_3x}{\sqrt{2y_2}}\right) \right] dx. \quad (\text{П.31})$$

Рассмотрим свойства плотности вероятности (П.30). Математическое ожидание случайной величины $\hat{t} - t_0$ равно

$$b = \langle \hat{t} - t_0 \rangle = \int_{T_1}^{T_2} TW(T) dT = F_b(z_2^2, z_1^2, R) / d_2^2 - F_b(z_1^2, z_2^2, 1/R) / d_1^2, \quad (\text{П.32})$$

где обозначено

$$F_b(y_1, y_2, y_3) = \int_0^{y_1} x \Psi(x, y_1, y_2, y_3) dx = \int_0^{y_1} \frac{1}{2\sqrt{\pi}x} \left\{ \frac{\exp[-(y_1 - x)/4]}{\sqrt{\pi[y_1 - x]}} + \Phi\left(\sqrt{\frac{y_1 - x}{2}}\right) \right\} \times \int_0^{\infty} \xi \exp\left\{-\frac{(\xi + x)^2}{4x}\right\} \left[\Phi\left(\frac{y_2 + y_3\xi}{\sqrt{2y_2}}\right) - \exp(-y_3\xi)\Phi\left(\frac{y_2 - y_3\xi}{\sqrt{2y_2}}\right) \right] d\xi dx. \quad (\text{П.33})$$

Величина $V = \left\langle (\hat{t} - t_0)^2 \right\rangle$, характеризующая среднеквадратическое отклонение положения максимума процесса $Y(t)$ от величины t_0 равна

$$V = \int_{T_1}^{T_2} (T - t_0)^2 W(T) dT = F_V(z_2^2, z_1^2, R) / d_2^4 + F_V(z_1^2, z_2^2, 1/R) / d_1^4, \quad (\text{П.34})$$

где обозначено

$$F_V(y_1, y_2, y_3) = \int_0^{y_1} x^2 \Psi(x, y_1, y_2, y_3) dx = \int_0^{y_1} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\exp[-(y_1 - x)/4]}{\sqrt{\pi[y_1 - x]}} + \Phi\left(\sqrt{\frac{y_1 - x}{2}}\right) \right\} \times \\ \times \left\{ \int_0^\infty \xi \exp\left(-\frac{(\xi + x)^2}{4x}\right) \left[\Phi\left(\frac{y_2 + y_3 \xi}{\sqrt{2y_2}}\right) - \exp(-y_3 \xi) \Phi\left(\frac{y_2 - y_3 \xi}{\sqrt{2y_2}}\right) \right] d\xi \right\} dx. \quad (\text{П.35})$$

Рассмотрим асимптотическое поведение плотности вероятности (П.30) и моментов (П.32) и (П.34). Для этого вместо \hat{t} будем рассматривать случайную величину

$$\hat{\mu} = \begin{cases} d_1^2 (\hat{t} - t_0), & \hat{t} \leq t_0, \\ d_2^2 (\hat{t} - t_0), & \hat{t} > t_0, \end{cases}$$

плотность вероятности которой имеет вид

$$W(\mu) = \begin{cases} \Psi(|\mu|, z_1^2, z_2^2, 1/R), & \mu \leq 0, \\ \Psi(|\mu|, z_2^2, z_1^2, R), & \mu > 0. \end{cases} \quad (\text{П.36})$$

Заметим, что величины z_1 и z_2 могут интерпретироваться как отношения квадрата регулярной составляющей случайного процесса $Y(t)$ к дисперсии случайной составляющей, то есть как отношение сигнал/шум. При $z_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$, второй и третий аргументы функции (П.31) стремятся к бесконечности, а сама функция приобретает вид

$$W_0(x, y) = \Psi(x, \infty, \infty, y) = \\ = (2y + 1) \Phi\left\{-\sqrt{(x/2)}\right\} \exp\{y(y+1)(x)\} - \Phi\left\{-\sqrt{(x/2)}\right\} = \quad (\text{П.37}) \\ = 1 - \Phi\left\{\sqrt{(x/2)}\right\} + (2y + 1) \exp\{y(y+1)(x)\} \left[1 - \Phi\left\{(2y+1)\sqrt{(x/2)}\right\}\right].$$

Пользуясь асимптотическим представлением (П.37) для функции (П.31), запишем асимптотическое представление плотности вероятности (П.36) как

$$W(\mu) = \begin{cases} W_0(|\mu|, 1/R), & \mu \leq 0, \\ W_0(|\mu|, R), & \mu > 0. \end{cases} \quad (\text{П.38})$$

С помощью функции (П.38) нетрудно получить величины, характеризующие отклонение положения максимума процесса $Y(t)$ от точки t_0 , а именно

$$b = \langle \hat{t} - t_0 \rangle = \frac{d_1^2 R(R+2) - d_2^2(2R+1)}{d_1^2 d_2^2 (R+1)^2}, \quad (\text{П.39})$$

$$V = \langle (\hat{t} - t_0)^2 \rangle = 2 \frac{d_1^4 R(2R^2 + 6R + 5) + d_2^4(5R^2 + 6R + 2)}{d_1^4 d_2^4 (R+1)^3}. \quad (\text{П.40})$$

Заметим, что при $a_1 = a_2$ выражения (П.39), (П.40) приобретают вид

$$b = 0, \quad V = \frac{1}{d^4} \langle \hat{\mu}^2 \rangle = \frac{13}{2d^4}, \quad d = d_1 = d_2. \quad (\text{П.41})$$

Заключение

Монография посвящена вопросам теоретического и экспериментального исследования эффективности статистического анализа квазидетерминированных сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения, наблюдаемых на фоне гауссовских искажений в условиях параметрической априорной неопределенности.

