

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

С.И. Мармо,
М.В. Фролов

ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
Часть I

Учебное пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2007

Утверждено научно-методическим советом физического факультета
11 декабря 2007 г., протокол № 12

Рецензент проф. кафедры электроники ВГУ, д-р физ.-мат. н. В.И. Костылев

Учебное пособие подготовлено на кафедре теоретической физики физического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 3 курса дневной формы обучения физического факультета Воронежского государственного университета.

Для специальности: 010701 — Физика

Содержание

Микроскопическая теория электромагнитных явлений в вакууме	6
1. Уравнения электромагнитного поля	6
1.1. Основные положения электродинамики	6
1.2. Законы электромагнетизма как результат обобщения опытных данных	8
1.3. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме	17
1.4. Энергия электромагнитного поля	19
1.5. Единственность решения уравнений Максвелла	22
1.6. Импульс электромагнитного поля	23
2. Постоянное электрическое поле	26
2.1. Основные уравнения постоянного электрического поля	27
2.2. Энергия электростатического поля	30
2.3. Поле на больших расстояниях от системы зарядов. Дипольный и квадрупольный моменты	33
2.4. Система зарядов в квазиоднородном внешнем поле	38
3. Постоянное магнитное поле	40
3.1. Основные уравнения. Закон Био – Савара – Лапласа	40
3.2. Магнитный момент	43
3.3. Магнитная энергия постоянных токов. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции	46
3.4. Токи в квазиоднородном магнитном поле	49
3.5. Силы в постоянном магнитном поле	50
4. Переменное электромагнитное поле	52
4.1. Уравнения для электромагнитных потенциалов	52
4.2. Электромагнитные волны	54
4.3. Плоские монохроматические волны	58
4.4. Поляризация волны	61
4.5. Запаздывающие потенциалы	62
4.6. Потенциалы Лиенара – Вихерта	65
5. Излучение и рассеяние электромагнитных волн	67
5.1. Поле системы зарядов на далеких расстояниях	67

5.2. Дипольное излучение	70
5.3. Квадрупольное и магнитно-дипольное излучения	72
5.4. Поле на близких расстояниях	75
5.5. Торможение излучением	76
5.6. Спектральное разложение излучения	79
5.7. Излучение осциллятора. Естественная ширина спектральных линий	80
5.8. Рассеяние электромагнитных волн свободными зарядами . . .	82
5.9. Рассеяние электромагнитных волн осциллятором	84
5.10. Когерентное и некогерентное рассеяние	86

Список литературы	89
--------------------------	-----------

Настоящее пособие содержит лекционный материал курса «Электродинамика», читаемого студентам физического факультета специальности «Физика». Выбор тем был определен Государственным образовательным стандартом, объем материала — количеством часов, отведенных на лекции. Курс электродинамики, как и другие разделы теоретической физики, обладая логической замкнутостью, в то же время опирается на знания, полученные ранее в курсах общей физики, и характеризуется использованием детально развитого математического аппарата. Требования к математической подготовке состоят прежде всего во владении векторным анализом и интегральным исчислением векторов. На повторение основных положений этих разделов математического анализа отведено несколько занятий по решению задач.

Мы следуем способу изложения электродинамики, при котором сначала на основе опытных законов электромагнетизма формулируются уравнения Максвелла для вакуума, затем с их использованием рассматривается электромагнитное поле в различных физических ситуациях: постоянные поля, переменные поля, излучение и рассеяние электромагнитных волн. Поскольку электродинамика была первой релятивистски инвариантной теорией, то естественным является изучение в рамках курса специальной теории относительности. При этом наряду с явно релятивистски инвариантной формулировкой электродинамики изучается также релятивистская механика. Электромагнитные явления в пространстве, заполненном веществом, требуют особого рассмотрения, основанного на усреднении физических величин по «физически бесконечно малым» объемам, сглаживающем микроскопические колебания этих величин, связанные с молекулярным строением вещества. Соответственно, курс состоит из трех частей:

- 1) электромагнитные явления в вакууме (микроскопическая электродинамика);
- 2) специальная теория относительности (электродинамика в релятивистской форме);
- 3) электромагнитные явления в веществе (макроскопическая электродинамика).

На изучение первой части отводится первый семестр, вторая и третья изучаются во втором семестре.

Каждый раздел пособия содержит ссылки на литературу, которая будет полезна для устранения неясностей и дальнейшего чтения.

РИСУНКИ СДЕЛАТЬ БОЛЬШЕ!

Микроскопическая теория электромагнитных явлений в вакууме

1. Уравнения электромагнитного поля

1.1. Основные положения электродинамики

Кратко перечислим основные положения электродинамики и фундаментальные электромагнитные явления, известные из предыдущего изучения теории электричества.

- Между микрочастицами, а следовательно, и между макротелами существует *электромагнитное взаимодействие*. Способность тел вступать в электромагнитное взаимодействие характеризуется электрическим зарядом, причем существуют заряды двух видов: положительные и отрицательные (одноименные отталкиваются, разноименные притягиваются).
- Сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами определяется *законом Кулона*:

$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{r^3} \mathbf{r},$$

где r — расстояние от заряда q до заряда q' . Основываясь на законе Кулона, можно ввести понятие электрического поля: заряд q создает вокруг себя *электрическое поле*, которое характеризуется *напряженностью*

$$\mathbf{E} = q \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Другой заряд, q' , оказавшийся в поле, испытывает действие силы

$$\mathbf{F} = q' \mathbf{E}.$$

Исходя из закона Кулона, можно получить следующее соотношение:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.1)$$

где ρ — плотность электрического заряда.

