МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С. И. Links,
М. В. Фролов

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Часть I

Учебное пособие для вузов

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

Утверждено научно-методическим советом физического факультета
25 ноября 2013 г., протокол № 11

Рецензент д-р физ.-мат. наук, доц. А. В. Меремьянин

Учебное пособие подготовлено на кафедре теоретической физики физического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 3-го курса дневного отделения физического факультета.

Для направления 011200 — Физика, специальности 010701 — Физика

Содержание

1. Математические методы электродинамики **4**
1.1. Векторная алгебра 4
1.2. Векторный анализ 6
1.3. Криволинейные координаты 14

2. Постоянное электрическое поле **24**

3. Постоянное магнитное поле **41**

Приложение **58**
1. Основные дифференциальные операции в сферических и цилиндрических координатах 58
2. Сферические функции 59
3. Полиномы Лежандра 61

Литературы **62**

Учебное пособие предназначено для проведения практических занятий по курсу «Электродинамика» (шифр ОПД.Ф.01.02). Материал пособия относится к первой части курса, в которой изучаются электромагнитные явления в вакууме. Каждый раздел содержит теоретическую часть, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения. Изложение теории, в котором приводятся основные положения и даются ключевые формулы, имеет справочный характер и непосредственно связано с решением задач по соответствующей теме. Подбор задач проводился так, чтобы показать основные методы их решения, а также проиллюстрировать наиболее существенные положения теории. Решенные в пособии задачи имеют базовый характер, они должны дать достаточно полное представление об изучаемой теме и помочь студентам в самостоятельной работе над другими задачами из данного пособия, а также из задачников, приведенных в списке литературы.

1. Математические методы электродинамики

Электромагнитное поле может быть описано заданием напряженностей электрического и магнитного полей $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ — двух векторных функций, зависящих от точки пространства и времени. Поэтому математическая сторона электродинамики связана с исчислением векторных полей. Напомним здесь основные результаты векторной алгебры, интегрального исчисления векторов и векторного анализа.

1.1. Векторная алгебра

Векторные величины характеризуются абсолютным значением и направлением. В любой системе координат вектор определяется тройкой чисел (которые, конечно, зависят от выбора системы координат). Пусть, например, радиус-вектор $\mathbf{r}$, задающий положение точки, имеет в некоторой декартовой системе координат (д.с.к.) компоненты x, y, z: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ [используется также обозначение $\mathbf{r} = (x, y, z)$]. В другой д.с.к., имеющей общее начало с исходной, но повернутой относительно нее, вектор $\mathbf{r}$ будет иметь другие компоненты x', y', z': $\mathbf{r} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$. Штрихованные компоненты выражаются через нештрихованные по правилу

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j,$$

где коэффициенты преобразования α_{ij} представляют собой косинусы углов между j-й осью исходной и i-й осью повернутой системы. Это трансформационное свойство может быть положено в основу определения понятия векторной величины: вектором $\mathbf{a}$ называется совокупность трех величин a_i $(i = 1, 2, 3)$, которые при поворотах координатной системы преобразуются так же, как координаты x_1, x_2, x_3:

$$a'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} a_j. \tag{1.1}$$

Двум векторам $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ можно поставить в соответствие скалярную величину (которая не меняется при переходе к другой системе координат), образовав скалярное произведение

$$\mathbf{ab} = ab\cos\alpha,$$

α — угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. В д.с.к. скалярное произведение вычисляется через проекции векторов по формуле

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, то $\mathbf{ab} = 0$.

Двум векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно поставить в соответствие вектор $\mathbf{c}$, удовлетворяющий условиям: 1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$; 2) вектор $\mathbf{c}$ ортогонален векторам $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; 3) векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют правую тройку. Так построенный вектор $\mathbf{c}$ называется векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и обозначается $[\mathbf{ab}]$. В д.с.к. $[\mathbf{ab}]$ вычисляется по правилу

$$[\mathbf{ab}] = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k},$$

или, в краткой символической записи,

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак. Итак, $[\mathbf{ab}] \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$; $[\mathbf{ba}] = -[\mathbf{ab}]$. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны или антипараллельны, то $[\mathbf{ab}] = 0$.

Из трех векторов можно составить смешанное произведение $(\mathbf{a}[\mathbf{bc}])$ или двойное векторное произведение $[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]$. Множители смешанного произведения можно переставлять циклически (или нециклически с переменой знака), получая тождественные выражения:

$$(\mathbf{a}[\mathbf{bc}]) = (\mathbf{b}[\mathbf{ca}]) = -(\mathbf{a}[\mathbf{cb}]).$$

Двойное векторное произведение можно разложить следующим образом:

$$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}).$$

Векторы, преобразующиеся по правилу (1.1) при поворотах, могут двояко вести себя при инверсии системы координат, т.е. при преобразовании вида

$$x'_i = -x_i, \tag{1.2}$$

где матрица преобразования $\alpha_{ij} = -\delta_{ij}$. Те векторы, компоненты которых, как и x_i, меняют знак при инверсии, называются *истинными* или *полярными*. Векторы, компоненты которых при инверсии координат не изменяют знака, называются *псевдовекторами* или *аксиальными* векторами (угловая скорость вращения, векторное произведение $[\mathbf{ab}]$ двух полярных векторов и др.).

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Вычислить: а) векторное произведение $[\mathbf{ab}]$; б) смешанное произведение $(\mathbf{a}[\mathbf{ba}])$; в) угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.

1.2. Найти единичный вектор, направленный вдоль вектора $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, где $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

1.3. Найти проекцию вектора $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ на вектор $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

1.4. Доказать равенство $(\mathbf{ab})^2 + [\mathbf{ab}]^2 = a^2 b^2$.

1.5. Какому условию должны удовлетворять векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, чтобы векторы $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ были а) ортогональны; б) коллинеарны?

1.6. Даны векторы $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Определить, какие из них взаимно перпендикулярны, а какие параллельны или антипараллельны.

1.7. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

1.8. Известны векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Представить вектор $\mathbf{A}$ в виде суммы двух векторов: $\mathbf{A}_\parallel$ — параллельного и $\mathbf{A}_\perp$ — перпендикулярного к $\mathbf{B}$.

1.2. Векторный анализ

Основные дифференциальные операции. Если любой точке пространства (или части пространства) ставится в соответствие некоторая величина, то говорят, что в пространстве задано поле этой величины. Если любой точке пространства ставится в соответствие число, то поле называется скалярным; если любой точке пространства ставится в соответствие вектор, то поле называется векторным.

С формальной точки зрения поле есть функция точки. Пусть задано скалярное поле: $f = f(\mathbf{r})$. Если в пространстве выбрана некоторая декартова система координат, то можем написать: $f = f(x, y, z)$. Возьмем в пространстве некоторую точку M. Из нее можно выходить по всевозможным направлениям. Выберем некоторое направление l (рис. 1). Производной f по направлению l называется скорость изменения поля в данном направлении:

$$\frac{df}{dl} = \lim_{N \to M} \frac{f(N) - f(M)}{MN}.$$

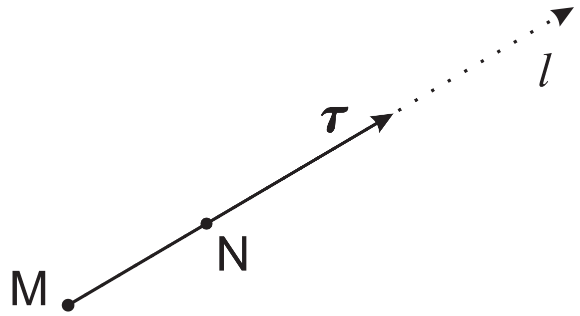

Рис. 1

На заданном направлении l координаты x, y, z являются функциями расстояния l, $f = f(x(l), y(l), z(l))$, поэтому f можно продифференцировать как сложную функцию:

$$\frac{df}{dl} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dl}.$$

Представим последнее выражение как скалярное произведение двух векторов:

$$\frac{df}{dl} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)\left(\frac{dx}{dl}\mathbf{i} + \frac{dy}{dl}\mathbf{j} + \frac{dz}{dl}\mathbf{k}\right).$$

Первый вектор здесь называется *градиентом* поля f:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{1.3}$$

Второй вектор

$$\frac{dx}{dl}\mathbf{i} + \frac{dy}{dl}\mathbf{j} + \frac{dz}{dl}\mathbf{k} = \frac{d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{dl} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \boldsymbol{\tau}$$

есть единичный вектор направления l. Таким образом,

$$\frac{df}{dl} = (\operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{\tau}). \tag{1.4}$$

Из последнего выражения следует, что вектор $\operatorname{grad} f$ в точке M указывает в сторону наибыстрейшего возрастания поля f, причем эта наибыстрейшая скорость равна $|\operatorname{grad} f|$. Из этого утверждения, которое составляет геометрический смысл градиента, ясно, что градиент инвариантно связан с рассматриваемым полем, т.е. остается неизменным при замене декартовых осей (этого не видно из определения (1.3), данного в неинвариантной форме, «привязанной» к какой-то системе координат). Итак, градиент скалярного поля образует векторное поле.

Если ввести векторный дифференциальный *оператор* ∇ *(«набла»)*

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{или} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{1.5}$$

то можно записать (1.3) в виде

$$\operatorname{grad} f = \nabla f,$$

а (1.4) в виде

$$\frac{df}{dl} = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla f) = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) f.$$

Рассмотрим частный случай сферически симметричной функции f (т.е. функции, которая зависит только от расстояния $r = |\mathbf{r}|$ до начала координат).

Пример 1.1. Показать, что

$$\operatorname{grad} f(r) = \frac{df}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{1.6}$$

Решение. Воспользуемся выражением для градиента в д.с.к. (1.3). Выразим $r = |\mathbf{r}|$ через x, y, z ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) и вычислим

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{x}{r}.$$

Аналогично $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{df}{dr}\dfrac{y}{r}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{df}{dr}\dfrac{z}{r}$, откуда

$$\operatorname{grad} f(r) = \frac{df}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad \blacktriangleleft \tag{1.7}$$

Рассмотрим теперь векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ и введем операцию дивергенции. Составим отношение потока поля $\mathbf{a}$ через замкнутую поверхность S к объему области, ограниченному этой поверхностью:

$$\frac{\oint \mathbf{a}\, d\mathbf{S}}{V}.$$

Предел этого отношения при стягивании области к точке M называется *дивергенцией* поля $\mathbf{a}$ в точке M:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \lim_{(V)\to M} \frac{\oint \mathbf{a}\, d\mathbf{S}}{V}. \tag{1.8}$$

Отметим, что дивергенция векторного поля образует скалярное поле.

Пример 1.2. Получить, исходя из определения (1.8), выражение для дивергенции в д.с.к.

Решение. Выберем в качестве области в формуле (1.8) бесконечно малый прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат. Тогда поток вектора $\mathbf{a}$ через поверхность параллелепипеда можно представить в виде шести слагаемых, отвечающих шести граням параллелепипеда:

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{a}d\mathbf{S} &= [a_x(x+dx,\overline{y},\overline{z}) - a_x(x,\overline{y},\overline{z})]dydz+\\ &+[a_y(\overline{x},y+dy,\overline{z}) - a_y(\overline{x},y,\overline{z})]dxdz+\\ &+[a_z(\overline{x},\overline{y},z+dz) - a_z(\overline{x},\overline{y},z)]dxdy \approx\\ &\approx \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dV.\end{aligned} \tag{1.9}$$

При вычислении поверхностных интегралов по граням использована теорема о среднем, величины $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ — значения координат в некоторой точке соответствующей грани. Учтено также, что нормаль имеет противоположные направления на противоположных гранях, а при стягивании объема в точку M все координаты принимают значения, соответствующие этой точке. В результате (1.8) приводит к следующему выражению для дивергенции в д.с.к.:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \qquad \blacktriangleleft \tag{1.10}$$

Принимая во внимание (1.5), (1.10), запишем дивергенцию векторного поля $\mathbf{a}$ в виде скалярного произведения оператора ∇ на вектор $\mathbf{a}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = (\nabla\mathbf{a}). \tag{1.11}$$

Пример 1.3. Основываясь на определении дивергенции (1.8), вывести соотношение, связывающее интеграл от $\operatorname{div}\mathbf{a}$ по некоторому объему с потоком вектора $\mathbf{a}$ через поверхность, ограничивающую этот объем.

Решение. Выберем произвольный объем V, ограниченный поверхностью S. Разобъем его на малые ячейки ΔV_i, каждая из которых ограничена поверхностью S_i. У ячеек, примыкающих к внешней поверхности S, часть ограничивающих их поверхностей совпадает с S. Все остальные участки поверхностей S_i будут общими для двух соседних ячеек. Пользуясь малостью каждой из ячеек, запишем (1.8) в приближенной форме:

$$(\operatorname{div}\mathbf{a})_i \Delta V_i \approx \oint\limits_{S_i} \mathbf{a} d\mathbf{S}_i \ .$$

Просуммируем теперь левую и правую часть последнего приближенного равенства по i и перейдем к пределу, устремляя объем каждой ячейки к нулю. Левая часть равенства перейдет при этом в интеграл по полному объему от дивергенции. В правой части равенства интегралы по внутренним участкам поверхностей S_i взаимно уничтожатся, так как внешние нормали для двух соседних ячеек имеют противоположные направления. Останется лишь интеграл по внешней поверхности S. В итоге получим соотношение

$$\int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{a}\, dV = \oint\limits_S \mathbf{a} d\mathbf{S}, \tag{1.12}$$

которое называется *теоремой Остроградского — Гаусса.* ◀

Наконец, введем понятие ротора векторного поля. Рассмотрим плоскую площадку, перпендикулярную некоторому направлению $\mathbf{n}$. Найдем циркуляцию вектора $\mathbf{a}$ по контуру, ограничивающему эту площадку, и ее отношение к величине площадки:

$$\frac{\oint \mathbf{a}\, d\mathbf{l}}{S}.$$

Предел этого отношения при стягивании площадки (она остается плоской) к точке M называется проекцией *ротора* векторного поля $\mathbf{a}$ на направление $\mathbf{n}$, образующего с направлением обхода контура правовинтовую систему:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_n = \lim_{(S)\to M} \frac{\oint \mathbf{a}\, d\mathbf{l}}{S}. \tag{1.13}$$

Обратим внимание, что операция rot применяется к векторному полю и сам ротор есть векторное поле.

Если рассмотреть циркуляцию по бесконечно малым прямоугольникам, стороны которых параллельны осям координат, то можно найти выражение для $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в д.с.к.:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Через оператор ∇ ротор выражается следующим образом:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = [\nabla\mathbf{a}],$$

т.е. ротор векторного поля $\mathbf{a}$ есть векторное произведение вектора ∇ на вектор $\mathbf{a}$.

Нетрудно показать, что циркуляция по произвольному контуру Γ есть сумма циркуляций вдоль двух меньших контуров, на которые разбивается Γ: $\oint\limits_{\Gamma} = \oint\limits_{\Gamma_1} + \oint\limits_{\Gamma_2}$. Тогда, разбив произвольный контур на бесконечно малые участки (рис. 2), используя для каждого участка (1.13) и суммируя уравнения

$$\oint\limits_{\Gamma_i} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = (\operatorname{rot}\mathbf{a})_i\, \Delta S_i$$

по всем участкам, получим

$$\oint\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \int\limits_{S} \operatorname{rot}\mathbf{a}\, d\mathbf{S}. \qquad (1.14)$$

В этом состоит *теорема Стокса*: циркуляция поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через поверхность, ограниченную указанным контуром.