В работе получены следующие основные результаты.

1. Априорное незнание формы сигнала и моментов его появления и исчезновения приводит к существенному снижению эффективности обнаружения. Наиболее простым в смысле технической реализации является алгоритм обнаружения, синтезированный для сигнала с некоторыми ожидаемыми моментами появления и исчезновения. Однако, вероятности ошибок такого алгоритма могут более, чем на порядок превышать аналогичные вероятности при обнаружении сигнала с априори известными моментами появления и исчезновения. Более неблагоприятными являются расстройки моментов появления и исчезновения, при которых длительность опорного сигнала меньше длительности принимаемого, чем наоборот. Кроме этого, в большей степени влияние на эффективность обнаружения оказывает расстройка того момента, в котором скачок сигнала больше.

2. Адаптация казиправдоподобного приёмника по неизвестным моментам появления и исчезновения позволяет снизить вероятности ошибок обнаружения. Решающая статистика на выходе такого приёмника допускает представление в виде суммы двух асимптотически марковских случайных процессов, один из которых зависит только от момента появления, другой — от момента исчезновения. Это дает возможность построить приёмник по достаточно простой двухканальной схеме, а также использовать аппарат теории марковских процессов для расчета асимптотических характеристик обнаружения.

3. Вероятности ошибок обнаружения приёмником максимального правдоподобия асимптотически не зависят от формы сигнала и способа разделения решающей статистики на сумму двух случайных процессов. Они определяются величинами скачков сигнала в моменты появления и исчезновения и энергией принимаемого сигнала. Если известны априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала в принятой реализации и плотность вероятности моментов появления и исчезновения, то целесообразно использовать максимально правдоподобные алгоритмы обнаружения с оптимизированным по критерию минимума безусловной средней вероятности ошибки порогом.

4. Применительно к импульсу произвольной формы средние вероятности ошибок обнаружения увеличиваются с ростом отличия формы сигнала от прямоугольной.

5. При наличии полной априорной информации о сигнале и помехе можно использовать байесовский алгоритм обнаружения, блок схема которого в общем случае многоканальная. Если априорная плотность вероятности моментов появления и исчезновения представляет собой произведение плотностей вероятностей момента появления и момента исчезновения соответственно, то байесовский обнаружитель можно реализовать по двухканальной схеме. Исследование эффективности байесовского алгоритма обнаружения аналитическими методами наталкивается на существенные математические трудности. Как показывает статистическое моделирование на ЭВМ, безусловная средняя вероятности ошибки байесовского обнаружителя практически совпадает с безусловной средней вероятностью ошибки максимально правдоподобного алгоритма обнаружения с оптимизированным порогом.

6. Для совместных квазиправдоподобных, максимально правдоподобных и байесовских оценок моментов появления и исчезновения сигнала произвольной формы удастся построить достаточно простые двухканальные схемы измерителей.

7. Оценки моментов появления и исчезновения сигнала статистически независимы. Характеристики квазиправдоподобных оценок и оценок максимального правдоподобия асимптотически не зависят от формы принимаемого сигнала, а зависят лишь от величин скачков сигналов в моменты их появления и исчезновения и его энергии. Наибольшая эффективность квазиправдоподобных оценок достигается при равенстве скачков принятого и ожидаемого сигналов в моменты появления и исчезновения.

8. При использовании квазиправдоподобной оценки момента исчезновения и неточно известном моменте появления сигнала эффективность оценки момента исчезновения асимптотически не зависит от наличия у сигнала неизвестного момента появления. Поэтому можно использовать любой ожидаемый момент появления из области возможных значений.

9. Оценки максимального правдоподобия времени прихода и длительности сигнала связаны нелинейной статистической зависимостью. С ростом отклонения формы сигнала от прямоугольной увеличиваются рассеяния оценок времени прихода и длительности и усиливается статистическая зависимость между ними.

10. Результаты моделирования подтверждают работоспособность синтезированных алгоритмов. Найденные асимптотические выражения для характеристик оценок моментов появления и исчезновения, а также времени прихода и длительности в достаточно широком диапазоне отношений сиг-

нал/шум удовлетворительно описывают данные, полученные в результате моделирования. Наибольшей точностью обладает байесовский алгоритм оценивания моментов появления и исчезновения.