- Если заряды движутся произвольным образом, то их взаимодействие уже не определяется законом Кулона. Электрические силы сложным образом зависят от движения зарядов. Одну из частей силы, действующую между движущимися зарядами, называют магнитной силой. Она возникает потому, что движущиеся заряды порождают магнитное поле, которое характеризуется *магнитной индукцией* $\mathbf{B}$, так что сила, действующая на заряд q , находящийся в поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и имеющий скорость $\mathbf{v}$, есть

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \text{ — сила Лоренца.}$$

- Электрическое поле порождается электрическими зарядами, а магнитное поле — движущимися электрическими зарядами (токами, ниже $\mathbf{j}$ — плотность тока). Магнитных зарядов в природе нет, поэтому (ср. (1.1))

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.2)$$

Если иметь дело с неподвижными зарядами и с постоянными токами, то электрическое и магнитное поля выступают как независимые, не связанные друг с другом.

- Существует ещё один способ возбудить в пространстве электрическое поле. А именно, переменное магнитное поле порождает электрическое поле, причем это поле, в отличие от создаваемого неподвижными зарядами, вихревое, т.е. имеет ненулевую циркуляцию. В этом состоит *закон электромагнитной индукции*:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.3)$$

- В свою очередь, переменное электрическое поле порождает вихревое магнитное поле:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

- Последние два эффекта приводят к существованию *электромагнитных волн* (или, можно сказать, к излучению и существованию электромагнитных волн). Ускоренно движущиеся заряды излучают электромагнитные волны. Действительно, пусть есть ускоренно движущийся заряд. Он, очевидно, создает переменное электрическое поле, которое порождает вихревое (т.е. переменное в пространстве) магнитное поле, и это магнитное поле тоже меняется со временем (сначала магнитного поля не было, потом оно появилось). Значит, это магнитное поле породит вихревое электрическое поле и т.д. То есть в пространстве в результате ускоренного движения заряда начнет распространяться электромагнитное поле (или, можно сказать, что при ускоренном движении заряда излучаются электромагнитные волны). Если заряд остановить, то волна не исчезнет. Действительно, в вакууме волна и не может исчезнуть, потому что если исчезает электрическое поле, то оно меняется во времени и, следовательно, порождает магнитное поле. Если же исчезает это магнитное поле, то оно порождает электрическое. Итак, одно поле порождает другое, и наоборот, они распространяются все дальше и дальше в пространстве. При этом на больших расстояниях интенсивность электромагнитного поля и напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ уменьшаются, так как исходная энергия распространяется на все большее пространство, но оказывается, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ убывают медленнее, чем поля от неподвижных зарядов (r^{-1} и r^{-2} соответственно).
- Если плоская электромагнитная волна падает на покоящийся заряд, то заряд приходит в ускоренное движение и излучает электромагнитные волны. Эти волны уже не плоские, а распространяются по всем направлениям. Такое явление называется *рассеянием электромагнитных волн*.
- Электромагнитные поля исчезают, поглощаясь в веществе. С точки зрения классической электродинамики это значит, что электрические поля приводят в движение заряды, и созданные ими волны накладываются на исходные и гасят их в результате деструктивной интерференции.

Таким образом, напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, характеризующие электромагнитное поле, удовлетворяют уравнениям (1.1)—(1.4), которые образуют систему уравнений Максвелла (для вакуума). Система уравнений Максвелла, связывающая поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ с их источниками ρ , $\mathbf{j}$, составляет основу классической электродинамики, которая описывает весьма широкий круг электромагнитных явлений и становится несправедливой лишь в тех условиях, когда проявляются квантовые свойства поля.

Перейдем теперь к систематическому изложению теории электромагнетизма.

Рекомендуемая литература: [6], гл. 1, § 1–3.

1.2. Законы электромагнетизма как результат обобщения опытных данных

Закон сохранения заряда. Способность элементарных частиц, микрочастиц и макротел участвовать в электромагнитном взаимодействии характеризуется электрическим зарядом, причем существуют заряды двух видов — положительные и отрицательные. Тела с одноименными зарядами отталкиваются, с разноименными — притягиваются. Опыт показывает, что во всех явлениях природы выполняется закон сохранения заряда: заряд не может ни возникнуть из ничего, ни исчезнуть, а только перераспределяется между телами. Это значит, что полный заряд Q в некоторой области пространства может измениться только за счет того, что заряженные частицы пересекают границу области. Введем понятие полного тока J как количества заряда, который пересекает границу области в единицу времени t . Будем считать, что $J > 0$, если заряд «вытекает» из области и $J < 0$, если заряд «втекает» в область. Тогда закон сохранения заряда (в интегральной форме) может быть выражен уравнением

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -J. \quad (1.5)$$

Введем теперь понятие плотности заряда и плотности тока и перепишем (1.5) в другом виде. Пусть имеется тело с большим количеством заряженных частиц в нем. Разобьем объем V на малые элементы (физически бесконечно малые объемы) ΔV такие, что $\Delta V \ll V$, но в ΔV всё ещё содержится много элементарных зарядов, так что отношения типа $\Delta Q/\Delta V$, где $\Delta Q = \sum_{i \in \Delta V} e_i$ — полный заряд внутри ΔV , мало меняются при изменении ΔV . Так как ΔV макроскопически мал, то его положение можно характеризовать единственным радиус-вектором $\mathbf{r}$, проведенным в какую-либо точку области ΔV . Назовём отношение