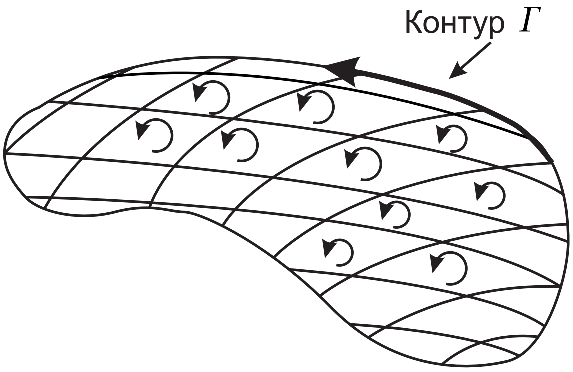

Рис. 2

Символическое исчисление. Дифференциальные операции от произведений скалярных и векторных полей удобно вычислять, используя оператор ∇. Оператор ∇ используется потому, что с его помощью удобно получать и записывать различные формулы векторного анализа. ∇ — дифференциальный векторный оператор, он имеет свойства производной и вектора, и при операциях с ним следует пользоваться правилами дифференцирования и формулами векторной алгебры.

Пример 1.4. Вычислить градиент произведения двух скалярных функций.

Решение. Из свойств ∇ и правил векторной алгебры следует, что

$$\operatorname{grad}(fg) = \nabla(fg) = \nabla(\overset{\downarrow}{f}g) + \nabla(f\overset{\downarrow}{g}) = g\nabla f + f\nabla g. \qquad \blacktriangleleft \tag{1.15}$$

Таким образом, чтобы применить дифференциальную операцию к произведению, надо переписать ее через оператор ∇, записать два слагаемых (в которых ∇ действует сначала на первый множитель, затем — на второй) и, пользуясь правилами векторной алгебры, расставить сомножители так, чтобы «высвободить» из-под оператора ∇ те множители, на которые ∇ не действует (например, расставить сомножители так, чтобы ∇ оказался справа от тех множителей, на которые он не действует).

Рассмотрим еще два примера вычисления дифференциальных операций от произведений.

Пример 1.5. Доказать, что

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}] = \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}. \tag{1.16}$$

Решение. Вычисляем, используя символическое исчисление:

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}] = (\nabla[\mathbf{ab}]) = (\nabla[\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\mathbf{b}]) + (\nabla[\mathbf{a}\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]) = (\mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}]) - (\mathbf{a}[\nabla\mathbf{b}]) =$$
$$= \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 1.6. Доказать, что

$$\operatorname{grad}(\mathbf{ab}) = [\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}] + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + [\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}] + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}. \tag{1.17}$$

Решение. Подействуем оператором ∇ на скалярное произведение:

$$\nabla(\mathbf{ab}) = \nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{a}\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) = \nabla(\mathbf{b}\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) + \nabla(\mathbf{a}\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}).$$

Преобразовав члены в правой части

$$\nabla(\mathbf{b}\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = \nabla(\mathbf{b}\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) - \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}(\mathbf{b}\nabla) + \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}(\mathbf{b}\nabla) = [\mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}]] + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}$$

и аналогично второе слагаемое, доказываем справедливость тождества. $\blacktriangleleft$

Остальные случаи действия оператора ∇ на произведения двух функций предлагается разобрать самостоятельно (см. задачи 1.12–1.14 в конце настоящего раздела).

Дифференциальные операции второго порядка. В приложениях векторного анализа приходится иметь дело не только с выполнением операций $\mathrm{grad}, \mathrm{div}, \mathrm{rot}$, но и с их различными комбинациями. Особенно часто встречаются так называемые операции второго порядка, т.е. попарные комбинации трех основных операций. Комбинируя символы $\mathrm{grad}, \mathrm{div}, \mathrm{rot}$ попарно, можно составить девять пар, однако смысл имеют лишь следующие пять:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = [\nabla, \nabla f] = [\nabla, \nabla] f = 0,\\
&2)\quad \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\, f = (\nabla, \nabla f) = (\nabla, \nabla) f = \nabla^2 f = \Delta f,\\
&3)\quad \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\,\mathbf{a} = (\nabla[\nabla \mathbf{a}]) = 0,\\
&4)\quad \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = [\nabla[\nabla \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla \mathbf{a}) - (\nabla, \nabla)\mathbf{a} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}\\
&(\text{«ротор ротора есть градиент дивергенции минус лапласиан»}),\\
&5)\ \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} \text{ — см. п. 4.}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Скалярный дифференциальный оператор $\Delta = \nabla^2$ [см. п. 2 в (1.18)] называется оператором Лапласа и в д.с.к. записывается как

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1.19}$$

Интегральные соотношения. Теоремы Остроградского (1.12) и Стокса (1.14) позволяют получать другие интегральные соотношения. Рассмотрим два примера.

Пример 1.7. Доказать, что

$$\int\limits_V \mathrm{grad}\, f\, dV = \oint\limits_S f\, d\mathbf{S}. \tag{1.20}$$

Решение. Положим в формуле Остроградского (1.12) $\mathbf{a} = \mathbf{c} f$, где $\mathbf{c}$ — произвольный постоянный вектор. Вычисляя дивергенцию, находим

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \mathrm{div}\,(\mathbf{c} f) = \mathbf{c}\,\mathrm{grad}\, f.$$

Подставляя в (1.12), приходим к равенству

$$\left(\mathbf{c}, \int\limits_V \mathrm{grad}\, f\, dV\right) = \left(\mathbf{c}, \oint\limits_S f\, d\mathbf{S}\right).$$

В силу произвольности вектора $\mathbf{c}$ получаем (1.20). ◀

Пример 1.8. Доказать, что

$$-\int\limits_S [\mathrm{grad}\, f d\mathbf{S}] = \oint\limits_L f\, d\mathbf{l}. \tag{1.21}$$

Решение. Положим $\mathbf{a} = \mathbf{c}f$ в формуле Стокса (1.14). Вычисляя ротор, находим

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{rot}(\mathbf{c}f) = -[\mathbf{c}\operatorname{grad} f],$$

так что

$$-\left(\mathbf{c}, \int\limits_S [\operatorname{grad} f d\mathbf{S}]\right) = \left(\mathbf{c}, \oint\limits_L f\, d\mathbf{l}\right).$$

Отсюда получаем соотношение (1.20). ◀

Задачи для самостоятельного решения

1.9. Вычислить: а) $\operatorname{grad} r$; б) $\operatorname{grad} r^2$; в) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}$, где $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

1.10. Найти $\operatorname{grad}(\mathbf{cr})$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор из начала координат.

1.11. Вычислить: а) $\operatorname{div}\mathbf{r}$; б) $\operatorname{rot}\mathbf{r}$.

1.12. Вычислить $\operatorname{div}(f\mathbf{a})$.

1.13. Вычислить $\operatorname{rot}(f\mathbf{a})$.

1.14. Доказать, что $\operatorname{rot}[\mathbf{ab}] = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$.

1.15. Вычислить: а) $\operatorname{div}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$; б) $\operatorname{div}[\mathbf{cr}]$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

1.16. Вычислить: а) $\operatorname{rot}(f(r)\mathbf{r})$; б) $\operatorname{rot}[\mathbf{cr}]$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

1.17. Доказать равенство $[[\mathbf{M}\nabla]\mathbf{r}] = -2\mathbf{M}$.

1.18. Вычислить $\operatorname{grad}\dfrac{(\mathbf{dr})}{r^3}$, где $\mathbf{d}$ — постоянный вектор.

1.19. Вычислить $\operatorname{rot}\dfrac{[\mathbf{Mr}]}{r^3}$, где $\mathbf{M}$ — постоянный вектор.

1.20. Вычислить: а) $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{r}$; б) $(\mathbf{a}\nabla)f(r)$; в) $(\mathbf{a}\nabla)(\mathbf{cr})$.

1.21. Вычислить $\operatorname{div}(\mathbf{b}(\mathbf{ra}))$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — постоянные векторы.

1.22. Доказать, что циркуляция вектора $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$ вдоль произвольного замкнутого контура равна нулю.

1.23. Доказать интегральное равенство

$$\int \operatorname{rot}\mathbf{a}\, dV = \oint [d\mathbf{S}\mathbf{a}].$$

1.3. Криволинейные координаты

При решении задач электродинамики часто приходится использовать, наряду с декартовой, другие системы координат. Если тройка чисел u_i, $i =$

$= 1, 2, 3$ однозначно определяет положение произвольной точки в пространстве, то величины u_i можно рассматривать как координаты точек пространства. Очевидно, координаты u_i могут быть выражены через декартовы координаты x, y, z: $u_i = u_i(x, y, z)$.

Уравнение $u_i(x, y, z) = C_i$ задает в пространстве *координатную поверхность*. (Какие поверхности являются координатными в д.с.к.?) Придавая C_i различные значения, получим семейство координатных поверхностей. Таким образом, имеется три семейства координатных поверхностей (для $i = 1, 2, 3$), причем через любую точку пространства проходит по одной поверхности каждого из трех семейств. Линии, по которым пересекаются координатные поверхности из разных семейств, называются *координатными линиями*. В д.с.к. — это прямые, параллельные координатным осям. В произвольной системе координат u_i координатные линии, вообще говоря, кривые, поэтому координаты называют криволинейными. Система координат называется *ортогональной*, если в любой точке пространства координатные линии ортогональны друг другу. Ортогональными являются, в частности, сферическая и цилиндрическая системы координат.

Если в некоторой точке пространства провести касательные к координатным линиям и направить по ним единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в сторону возрастания соответствующей координаты, то получим ортогональный нормированный базис. Заметим, что в отличие от д.с.к., определяемой тремя постоянными единичными векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, этот базис будет меняться от точки к точке. Это не мешает, однако, любой вектор, заданный в произвольной точке M (т.е. любое векторное поле), записать в виде линейной комбинации $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Сферические и цилиндрические координаты. Рассмотрим *сферическую систему координат* (с.с.к.), в которой положение точки M в пространстве определяется следующими тремя величинами (рис. 3):

1) расстоянием r от начала координат до точки M;

2) углом θ между положительным направлением оси z и отрезком OM;

3) углом φ между положительным направлением оси x и проекцией OM_1 отрезка OM на плоскость xy.

Из рисунка видно, что декартовы координаты точки M связаны с ее сферическими координатами следующими соотношениями:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta. \tag{1.22}$$

Когда точка M пробегает все пространство, сферические координаты изменяются в пределах

$$0 \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \tag{1.23}$$

Рассмотрим элемент объема между тремя парами бесконечно близких координатных поверхностей: двумя сферами радиусами r и $r + dr$, двумя

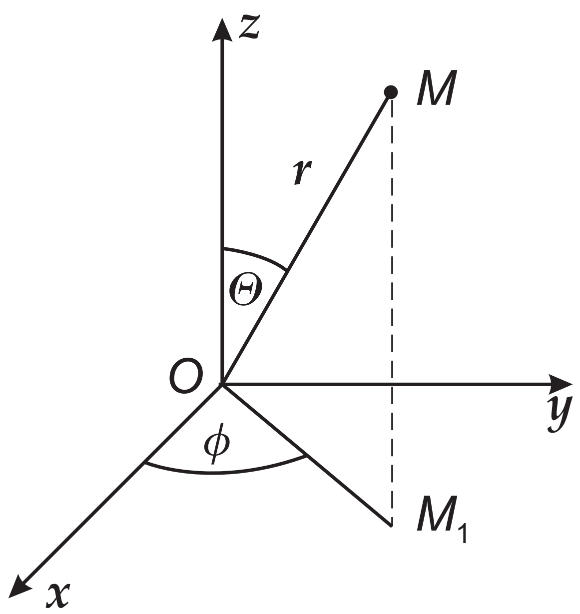

Рис. 3

полуконусами, определяемыми углами θ и $\theta+d\theta$, и двумя полуплоскостями, составляющими углы φ и $\varphi + d\varphi$ с плоскостью xz (рис. 4). Этот элемент объема представляет собой, с точностью до малых высшего порядка, прямоугольный параллелепипед с ребрами $rd\theta$, dr и $r\sin\theta d\theta$. Следовательно, объем этого параллелепипеда

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi. \tag{1.24}$$

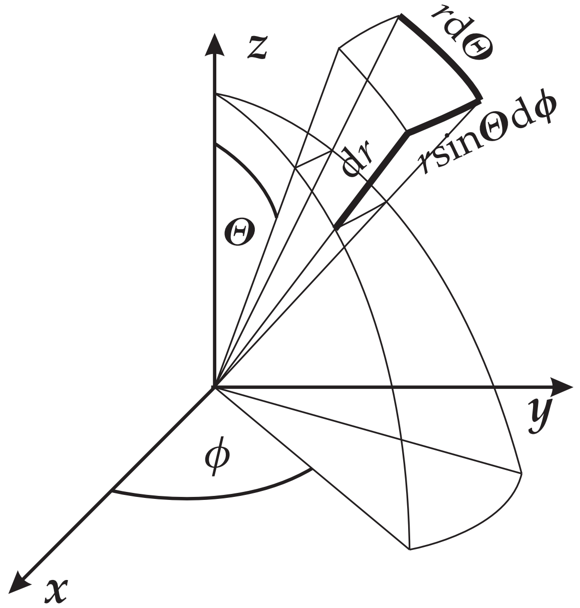

Рис. 4

Аналогично часть поверхности сферы радиусом r, ограниченную двумя близкими меридианами и двумя близкими параллелями, можно рассматривать как бесконечно малый прямоугольник со сторонами $rd\theta$ и $r\sin\theta d\varphi$, площадь которого

$$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \tag{1.25}$$

Напомним также, что отношение площади dS части сферы к квадрату радиуса сферы определяет величину телесного угла, высекающего поверхность dS на сфере

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2},$$

поэтому в сферических координатах

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{1.26}$$

Интегрируя $d\Omega$ по всем возможным значениям θ и φ, получим полный телесный угол

$$\Omega = \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi, \tag{1.27}$$

равный отношению площади сферы $S = 4\pi r^2$ к квадрату радиуса.

В *цилиндрической системе координат* (ц.с.к.) положение точки M в пространстве задается ее декартовой координатой z и полярными координатами [1] (ρ, φ) ее проекции на плоскость xy. Из рис. 5 видно, что декартовы координаты точки M выражаются через цилиндрические по формулам

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{1.28}$$

Если точка M может занимать любое положение в пространстве, то ее цилиндрические координаты меняются в пределах

$$0 \leqslant \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty. \tag{1.29}$$

Рассмотрим область, ограниченную двумя цилиндрическими поверхностями радиусов ρ и $\rho + d\rho$, двумя горизонтальными плоскостями, лежащими на уровнях z и $z + dz$, и двумя плоскостями, проходящими через ось z и составляющими с осью x углы φ и $\varphi + d\varphi$. Эту область можно считать прямоугольным параллелепипедом с ребрами $d\rho$, dz и $\rho d\varphi$ (рис. 6), объем которого

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz. \tag{1.30}$$

[1] В разделах 2, 3 цилиндрические координаты ρ и φ в ряде случаев обозначаются как r и α.