11. Точность оценок максимального правдоподобия регулярных параметров сигнала асимптотически (при больших отношениях сигнал/шум) инвариантна к незнанию момента его исчезновения. Эффективность оценки максимального правдоподобия момента исчезновения сигнала асимптотически инвариантна к незнанию произвольного числа регулярных параметров.

12. При анализе оценок максимального правдоподобия моментов появления и исчезновения и неизвестных регулярных параметрах показана возможность аппроксимации решающей статистики суммой статистически независимых локально-марковских случайных процессов. Это позволяет использовать метод локально-марковской аппроксимации для анализа оценок моментов появления и исчезновения.

13. Точность оценок максимального правдоподобия регулярных параметров сигнала асимптотически инвариантна к наличию у сигнала неизвестных моментов появления и исчезновения. Эффективность оценок МП моментов появления и исчезновения в свою очередь асимптотически инвариантна к наличию у сигнала произвольного количества неизвестных регулярных параметров.

14. Относительная погрешность асимптотических выражений для корреляционной матрицы оценок регулярных параметров при известных моментах появления и исчезновения имеет более высокий порядок малости, чем при неизвестных.

15. На примере совместных оценок максимального правдоподобия амплитуды, наклона и моментов появления и исчезновения прямоугольного импульса со скошенной вершиной методом статистического моделирования на ЭВМ показана работоспособность синтезированного алгоритма и найдены границы применимости асимптотических выражений для характеристик оценок.

16. Методы статистического моделирования на ЭВМ позволяют проверить работоспособность синтезированных алгоритмов обнаружения и оценки моментов появления и исчезновения сигнала и установить границы применимости асимптотических выражений для характеристик обнаружения и оценивания.

17. Найденные в работе асимптотические выражения для характеристик обнаружения и оценок в достаточно широком диапазоне отношений сигнал/шум удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные зависимости.

18. Безусловная средняя вероятность ошибки байесовского обнаружения при равномерной априорной плотности вероятности моментов появления и исчезновения практически совпадает с аналогичной вероятностью при использовании максимально правдоподобного обнаружителя с оптимизированным порогом. Это позволяет рекомендовать полученные асимптотические выражения для характеристик максимально правдоподобного обнаружителя для приближенного расчета характеристик байесовского обнаружителя. Кроме того, при наличии полной априорной информации о сигнале и помехе целесообразно использовать более простой максимально правдоподобный алгоритм обнаружения с оптимизированным порогом, нежели байесовский при одинаковой их точности.

19. Эффективность оценок моментов появления и исчезновения сигнала существенным образом зависит от величины скачка сигнала в моменты его появления и исчезновения. С увеличением величины скачка возрастает точность оценки соответствующего момента появления или исчезновения.

Библиографический список

1. Амиантов, И.Н. Избранные вопросы статистической теории связи / И.Н. Амиантов. – М. : Сов. радио, 1971. – 416 с.
2. Ахманов, С.А. Введение в статистическую радиофизику и оптику / С.А. Ахманов, Ю.С. Дьяков, А.С. Чиркин. – М. : Наука, 1981. – 640 с.
3. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В.В. Быков. – М. : Сов. радио, 1971. – 326 с.
4. Ван Трис, Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции : в 4 т. : пер. с англ. / Г. Ван Трис. – М. : Сов. радио, 1972. – Т.1. – 744 с. ; 1977. – Т.3. – 664 с.
5. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М. : Наука, 1998. – 575 с.
6. Вентцель, А.Д. Курс теории случайных процессов / А.Д. Вентцель. – М. : Наука, 1975. – 320 с.
7. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и её инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Наука, 1988. – 480 с.
8. Вопросы статистической теории радиолокации : в 2 т. / П.А. Бакут [и др.] ; под ред. Г.П. Тартаковского. – М. : Сов радио, 1963. – Т.1. – 426 с., 1964. – Т.2. – 1080 с.
9. Галун, С.А. Применение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для анализа обработки разрывных сигналов / С.А. Галун // Прикладная математика и механика. – Саратов, СГУ, 1983. – С.75–87.
10. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей : учебник для университетов / Б.В. Гнеденко. – М. : Наука, 1969. – 400 с.
11. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.
12. Грязнов, М.И. Измерение параметров импульсов / М.И. Грязнов, М.Л. Гуревич, Ю.А. Рябинин. – М. : Радио и связь, 1991. – 216 с.
13. Дуб, Дж.Л. Вероятностные процессы / Дж.Л. Дуб. – М. : Изд-во иностр. лит., 1956. – 605 с.
14. Зюльков, А.В. Вероятностные характеристики величины и положения абсолютного максимума реализации стационарного гауссовского случайного процесса / А.В. Зюльков // Сборник докладов XXII МНТК Радиолокация, навигация, связь. – Воронеж, 2016. – С. 245–249.
15. Ибрагимов, И.А. Асимптотическая теория оценивания / И.А. Ибрагимов, Р.З. Хасьминский. – М. : Наука, 1979. – 528 с.
16. Исследование объектов с помощью пикосекундных импульсов / [под ред. Глебовича]. – М. : Радио и связь, 1984. – 250 с.