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (1.6)$$

объемной плотностью заряда в данной точке. Полный заряд во всем объеме

$$Q = \sum \Delta Q = \sum \rho \Delta V \longrightarrow \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV.$$

Таким образом, для систем, в которых электрический заряд можно рассматривать как распределенный непрерывно, полный заряд есть интеграл от объемной плотности:

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV. \quad (1.7)$$

Если в некоторой области пространства имеется только один заряд e_a , то, очевидно, объёмную плотность нельзя ввести с помощью (1.6). Будем в этом случае исходить из соотношения (1.7) и определим ρ так, чтобы выполнялись равенства

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \begin{cases} e_a, & \mathbf{r}_a \in V, \\ 0, & \mathbf{r}_a \notin V. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $\rho(\mathbf{r}, t)$ можно записать через дельта-функцию:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)),$$

где $\mathbf{r}_a(t)$ — радиус-вектор заряда e_a . Напомним, что $\delta(x)$ определяется как функция, обладающая следующими свойствами:

- 1) функция равна нулю при всех $x < 0$ и при всех $x > 0$;
- 2) функция бесконечна при $x = 0$;
- 3) интеграл от этой функции, взятый в пределах от $-\infty$ до ∞ , равен 1.

Аналогичным образом вводится трехмерная дельта-функция $\delta(\mathbf{r})$. Из свойств дельта-функции следует основное соотношение

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_a), \quad \text{если } \mathbf{r}_a \in V,$$

которое было использовано при введении объемной плотности точечного заряда.

Если имеется несколько точечных зарядов, то плотность заряда даётся выражением

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \quad (1.8)$$

Введем теперь плотность электрического тока

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (1.9)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — скорость зарядов, и найдем, как $\mathbf{j}$ связана с током через поверхность. Выделим площадку dS с нормалью $\mathbf{n}$ ($d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ — вектор площадки) и вычислим ток, проходящий через dS . Пусть скорость зарядов в месте расположения площадки — $\mathbf{v}$, тогда в единицу времени площадку пересекут заряды, находящиеся внутри цилиндра с осью, параллельной $\mathbf{v}$, и высотой, равной $(\mathbf{v}\mathbf{n}) = v_n$ (см. рис. 1), т.е.

$$dJ = \rho v_n dS = (\rho \mathbf{v}, \mathbf{n}) dS = (\mathbf{j} d\mathbf{S}).$$

Полный ток через произвольную площадку S конечных размеров

$$J = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (1.10)$$

Если в объёме имеется несколько зарядов или заряды рассматриваются как точечные (что можно делать всегда), то из (1.8), (1.9) получаем

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \quad (1.11)$$

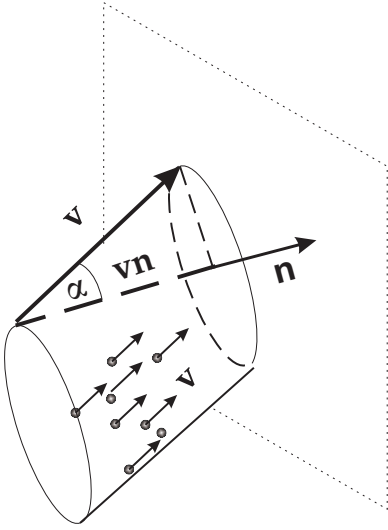


Рис. 1

Запишем теперь закон сохранения электрического заряда (1.5) для некоторого объёма V , окруженного замкнутой поверхностью S в другой форме. Левую часть, учитывая (1.7), перепишем в виде

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV.$$

Чтобы преобразовать правую часть, воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса

$$\oint_S \mathbf{a} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV \quad (1.12)$$

и выразим ток J через объёмный интеграл от дивергенции $\mathbf{j}$

$$J = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV.$$

Подставляя в (1.5), получаем

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV.$$

Так как объём V выбран произвольно, то должны быть равны подынтегральные выражения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.13)$$

Мы получили *уравнение непрерывности*, которое выражает *закон сохранения заряда в дифференциальной форме*.

Закон Кулона для электростатического взаимодействия зарядов.

Принцип суперпозиции. Опыт показывает, что два неподвижных точечных заряда e_1 и e_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга, взаимодействуют по следующему закону (*закон Кулона*, 1785 г.):

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{e_1 e_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1.14)$$

Здесь $\mathbf{F}_{12}$ — сила, с которой первый заряд действует на второй, $\mathbf{r}$ — вектор, проведенный от первого заряда ко второму.

Формула (1.14) записана в абсолютной системе единиц Гаусса СГС, которая используется во всём курсе.¹ В основу этой системы положены механические единицы (сантиметр, грамм и секунда), а единичный заряд определяется из закона Кулона, записываемого в форме (1.14).

Закон Кулона позволяет ввести понятие электрического поля, которое характеризуется напряженностью. Можно сказать, что всякий неподвижный точечный заряд e создает вокруг себя *электрическое поле с напряженностью*

$$\mathbf{E} = \frac{e}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1.15)$$

Заряд e' , находящийся в поле $\mathbf{E}$, испытывает действие силы $\mathbf{F} = e' \mathbf{E}$.

Опыт показывает, что напряженности электрического поля от нескольких неподвижных зарядов складываются как обычные векторы:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i.$$

В этом состоит *принцип суперпозиции*.