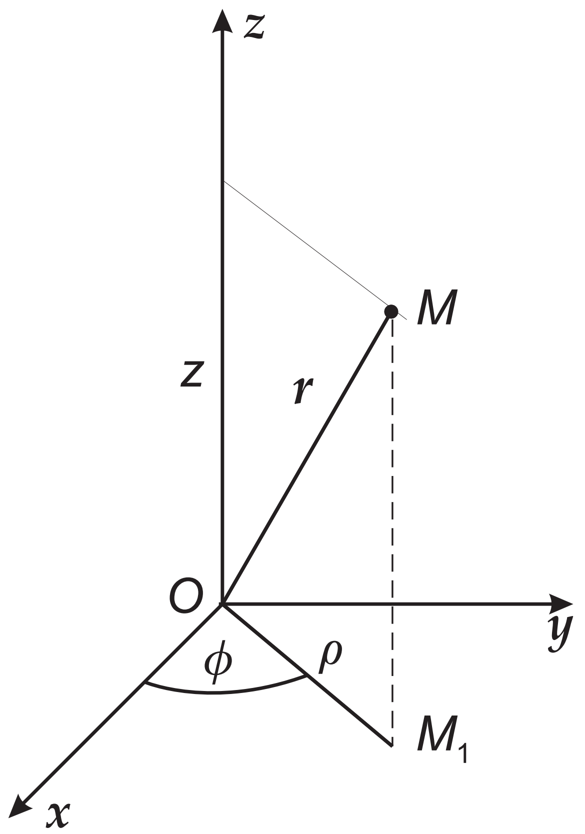

Рис. 5

Если выделить на боковой поверхности цилиндра радиусом ρ малый прямоугольник между двумя парами координатных линий, то его площадь будет

$$dS = \rho d\varphi dz. \tag{1.31}$$

Формулы для элементов объема (1.24), (1.30) и площади (1.25), (1.31) в сферических и цилиндрических координатах необходимы при вычислении объемных и поверхностных интегралов в этих системах координат.

Пример 1.9. Заряд распределен по объему шара радиусом R с плотностью $\rho = \rho_0 (r/R)^2 \sin\theta \cos^2\varphi$, где r, θ, φ — координаты с.с.к. с началом в центре шара. Найти полный заряд шара.

Решение. Вычисляя в с.с.к. объемный интеграл $\displaystyle\int \rho(\mathbf{r}) dV$, через который выражается полный заряд Q шара, получаем

$$Q = \frac{\rho_0}{R^2} \int\limits_0^R r^4 dr \int\limits_0^\pi \sin^2\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi^2}{10} \rho_0 R^3. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 1.10. Заряд распределен по боковой поверхности цилиндра радиусом R и высотой $2h$ с плотностью $\sigma = \sigma_0 \cos^2\varphi |z|/h$, где φ, z — координаты ц.с.к. с началом в центре цилиндра. Найти полный заряд цилиндра.

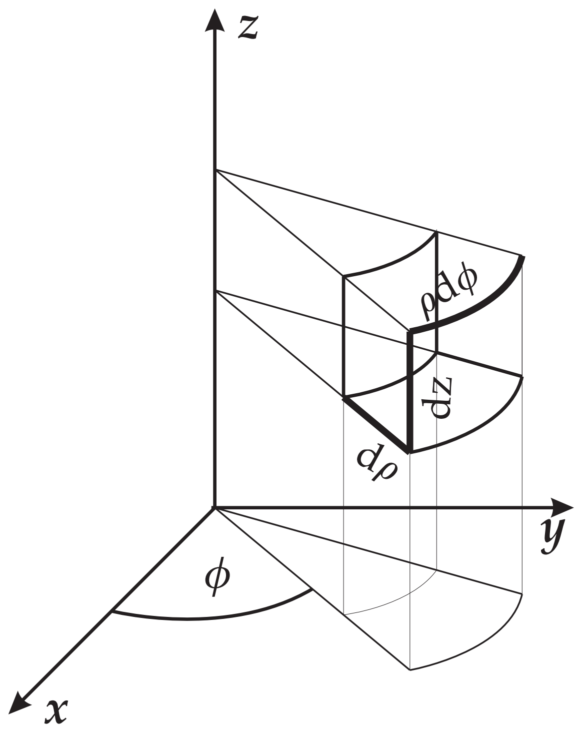

Рис. 6

Решение. Интегрируя по боковой поверхности в ц.с.к., находим

$$Q = \int \sigma dS = \frac{\sigma_0 R}{h} \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int\limits_{-h}^{h} |z| dz = \pi \sigma_0 R h. \qquad \blacktriangleleft$$

Дифференциальные операции в криволинейных координатах. Такие величины, как градиент, дивергенция, ротор, во многих случаях полезно записывать в тех или иных криволинейных системах координат. Найдем выражения для них в с.с.к. и ц.с.к. из простых геометрических соображений.

В с.с.к. градиент функции f может быть разложен по базисным векторам $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ (рис. 7). Проекция $\operatorname{grad} f$ на некоторое направление совпадает с производной f по этому направлению [см. (1.4)], следовательно, чтобы вычислить компоненты вектора $\operatorname{grad} f$ в базисе $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$, нужно вычислить производные f по направлениям, определяемым этими векторами:

$$(\operatorname{grad} f \cdot \mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial l_i}.$$

Поскольку при малых перемещениях вдоль базисных векторов с.с.к.

$$dl_r = dr, \qquad dl_\theta = r d\theta, \qquad dl_\varphi = r \sin\theta d\varphi$$

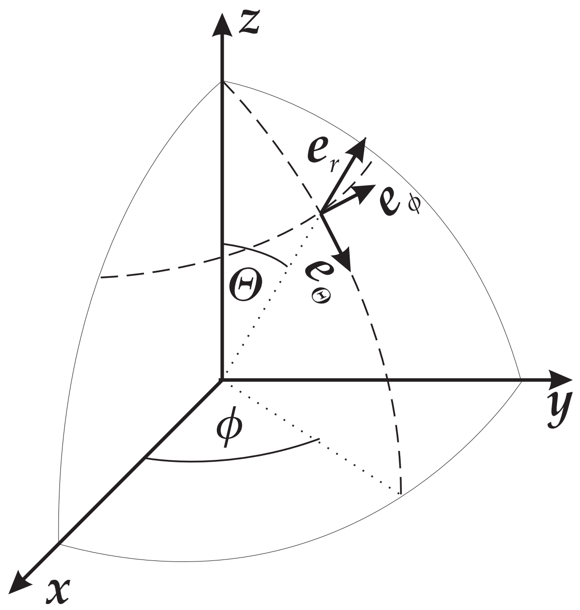

Рис. 7

(см. рис. 4), то

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi. \tag{1.32}$$

В ц.с.к. величины бесконечно малых перемещений вдоль базисных векторов $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ (рис. 8) составляют (см. рис. 6)

$$dl_\rho = d\rho, \qquad dl_\varphi = \rho d\varphi, \qquad dl_z = dz,$$

таким образом, в цилиндрических координатах градиент записывается как

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z. \tag{1.33}$$

Расчет дивергенции и ротора в криволинейных координатах основан на их инвариантных определениях (1.8), (1.13). Рассмотрим элемент объема в с.с.к. (рис. 4) и подсчитаем поток через его поверхность. Запишем векторное поле в виде

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta + \mathbf{a}_\varphi\mathbf{e}_\varphi$$

и вычислим сначала поток вектора $\mathbf{a}$ через элементы сфер радиусами $r+dr$ и r:

$$a_r(r+dr,\overline{\theta},\overline{\varphi})(r+dr)^2\sin\theta d\theta d\varphi - a_r(r,\overline{\theta},\overline{\varphi})r^2\sin\theta d\theta d\varphi \approx \frac{\partial(r^2a_r)}{\partial r}\frac{1}{r^2}dV.$$

Здесь $\overline{\theta}, \overline{\varphi}$ — значения θ и φ в некоторой точке соответствующей грани, $dV = r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi$, знак «минус» возникает потому, что нормаль имеет

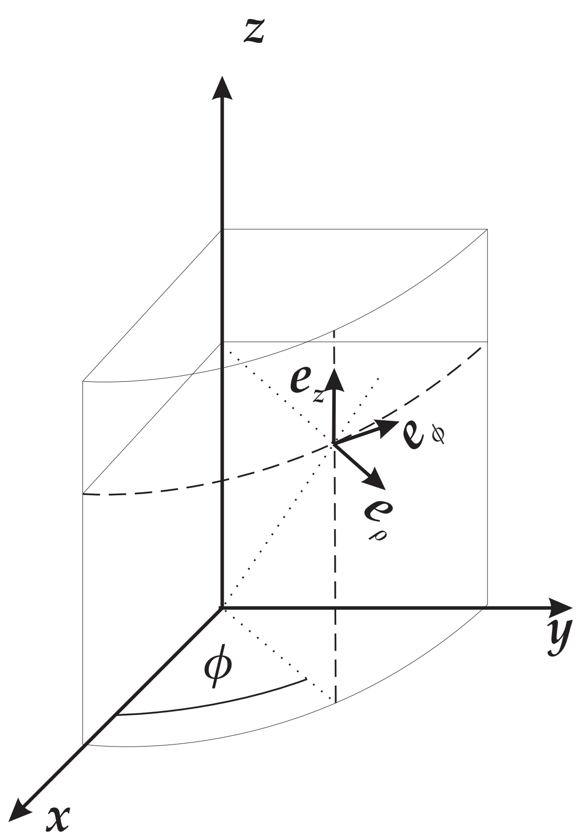

Рис. 8

противоположные направления на противоположных гранях. Точно так же вычисляется поток еще через две пары параллельных граней:

$$a_\theta(\overline{r}, \theta + d\theta, \overline{\varphi})[dr \cdot r\sin(\theta + d\theta)d\varphi] - a_\theta(\overline{r}, \theta, \overline{\varphi})[dr \cdot r\sin\theta d\varphi] \approx$$
$$\approx \frac{\partial(\sin\theta a_\theta)}{\partial\theta}\frac{1}{r\sin\theta}dV$$

и

$$a_\varphi(\overline{r}, \overline{\theta}, \varphi + d\varphi)[dr \cdot rd\theta] - a_\varphi(\overline{r}, \overline{\theta}, \varphi)[dr \cdot rd\theta] \approx \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}dV.$$

Складывая все три величины и деля на dV, находим выражение для дивергенции в сферических координатах:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}. \tag{1.34}$$

Из инвариантного определения ротора (1.13) следует, что для определения компонент $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в точке M в некоторой системе координат требуется вычислить циркуляцию $\mathbf{a}$ по трем контурам, ограничивающим бесконечно малые плоские площадки, включающие точку M и перпендикулярные базисным векторам, проведенным из этой точки. Вычислим циркуляцию $\mathbf{a}$ по прямоугольному контуру, ограничивающему нижнюю грань элемента объема в ц.с.к. (рис. 6). Поскольку стороны прямоугольника направлены по координатным линиям, а по величине равны $(\rho + d\rho)d\varphi, d\rho, \rho d\varphi, d\rho$, то циркуляция $\mathbf{a}$ выражается через четыре слагаемых:

$$a_\varphi(\rho + d\rho, \overline{\varphi}, z)(\rho + d\rho)d\varphi - a_\rho(\overline{\rho}, \varphi + d\varphi, z)d\rho - a_\varphi(\rho, \overline{\varphi}, z)\rho d\varphi +$$
$$+ a_\rho(\overline{\rho}, \varphi, z)d\rho \approx \left[\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right] d\rho d\varphi.$$

Деля полученное выражение на площадь грани $dS = \rho d\rho d\varphi$, находим компоненту $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в направлении базисного вектора $\mathbf{e}_z$:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}. \tag{1.35}$$

Аналогично вычисляются две другие компоненты:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}, \tag{1.36}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_\varphi = \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}. \tag{1.37}$$

Точно так же можно найти дивергенцию в цилиндрических и ротор в сферических координатах, что предлагается сделать самостоятельно.

Исходя из выражений для $\operatorname{grad} f$ и $\operatorname{div}\mathbf{a}$, можно найти оператор Лапласа в криволинейных координатах, вычисляя $\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f$.

В с.с.к. оператор Δ имеет следующий вид:

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\,\Delta_{\theta\varphi}, \tag{1.38}$$

где Δ_r — радиальная, а $\dfrac{1}{r^2}\,\Delta_{\theta\varphi}$ — угловая часть оператора Лапласа. Поскольку $\Delta_{\theta\varphi}$ содержит производные по углам θ, φ, то явное выражение для Δ_r можно найти, вычисляя результат действия оператора Лапласа на функцию, не зависящую от угловых переменных.

Пример 1.11. Вычислить $\Delta f(r)$, где $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Решение. Учитывая, что

$$\Delta f(r) = \operatorname{div}\ \operatorname{grad} f(r) = \operatorname{div}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}\operatorname{grad}(r^{-1}\partial f/\partial r) + r^{-1}\frac{\partial f}{\partial r}\operatorname{div}\mathbf{r},$$

находим

$$\Delta f(r) = \Delta_r f(r) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) f. \qquad \blacktriangleleft$$

Таким образом,
$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right). \tag{1.39}$$
Полезно иметь в виду, что $\Delta f(r)$ можно также записать как
$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rf(r)). \tag{1.40}$$

Пример 1.12. Найти результат действия оператора Лапласа на функцию $f(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. В декартовых координатах
$$\Delta f(\rho) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(\rho).$$
Вычисляя вторую производную от f по x,
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) = \frac{x^2}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\frac{\partial f}{\partial \rho}$$
и аналогично вторую производную по y, находим
$$\Delta f(\rho) = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}, \tag{1.41}$$
или
$$\Delta f(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right). \qquad \blacktriangleleft \tag{1.42}$$

В справочных целях в приложении приведена полная сводка формул для градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа в сферических и цилиндрических координатах.

Задачи для самостоятельного решения

1.25. Найти выражение для $\operatorname{div}\mathbf{a}$ в цилиндрических координатах.

1.26. Найти выражение для $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в сферических координатах.

1.27. Вычислить $\operatorname{rot}\mathbf{r}$, $\operatorname{div}\mathbf{r}$ и $\operatorname{grad}(\mathbf{ar})$ ($\mathbf{a}$ — постоянный вектор) в сферической и цилиндрической системах координат.

1.28. Проверить эквивалентность трех форм для $\Delta f(r)$ в сферических координатах:
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right), \qquad \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rf), \qquad \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr}.$$

1.29. Найти результат действия оператора Лапласа на функцию $f(\rho)$ (где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$), используя выражения для градиента и дивергенции в цилиндрических координатах [см. (П.8), (П.9)].

1.30. Найти сферически симметричное решение уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

1.31. Найти цилиндрически симметричное решение уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

`Рекомендуемая литература: [1, приложение], [2, гл. I], [3, гл. 1], [4, гл. 1], [5, приложение].`

2. Постоянное электрическое поле

Напряженность постоянного электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{2.2}$$

где $\rho(\mathbf{r})$ — объемная плотность зарядов, создающих электрическое поле. Интегральная форма уравнения (2.1)

$$\oint\limits_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = 4\pi Q_{\text{охв}} \tag{2.3}$$

(где $Q_{\text{охв}} = \displaystyle\int_V \rho dV$ — заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности S, по которой ведется интегрирование в левой части) выражает электростатическую теорему Гаусса. В некоторых задачах с высокой степенью симметрии теорема Гаусса легко позволяет находить напряженность поля как функцию координат.

Уравнение (2.2) позволяет ввести электростатический потенциал соотношением

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \tag{2.4}$$

Потенциал $\varphi(\mathbf{r})$, который наравне с напряженностью $\mathbf{E}$ характеризует постоянное электрическое поле, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{2.5}$$

Точечный заряд e с радиусом-вектором $\mathbf{r}'$ создает в точке $\mathbf{r}$ поле, потенциал и напряженность которого даются выражениями

$$\varphi = \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \qquad \mathbf{E} = \frac{e(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{2.6}$$

(закон Кулона).