17. Казаков, В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи / В.А. Казаков. – М. : Сов. радио, 1973. – 232 с.
18. Карпов, Р.Г. Преобразование и математическая обработка широко-импульсных сигналов / Р.Г. Крапов, Н.Г. Карпов. – М. : Машиностроение, 1977. – 166 с.
19. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1968. – 720 с.
20. Корчагин, Ю.Э. Обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения на фоне белого шума / Ю.Э. Корчагин // Синтез, передача и приём сигналов управления и связи. – Воронеж : ВГТУ, 1997. – С.81–89.
21. Корчагин, Ю.Э. Пороговый последовательный алгоритм обнаружения сигнала с неизвестной длительностью / Ю.Э. Корчагин // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2003. – Т.6, № 2. – С.51–57.
22. Корчагин, Ю.Э. Однопороговый последовательный алгоритм обнаружения сигнала с неизвестными амплитудой и длительностью / Ю.Э. Корчагин // Известия вузов. Радиофизика. – 2012 – Т.55, № 12. – С. 800–808.
23. Корчагин, Ю.Э. Оценка длительности радиоимпульса с неизвестной фазой / Ю.Э. Корчагин // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2013. – Т.56, № 7. – С. 29–37.
24. Корчагин, Ю.Э. Оценки длительности пропадающего сигнала с неизвестной амплитудой / Ю.Э. Корчагин // Нелинейный мир. – 2013. – Т.11, № 8. – С. 566–576.
25. Корчагин, Ю.Э. Оценка длительности радиосигнала с неизвестными амплитудой и фазой / Ю.Э. Корчагин // Радиотехника. – 2013. – № 9. – С. 11–19.
26. Корчагин, Ю.Э. Сравнение характеристик алгоритмов обнаружения сверхширокополосных сигналов / Ю.Э. Корчагин, К.Д. Титов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2016. – №11. – С. 193–199.
27. Крамер, Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М. : Мир, 1975. – 648 с.
28. Крамер, Г. Стационарные случайные процессы / Г. Крамер, М. Лидбеттер. – М. : Мир, 1969. – 398 с.
29. Куликов, Е.И. Методы измерения случайных процессов / Е.И. Куликов. – М. : Радио и связь, 1986. – 272 с.
30. Куликов, Е.И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е.И. Куликов, А.П. Трифионов. – М. : Сов. радио, 1978. – 296 с.

31. Левин, Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – М. : Сов. Радио, 1975. – Кн. 2. – 1975. – 392 с. ; Кн. 3. 1976. – 286 с.
32. Левин, Б.Р. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления / Б.Р. Левин, В. Шварц. – М. : Радио и связь, 1985. – 312 с.
33. Мальцев, А.А. Оптимальное обнаружение сигналов со случайными скачкообразными изменениями параметров / А.А. Мальцев, А.М. Силаев // Радиотехника и электроника. – 1987. – Т.32, № 6. – С. 1241–125.
34. Мальцев, А.А. Оптимальное оценивание моментов скачкообразных изменений параметров сигналов / А.А. Мальцев, А.М. Силаев // Радиотехника и электроника. – 1989. – Т. 34, № 5. – С.1024–1033.
35. Миддлтон, Д. Введение в статистическую теорию связи в 2-х т.: пер. с англ. / Д. Миддлтон. – М. : Сов. радио, 1962. Т.2. – 832 с.
36. Нечаев, Е.П. Эффективность совместных оценок длительности и доплеровского сдвига частоты сигнала / Е.П. Нечаев, Ю.Э. Корчагин // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 1996. – Т.39, № 1. – С. 45–49.
37. Нечаев, Е.П. Эффективность оценок параметров фазовой модуляции при нарушении условий регулярности / Е.П. Нечаев, Ю.Э. Корчагин // Радиотехника и электроника. – 1996. – Т.41, № 10. – С.1222–1224.
38. Перов, В.П. Статистический синтез импульсных систем / В.П. Перов. – М. : Сов. радио, 1959. – 454 с.
39. Пугачев, В.С. Стохастические дифференциальные системы / В.С. Пугачев, И.Н. Сеницын – М. : Наука, 1985. – 559 с.
40. Радиолокационные устройства (теория и принципы построения) / [под ред. В.В. Григорина-Рябова]. – М. : Сов. радио, 1970. – 680 с.
41. Репин, В.Г. Обнаружение сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / В.Г. Репин // Проблемы передачи информации. – 1991. – Т.27, Вып 1. – С. 61–72.
42. Репин, В.Г. Статистический синтез при априорной неопределённости и адаптация информационных систем / В.Г. Репин, Г.П. Тартаковский. – М. : Сов. радио, 1977. – 432 с.
43. Романов, И.М. Введение в теорию проектирования асинхронных импульсных радиосистем / И.М. Романов, Т.К. Нежметдинов, А.В. Кобчиков, И.С. Нугманов. – М. : Сов.радио, 1971. – 192 с.
44. Рытов, С.М. Введение в статистическую радиофизику. Случайные процессы / С.М. Рытов. – М. : Наука, 1976. – Т.1. – 496 с.
45. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М. : Наука, 1965. – Т.2. – 656 с.
46. Сосулин, Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов / Ю.Г. Сосулин. – М. : Сов. радио, 1978. – 320 с.