¹Система СГС используется в книгах [1, 2, 3, 4, 5, 8], а система СИ — в [6, 7]. Обсуждение различных систем единиц см. в [2].

Теорема Гаусса. Вычислим поток вектора $\mathbf{E}$ через произвольную замкнутую поверхность:

$$\Pi = \oint \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

Пусть поле создается одним точечным зарядом, который находится в начале координат: $\mathbf{E} = e\mathbf{r}/r^3$. Имея в виду применение формулы Остроградского – Гаусса, подсчитаем $\operatorname{div} \mathbf{E}$. Так как

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \left(\nabla, \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} \operatorname{div} \mathbf{r} + \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r^3}, \mathbf{r} \right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0, \quad \text{если } r \neq 0,$$

то

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = e \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad r \neq 0. \quad (1.16)$$

Рассмотрим два случая.

1. Заряд вне объёма.

Чтобы вычислить поток, переходим к объёмному интегралу от дивергенции (1.12), и с учётом (1.16) находим:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 0. \quad (1.17)$$

2. Заряд внутри объёма.

Окружим заряд сферой радиуса R . Применим результат предыдущего пункта к поверхности, составленной из S и поверхности сферы S_R . Заряд находится вне объёма, ограниченного этой поверхностью, поэтому

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} - \oint_{S_R} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 0,$$

так что

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_{S_R} \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

Поток через поверхность S_R нетрудно вычислить:

$$\oint_{S_R} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_{S_R} \frac{e\mathbf{R}}{R^3} d\mathbf{S} = \frac{e}{R^2} \oint_{S_R} dS = 4\pi e.$$

Итак, для потока через произвольную замкнутую поверхность имеем

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \begin{cases} 0, & e \notin V, \\ 4\pi e, & e \in V. \end{cases} \quad (1.18)$$

Если зарядов несколько, то согласно принципу суперпозиции

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$$

и

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint \sum_i \mathbf{E}_i d\mathbf{S} = \sum_i \oint \mathbf{E}_i d\mathbf{S} = 4\pi \sum_{i \in V} e_i = 4\pi Q.$$

В этом состоит *теорема Гаусса*: поток напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность пропорционален заряду, находящемуся внутри этой замкнутой поверхности

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi Q_{\text{охв.}} \quad (1.19)$$

Перепишем теорему Гаусса в дифференциальной форме. Представим левую и правую часть через интегралы (1.7), (1.17):

$$\int \text{div } \mathbf{E} dV = 4\pi \int \rho dV. \quad (1.20)$$

Приравнивая подынтегральные выражения, получаем теорему Гаусса в дифференциальной форме:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho. \quad (1.21)$$

Магнитное поле постоянного тока. Одно из наглядных проявлений магнитных свойств материи состоит в существовании постоянных магнитов, с исследования которых началось изучение магнетизма. Свойства постоянных магнитов были известны задолго до установления количественных законов электродинамики. Напомним 2 из них:

- 1) любой магнит имеет два полюса (N и S), причем одноименные полюсы отталкиваются, а разноименные притягиваются;
- 2) невозможно создать магнит с одним полюсом.

Количественный закон взаимодействия магнитных полюсов был открыт Кулоном одновременно с законом для электрических зарядов и оказался совпадающим с ним по форме. А именно: если взять две длинные магнитные спицы и пренебречь влиянием далеких полюсов, то сила взаимодействия двух ближайших полюсов

$$\mathbf{F} = \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1.22)$$

Здесь m_1, m_2 — магнитные массы (заряды) полюсов. Закон (1.22) по аналогии с электрическим полем позволяет ввести магнитную индукцию (ср. с (1.14),

(1.15)). Если предположить, что существуют магнитные заряды, то точечный магнитный заряд окружен полем с *магнитной индукцией*

$$\mathbf{B} = \frac{m\mathbf{r}}{r^3}$$

(название магнитная индукция сложилось исторически, удобнее было бы называть $\mathbf{B}$ напряженностью магнитного поля). Хотя (1.22) совпадает с (1.14), однако (как первоначально понималось второе свойство магнитов) положительные и отрицательные заряды магнитов нельзя разделить, то в любой области пространства $\sum m_i = 0$. Поэтому теорема Гаусса для магнитного поля имеет форму (ср. с (1.19), (1.20))

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.23)$$

(Свойство 2 постоянных магнитов легко объясняется с точки зрения представлений о молекулярной структуре вещества: если любая молекула — элементарный магнит, то при разделении магнита на две части снова получим магниты с N и S полюсами.)

Решающую роль в выяснении природы магнетизма сыграло экспериментальное обнаружение действия тока на магнит (Эрстед, 1820 г.), см. рис. 2.

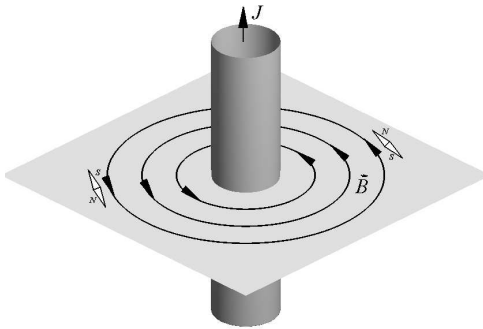


Рис. 2

Из опытов следовало, что ток создает магнитное поле, которое спадает обратно пропорционально расстоянию от провода. Более детально связь тока и магнитного поля определяется *законом Био – Савара – Лапласа*: каждый элемент тока $Jd\mathbf{l}$ создает магнитное поле с индукцией

$$d\mathbf{B} = \frac{J}{c} \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (1.24)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, направленный от элемента тока в точку наблюдения, c — постоянная, имеющая размерность скорости и равная $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с.