Если заряды распределены с объемной плотностью $\rho(\mathbf{r}')$, то согласно закону Кулона для точечного заряда $\rho(\mathbf{r}')dV'$ и принципу суперпозиции потенциал φ и напряженность $\mathbf{E}$ в точке наблюдения с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ можно представить в следующем виде:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'. \tag{2.8}$$

Потенциал (2.7) удовлетворяет уравнению Пуассона (2.5) и является его решением в неограниченном пространстве, если объемный интеграл сходится.

Если заряды в пространстве распределены по поверхности с поверхностной плотностью σ, то потенциал вычисляется по формуле

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')dS'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{2.9}$$

Линейный контур, заряженный с линейной плотностью λ, создает электрическое поле с потенциалом

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\lambda(\mathbf{r}')dl'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{2.10}$$

Выражения (2.7), (2.8) упрощаются на больших расстояниях от системы зарядов. Если начало координат, из которого проводится радиус-вектор $\mathbf{r}$ в точку наблюдения и радиусы-векторы к зарядам, берется внутри заряженной системы, то при $r \gg a$ (a — линейный размер системы)

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{dr}}{r^3} + \frac{Q_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta}{2r^5}, \tag{2.11}$$

где введены обозначения

$$q = \int \rho(\mathbf{r})dV, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{d} = \int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}dV, \tag{2.13}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho(\mathbf{r})(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})dV. \tag{2.14}$$

Величины (2.12), (2.13) и (2.14) называются полным зарядом, дипольным моментом и тензором квадрупольного момента системы зарядов.

В случае зарядов e_i, расположенных в точках с радиусами-векторами $\mathbf{r}_i$ $(i = 1, \dots, N)$, объемная плотность зарядов выражается через δ-функцию:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \tag{2.15}$$

а величины (2.13), (2.14) принимают вид

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{N} e_i \mathbf{r}_i, \tag{2.16}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} e_i (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}). \tag{2.17}$$

Если заряды в пространстве распределены по поверхности с поверхностной плотностью σ, то полный заряд, дипольный момент и тензор квадрупольного момента выражаются через интегралы (2.12), (2.13), (2.14), в которых произведена замена

$$\rho(\mathbf{r}) dV \to \sigma(\mathbf{r}) dS, \tag{2.18}$$

а интегрирование производится по заряженной поверхности.

Аналогично для линейного контура, заряженного с линейной плотностью λ, в интегралах (2.12), (2.13), (2.14) производится замена

$$\rho(\mathbf{r}) dV \to \lambda(\mathbf{r}) dl, \tag{2.19}$$

а интегрирование производится по заряженному контуру.

Энергия электростатического поля

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 dV \tag{2.20}$$

может быть также вычислена по формуле

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV. \tag{2.21}$$

Электростатическая энергия взаимодействия двух систем, заряженных с объемными плотностями $\rho_1(\mathbf{r})$ и $\rho_2(\mathbf{r})$, вычисляется по формуле

$$U = \int \frac{\rho_1(\mathbf{r}) \rho_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'. \tag{2.22}$$

Потенциальная энергия зарядов, распределенных с плотностью $\rho(\mathbf{r})$ во внешнем электрическом поле с потенциалом $\varphi(\mathbf{r})$, определяется выражением

$$U = \int \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})dV. \tag{2.23}$$

Если потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ внешнего электрического поля незначительно меняется на протяжении заряженной системы, то выражение (2.23) заменяют сходящимся рядом

$$U = q\varphi(\mathbf{r}) - \mathbf{dE} + \frac{1}{6}\,Q_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \ldots \tag{2.24}$$

Здесь потенциал и напряженность внешнего электрического поля, а также производные от потенциала берутся в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, лежащей внутри рассматриваемой системы. Эта внутренняя точка служит началом д.с.к., в которой определены величина $\mathbf{d}$ и $Q_{\alpha\beta}$.

Сила $\mathbf{F}$ и момент $\mathbf{K}$ сил, приложенные к заряженной системе во внешнем электрическом поле напряженностью $\mathbf{E}$, даются выраженими

$$\mathbf{F} = \int \rho\mathbf{E}dV, \tag{2.25}$$

$$\mathbf{K} = \int [\mathbf{rE}]\rho dV. \tag{2.26}$$

В частном случае электронейтральной системы с дипольным моментом $\mathbf{d}$ во внешнем квазиоднородном поле соотношения (2.25), (2.26) принимают вид

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{dE}) = (\mathbf{d}\nabla)\mathbf{E}, \tag{2.27}$$

$$\mathbf{K} = [\mathbf{dE}]. \tag{2.28}$$

При помощи максвелловского тензора натяжений

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2}E^2\delta_{\alpha\beta}) \tag{2.29}$$

суммарную электростатическую силу (2.25), действующую на объем V, внутри которого распределен заряд с объемной плотностью ρ, можно вычислить через силы, приложенные к поверхности этого объема:

$$F_\alpha = \int\limits_V \rho E_\alpha dV = \oint\limits_S T_{\alpha\beta}n_\beta dS, \tag{2.30}$$

где $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к замкнутой поверхности S, ограничивающей объем V.

Примеры решения задач

Пример 2.1. Шар радиусом R заряжен по объему зарядом Q с постоянной плотностью ρ. Найти распределение напряженности поля $\mathbf{E}$ внутри и вне шара.

Решение. В силу сферической симметрии в распределении заряда напряженность поля $\mathbf{E}$ направлена по радиусу, а модуль вектора $\mathbf{E}$ зависит только от расстояния до центра шара: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}$. Применив теорему Гаусса (2.3) к сферической поверхности радиусом $r \leqslant R$, концентрической заряженному шару, получим

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3; \qquad E = \frac{4}{3}\pi\rho r; \qquad \mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r} = \frac{Q}{R^3}\mathbf{r}.$$

Для аналогичной сферической поверхности радиусом $r > R$ имеем

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3; \qquad E = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r^2}; \quad \mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r^3}\mathbf{r} = \frac{Q}{r^3}\mathbf{r}.$$

Итак,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r} = \dfrac{Q}{R^3}\mathbf{r} & \text{при } r \leqslant R, \\ \dfrac{4}{3}\pi\rho\dfrac{R^3}{r^3}\mathbf{r} = \dfrac{Q}{r^3}\mathbf{r} & \text{при } r > R. \end{cases} \qquad \blacktriangleleft \tag{2.31}$$

Поле вне шара таково, как если бы весь заряд был сосредоточен в его центре, а внутри шара поле прямо пропорционально расстоянию от центра шара.

Пример 2.2. Найти напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ (рис. 9).

Решение. Из симметрии следует, что напряженность поля перпендикулярна плоскости. Применим теорему Гаусса, взяв в качестве вспомогательной поверхность цилиндра с основаниями, параллельными плоскости и находящимися на равных расстояниях от нее. Поток вектора $\mathbf{E}$ через боковую поверхность равен нулю, так как $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}_{\text{бок}}$, поэтому $\oint \mathbf{E}d\mathbf{S} = 2ES$, S — площадь основания цилиндра. Заряд, охваченный поверхностью цилиндра, равен σS. Поэтому согласно (2.3) получаем

$$E = 2\pi\sigma.$$

Напряженность имеет противоположные направления с разных сторон плоскости, так что нормальная составляющая претерпевает скачок $4\pi\sigma$ при переходе через плоскость. $\blacktriangleleft$

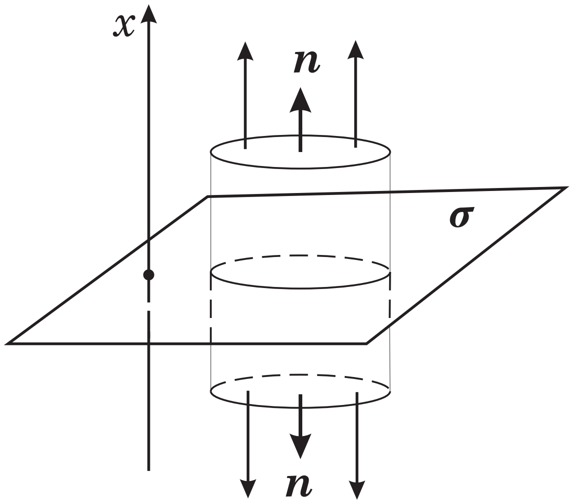

Рис. 9

Пример 2.3. Найти напряженность E и потенциал φ электрического поля бесконечной нити, равномерно заряженной с линейной плотностью λ (рис. 10).

Решение. Напряженность в любой точке пространства направлена

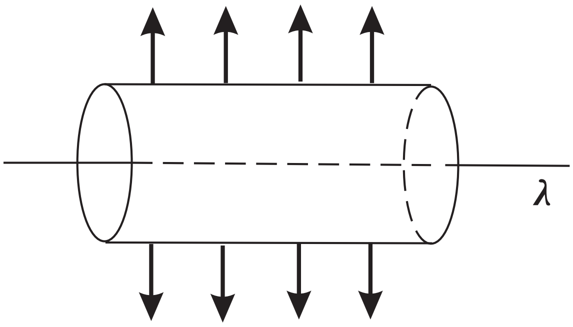

Рис. 10

вдоль перпендикуляра к нити, а величина E зависит только от расстояния ρ до нити. В качестве гауссовой поверхности выберем цилиндр, ось которого находится на нити. По теореме Гаусса найдем напряженность

$$E(\rho) = \frac{2\lambda}{\rho}.$$

Зная напряженность, с помощью (2.4) и (1.33) найдем потенциал

$$\varphi(\rho) = -2\lambda \ln \frac{\rho}{\rho_0},$$

где ρ_0 — расстояние до нити, при котором потенциал принят равным нулю. ◄

Пример 2.4. Найти распределение потенциала электрического поля, создаваемого шаром радиусом R, равномерно заряженным по объему полным зарядом Q.

Решение. Наличие симметрии в этой и некоторых других задачах позволяет найти потенциал, непосредственно решая уравнения Пуассона (2.5) в частных производных путем разделения переменных и сведения его к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ясно, что потенциал рассматриваемого поля зависит только от расстояния до центра шара, $\varphi = \varphi(r)$, потому согласно (1.39) уравнение Пуассона принимает вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = -4\pi\rho, \tag{2.32}$$

где

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \equiv \dfrac{Q}{4\pi R^3/3} & \text{при} \quad r \leqslant R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R. \end{cases}$$

Интегрированием находим:
1) внутри шара ($r \leqslant R$)

$$r^2\frac{d\varphi_1}{dr} = -\frac{4\pi\rho_0 r^3}{3} + C_1, \qquad \varphi_1 = -\frac{4\pi\rho_0}{3}\frac{r^2}{2} - \frac{C_1}{r} + C_2;$$

из условия ограниченности потенциала при $r = 0$ следует, что $C_1 = 0$;
2) вне шара ($r > R$)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_2}{dr}\right) = 0, \qquad \varphi_2 = -\frac{C_3}{r} + C_4;$$

из условия $\varphi\Big|_{r=\infty} = 0$ следует, что $C_4 = 0$.

Постоянные интегрирования C_2 и C_3 определяются граничными условиями $\varphi_1 = \varphi_2$ и $\dfrac{d\varphi_1}{dr} = \dfrac{d\varphi_2}{dr}$ при $r = R$ (поскольку правая часть (2.32) имеет в этой точке лишь конечный разрыв), которые приводят к уравнениям

$$\begin{cases} -2\pi\rho_0 R^2/3 + C_2 = -C_3/R, \\ \quad -4\pi\rho_0 R/3 = C_3/R^2. \end{cases}$$

Решая их, определяем значения постоянных $C_3 = -Q$, $C_2 = 3Q/(2R)$ и находим потенциал

$$\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{3Q}{2R} - \dfrac{Q}{2R^3}r^2 & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant R, \\ \dfrac{Q}{r} & \text{при } r > R. \end{cases} \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 2.5. Каким распределением зарядов создается потенциал, в сферических координатах имеющий вид $\varphi(r) = (q/r)\exp(-\alpha r)$, где α, q — постоянные?

Решение. Действуя оператором Лапласа на потенциал, получим

$$\Delta\varphi = q\Delta\frac{e^{-\alpha r}}{r} = q\Delta\frac{1}{r} + q\Delta\frac{e^{-\alpha r}-1}{r} =$$
$$= -4\pi q\delta(\mathbf{r}) + \frac{q}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r\frac{e^{-\alpha r}-1}{r}\right) = -4\pi q\delta(\mathbf{r}) + \frac{q\alpha^2 e^{-\alpha r}}{r}$$

[результат действия оператора Δ на $1/r$ можно получить из формул (2.5), (2.6), (2.15)]. Таким образом, имеется точечный заряд q в начале координат и сферически симметрично распределенный объемный заряд с плотностью $\rho = -\dfrac{q\alpha^2 e^{-\alpha r}}{4\pi r}$, $\displaystyle\int \rho dV = -q$. ◄

Пример 2.6. В шаре, равномерно заряженном по объему с постоянной плотностью ρ, имеется сферическая полость, центр которой отстоит от центра шара на расстояние a. Полость находится целиком внутри шара. Найти напряженность поля внутри полости (рис. 11).

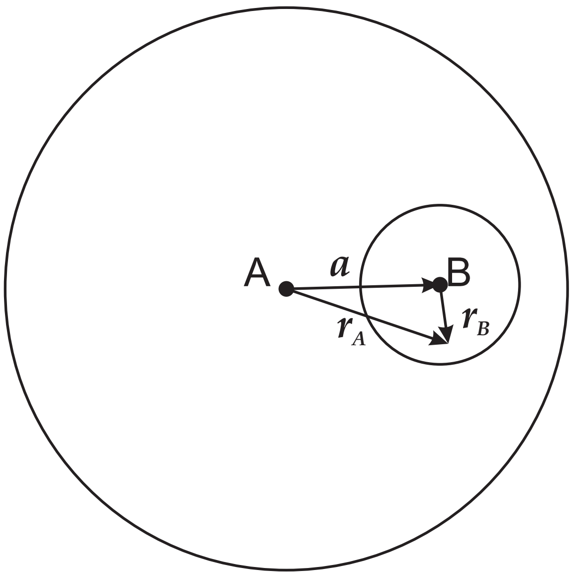

Рис. 11

Воспользовавшись принципом суперпозиции, представим напряженность $\mathbf{E}_A$ поля сплошного шара с центром в точке A как сумму напряженности $\mathbf{E}_B$ поля малого шара с центром в точке B и напряженности $\mathbf{E}$ тела с полостью. Отсюда

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A - \mathbf{E}_B. \tag{2.33}$$

Согласно (2.31) для точек внутри полости $\mathbf{E}_A = \dfrac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r}_A$, $\mathbf{E}_B = \dfrac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r}_B$. Поскольку $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{a}$, то

$$\mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{a}.$$

Таким образом, поле внутри полости однородно. Обратим внимание, что формула (2.33) позволяет найти поля шара с полостью в произвольной точке пространства, если известны радиусы R_A и R_B. ◀

Пример 2.7. Найти потенциал φ и напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля на оси круглого тонкого диска радиусом a, равномерно заряженного с поверхностной плотностью σ (рис. 12).