47. Справочник по специальным функциям/ [под ред. М. Абрамовица, И. Стиган] – М. : Наука, 1979. – 832 с.
48. Стратонович, Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р.Л. Стратонович. – М. : Сов. радио, 1961. – 560 с.
49. Тартаковский, А.Г. Обнаружение сигналов со случайными моментами появления и исчезновения / А.Г. Тартаковский // Проблемы передачи информации. – 1988. – Т.24, Вып. 2. – С. 39–50.
50. Терентьев, А.С. Распределение вероятностей временного положения абсолютного максимума на выходе согласованного фильтра / А.С. Терентьев // Радиотехника и электроника. – 1968. – Т.13, № 4. – С.652–657.
51. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 738 с.
52. Тихонов, В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1982. – 624 с.
53. Тихонов, В.И. Оптимальный приём сигналов / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
54. Тихонов, В.И. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный приём сигналов / В.И. Тихонов, Н.К. Кульман. – М. : Сов. радио, 1975. – 704 с.
55. Тихонов, В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миرون. – М. : Радио и связь, 1977. – 488 с.
56. Тихонов, В.И. Выбросы траекторий случайных процессов / В.И. Тихонов, В.И. Хименко. – М. : Наука, 1987. – 304 с.
57. Трифонов, А.П. Асимптотические характеристики оптимального обнаружения квазидетерминированного сигнала на фоне гауссовской помехи / А.П. Трифонов // Изв АН СССР. Техн. Кибернетика. – 1971. – № 4. – С.180–183.
58. Трифонов, А.П. Приём сигнала с неизвестной длительностью на фоне белого шума / А. П. Трифонов // Радиотехника и электроника. – 1977. – Т.22, № 1. – С.90–98.
59. Трифонов, А.П. Приём разрывного квазидетерминированного сигнала на фоне гауссовской помехи / А.П. Трифонов // Изв АН СССР. Техн. кибернетика. – 1978. – № 4. – С.146–153.
60. Трифонов А.П. Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами / А.П. Трифонов // Теория обнаружения сигналов. – М. : Радио и связь, 1984. – С.12–89.
61. Трифонов, А.П. Разрывные модели сигналов и оценка их параметров / А.П. Трифонов // Прикладная теория случайных процессов и полей. – Ульяновск : УлГТУ, 1995. – С.164–214.
62. Трифонов, А.П. Сверхширокополосное обнаружение флуктуирующей цели с неизвестной скоростью при зондировании разрывными им-

пульсами / А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова, Ю.Э. Корчагин // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2004. – Т.47, № 10. – С. 3–13.

63. Трифонов, А.П. Однопороговый последовательный алгоритм приёма сигнала с неизвестной длительностью / А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова, Ю.Э. Корчагин // Известия вузов. Радиофизика. – 2006. – Т.49, № 6. – С. 525–536.

64. Трифонов, А.П. Квазиправдоподобная оценка времени прихода сверхширокополосного сигнала неизвестной формы при воздействии узкополосных помех / А.П. Трифонов, М.Б. Беспалова, П.А. Трифонов, И.В. Гушин // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2014. – Т.57, №10. – С.34–40.

65. Трифонов, А.П. Приём сигнала с неизвестной амплитудой и длительностью на фоне белого шума / А.П. Трифонов, В.К. Бутейко // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 1981. – Т. 27, № 8. – С. 28–34.

66. Трифонов, А.П. Совместная оценка двух параметров разрывного сигнала на фоне белог шума / А.П. Трифонов, В.К. Бутейко // Радиотехника и электроника. – 1989. – Т.34, № 11. – С.2323–2330.

67. Трифонов, А.П. Характеристики совместных оценок параметров сигнала при частичном нарушении условий регулярности / А.П. Трифонов, В.К. Бутейко // Радиотехника и электроника. – 1991. – Т.36, № 2. – С.319–327.

68. Трифонов, А.П. Теоретическое и экспериментальное исследования оценок параметров случайного сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, А.В. Захаров // Радиотехника и электроника. – 1996. – Т.41, № 8. – С.972–978.

69. Трифонов, А.П. Характеристики квазиправдоподобной оценки площади изображения при наличии пространственного шума / А.П. Трифонов, К.А. Зимовец, Ю.Э. Корчагин // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2013. – Т.56, № 3. – С.52–59.

70. Трифонов, А.П. Эффективность оптимального совместного обнаружения и оценки площади изображений объектов на фоне пространственного шума / А.П. Трифонов, К.А. Зимовец, Ю.Э. Корчагин // Автометрия. – 2013. – Т.49, № 3. – С.10–17.