Вскоре (1821 г.) в опытах Фарадея, Эрстеда и Ампера было обнаружено обратное действие магнитного поля на токи. Оказалось, что сила, действующая в магнитном поле $\mathbf{B}$ на элемент тока $Jd\mathbf{l}$, равна

$$d\mathbf{F} = \frac{J}{c} [d\mathbf{l} \mathbf{B}] \quad (1.25)$$

— *формула Ампера*. Закон Био – Савара и формула для силы Ампера не согласуются с предположением о существовании магнитных зарядов. Действительно, нельзя объяснить (1.25), задавая распределение магнитных зарядов

вдоль проводника, так как сила, действующая на них, была бы направлена вдоль $\mathbf{B}$. В связи с этим Ампер выдвинул гипотезу, что магнитное поле создается током, а постоянный магнит эквивалентен системе замкнутых токов (гипотеза молекулярных токов). Это предположение Ампер подтвердил экспериментально, показав, что катушка с током ведет себя как прямой магнит, а круговой ток эквивалентен магнитному листку (теорема эквивалентности Ампера). Таким образом, равенство нулю $\operatorname{div} \mathbf{B}$ в (1.23) означает не то, что магнитные заряды разделить невозможно, а то, что магнитных зарядов нет.

Вернемся к формуле Ампера. Если сила действует на проводник с током, то она действует на движущийся заряд. Чтобы найти её, преобразуем (1.25). Запишем

$$d\mathbf{l} = \mathbf{v} dt,$$

где $\mathbf{v}$ — скорость заряда. Полный заряд, который за время dt пройдет через сечение проводника (и движется на участке $d\mathbf{l}$), равен $dq = J dt$. Тогда

$$d\mathbf{F} = \frac{J}{c} [d\mathbf{l} \mathbf{B}] = \frac{J dt}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] = \frac{dq}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}].$$

Таким образом, на заряд e , который движется в магнитном поле со скоростью $\mathbf{v}$, действует сила

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}]$$

— магнитная составляющая силы Лоренца. Полная сила, действующая на заряд в электромагнитном поле, — *сила Лоренца* — есть

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}]. \quad (1.26)$$

Зная закон Био – Савара – Лапласа, можно показать, что выполняется следующее соотношение (подобно тому, как из закона Кулона следует теорема Гаусса):

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J \quad (1.27)$$

— интеграл по замкнутому контуру от вектора $\mathbf{B}$ (циркуляция поля $\mathbf{B}$) пропорционален полному току через поверхность, ограниченную этим контуром. В этом состоит *закон Ампера*. Из-за громоздкости выкладок не будем здесь получать (1.27) из (1.24). В разделе 3.1 будет показано, что из закона Ампера следует закон Био – Савара – Лапласа.

Преобразуем закон Ампера к дифференциальной форме. Так как по формуле Стокса

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int \operatorname{rot} \mathbf{B} d\mathbf{S},$$

а $J = \int \mathbf{j} d\mathbf{S}$, то

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (1.28)$$

Подчеркнём, что закон Ампера был установлен для постоянных токов.

Закон электромагнитной индукции Фарадея. В 1831 г. Фарадеем был поставлен опыт, в котором при замыкании и размыкании контура (первичной обмотки, охватывающей сердечник), в другой (вторичной) обмотке возникал ток, который фиксировался гальванометром (рис. 3).

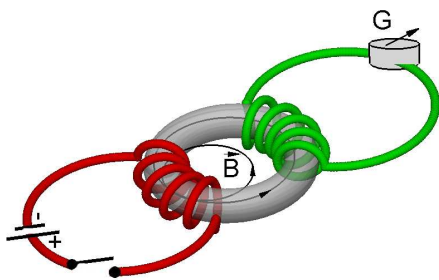


Рис. 3

Наиболее общая формулировка результатов опыта Фарадея состоит в том, что ток, возникающий в первичной обмотке, порождает магнитное поле, которое, в свою очередь, порождает электрическое поле во вторичной обмотке. Введем величину потока вектора магнитной индукции (магнитного потока) через поверхность S

$$\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S}$$

и ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Из экспериментов следует *закон электромагнитной индукции*:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.29)$$

— при изменении магнитного потока через поверхность, опирающуюся на замкнутый контур, в последнем наводится ЭДС индукции, зависящая от скорости изменения магнитного потока. Знак « $-$ » отражает правило Ленца: индукционный ток должен быть направлен так, чтобы своим магнитным полем ослабить влияние внешнего магнитного потока. Правило Ленца — это следствие закона сохранения энергии.

Воспользуемся теоремой Стокса

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S} \quad (1.30)$$

и, считая поверхность неподвижной, преобразуем производную от потока

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.31)$$

Подставляя (1.30) и (1.31) в (1.29), получим закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.32)$$

– переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. Такая взаимосвязь электрического и магнитного полей позволяет рассматривать их как различные проявления единого электромагнитного поля.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 14; [2], гл. 2, § 1–3; [5], § 1–6; [6], гл. 1, § 4.