Решение. Направим ось z по оси диска. Элемент диска с площадью dS', находящийся на расстоянии ρ' от центра, создает в точке с координатой z на оси диска потенциал $d\varphi = \sigma dS'/\sqrt{z^2+\rho'^2}$. Весь диск создает в этой точке потенциал

$$\varphi = \int \frac{\sigma dS'}{\sqrt{\rho'^2+z^2}}.$$

Вычисляя интеграл в полярной системе координат (ρ', α'), получим

$$\varphi = \sigma \int\limits_0^a \frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2+z^2}} \int\limits_0^{2\pi} d\alpha' = 2\pi\sigma(\sqrt{z^2+a^2} - |z|). \tag{2.34}$$

Напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля на оси направлена, очевидно, вдоль оси, поэтому формула (2.4) дает

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -2\pi\sigma\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - \operatorname{sign} z\right). \tag{2.35}$$

Расчет напряженности по формуле (2.8) [с заменой (2.18)] приводит к тому же результату (проверьте!). Из физических соображений ясно, что при больших значениях $|z|$ поле диска становится похожим на поле точечного заряда, а при малых — на поле бесконечной плоскости. Убедитесь в этом, исследуя выражения (2.34), (2.35) при $|z| \gg a$ и $|z| \ll a$. ◀

Пример 2.8. Отрезок нити длиной $2l$ равномерно заряжен с линейной плотностью λ. Найти потенциал в произвольной точке пространства.

Решение. Выберем систему координат с началом в центре отрезка и осью z, направленной вдоль него. Тогда согласно (2.10)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_{-l}^{+l} \frac{\lambda dz'}{\sqrt{x^2+y^2+(z'-z)^2}}.$$

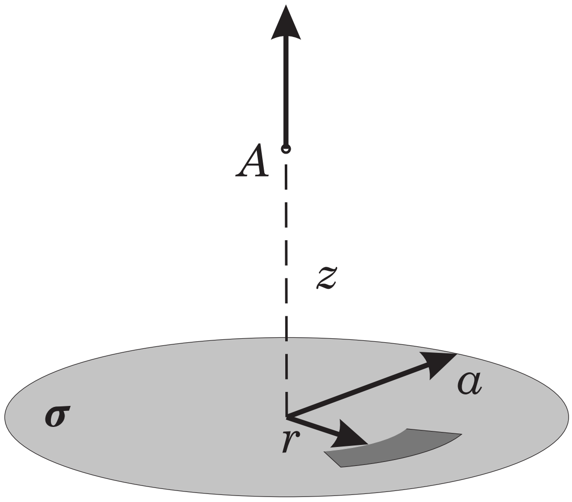

Рис. 12

Интегрирование дает

$$\varphi = \lambda \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + (l-z)^2} + l - z}{\sqrt{\rho^2 + (l+z)^2} - l - z}, \tag{2.36}$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$. Рассмотрим поле вблизи центра отрезка: $|x|, |y|, |z| \ll l$. Опуская x, y, z в числителе под логарифмом и разлагая корень в знаменателе

$$\sqrt{\rho^2 + (l+z)^2} = (l+z)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{(l+z)^2}} \approx (l+z)\left(1 + \frac{\rho^2}{2(l+z)^2}\right),$$

находим

$$\varphi \approx -2\lambda \ln \frac{\rho}{2l}. \tag{2.37}$$

Поскольку вблизи отрезка потенциал зависит только от ρ, то напряженность поля в ц.с.к. имеет единственную компоненту [см. (1.33)]:

$$E_\rho \approx \frac{2\lambda}{\rho}. \tag{2.38}$$

Последний результат легко получить, находя напряженность поля заряженной бесконечной прямой нити по теореме Гаусса.

Вдали от отрезка нити, когда $l \ll r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, имеем

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z \pm l)^2} \approx r(1 \pm zl/r^2).$$

Упрощая точное выражение (2.36), получаем потенциал точечного заряда $2\lambda l$:

$$\varphi \approx \lambda \ln \frac{r - zl/r + l - z}{r + zl/r - l - z} = \lambda \ln \frac{r+l}{r-l} \approx \frac{2\lambda l}{r}. \qquad \blacktriangleleft \tag{2.39}$$

Пример 2.9. Используя принцип суперпозиции, найти электростатический потенциал, создаваемый сферой радиусом a, равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ.

Решение. Применение принципа суперпозиции и закона Кулона приводит к выражению (2.9). Поскольку величина потенциала зависит только от расстояния до центра сферы (в нем расположим начало координат), то, не ограничивая общности, выберем точку наблюдения на оси z. Учитывая, что $|\mathbf{r}'| = a$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta'}$, а элемент площади на сфере $dS' = a^2 \sin\theta' d\theta' d\alpha'$ (r', θ', α' — координаты с.с.к.), приходим к

$$\varphi = 2\pi\sigma a^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta'}} = \frac{2\pi\sigma a}{r}(r + a - |r - a|).$$

Рассматривая области внутри ($r < a$) и снаружи ($r > a$) сферы, получим

$$\varphi(r) = \begin{cases} 4\pi a\sigma & \text{при } r \leqslant a, \\ \dfrac{4\pi a^2\sigma}{r} & \text{при } r > a. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

Пример 2.10. Сфера радиусом R заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. Найти скалярный потенциал в произвольной точке пространства.

Решение. Формулы (2.7), (2.9), (2.10) в общем виде определяют потенциал поля по плотности зарядов (если интегралы в них сходятся). Для вычисления интегралов полезно использовать разложение функции $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ по сферическим функциям (*мультипольное разложение*):

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \alpha) Y_{lm}^*(\theta', \alpha'). \tag{2.40}$$

Здесь $r_< = \min(r, r')$; $r_> = \max(r, r')$; Y_{lm} — сферическая функция (некоторые сведения о них приведены в прил. 2); θ, α — углы вектора $\mathbf{r}$; θ', α' — углы вектора $\mathbf{r}'$ в некоторой сферической системе координат. Поскольку в членах ряда (2.40) зависимость от r', θ', α' выделена в факторизованном виде, это упрощает интегрирование в (2.7), (2.9), (2.10) и позволяет преобразовать общие выражения для потенциала.

Применим мультипольное разложение к вычислению потенциала сферы. Подставляя (2.40) в (2.9) и учитывая, что на сфере $dS' = R^2 \sin\theta' d\theta' d\alpha'$, а также выражая $\cos\theta'$ через Y_{10} по формуле (П.17), получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = R^2 \sum_{kq} \frac{4\pi\sigma_0}{2k+1} \frac{r_<^k}{r_>^{k+1}} Y_{kq}(\theta, \alpha) \int \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta', \alpha') Y_{kq}^*(\theta', \alpha') \sin\theta' d\theta' d\alpha'.$$

Интеграл здесь, согласно условию ортогональности (П.18), пропорционален произведению символов Кронекера $\delta_{k1}\delta_{q0}$, поэтому от суммы остается единственный член и

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\sigma_0}{3} R^2 \frac{r_<}{r_>^2} \cos\theta.$$

Отсюда находим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{4\pi\sigma_0}{3} r\cos\theta & \text{при } r \leqslant R, \\ \dfrac{4\pi\sigma_0}{3}\dfrac{R^3}{r^2}\cos\theta & \text{при } r > R. \end{cases} \quad ◀$$

Пример 2.11. Равномерно заряженная половина тонкого стержня имеет заряд q, другая половина имеет заряд $-q$. Длина стержня — $2l$. Найти дипольный момент стержня.

Решение. Очевидно, что дипольный момент $\mathbf{d}$ направлен вдоль стержня в сторону положительного заряда. Направив ось x с началом в середине стержня вдоль $\mathbf{d}$, вычислим

$$d_x = \int_{-l}^{+l} \lambda(x) x dx = \int_{-l}^{0} (-q/l) x dx + \int_{0}^{+l} (q/l) x dx = ql. \tag{2.41}$$

Обратим внимание, что дипольный момент стержня, как и любой электронейтральной системы, можно представить в виде

$$\mathbf{d} = q(\mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-), \tag{2.42}$$

где $\mathbf{R}^\pm$ — радиусы-векторы центров положительного и отрицательного зарядов, q — суммарный положительный заряд. ◀

Пример 2.12. Верхняя половина шара равномерно заполнена зарядом q, нижняя половина — зарядом $-q$. Радиус шара — R. Найти дипольный момент $\mathbf{d}$ шара.

Решение. Выберем начало координат в центре шара и направим ось z вертикально в сторону положительных зарядов. Тогда $\mathbf{d} = (0, 0, d_z)$. Вычисляя $d_z = \displaystyle\int z\rho(\mathbf{r}) dV$ в сферических координатах,

$$d_z = \frac{3q}{2\pi R^3} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{3q}{2\pi R^3} \int_0^R r^3 dr \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

находим

$$d = \frac{3}{4} qR. \quad ◀$$

Пример 2.13. В вершинах квадрата со стороной $2a$ расположены точечные заряды $\pm e$ так, что соседние заряды имеют разные знаки (плоский квадруполь). Найти тензор квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$ в системе координат с осями x и y, направленными по диагоналям квадрата.

Решение. Очевидно, что выбранные оси координат являются главными для тензора квадрупольного момента, т.е. $Q_{\alpha\beta}$ диагонален в этих осях. Пусть на оси x расположены заряды e, тогда на оси y лежат заряды $-e$. Вычислим согласно (2.17)

$$Q_{xx} = 2[e(3 \cdot 2a^2 - 2a^2)] + 2(-e)(-2a^2) = 12ea^2.$$

Аналогично $Q_{yy} = -12ea^2$, $Q_{zz} = 0$. ◀

Пример 2.14. Шар, по которому равномерно распределен заряд q, находится на большом расстоянии от элементарного диполя $\mathbf{d}$. Найти силу, действующую на диполь.

Решение. Согласно (2.24) энергия диполя в поле шара дается выражением

$$U = -\mathbf{dE},$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность поля, создаваемая шаром, т.е. $\mathbf{E} = \dfrac{q\mathbf{r}}{r^3}$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от шара к диполю. Вычисляя силу, действующую на диполь как $\mathbf{F} = -\nabla U$, находим

$$\mathbf{F} = -\frac{3q(\mathbf{dr})\mathbf{r}}{r^5} + \frac{q\mathbf{d}}{r^3}. \qquad ◀$$

Пример 2.15. Заряд Q равномерно распределен по поверхности сферы радиусом R. Найти абсолютную величину силы, разрывающую сферу на две равные части.

Решение. На произвольный элемент dS поверхности сферы действует сила $d\mathbf{F}$, направленная по нормали $\mathbf{n}$ к поверхности. Чтобы найти величину этой силы, требуется вычислить напряженность электрического поля $\mathbf{E}'$, создаваемого всей остальной частью заряженного шара в месте нахождения выделенного элемента dS. Представим по принципу суперпозиции поле $\mathbf{E}$ заряженной сферы как векторную сумму $\mathbf{E}'$ и поля $\mathbf{E}''$, создаваемого элементом dS. В непосредственной близости от сферы снаружи напряженность $E = Q/R^2$, а внутри $E = 0$. Элемент dS при вычислении поля непосредственно у поверхности сферы можно считать плоским, поэтому поле $\mathbf{E}''$ имеет одинаковую величину и противоположное направление внутри и снаружи сферы. Таким образом, получаем два уравнения: $E' + E'' = Q/R^2$, $E' - E'' = 0$. Отсюда находим $\mathbf{E}' = \dfrac{Q}{2R^2}\mathbf{n}$ и

$$d\mathbf{F} = \sigma \mathbf{E}' dS = \frac{Q^2}{8\pi R^4}\mathbf{n} dS.$$

Направим ось z по оси полусферы, тогда суммарная сила $\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = F\mathbf{k}$. Без вычислений ясно, что при интегрировании по поверхности полусферы $\int \mathbf{n} dS = \mathbf{k} \int \cos\alpha dS = \pi R^2 \mathbf{k}$ (здесь α — угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$), поскольку $\int \cos\alpha dS$ есть проекция поверхности полусферы на ее основание. Окончательно: на половину сферы действует сила

$$F = \frac{Q^2}{8R^2}. \tag{2.43}$$

Задача также может быть решена с использованием максвелловского тензора натяжений (2.29). Согласно (2.30)

$$F_\alpha = \int T_{\alpha\beta} n_\beta dS.$$

Подставляя в (2.29) напряженность поля на поверхности $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{R^2}\mathbf{n}$ и проводя вычисления, приходим к (2.43). ◀

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Найти напряженность $\mathbf{E}$ электростатического поля, потенциал φ которого равен: а) $-\mathbf{ar}$; б) $\mathbf{a}[\mathbf{br}]$; в) $\mathbf{dr}/r^3$; г) $F(f(\mathbf{ar}))$. Здесь векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ не зависят от координат и времени, а f и F — произвольные дифференцируемые функции своего аргумента.

Ответ: а) $\mathbf{a}$; б) $[\mathbf{ba}]$; в) $3(\mathbf{dr})\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{d}/r^3$; г) $-\dfrac{dF}{df}\dfrac{df}{d(\mathbf{ar})}\mathbf{a}$.

2.2. Можно ли создать в пространстве электростатическое поле с напряженностью: а) $\mathbf{E} = [\mathbf{ar}]$; б) $\mathbf{E} = a(y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y)$?

2.3. Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в пространстве равна:

а) $(\mathbf{br})\mathbf{b}$; б) $gr\mathbf{r}$;

в) $\dfrac{e\mathbf{r}}{r^3}\left\{1 - \left[1 + \dfrac{2r}{a}\left(1 + \dfrac{r}{a}\right)\right]\exp\left(-\dfrac{2r}{a}\right)\right\}$.

Здесь вектор $\mathbf{b}$ и величины a, g и e не зависят от координат, а f — произвольная дифференцируемая функция своего аргумента. Найти распределение объемной плотности ρ заряда, создавшего это поле (обратная задача электростатики).

Ответ: а) $\dfrac{b^2}{4\pi}$; б) $\dfrac{gr}{\pi}$; в) $\dfrac{e}{\pi a^3}e^{-2r/a}$.

2.4. Напряженность электростатического поля определяется выражением: а) $\mathbf{E} = E_1\mathbf{e}_x + E_2\mathbf{e}_y + E_3\mathbf{e}_z$ $(E_1, E_2, E_3$ — константы); б) $\mathbf{E} = \dfrac{a}{r^3}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ (a — константа). Найти потенциал поля.

2.5. В шаре радиусом R_2 равномерно заряжен с объемной плотностью ρ внешний шаровой слой. Внутренний радиус слоя R_1. Найти распределение напряженности поля $\mathbf{E}$ во всех точках пространства.

$$\textit{Ответ:}\quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \text{для } r \leqslant R_1; \\ \dfrac{4}{3}\pi\rho\dfrac{r^3 - R_1^3}{r^3}\mathbf{r}, & \text{для } R_1 < r \leqslant R_2; \\ \dfrac{4}{3}\pi\rho\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{r^3}\mathbf{r}, & \text{для } r > R_2. \end{cases}$$

2.6. Прямой круглый цилиндр бесконечной длины с радиусом сечения R заряжен равномерно с объемной плотностью ρ. Найти величину напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ во всех точках пространства: а) по теореме Гаусса; б) непосредственно решая уравнение Пуассона.

$$\textit{Ответ:}\quad E(r) = \begin{cases} 2\pi\rho r, & \text{для } r \leqslant R, \\ 2\pi\rho R^2/r, & \text{для } r > R, \end{cases}$$

r – расстояние до оси цилиндра.

2.7. Заряд распределен в пространстве по периодическому закону $\rho(x, y, z) = \rho_0 \cos\alpha x \cos\beta y \cos\gamma z$. Вычислить потенциал φ электрического поля.

2.8. Каким должно быть распределение зарядов, чтобы созданный ими потенциал имел в сферических координатах вид

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{a}\left(\frac{a}{r} + 1\right)\exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где e_0, a — постоянные?

Ответ: Точечный заряд e_0 в начале координат, окруженный объемным зарядом с плотностью $\rho(r) = -\dfrac{e_0}{\pi a^3}e^{-\frac{2r}{a}}$.