71. Трифонов, А.П. Обнаружение прямоугольного импульса с неизвестными моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Синтез, передача и приём сигналов управления и связи. – Воронеж: ВГТУ, 1996. – С.58–65.

72. Трифонов, А.П. Оптимальный приём прямоугольного импульса с неизвестными моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Известия вузов. Радиофизика. – 2000. – Т.43, № 3. – С.271–282.

73. Трифонов, А.П. Совместная оценка параметров сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2000. – Т.43, № 5. – С. 34–43.

74. Трифонов, А.П. Оценка времени прихода и длительности сигнала / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Электромагнитные волны и электронные системы/ – 2000. – Т.5, № 6. – С.33–42.

75. Трифонов, А.П. Оптимальный приём сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Проблемы передачи информации. – 2001. – Т.37, Вып. 1. – С.52–71.

76. Трифонов, А.П. Приём сигнала с неизвестной длительностью / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Известия вузов. Радиофизика. – 2002. – Т.45, № 7. – С.625–637.

77. Трифонов, А.П. Оценка длительности пропадающего сигнала / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2003. – № 7. – С.3–17.

78. Трифонов, А.П. Оптимальное совместное обнаружение и оценка длительности сигнала / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Радиотехника и электроника. – 2005. – Т.50, № 4. – С.439–446.

79. Трифонов, А.П. Точные формулы для расчёта характеристик приёма сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Проблемы передачи информации – 2009. – Т.45, Вып. 2. – С.91–100.

80. Трифонов, А.П. Анализ скрытности передачи при использовании сигналов с неизвестными моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – №1. – С.37–45.

81. Трифонов, А.П. Квазиправдоподобная оценка времени прихода и длительности сигнала неизвестной формы / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – №2. – С.42–54.

82. Трифонов, А.П. Квазиправдоподобное обнаружение сигналов с неизвестными формой и моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – №4. – С.43–53.

83. Трифонов, А.П. Характеристики квазиправдоподобной оценки параметра сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – №4. – С.54–61.

84. Трифонов, А.П. Квазиправдоподобная оценка моментов появления и исчезновения сигнала неизвестной формы / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин // Радиотехника. – 2016. – №2. – С. 50–56.

85. Трифонов, А.П. Статистические свойства высоты и положения абсолютного максимума марковского случайного процесса типа Башелье / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, М.Б. Беспалова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 4. – С.54–65.

86. Трифонов, А.П. Оценка амплитуды узкополосного прямоугольного радиоимпульса с неизвестными начальной фазой и моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, М.Б. Беспалова, М.В. Трифонов // Радиотехника. – 2017. – №1. – С.71–78.

87. Трифонов, А.П. Обнаружение сигнала с неизвестными амплитудой и длительностью / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, П.А. Кондратович // Известия вузов. Радиофизика. – 2011. – Т.54, № 5. – С. 391–401.

88. Трифонов, А.П. Эффективность оценки длительности сигнала с неизвестной амплитудой / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, П.А. Кондратович // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2011. – Т.54, № 11. – С.3–12.

89. Трифонов, А.П. Нелинейный алгоритм обнаружения сигнала с неизвестными амплитудой и моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, П.А. Кондратович // Нелинейный мир. – 2012. – Т.10, № 5. – С.287–299.

90. Трифонов, А.П. Оценка моментов появления и исчезновения сигнала с неизвестной амплитудой / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, П.А. Кондратович // Известия вузов. Радиофизика. – 2012 – Т.55, № 6. – С.455–471.

91. Трифонов, А.П. Оценка времени прихода и длительности сигнала с неизвестной амплитудой / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, П.А. Кондратович // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2012. – Т.10, № 7. – С. 4–15.

92. Трифонов, А.П. Оценка амплитуды сигнала с неизвестной длительностью / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, П.А. Кондратович, М.В. Трифонов // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2012. – Т.55, № 9. – С.3–10.

93. Трифонов, А.П. Характеристики оценок амплитуды сигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, П.А. Кондратович, М.В. Трифонов, К.А. Зимовец // Нелинейный мир. – 2013. – № 3. – С.208–220.

94. Трифонов, А.П. Квазиправдоподобные алгоритмы обнаружения радиосигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, С.В. Корольков // Нелинейный мир. – 2015. – №6. – С.24–33.

95. Трифонов, А.П. Квазиправдоподобное обнаружение сигналов с неизвестными амплитудой и длительностью / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, Е.В. Литвинов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2016. – №1. – С.41–49.

96. Трифонов, А.П. Квазиправдоподобное обнаружение разрывного сигнала с неизвестными амплитудой и моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, Е.В. Литвинов, П.А. Кондратович // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2016. – №2. – С.34–45.

97. Трифонов, А.П. Квазиправдоподобная оценка моментов появления и исчезновения прямоугольного радиоимпульса с неизвестными амплитудой, частотой и начальной фазой / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, С.В. Корольков // Радиотехника. – 2016. – № 12. – С.6–13.