1.3. Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме

Законы электромагнетизма, которые были известны из экспериментов к середине XIX века, могут быть записаны в виде следующих уравнений (см. (1.21), (1.23), (1.28), (1.32)):

$$\begin{aligned} (1.33.1) \quad & \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \\ (1.33.2) \quad & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ (1.33.3) \quad & \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ (1.33.4) \quad & \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Уравнения (1.33.1), (1.33.2), (1.33.4) получены на основе законов электростатики и магнитостатики. Нетрудно проверить, что в случае переменных полей они (как оказывается, только одно из них) должны быть изменены. Действительно, наряду с (1.33.1)–(1.33.4) должно выполняться уравнение непрерывности (1.13):

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Но поскольку $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$, то из (1.33.4) следует, что $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Противоречие не возникает только в стационарном случае, когда $\partial \rho / \partial t = 0$.

Поэтому уравнение (1.33.4) нужно обобщить, добавив в него некоторое слагаемое так, чтобы из (1.33.4) не следовало тождественного обращения в нуль $\operatorname{div} \mathbf{j}$. Запишем вместо (1.33.4)

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \mathbf{X},$$

где $\mathbf{X}$ нужно найти из условия совместимости с уравнением непрерывности. Возьмем дивергенцию от обеих частей последнего уравнения:

$$\operatorname{div} \mathbf{X} = -\operatorname{div} 4\pi \mathbf{j}. \quad (1.34)$$

Преобразуем правую часть, используя (1.13) и (1.33.1)

$$4\pi \operatorname{div} \mathbf{j} = -4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{X} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0,$$

следовательно

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{a},$$

где $\mathbf{a}$ – произвольный вектор. Максвелл предположил, что $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$, так что вместо (1.33.4) следует использовать уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.35)$$

Появившаяся в последнем уравнении производная $\partial \mathbf{E} / \partial t$ (которая делает его похожим по виду на (1.33.3)) по историческим причинам называется иногда «*током смещения*»: $\partial \mathbf{E} / \partial t = 4\pi \mathbf{j}_{\text{см}}$.

Исправление Максвелла привело к устранению противоречий в уравнениях электромагнетизма. *Уравнения Максвелла*

$$\begin{aligned} (1.36.1) \quad & \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \\ (1.36.2) \quad & \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ (1.36.3) \quad & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ (1.36.4) \quad & \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.36)$$

описывают очень широкую область электромагнитных явлений и становятся неприменимыми лишь тогда, когда существенными оказываются квантовые эффекты. Подчеркнем, что уравнения Максвелла не вытекают из каких-либо более общих теоретических положений, а являются обобщенной записью наблюдавшихся на опыте фактов.

С математической точки зрения уравнения Максвелла есть система линейных уравнений в частных производных первого порядка. Система содержит два векторных и два скалярных уравнения (т.е. восемь уравнений в проекциях) для определения шести неизвестных (трёх проекций $\mathbf{E}$ и трёх проекций $\mathbf{B}$), но можно убедиться, что система (1.36) непротиворечива. Формально уравнения (1.36.1), (1.36.3) можно рассматривать как универсальные начальные условия для (1.36.2), (1.36.4). Действительно, возьмем дивергенцию от обеих частей (1.36.4). Так как $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, то это приводит к

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{B}$ не зависит от времени и эта константа определяется начальными условиями. Уравнение (1.36.3) требует, чтобы она всегда была равна нулю.

Аналогичным образом связаны уравнения (1.36.1) и (1.36.2). Действительно, взяв дивергенцию от обеих частей (1.36.2)

$$\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

и используя уравнение непрерывности, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi\rho) = 0,$$

т.е. разность $\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi\rho$ не зависит от времени. Согласно (1.36.1) начальные условия должны быть такими, чтобы эта разность была равна нулю.

Проинтегрируем обе части уравнений (1.36.1), (1.36.3) по объёму и воспользуемся теоремой Остроградского, а обе части уравнений (1.36.2), (1.36.4) проинтегрируем по незамкнутой поверхности и воспользуемся теоремой Стокса. В результате получаем *уравнения Максвелла в интегральной форме*:

$$\begin{aligned} (1.37.1) \quad \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} &= 4\pi \int \rho dV, \\ (1.37.2) \quad \oint \mathbf{B} d\mathbf{l} &= \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} d\mathbf{S}, \\ (1.37.3) \quad \oint \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0, \\ (1.37.4) \quad \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} d\mathbf{S}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Напомним ещё раз, как уравнения Максвелла (в интегральной форме) соотносятся с теми экспериментальными законами, которым они обязаны своим происхождением. Уравнение (1.37.1) есть теорема Гаусса, которая оказывается справедливой не только для статического, но и для зависящего от времени поля $\mathbf{E}$. Уравнение (1.37.2) обобщает закон Ампера (с добавлением к нему максвелловского тока смещения). Уравнение (1.37.3), которое называют теоремой Гаусса для магнитного поля, выражает отсутствие в природе магнитных зарядов. Наконец, (1.37.4) есть закон электромагнитной индукции Фарадея.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 14; [2], гл. 2, § 4.