2.9. Заряд распределен сферически симметричным образом: $\rho = \rho(r)$. Записать φ и $\mathbf{E}$ в виде однократных интегралов по r, разбив распределение зарядов на сферические слои.

$$\textit{Ответ:}\qquad \varphi(r) = \frac{4\pi}{r}\int\limits_0^r \rho(r')r'^2 dr' + 4\pi\int\limits_r^\infty \rho(r')r' dr';$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{4\pi\mathbf{r}}{r^3}\int\limits_0^r \rho(r')r'^2 dr'.$$

2.10. Основываясь на результате предыдущей задачи, найти потенциал и напряженность поля равномерно заряженного шара.

2.11. Выразить потенциал φ равномерно заряженного тонкого кольца с зарядом q и радиусом R через однократный интеграл.
Указание: провести плоскость xz через точку наблюдения.

$$\textit{Ответ:} \qquad \varphi(r,\theta) = \frac{q}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{d\alpha'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\sin\theta\cos\alpha'}}.$$

2.12. Найти потенциал и напряженность электрического поля в центре окружности радиусом a, частью которой является дуга, равномерно заряженная с линейной плотностью λ. Центральный угол дуги $2\alpha_0$ (рис. 13).

$$\textit{Ответ:} \qquad \varphi = 2\lambda\alpha_0; \quad E = \frac{2\lambda}{a}\sin\alpha_0.$$

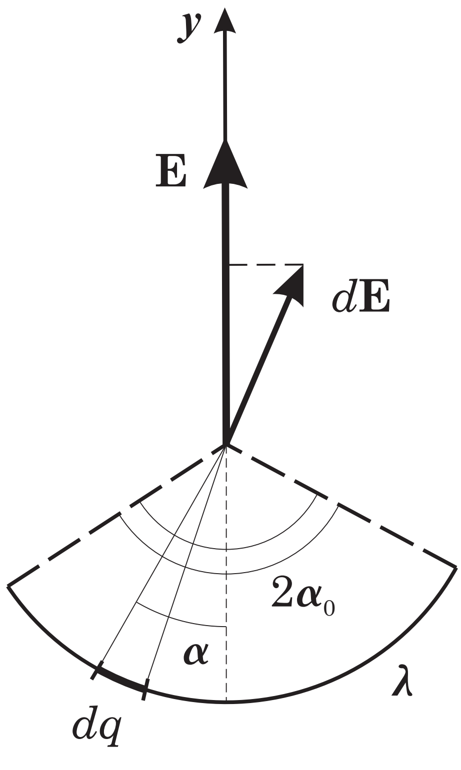

Рис. 13

2.13. Заряд равномерно распределен по отрезку с линейной плотностью λ. Вычислить напряженность поля в точке A, положение которой по отношению к отрезку задано расстоянием y до прямой и двумя углами α_1 и α_1 (рис. 14).
Указание: использовать переменную интегрирования $x = -y\operatorname{ctg}\alpha$.

$$\textit{Ответ:} \qquad E_x = \frac{\lambda}{y}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1), \quad E_y = \frac{\lambda}{y}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

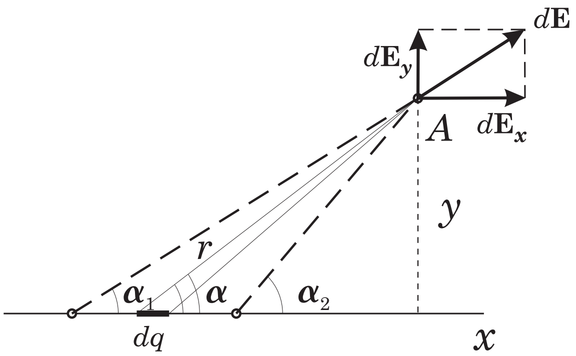

Рис. 14

2.14. Шар радиусом R заряжен с объемной плотностью $\rho = \rho_0 \cos\theta$. Найти скалярный потенциал в произвольной точке пространства.

$$\textit{Ответ:} \quad \varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \pi\rho_0 r \left(\dfrac{4}{3}R - r\right)\cos\theta & \text{при } r \leqslant R, \\ \dfrac{\pi\rho_0 R^4}{3}\dfrac{\cos\theta}{r^2} & \text{при } r > R. \end{cases}$$

2.15. Найти дипольный момент тонкого стержня длиной $2l$, линейная плотность заряда на котором изменяется по закону $\lambda = kx$ (k — константа, ось x направлена вдоль стержня).

$$\textit{Ответ:} \qquad \mathbf{d} = \frac{2}{3}kl^3\mathbf{i}.$$

2.16. Сфера радиусом R с центром в начале координат заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = \varkappa z$, где $\varkappa$ — константа, z — координата соответствующей точки сферы. Найти дипольный момент $\mathbf{d}$ сферы.

$$\textit{Ответ:} \qquad \mathbf{d} = \frac{4\pi}{3}\varkappa R^4\mathbf{k}.$$

2.17. В бесконечной плоскости, заряженной с поверхностной плотностью σ, вырезано отверстие площадью S. Найти напряженность поля на больших расстояниях от отверстия, учитывая члены $\sim 1/r^2$ включительно.

2.18. Окружность состоит из двух полуокружностей, равномерно заряженных зарядами одинаковой величины и противоположного знака. Определить компоненты вектора дипольного момента и тензора квадрупольного момента.

2.19. Заряды q, $-2q$, q расположены на оси z в точках с координатами $-a$, 0, a соответственно (линейный квадруполь). Найти потенциал φ на большом расстоянии от системы.

$$\textit{Ответ:}\qquad \varphi \approx \frac{2qa^2}{r^3}P_2(\cos\theta);\qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1).$$

2.20. Вычислить собственную электрическую энергию U заряженного шара радиусом R, если заряд Q равномерно распределен по объему шара.

$$\textit{Ответ:}\qquad U = \frac{3Q^2}{5R}.$$

2.21. Диполь с моментом $\mathbf{d}_1$ расположен в начале координат, другой диполь с моментом $\mathbf{d}_2$ находится в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Найти энергию взаимодействия диполей.

$$\textit{Ответ:}\qquad U = \frac{\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{d}_1\mathbf{r})(\mathbf{d}_2\mathbf{r})}{r^5}.$$

2.22. Шар радиусом R однородно заряжен с объемной плотностью ρ. Используя максвелловский тензор натяжений, найти силу $\mathbf{F}$, разрывающую шар на две равные половины. Подтвердить полученный результат независимым вычислением с использованием формулы $\mathbf{F} = \int \rho\mathbf{E}dV$, где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля шара.

$$\textit{Ответ:}\qquad F = \frac{3Q^2}{16R^2}.$$

Рекомендуемая литература: [1, гл. I], [2, гл. II], [3, гл. 2], [4, гл. 3, 4].

3. Постоянное магнитное поле

Постоянное магнитное поле в вакууме создается постоянными токами. Распределение токов в пространстве характеризуется объемной плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, а на поверхности — поверхностной плотностью $\mathbf{i}(\mathbf{r})$. Кроме того, в пространстве может быть задан линейный ток J, текущий по очень тонкому длинному проводнику.

Индукция постоянного магнитного поля $\mathbf{B}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{3.2}$$

Интегральная форма второго из них

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} \mathbf{B}d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S \mathbf{j}d\mathbf{S} \tag{3.3}$$

называется теоремой о циркуляции магнитной индукции или законом Ампера. Поверхностный интеграл в правой части

$$J = \int\limits_S \mathbf{j} d\mathbf{S} \tag{3.4}$$

дает полный ток J через поверхность S, опирающуюся на контур $\mathcal{L}$. Теорема о циркуляции наиболее просто позволяет найти индукцию магнитного поля, когда распределение тока обладает аксиальной симметрией или симметрией относительно плоскости.

От двух уравнений первого порядка (3.1), (3.2) удобно перейти к одному уравнению второго порядка на векторный потенциал $\mathbf{A}$, который определяется соотношением

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{3.5}$$

Векторный потенциал определен неоднозначно, так как индукция $\mathbf{B}$ не меняется, если перейти к другому векторному потенциалу при помощи преобразования

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi, \tag{3.6}$$

где $\chi = \chi(\mathbf{r})$ — произвольная функция. Пользуясь неоднозначностью в выборе векторного потенциала, на него накладывают дополнительное условие

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{3.7}$$

В этом случае векторный потенциал магнитного поля удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{3.8}$$

Согласно (3.8), (3.5) векторный потенциал и магнитная индукция поля объемных токов представляются объемными интегралами

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}-\mathbf{r}']}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'. \tag{3.10}$$

Формулу (3.10) можно получить также из закона Био — Савара и принципа суперпозиции.

В случае линейного тока величины $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ получаются из выражений (3.9), (3.10) с помощью замены

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}')dV' \to J d\mathbf{l}', \tag{3.11}$$

которая преобразует объемные интегралы (3.9), (3.10) в криволинейные. Аналогично для поверхностных токов в интегралах (3.9), (3.10) следует сделать замену

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}')dV' \to \mathbf{i}(\mathbf{r}')dS'. \tag{3.12}$$

На больших расстояниях r от ограниченной области, в которой текут токи, векторный потенциал и индукция магнитного поля принимают вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{[\mathbf{M}\mathbf{r}]}{r^3}, \tag{3.13}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{M}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3}, \tag{3.14}$$

где $\mathbf{M}$ — магнитный момент системы. В случае объемных токов

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{r}\mathbf{j}(\mathbf{r})]\, dV. \tag{3.15}$$

В случае плоского контура магнитный момент определяется произведением тока J на площадь контура S (т.е. не зависит от формы контура) и направлен по нормали к плоскости контура $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{M} = \frac{J}{c}S\mathbf{n}. \tag{3.16}$$

Энергию магнитного поля

$$U = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{B}^2 dV \tag{3.17}$$

можно также вычислить по формуле

$$U = \frac{1}{2c}\int \mathbf{j}\mathbf{A}dV. \tag{3.18}$$

Сила $\mathbf{F}$, приложенная к объемному току во внешнем магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$, имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c}\int [\mathbf{j}\mathbf{B}]dV, \tag{3.19}$$

а магнитная энергия взаимодействия указанного тока с внешним магнитным полем выражается через векторный потенциал $\mathbf{A}$ этого поля

$$U = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\mathbf{A}dV. \tag{3.20}$$

Если индукция $\mathbf{B}$ внешнего магнитного поля мало меняется на протяжении области пространства, где текут токи, то энергия взаимодействия (3.20) выражается через магнитный момент $\mathbf{M}$ токов

$$U = \mathbf{M}\mathbf{B}. \tag{3.21}$$

Физическая величина $\mathbf{MB}$ в магнитостатике не является потенциальной энергией. В связи с этим вводят в рассмотрение потенциальную функцию V, которая оказывается равной $-\mathbf{MB}$. Потенциальная функция позволяет представить силу, приложенную к магнитному моменту во внешнем магнитном поле в обычной форме $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V$. Таким образом, в квазиоднородном внешнем поле $\mathbf{B}$ на магнитный момент действует сила

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{MB}) \tag{3.22}$$

и момент сил

$$\mathbf{K} = [\mathbf{MB}]. \tag{3.23}$$

Суммарную объемную силу (3.19) можно заменить системой поверхностных сил, приложенных к поверхности объема V, внутри которого текут токи с объемной плотностью $\mathbf{j}$,

$$F_\alpha = \frac{1}{c}\int\limits_V [\mathbf{jB}]_\alpha dV = \oint\limits_S T_{\alpha\beta} n_\beta dS, \tag{3.24}$$

где $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали замкнутой поверхности S, ограничивающей объем V, а $T_{\alpha\beta}$ — максвелловский тензор натяжений:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}B^2\delta_{\alpha\beta}\right). \tag{3.25}$$

Примеры решения задач

Пример 3.1. По бесконечному цилиндру радиусом R параллельно его оси течет однородный ток с объемной плотностью $\mathbf{j}$. Найти индукцию магнитного поля внутри и снаружи цилиндра (рис. 15).

Решение. Наиболее просто задача решается с помощью теоремы о циркуляции. Из симметрии системы следует, что вектор индукции $\mathbf{B}$ в произвольной точке направлен по касательной к окружности с центром на оси цилиндра и плоскостью, ортогональной оси. Величина вектора $\mathbf{B}$ зависит только от расстояния r до оси цилиндра. Выбирая окружность радиусом r в качестве контура для теоремы о циркуляции (3.3), при $r > R$ получим $B \cdot 2\pi r = \dfrac{4\pi}{c} j\pi R^2$. Аналогично при $r < R$ имеем $B \cdot 2\pi r = \dfrac{4\pi}{c} j\pi r^2$. Из этих равенств находим магнитную индукцию:

$$B = \begin{cases} \dfrac{2\pi j r}{c} & \text{при } r \leqslant R, \\[2ex] \dfrac{2\pi j R^2}{cr} & \text{при } r > R. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

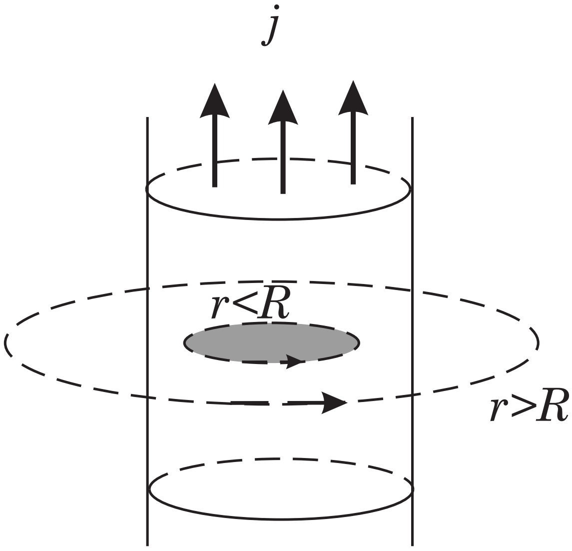

Рис. 15

Пример 3.2. По плоскости xy параллельно оси y течет однородный ток с постоянной плотностью i (рис. 16). Найти индукцию магнитного поля.

Решение. Магнитная индукция над плоскостью при $z > 0$ направлена

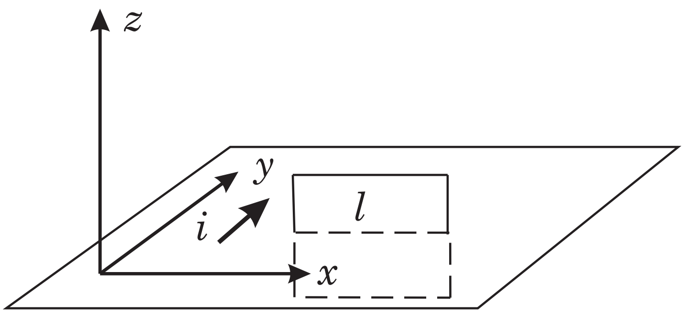

Рис. 16

вдоль оси x, а при $z < 0$ — противоположно x (в этом можно убедиться, рассмотрев вклад двух линий тока, расположенных симметрично по отношению к данной точке). Выберем прямоугольный контур, одна сторона которого проходит над плоскостью в направлении x, а другая — симметрично ей под плоскостью. Из теоремы о циркуляции получим: $2Bl = \dfrac{4\pi}{c} il$, т.е.

$$B = \frac{2\pi i}{c}. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 3.3. Бесконечный цилиндр радиусом R, равномерно заряженный с объемной плотностью ρ, вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Найти векторный потенциал $\mathbf{A}$ и индукцию $\mathbf{B}$ магнитного поля внутри и снаружи цилиндра.