98. Трифонов, А.П. Оценка моментов появления и исчезновения радиосигнала с неизвестными амплитудой и начальной фазой / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, С.В. Корольков // Известия вузов. Радиофизика. – 2017. – Т.60, №1. – С.72–88.

99. Трифонов, А.П. Квазиоптимальная оценка моментов появления и исчезновения прямоугольного радиоимпульса с неизвестными амплитудой, частотой и начальной фазой / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, С.В. Корольков // Радиотехника. – 2017. – №1. – С.79–85.

100. Трифонов, А.П. Оценка амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала с неизвестными длительностью и начальной фазой / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, К.Д. Титов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2015. – №11. – С.3–13.

101. Трифонов, А.П. Оценка амплитуды сверхширокополосного квазирадиосигнала с неизвестной длительностью / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, К.Д. Титов // Радиотехника. – 2016. – №3. – С.14–22.

102. Трифонов, А.П. Квазиправдоподобное обнаружение сверхширокополосного квазирадиосигнала произвольной формы с неизвестной длительностью / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, К.Д. Титов // Радиотехника. – 2016. – №6. – С.99–105.

103. Трифонов, А.П. Оценка длительности сверхширокополосного квазирадиосигнала / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, К.Д. Титов // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2017. – Т.60, №8. – С.460–471.

104. Трифонов, А.П. Обнаружение радиосигнала с неизвестными длительностью, амплитудой и начальной фазой / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин, М.В. Трифонов // Известия вузов. Радиофизика. – 2015. – Т.58, №5. – С.401–414.

105. Трифонов, А.П. Обнаружение радиосигнала с неизвестными моментами появления и исчезновения / А.П. Трифонов, Ю.Э. Корчагин,

О.В. Чернояров, Б.И. Шахтарин // Радиотехника и электроника. – 2015. – Т.60, №4. – С. 399–410.

106. Трифонов, А.П. Эффективность обнаружения узкополосного радиосигнала в условиях параметрической априорной неопределенности / А.П. Трифонов, Е.В. Литвинов, Ю.Э. Корчагин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2016. – №2. – С.46–56.

107. Трифонов, А.П. Обнаружение узкополосного радиосигнала с неизвестными пространственно-временными параметрами / А.П. Трифонов, Е.В. Литвинов, Ю.Э. Корчагин // Радиотехника. – 2016. – №6. – С.89–98.

108. Трифонов, А.П. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / А.П. Трифонов, Е.П. Нечаев, В.И. Парфенов. – Воронеж: ВГУ, 1991. – 246 с.

109. Трифонов, А.П. Оптимальный приём сигнала с неизвестной длительностью на фоне белого шума / А.П. Трифонов, В.И. Парфенов, Д.В. Мишин // Известия вузов. Радиофизика. – 1997. – Т.60, № 12. – С.1531–1541.

110. Трифонов, А.П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А.П. Трифонов, Ю.С. Шинаков. – М. : Радио и связь, 1986. – 264 с.

111. Фалькович, С.Е. Приём радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех / С.Е. Фалькович. – М. : Сов. радио, 1961. – 312 с.

112. Фалькович, С.Е. Оценка параметров сигнала / С.Е. Фалькович. – М. : Сов. радио, 1970. – 336 с.

113. Федорюк М.В. Метод перевала / М.В. Федорюк. – М. : Наука, 1977. – 368с.

114. Финк, Л.М. Сигналы, помехи, ошибки. / Л.М. Финк. – М. : Радио и связь. 1984. – 256 с.

115. Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. Х.Д. Икрамова / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1980. – 280 с.

116. Хелстром, К. Статистическая теория обнаружения сигналов: Пер. с англ. / К. Хелстром. – М. : ИЛ, 1963. – 432 с.

117. Хемминг, Р.В. Численные методы / Р.В. Хемминг. – М. : Радио и связь, 1972. – 400 с.

118. Ширман, Я.Д. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров / Я.Д. Ширман, В.Н. Голиков. – М. : Сов. радио, 1964. – 278 с.

119. Ayadi, J. Maximum Likelihood time of arrival estimation for ultrawideband signals / J. Ayadi, Hai Zhan, J. Farserotu // Signal Processing and Its Applications, 2007. ISSPA 2007. 9th International Symposium on. – p.1-4.

120. Barkat, M. Signal Detection and Estimation / M. Barkat. – Artech House, 2005. – 692p.

121. Chernoyarov, O.V. The Analysis of the Quasi-Likelihood Algorithm of the Estimated Parameter of the Signal with Unknown Localization within the Observation Interval / O.V. Chernoyarov, A.P. Trifonov, K.S. Kalashnikov, B.I. Shakhtarin // Proceeding of the 2016 International Conference on Electrical, Mechanical and Industrial Engineering (ICEMIE2016). – Thailand, Phuket, 2016. – P. 39–43.

122. Esposito, R. On a Relation between Detection and Estimation in Decision Theory / R. Esposito // Information and Control. – 1968. – v.12, № 2, – P. 116-120.