1.4. Энергия электромагнитного поля

Общим следствием, которое вытекает из уравнений Максвелла, является существование энергии электромагнитного поля. Для выяснения зависимости энергии от векторов поля рассмотрим замкнутую систему, состоящую из

электромагнитного поля и частиц. Запишем уравнения Максвелла с роторами для этой системы:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Умножим первое уравнение скалярно на $\mathbf{B}$, а второе на $\mathbf{E}$ и вычтем из первого уравнения второе:

$$\frac{1}{c} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \mathbf{E}. \quad (1.38)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{c} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + B^2),$$

а

$$\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{B}],$$

и вводя *вектор Пойнтинга* $\mathbf{g}$ соотношением

$$\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{B}], \quad (1.39)$$

перепишем (1.38) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) = -\mathbf{j} \mathbf{E} - \operatorname{div} \mathbf{g}. \quad (1.40)$$

Проинтегрируем обе части по некоторому объему и применим к интегралу от $\operatorname{div} \mathbf{g}$ теорему Остроградского

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) dV = - \int \mathbf{j} \mathbf{E} dV - \oint \mathbf{g} d\mathbf{S}. \quad (1.41)$$

Вычислим сначала интеграл от первого слагаемого справа. Представляя плотность тока в виде (1.11), получим

$$\int \mathbf{j} \mathbf{E} dV = \sum e_a \mathbf{v}_a \mathbf{E}_a,$$

где $\mathbf{E}_a$ — напряженность электрического поля в точке, где находится заряд e_a . Запишем силу, действующую на заряд e_a :

$$\mathbf{F}_a = e_a \mathbf{E}_a + \frac{e_a}{c} [\mathbf{v}_a \mathbf{B}_a].$$

Умножив $\mathbf{F}_a$ скалярно на $\mathbf{v}_a$ и учитывая, что $(\mathbf{v}_a[\mathbf{v}_a\mathbf{B}_a]) = 0$, получим

$$\mathbf{v}_a\mathbf{F}_a = e_a\mathbf{v}_a\mathbf{E}_a.$$

Обозначим $\varepsilon_a = mv_a^2/2$ — кинетическую энергию частицы. Поскольку

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = m\mathbf{v}_a\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{v}_a\mathbf{F}_a,$$

то

$$\int_V \mathbf{j}\mathbf{E} dV = \sum \frac{d\varepsilon_a}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \varepsilon_a.$$

Теперь (1.41) переходит в

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dV + \sum \varepsilon_a \right) = - \oint_S \mathbf{g}d\mathbf{S}. \quad (1.42)$$

Если интегрирование производится по всему пространству, то интеграл по поверхности исчезает (поле на бесконечности равно нулю) и

$$\frac{d}{dt} \left(\int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dV + \sum \varepsilon_a \right) = 0. \quad (1.43)$$

Таким образом, для замкнутой системы, состоящей из электромагнитного поля и частиц, сохраняется величина, стоящая в написанном уравнении в скобках. Второй член в этом выражении есть кинетическая энергия частиц. Первый же член, следовательно, есть энергия самого электромагнитного поля:

$$U = \int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dV. \quad (1.44)$$

Величину

$$W = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \quad (1.45)$$

можно назвать плотностью энергии электромагнитного поля; это есть энергия единицы объёма поля.

При интегрировании по некоторому конечному объёму поверхностный интеграл в (1.42), вообще говоря, не исчезает. Слева в (1.42) стоит изменение полной энергии поля и частиц, поэтому интеграл $\oint \mathbf{g}d\mathbf{S}$ есть количество энергии, которая «вытекает» через поверхность, ограничивающую этот объём в единицу времени (поток энергии), а

$$\mathbf{g}d\mathbf{S} = \mathbf{g}n dS = g_n dS$$

— количество энергии поля, вытекающее через площадку dS . Таким образом, проекция вектора Пойнтинга на направление $\mathbf{n}$ численно равна количеству энергии, протекающей через единичную площадку, перпендикулярную направлению $\mathbf{n}$, в единицу времени, так что $\mathbf{g}$ есть вектор плотности потока энергии электромагнитного поля.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 16, п. 3; [2], гл. 2, § 16; [3], § 31; [7], гл. 27, § 1-3.

1.5. Единственность решения уравнений Максвелла

Сформулируем следующее утверждение.

Решение уравнений Максвелла $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в некоторой области пространства V единственным образом определяется по заданной плотности источников, если заданы начальные значения поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ во всех точках области и, кроме того, для одного из векторов $\mathbf{E}$ или $\mathbf{B}$ задана касательная составляющая $\mathbf{E}_\tau|_S$ или $\mathbf{B}_\tau|_S$ на поверхности, ограничивающей эту область, в течение всего рассматриваемого промежутка времени.

Для доказательства предположим, что есть два разных поля — $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{B}_2$, которые являются решениями уравнения Максвелла с одной и той же плотностью источников и одинаковыми начальными и граничными условиями.

Образует разности $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1$ и $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1$. По предположению $\mathbf{E}' \neq 0$, $\mathbf{B}' \neq 0$. Покажем, что $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ являются решением уравнений Максвелла с нулевой плотностью источников и нулевыми начальными и граничными условиями. Функции $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{B}_2$ обращают уравнения Максвелла в тождества, а, в силу линейности уравнений Максвелла, из справедливости

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{B}_1 &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}_2 &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t}\end{aligned}$$

следует справедливость

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t}.$$

То есть $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ удовлетворяют уравнениям Максвелла с нулевой плотностью тока $\mathbf{j}' = 0$.