Решение. Будем искать магнитное поле, решая уравнение Пуассона (3.8). Вращающийся цилиндр создает в пространстве ток с объемной плотностью

$$j_r = j_z = 0, \qquad j_\varphi = \begin{cases} \rho\omega r & \text{при} \quad r \leqslant R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R. \end{cases}$$

Необходимо использовать лапласиан в цилиндрических координатах (П.13) и учесть, что из симметрии задачи следуют равенства $A_r = A_z = 0$ и $A_\varphi = A(r)$.

Функция

$$A(r) = \begin{cases} A_1(r) & \text{при} \quad r \leqslant R, \\ A_2(r) & \text{при} \quad r > R \end{cases}$$

внутри и снаружи цилиндра удовлетворяет уравнениям Эйлера

$$r^2 \frac{d^2 A_1}{dr^2} + r\frac{dA_1}{dr} - A_1 = -\frac{4\pi}{c}\rho\omega r^3, \tag{3.26}$$

$$r^2 \frac{d^2 A_2}{dr^2} + r\frac{dA_2}{dr} - A_2 = 0 \tag{3.27}$$

и граничным условиям

$$A_1(R) = A_2(R), \quad \frac{dA_1(R)}{dr} = \frac{dA_2(R)}{dr}. \tag{3.28}$$

Векторный потенциал непрерывен в каждой точке пространства, а вдали от цилиндра не возрастает. Действительно, вращающийся цилиндр можно рассматривать как совокупность кольцевых токов. Следовательно, векторный потенциал отдельного участка цилиндра убывает на бесконечности как $1/r^2$. Полный векторный потенциал равен сумме (точнее интегралу) вкладов от всех участков цилиндра, поэтому закон его убывания $A_2 \sim 1/r$.

Частное решение уравнения (3.26), очевидно, $A_{1,\text{чр}} = -\dfrac{\pi}{2c}\rho\omega r^3$. Общее решение однородных уравнений (3.26) и (3.27) ищется в виде cr^s, где константы c и s подлежат определению. Подставляя cr^s в уравнение (3.26) и сокращая на общий множитель, получаем квадратное уравнение

$$s^2 - 1 = 0$$

с корнями $s_1 = 1$ и $s_2 = -1$. Значит, общие решения уравнений (3.26) и (3.27) имеют вид

$$A_1 = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{\pi}{2c}\rho\omega r^3, \quad A_2 = C_3 r + \frac{C_4}{r}.$$

Из непрерывности потенциала при $r = 0$ и из обращения его в нуль при $r \to \infty$ следует, что $C_2 = C_3 = 0$. Две другие постоянные определяются из условий сшивки (3.28) при $r = R$. Опуская вычисления, приведем окончательный результат:

при $r \leqslant R$

$$A_{1r} = A_{1z} = 0, \quad A_{1\varphi} = \frac{\pi}{c}\rho\omega r(R^2 - \frac{r^2}{2}), \quad \mathbf{B}_1 = \frac{2\pi}{c}\rho(R^2 - r^2)\boldsymbol{\omega};$$

при $r > R$

$$A_{2r} = A_{2z} = 0, \quad A_{2\varphi} = \frac{\pi\rho\omega R^4}{2cr}, \quad \mathbf{B}_2 = 0. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 3.4. Заряд Q однородно заполняет объем шара радиусом R. Найти магнитную индукцию $\mathbf{B}$ в центре шара, если последний вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$.

Решение. Поместим начало координат в центр шара и направим ось z вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}$. Согласно (3.10) магнитная индукция в центре шара дается выражением

$$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{r}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})]}{r^3}\,dV,$$

где штрих у переменной интегрирования опущен. В результате вращения внутри шара имеется ток с объемной плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho\mathbf{v} = \rho[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, где $\rho = \dfrac{3Q}{4\pi R^3}$. Раскрывая двойное векторное произведение, получаем

$$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{c}\int \rho\frac{r^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3}\,dV.$$

Вектор $\mathbf{B}(0)$ не имеет проекций на оси x и y (проверьте!) и может быть представлен как

$$\mathbf{B}(0) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{c}\int \frac{\rho(1 - \cos^2\theta)}{r}\,dV.$$

Полученная формула справедлива для любого тела вращения, внутри которого распределен заряд с объемной плотностью $\rho = \rho(r, \theta)$. Вычисляя объемный интеграл в сферических координатах для равномерно заряженного шара

$$\mathbf{B}(0) = \rho\frac{\boldsymbol{\omega}}{c}\int\limits_0^R r\,dr\int\limits_0^\pi (1 - \cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi,$$

находим

$$\mathbf{B}(0) = \frac{Q\boldsymbol{\omega}}{cR}. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 3.5. В сферических координатах компоненты вектора $\mathbf{j}$ средней объемной плотности орбитального тока, текущего в возбужденном атоме водорода,имеют величину

$$j_r = j_\theta = 0, \qquad j_\varphi = \frac{1}{2 \cdot 3^8} \frac{e\hbar}{\pi m a^7} r^3 e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^3\theta,$$

где a — боровский радиус, $\hbar$ — постоянная Планка, m и e — масса и заряд электрона, а r — расстояние до протона. Орбитальный ток создает в пространстве магнитное поле. Найти индукцию этого поля в начале координат.

Решение. По закону Био — Савара магнитная индукция в начале координат дается выражением

$$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{r}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})]}{r^3}\, dV.$$

Из соображений симметрии ясно, что в начале координат вектор $\mathbf{B}$ имеет только z-компоненту. Объемный интеграл в предыдущей формуле удобно вычислять в сферических координатах. Выражая через них $[\mathbf{rj}]_z = xj_y - yj_z$, с учетом соотношений

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$j_x = -j_\varphi \sin\varphi, \quad j_y = j_\varphi\cos\varphi,$$

получаем

$$B_z(0) = \frac{1}{c} \frac{1}{2 \cdot 3^8} \frac{e\hbar}{\pi m a^7} \int\limits_0^\infty r^3 e^{-\frac{2r}{3a}} dr \int\limits_0^\pi \sin^5\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi.$$

Поскольку

$$\int\limits_0^\infty r^3 e^{-\alpha r} dr = (-1)^3 \frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} \int\limits_0^\infty e^{-\alpha r} dr = \frac{3!}{\alpha^4}$$

и

$$\int\limits_0^\pi \sin^5\theta d\theta = -\int\limits_0^\pi (1-\cos^2\theta)^2 d(\cos\theta) = \frac{16}{15},$$

то окончательно находим

$$B_z(0) = \frac{2e\hbar}{405 m c a^3}.$$

Проверьте непосредственным расчетом, что $B_x(0) = B_y(0) = 0$. ◀

Пример 3.6. Ток J течет по тонкому проводнику, образующему квадрат со стороной $2a$. Найти магнитную индукцию $\mathbf{B}$ на оси, проходящей через центр квадрата перпендикулярно его плоскости. Исследуя $\mathbf{B}$ на больших расстояниях, найти магнитный момент $\mathbf{M}$.

Решение. Расположим квадрат в плоскости xy так, чтобы его стороны были параллельны осям, а ось z проходила через центр квадрата и образовывала с направлением тока правовинтовую систему. Очевидно, что на оси квадрата вектор индукции имеет только компоненту B_z, причем ток в каждой стороне дает в нее одинаковый вклад. Поэтому требуется вычислить

$$B_z(z) = \frac{J}{c}\oint \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}-\mathbf{r}']_z}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{4J}{c}\int\limits_{-a}^{a} \frac{a dy'}{(y'^2+a^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{8J}{c}\int\limits_{0}^{a} \frac{a dy'}{(y'^2+a^2+z^2)^{3/2}}$$

(интегрируем по стороне, параллельной оси y). Возникший интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^{3/2}} = \frac{1}{b^2}\,\frac{x}{(x^2+b^2)^{1/2}} + C$$

можно взять подстановкой $x = b/t$ (проделайте вычисления!). Окончательно

$$\mathbf{B} = \frac{8a^2 J}{c(z^2+a^2)\sqrt{z^2+2a^2}}\,\mathbf{k}.$$

На больших расстояниях от контура, $|z| \gg a$, выражение для индукции упрощается:

$$\mathbf{B} = \frac{8a^2 J}{c|z|^3}\mathbf{k}.$$

Сравнивая эту формулу с общим выражением (3.14) для индукции на большом расстоянии от системы токов, которое в нашем случае (когда магнитный момент $\mathbf{M}$ и радиус-вектор $\mathbf{r}$, проведенный в точку наблюдения, лежат на одной прямой, а $r = |z|$) принимает вид

$$\mathbf{B} = \frac{2\mathbf{M}}{|z|^3},$$

видим, что $M = \dfrac{4a^2 J}{c}$ в соответствии с (3.16). ◀

Пример 3.7. Коническая поверхность $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$, равномерно заряженная с поверхностной плотностью σ, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Найти индукцию магнитного поля в вершине конической поверхности.

Решение. Из формул (3.10), (3.12) получаем исходное выражение для магнитной индукции в вершине:

$$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{ri}]}{r^3}dS,$$

где интегрирование проводится по поверхности конуса. Выразив плотность поверхностного тока через плотность заряда и угловую скорость $\mathbf{i} = \sigma[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ и раскрывая двойное векторное произведение, получим

$$\mathbf{B}(0) = \frac{\sigma}{c}\int \frac{\boldsymbol{\omega}r^2 - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})}{r^3}dS.$$

Проведем интегрирование в ц.с.к. ρ, φ, z. Элемент площади на поверхности конуса с углом α между осью и образующей записывается как $dS = \rho d\rho d\varphi / \sin\alpha$ (в чем можно убедиться, спроектировав dS на плоскость xy). В нашем случае $\alpha = \pi/4$, поэтому $z = \rho = r/\sqrt{2}$. Проводя вычисления, находим

$$\mathbf{B}(0) = \frac{\pi}{c}h\sigma\boldsymbol{\omega}. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 3.8. По тонкому кольцу радиусом R течет ток J. Найти магнитную индукцию $\mathbf{B}$ на оси кольца (рис. 17).

Решение. Вектор $\mathbf{B}$ направлен вдоль оси z. Вклад в $\mathbf{B}$ тока в элементе дуги с угловым размером $d\varphi$

$$dB_z = dB\sin\alpha = \frac{J}{c}\frac{Rd\varphi}{R^2 + z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

После интегрирования по φ получим

$$\mathbf{B} = \frac{2\pi JR^2}{c(R^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к плоскости кольца, образующий с направлением тока J правовинтовую систему. На большом расстоянии от контура ($|z| \gg R$) магнитная индукция

$$\mathbf{B} \approx \frac{2J(\pi R^2)}{c|z|^3}\mathbf{n}$$

выражается через магнитный момент $\mathbf{M} = \dfrac{J}{c}S\mathbf{n}$. $\blacktriangleleft$

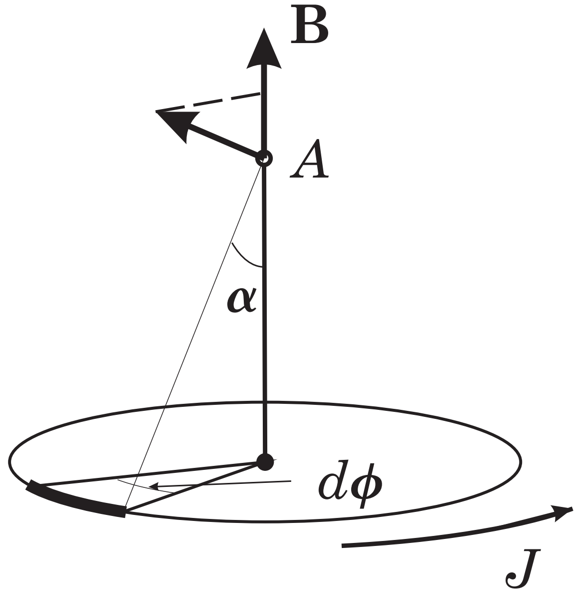

Рис. 17

Пример 3.9. Найти магнитную индукцию, создаваемую прямым отрезком провода в точке A, положение которой относительно отрезка задается расстоянием y до прямой и углами α_1 и α_2. (рис. 18

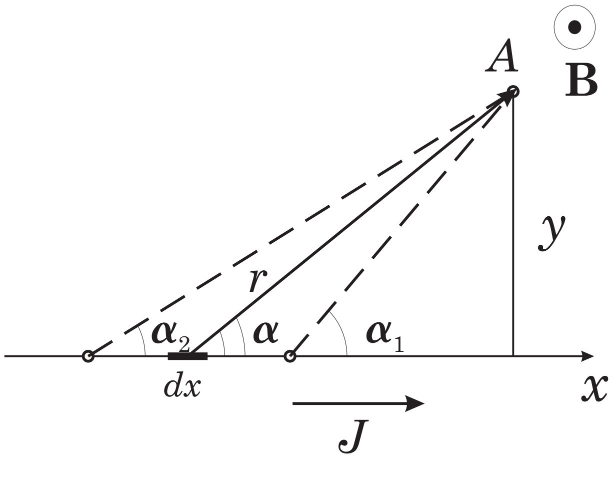

Рис. 18

Решение. Ток в элементе dx создает поле $dB = \dfrac{Jdx}{cr^2}\sin\alpha$, направленное перпендикулярно плоскости, проходящей через отрезок и точку A. Интегрировать удобно по углу α, учитывая равенство $r = y/\sin\alpha$ и заменяя переменную:

$$x = -y\mathrm{ctg}\alpha, \quad dx = \frac{y}{\sin^2\alpha}d\alpha.$$

В результате получаем

$$B = \frac{J}{cy}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Полагая $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, находим магнитную индукцию бесконечного провода с током

$$B = \frac{2J}{cy}. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 3.10. В сферических координатах компоненты вектора $\mathbf{j}$ средней объемной плотности орбитального тока, текущего в возбужденном атоме водорода, составляют

$$j_r = j_\theta = 0, \qquad j_\varphi = \frac{1}{3^8}\frac{e\hbar}{\pi m a^7} r^3 e^{-\frac{2r}{3a}} \sin\theta\cos^2\theta,$$

где a — боровский радиус, $\hbar$ — постоянная Планка, m и e — масса и заряд электрона, а r — расстояние до протона. Вычислить магнитный момент $\mathbf{M}$ орбитального тока.

Решение. Исходим из определения магнитного момента (3.15) и вычисляем объемный интеграл от векторной функции в выбранной системе координат по компонентам (аналогично задаче 3.5 данного раздела). Очевидно, $M_x = M_y = 0$, а для M_z получаем промежуточное выражение

$$M_z = \frac{1}{2c}\frac{1}{3^8}\frac{e\hbar}{\pi m a^7}\int\limits_0^\infty r^6 e^{-\frac{2r}{3a}} dr \int\limits_0^\pi \sin^3\theta\cos^2\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} \mathbf{d}\varphi.$$

Вычисляя

$$\int\limits_0^\infty r^6 e^{-\frac{2r}{3a}} dr = \frac{6!}{(2/3a)^7}, \qquad \int\limits_0^\pi \sin^3\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{4}{15},$$

находим магнитный момент орбитального тока

$$M_x = M_y = 0, \qquad M_z = \frac{e\hbar}{2mc}. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 3.11. Внутренний магнитный момент электрона по абсолютной величине равен магнетону Бора $\mu_0 = \dfrac{|e|\hbar}{2mc}$. Согласно классической модели электрон представляет собой однородно заряженный шар радиусом

$r_0 = \dfrac{e^2}{mc}$. Рассматривая внутренний магнитный момент как результат вращения электрона вокруг своей оси симметрии, определить угловую скорость ω этого вращения.