123. Guetbi, C. Methods based on wavelets for time delay estimation of ultrasound signals / C. Guetbi, D. Kouamk, A. Ouahabi J.P. Chemla // Electronics, Circuits and Systems, 1998 IEEE International Conference on. – vol.3. – P.113–116.

124. Hippenstiel R.D. Detection Theory / R.D. Hippenstiel. – CRC Press, 2001. – 325p.

125. Jeffer, A.G. On Relation between Detection and Estimation of Discrete Time Processes / A.G. Jeffer, S.C. Gupta // Information and Control. – 1972 – v.20, №1. – P. 46–54.

126. Kailath T. Some Integral Equations with Nonrational Kernels / T. Kailath // IEEE Trans. on Inf. Theory. – 1966. – v. IT-12, №4. – P.442–447.

127. Kailath, T. Linear Estimation / T. Kailath, A.H. Sayed, B. Hassibi. – Prentice-Hall, 2000. – 854p.

128. Korchagin Yu. E. Estimation duration of ultra-wideband quasi-radiosignal with known amplitude and initial phase / Yu. E. Korchagin, K.D. Titov // IEEE 2016 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Proceedings. National Research University Higher School of Economics. Russia, Moscow, May 12-14, 2016. IEEE Catalog Number: CFP16794-CDR. ISBN: 978-1-4673-8383-7. DOI 10.1109/SIBCON.2016.7491705

129. Lainiotis, D.G. Joint Detection, Estimation and System Identification / D.G. Lainiotis // Information and Control. – 1971, – v.19, № 1, – P. 75–92.

130. Levi, B.C. Principles of Signal Detection and Parameter Estimation / B.C. Levi. – Springer, 2008. – 639p.

131. McFadden I. A. On a class Gaussian processes for which the mean rate of crossing is infinite / I. A. McFadden // J. Roy. Statist. Soc., – 1967. – v.B29, P. 489–502.

132. Middleton, D. Simultaneous Optimum Detection and Estimation of Signals in Noise / D. Middleton, R. Esposito // IEEE Trans. on Inf. Theory. – 1968, – v. IT-14, №3. – P.434–444.

133. Orfanidis S.J. Optimum Signal Processing / S.J. Orfanidis. – McGraw-Hill Publishing Company, 2007. – 377p.

134. Pickands, J. III. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian process / J. Pickands // Trans. Amer. Math. Soc., – 1969. – v.145. – November, – P.51–73.

135. Qualls, C. Asymptotic properties of Gaussian processes / C. Qualls, H. Watanabe // Ann. of Math. Statist. – 1972. – v.3, № 2. – P.580–596.

136. Seidman L.P. An upper bound of average estimation error in nonlinear systems / L.P. Seidman // IEEE Trans. on Inf. Theory. – 1968. – v. IT-14, №2. – P. 243–250.

137. Sharpe K. Some properties of the crossing process generated by a stationary process / K. Sharpe // Adv. Appl. Probab. – 1978. – v.10, № 2. – P.373–391.

138. Stark, H. Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing / Henry Stark, John W. Woods. – 3rd ed. – Publisher: Prentice-Hall, 2002. – 699 p.

139. Sung, Y. Neyman-Pearson Detection of Gauss-Markov Signals in Noise: Closed-Form Error Exponent and Properties / Y. Sung, L. Tong, V. Poor // IEEE Trans. – 2006. – V. IT-52, №4. – P. 1354–1365.

140. Trifonov, A.P. Estimate of the Moments of Appearance and Disappearance of a Radio Signal with Unknown Initial Phase / A.P. Trifonov, Yu.E. Korchagin, M.V. Trifonov, O.V. Chernoyarov // Wulfenia journal. Klagenfurt, Austria. – 2015, – Vol. 22, No. 9. – P.105–116.

141. Trifonov, A.P. Amplitude Estimate of the Radio Signal with Unknown Duration and Initial Phase / A.P. Trifonov, Yu.E. Korchagin, M.V. Trifonov, O.V. Chernoyarov, A.A. Artemenko // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 8, No. 111. – P.5517 - 5528

142. Trifonov A.P. Quasi-likelihood detection of rectangle ultrawideband quasiradiosignal / A.P. Trifonov, Yu.E. Korchagin, K.D. Titov // 2017 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). DOI: 10.1109/SIBCON.2017.7998454

Научное издание

**Трифонов Андрей Павлович,
Корчагин Юрий Эдуардович**

**ПРИЁМ СИГНАЛОВ
С НЕИЗВЕСТНЫМИ МОМЕНТАМИ
ПОЯВЛЕНИЯ И ИСЧЕЗНОВЕНИЯ**

Монография

Издано в авторской редакции.

Подписано в печать 05.12.2017. Формат 60×84/16.
Усл. п. л. 11,7. Тираж 100. Заказ 792

Издательский дом ВГУ
394018 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского дома ВГУ
394018 Воронеж, ул. Пушкинская, 3