Решение. Вычислим магнитный момент равномерно заряженного шара, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью ω:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{rj}]dV = \{\mathbf{j} = \rho[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\} = \frac{\rho\boldsymbol{\omega}}{2c}\int r^2(1-\cos^2\theta)dV = \frac{er_0^2}{5c}\boldsymbol{\omega}. \quad (3.29)$$

Приравнивая вычисленное и экспериментальное значения абсолютной величины магнитного момента

$$\frac{|e|r_0^2\omega}{5c} = \frac{|e|\hbar}{2mc},$$

находим угловую скорость, с которой должен вращаться электрон:

$$\omega = \frac{5\hbar}{2mr_0^2}.$$

Подставляя численные значения фундаментальных констант, находим $\omega \approx \approx 10^{25}\,\text{с}^{-1}$. Так как классический радиус электрона $r_0 = e^2/mc^2 \approx 10^{-13}$ см, то линейная скорость «точек электрона», лежащих на экваторе, имеет величину $v = \omega r_0 \approx 10^{12}$ см/с, т.е. на два порядка превосходит скорость света. Таким образом, рассмотренная модель спинового магнитного момента противоречит второму постулату специальной теории относительности. ◄

Пример 3.12. Ток J однородно распределен по сечению бесконечного цилиндра радиусом R. Используя максвелловский тензор натяжений, найти силу $\mathbf{F}$, прижимающую друг к другу две одинаковые половины цилиндра. Здесь $\mathbf{F}$ — сила, приложенная к единице длины одной из половин цилиндра. Подтвердить полученный результат независимым вычислением с использованием объемной силы.

Решение. Направим ось z по оси цилиндра, а ось y — перпендикулярно плоскости раздела половин цилиндра. Сила, приложенная к половине цилиндра, выражается через тензор натяжений $T_{\alpha\beta}$ следующим образом [см. (3.24)]:

$$F_y = \oint (T_{yx}n_x + T_{yy}n_y + T_{yz}n_z)dS,$$

где интегрирование ведется по поверхности полуцилиндра единичной высоты, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ — вектор внешней нормали к ней. Другие компоненты силы равны нулю: $F_x = F_z = 0$. Запишем компоненты вектора индукции

$$B_x = -B\sin\varphi, \quad B_y = B\cos\varphi, \quad B_z = 0,$$

через которые согласно (3.25) выражаются компоненты тензора натяжения $T_{\alpha\beta}$. Вычислим сначала интеграл по боковой поверхности цилиндра. Поскольку на ней $n_x = \cos\varphi$, $n_y = \sin\varphi$, элемент площади $dS = Rd\varphi dz$, а величина индукции имеет постоянное значение $B = 2J/cR$, то имеем

$$F_y^{(1)} = \frac{1}{4\pi} R \int\limits_{-1/2}^{1/2} dz \int\limits_{0}^{\pi} \left[-B^2 \sin\varphi \cos^2\varphi + (B^2\cos^2\varphi - \frac{1}{2}B^2)\sin\varphi \right] d\varphi =$$
$$= -\frac{J^2}{\pi c^2 R}$$

(напомним, что рассчитывается сила, приходящаяся на единицу длины цилиндра). На поверхности раздела полуцилиндров, лежащей в плоскости xz,

$$n_x = n_z = 0, \quad n_y = -1, \quad B = \frac{2J}{cR^2}|x|,$$

поэтому

$$F_y^{(2)} = -\int T_{yy} dS = -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{-1/2}^{1/2} dz \int\limits_{-R}^{R} B^2 dx = -\frac{J^2}{3\pi c^2 R}.$$

Складывая $F_y^{(1)}$ и $F_y^{(2)}$, находим, что результирующая сила по абсолютной величине

$$F = \frac{4J^2}{3\pi c^2 R}.$$

Другой способ решения задачи основан на вычислении суммарной объемной силы по формуле (3.19):

$$F_y = \frac{1}{c}\int [\mathbf{jB}]_y dV = \frac{1}{c}\int jB_x dV = \left\{ \begin{array}{c} j = \frac{J}{\pi R^2}, \quad dV = \rho d\rho d\varphi dz, \\ B_x = -\frac{2J}{cR^2}\rho\sin\varphi \end{array} \right\} =$$
$$= -\frac{2J^2}{\pi c^2 R^4} \int\limits_0^R \rho^2 d\rho \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_{-1/2}^{1/2} dz = -\frac{4J^2}{3\pi c^2 R}. \quad ◄$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Можно ли создать в пространстве постоянный ток с объемной плотностью $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 e^{-\alpha r}$, где α — постоянная величина, $\mathbf{j}_0$ — постоянный вектор?

3.2. Найти распределение объемной плотности тока в пространстве, если магнитная индукция имеет вид: а) $\mathbf{B} = f(r)[\mathbf{ar}]$, б) $\mathbf{B} = (\mathbf{ar})[\mathbf{ar}]$, где $f(r)$ — произвольная дифференцируемая функция, $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

$$\textit{Ответ:}\quad \text{а) } \mathbf{j} = \frac{c}{2\pi}\left[f(r)\mathbf{a} + \frac{df(r)}{dr}\frac{[\mathbf{r}[\mathbf{ar}]]}{2r}\right], \quad \text{б) } \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}[3(\mathbf{ar})\mathbf{a} - a^2\mathbf{r}].$$

3.3. Показать, что однородному и постоянному магнитному полю $\mathbf{B}$ можно сопоставить векторный потенциал $\mathbf{A} = \dfrac{1}{2}[\mathbf{Br}]$. Удовлетворяет ли он условию $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$?

3.4. Найти силу J бесконечного прямого тока, при которой на расстоянии r от провода создается индукция B.

3.5. По бесконечной цилиндрической поверхности радиусом R параллельно ее оси течет однородный ток с поверхностной плотностью $\mathbf{i}_0$. Найти индукцию магнитного поля в любой точке пространства.

3.6. Квадратная рамка со стороной a находится в одной плоскости с прямолинейным током J. На каком расстоянии от тока расположена ближайшая сторона рамки, если поток магнитного поля через поверхность рамки равен Φ_0?

$$\textit{Ответ:}\quad l = \frac{a}{\exp\left(\frac{c\Phi_0}{2aJ}\right) - 1}.$$

3.7. Показать, что магнитное поле бесконечно длинного цилиндрического соленоида с густой намоткой (n витков на единицу длины, ток J) дается формулами

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}nJ\mathbf{k} \quad \text{внутри соленоида}, \qquad \mathbf{B} = 0 \quad \text{снаружи},$$

где ось z направлена вдоль соленоида (рис. 19).

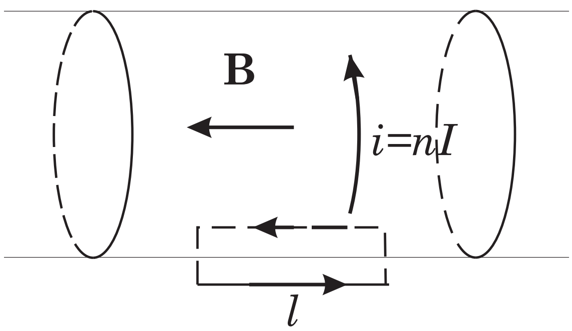

Рис. 19

3.8. Внутри однородного длинного прямого провода круглого сечения имеется круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода и смещена относительно последней на расстояние a. По проводу течет постоянный ток плотностью $\mathbf{j}$. Найти магнитную индукцию внутри полости.

Ответ: $\mathbf{B} = \dfrac{2\pi}{c}[\mathbf{ja}]$, вектор $\mathbf{a}$ проведен от оси наружного цилиндра к оси внутреннего.

3.9. Ток J течет по длинному прямому проводнику в форме полуцилиндрической поверхности радиусом R. Найти магнитную индукцию на оси данной поверхности.

Ответ: $B = \dfrac{4J}{\pi c R}$, вектор $\mathbf{B}$ перпендикулярен плоскости симметрии полуцилиндра.

3.10. Тонкий диск радиусом R, равномерно заряженный с поверхностной плотностью σ, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти индукцию магнитного поля на оси диска.

$$\textit{Ответ:}\quad \mathbf{B} = 2\pi\sigma|z|\left[\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2} + \left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} - 2\right]\frac{\boldsymbol{\omega}}{c}.$$

3.11. Ток J течет по тонкой бесконечной прямой токовой трубке, которая имеет локальное искривление в виде полуокружности радиусом R. Найти магнитную индукцию в центре кривизны указанной полуокружности.

Ответ: $\mathbf{B} = \dfrac{\pi J}{cR}\mathbf{n}$, где орт $\mathbf{n}$ нормали к плоскости полуокружности образует правовинтовую систему с направлением тока, текущего по дуге.

3.12. Ток J течет по тонкой токовой трубке в форме равностороннего треугольника со стороной a. Найти векторный потенциал и магнитную индукцию на больших расстояниях r от тока.

3.13. Однородно заряженный цилиндр произвольной высоты и радиусом R вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Полный заряд цилиндра равен Q, а его ось вращения образует с индукцией $\mathbf{B}$ внешнего однородного магнитного поля некоторый угол α. Определить энергию U взаимодействия цилиндра с магнитным полем.

$$\textit{Ответ:}\quad U = \frac{QR^2}{4c}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{B}).$$

3.14. Заряд Q равномерно распределен по конической поверхности (x^2+ $+y^2 = z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h$), которая вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Найти векторный потенциал $\mathbf{A}$ и индукцию $\mathbf{B}$ магнитного поля на больших расстояниях от поверхности.

$$\textit{Ответ:}\quad \mathbf{A} = \frac{Qh^2}{4cr^3}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}], \qquad \mathbf{B} = \frac{Qh^2}{4cr^3}(3(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\boldsymbol{\omega}).$$

3.15. Две одинаковые равномерно заряженные сферические поверхности радиусами R расположены на большом расстоянии друг от друга. Полный заряд каждой сферической поверхности равен Q, а их угловые скорости вращения вокруг собственных осей равны $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. Определить магнитную энергию U взаимодействия сферических поверхностей.

$$\textit{Ответ:}\quad U = \left(\frac{QR^2}{3c}\right)^2 \left(\frac{3(\boldsymbol{\omega}_1\mathbf{r})(\boldsymbol{\omega}_2\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_2}{r^3}\right).$$

3.16. Определить энергию U магнитного поля, приходящегося на единицу длины однородного заряженного цилиндра радиусом R, вращающегося вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Заряд на единицу длины цилиндра равен q. Выразить энергию U через магнитный момент $\mathbf{M}$ единицы длины вращающегося цилиндра.
Указание: использовать результаты примера 3.3.

$$\textit{Ответ:}\quad U = \frac{8\mathbf{M}^2}{3R^2}, \quad \mathbf{M} = \frac{\pi q R^4}{c}\boldsymbol{\omega}.$$

Рекомендуемая литература: [1, гл. II], [2, гл. V], [3, гл. 3], [4, гл. 5, 6].

Приложения

1. Основные дифференциальные операции в сферических и цилиндрических координатах

В сферических координатах:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \tag{П.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{П.2}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \\ + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi,\end{aligned} \tag{П.3}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial^2\varphi}, \tag{П.4}$$

$$\Delta F(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rF) = \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF}{dr}, \tag{П.5}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{A} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \\ &= \left\{\Delta A_r - \frac{2}{r^2}\left[A_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]\right\}\mathbf{e}_r + \\ &+ \left[\Delta A_\theta + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right]\mathbf{e}_\theta + \\ &+ \left[\Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{2\sin\theta}\right)\right]\mathbf{e}_\varphi.\end{aligned} \tag{П.6}$$

В цилиндрических координатах:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \tag{П.7}$$

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z, \tag{П.8}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{П.9}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi + \\ + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z, \tag{П.10}$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{П.11}$$

$$\Delta F(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dF}{d\rho}\right) = \frac{d^2F}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dF}{d\rho}, \tag{П.12}$$

$$\Delta\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \\ = \left(\Delta A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\rho + \\ + \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi + \Delta A_z\mathbf{e}_z \tag{П.13}$$

2. Сферические функции

Сферические функции $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ определяются формулой

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}, \tag{П.14}$$

где $-l \leqslant m \leqslant l$ и $l = 0, 1, \ldots$, а $P_l^m(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра:

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta\,\frac{d^m P_l(\cos\theta)}{(d\,\cos\theta)^m}. \tag{П.15}$$

При комплексном сопряжении

$$Y^*_{lm}(\theta,\varphi) = Y_{lm}(\theta,-\varphi) = (-1)^m Y_{l-m}(\theta,\varphi). \tag{П.16}$$

Функции $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ с индексами $l=0,1,2$, часто встречающиеся в приложениях, даются формулами

$$\begin{aligned}
&Y_{00}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\\
&Y_{10}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\\
&Y_{1\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi},\\
&Y_{20}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1),\\
&Y_{2\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi},\\
&Y_{2\pm2}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}.
\end{aligned} \tag{П.17}$$

Сферические функции образуют полную ортонормированную систему, один из примеров разложения по ней дает мультипольный ряд (2.40).

Условие ортогональности и нормировки функций Y_{lm} имеет вид

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}d\theta\,\sin\theta\,Y^*_{lm}(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi)=\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{П.18}$$

При действии оператора Лапласа на функцию $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ последняя воспроизводится

$$\Delta Y_{lm}(\theta,\varphi)=-\frac{l(l+1)}{r^2}Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{П.19}$$

т.е. $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ является собственной функцией оператора $\Delta_{\theta\varphi}$ [см. (1.38), (П.4)] с собственным значением $-l(l+1)$.

При $m=0$ сферическая функция выражается через полином Лежандра

$$Y_{l0}(\theta,\varphi)=\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\theta) \tag{П.20}$$

и не зависит от азимутального угла φ. К функциям Y_{l0} приводят, например, интегралы

$$\int\limits_0^{2\pi}Y_{lm}(\theta,\varphi)d\varphi=2\pi\delta_{0m}Y_{l0}, \tag{П.21}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}Y^*_{lm}(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi)d\varphi=2\pi\delta_{mm'}Y^*_{l0}Y_{l'0}. \tag{П.22}$$

3. Полиномы Лежандра

Полиномы Лежандра $P_n(x)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]+n(n+1)P_n=0, \qquad (\text{П}.23)$$

где $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $n = 0, 1, 2 \ldots$

Первые четыре полинома Лежандра даются выражениями

$$\begin{gathered} P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), \\ P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\ P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^2-30x^2+3). \end{gathered} \qquad (\text{П}.24)$$

Полином Лежандра n-й степени может быть вычислен по формуле

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \qquad (\text{П}.25)$$

Свойства полиномов Лежандра

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x), \qquad (\text{П}.26)$$

$$P_n(1)=1, \qquad (\text{П}.27)$$

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}. \qquad (\text{П}.28)$$

Литература

1. Алексеев А. И. Сборник задач по классической электродинамике / А. И. Алексеев. — М. : Наука, 1977. — 319 с.

2. Батыгин В. В. Сборник задач по электродинамике / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. — М. : Наука, 2002. — 639 с.

3. Батыгин В. В. Современная электродинамика : в 2 ч. / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. — М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2003. — ч. 1 : Микроскопическая теория. — 736 с.

4. Запрягаев С. А. Электродинамика / С. А. Запрягаев. — Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005. — 536 с.

5. Тамм И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм.— М. : Наука, 1976. — 620 с.

Учебное издание

Мармо Сергей Иванович,
Фролов Михаил Владимирович

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Часть I

Учебное пособие для вузов

Корректор В. П. Бахметьев

Подписано в печать 24.06.2014. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 3,7.
Тираж 25 экз. Заказ 548.

Издательский дом ВГУ.
394000, г. Воронеж, пл. Ленина, 10.
Отпечатано в типографии Издательского дома ВГУ.
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 32.