Начальные значения для $\mathbf{E}'$ определяются по $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, 0)$ и $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, 0)$:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, 0) - \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, 0)$$

и в силу сделанных предположений равны нулю. Аналогично равны нулю начальные значения $\mathbf{B}'$:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \mathbf{B}'(\mathbf{r}, 0) = 0.$$

Точно так же нулевыми являются граничные условия:

$$\mathbf{E}'_\tau|_S = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{B}'_\tau|_S = 0.$$

Так как $\mathbf{j}' = 0$, то аналогично тому, как в п. 1.4 было получено соотношение (1.42), можно получить

$$\frac{d}{dt} \int_v \frac{E'^2 + B'^2}{8\pi} dV = -\frac{c}{4\pi} \oint ([\mathbf{E}'\mathbf{B}'] d\mathbf{S}) = -\frac{c}{4\pi} \int ([\mathbf{E}'\mathbf{B}'] \mathbf{n}) dS.$$

Заметим, что либо вектор $\mathbf{E}$, либо вектор $\mathbf{B}$ параллелен $\mathbf{n}$. Действительно, если, например, $\mathbf{E}'_\tau = 0$, то $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{n}$. Поэтому смешанное произведение под интегралом обращается в нуль, и

$$\int_V \frac{E'^2 + B'^2}{8\pi} dV = \text{const.}$$

Но поскольку $E' = B' = 0$ при $t = 0$, то const тоже равна нулю. Это возможно лишь если $\mathbf{E}' = 0$ и $\mathbf{B}' = 0$ тождественно во всех точках объёма.

Сделаем следующие замечания:

1. Если рассматривать решение во всем пространстве, а не в ограниченном объеме V , то нужно задавать только начальные условия, так как $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ стремятся к нулю на больших расстояниях.

2. Хотя в условии говорится о заданной плотности источников, плотность заряда нигде не использовалась, и задание ρ для доказательства теоремы не требуется. Действительно, уравнение непрерывности $\partial\rho/\partial t + \text{div } \mathbf{j} = 0$ определяет ρ через $\mathbf{j}$ с точностью до начальных значений $\rho = -\int_0^t \text{div } \mathbf{j} dt + \rho(\mathbf{r}, 0)$. Но $\rho(\mathbf{r}, 0)$ находится по заданным начальным условиям для электрического поля $\rho(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{4\pi} \text{div } E(\mathbf{r}, 0)$.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 17.

1.6. Импульс электромагнитного поля

Наряду с энергией электромагнитное поле обладает импульсом. Выражение для импульса поля можно найти, если для замкнутой системы «поле + частицы» установить закон сохранения вида:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P} + \mathbf{\Gamma}) = 0, \tag{1.46}$$

где $\mathbf{P}$ – полный импульс частиц. Тогда, очевидно, $\mathbf{\Gamma}$ следует считать импульсом поля.

Найдём изменение импульса частиц. Поскольку на каждую из них действует сила Лоренца, то

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{p}_a = \sum (e_a \mathbf{E}_a + \frac{e_a}{c} [\mathbf{v}_a \mathbf{B}_a]).$$

Используя (1.8), (1.11), запишем выражение справа в виде интеграла от плотности силы

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int \mathbf{f} dV = \int \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}] \right) dV. \quad (1.47)$$

Выразив ρ и $\mathbf{j}$ из уравнений Максвелла, для $\mathbf{f}$ будем иметь

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}] - \frac{1}{4\pi c} \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{B} \right].$$

Симметризуем правую часть по $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, прибавив к ней равные нулю выражения

$$\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B}, \quad -\frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}] - \frac{1}{4\pi c} \left[\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right], \quad (1.48)$$

тогда $\mathbf{f}$ примет вид

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \mathbf{B}] + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}] + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{B}].$$

Подставив последнее выражение в (1.47), приходим к следующему результату:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{P} + \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E} \mathbf{B}] dV \right) = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + [\operatorname{rot} \mathbf{E}, \mathbf{E}] + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} + [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}]) dV. \quad (1.49)$$

Объёмный интеграл в правой части может быть преобразован в поверхностный

$$\int (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + [\operatorname{rot} \mathbf{E}, \mathbf{E}]) dV = \oint \left(\mathbf{E} (\mathbf{E} d\mathbf{S}) - \frac{1}{2} E^2 d\mathbf{S} \right) \quad (1.50)$$

(это соотношение докажем ниже), так что

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{P} + \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E} \mathbf{B}] dV \right) = \frac{1}{4\pi} \oint \left(\mathbf{E} (\mathbf{E} d\mathbf{S}) - \frac{1}{2} E^2 d\mathbf{S} + \mathbf{B} (\mathbf{B} d\mathbf{S}) - \frac{1}{2} B^2 d\mathbf{S} \right). \quad (1.51)$$

Ясно, что интеграл справа будет стремиться к нулю при неограниченном возрастании поверхности, если только векторы поля убывают быстрее, чем

$1/r$. Тогда, переходя к бесконечно большому объёму, приходим к выражению вида (1.46). Таким образом, величина

$$\mathbf{\Gamma} = \int \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{B}] dV \quad (1.52)$$

представляет собой импульс электромагнитного поля, а

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{B}] \quad (1.53)$$

— плотность импульса (т.е. импульс единицы объёма электромагнитного поля).

При интегрировании по некоторому конечному объёму поверхностный интеграл в (1.51), вообще говоря, не исчезает. Очевидно, что этот интеграл следует рассматривать как поток импульса поля, через поверхность, ограничивающую данный объём. Запишем (1.51) в тензорных обозначениях ($i, k = x, y, z$; по повторяющимся индексам предполагается суммирование):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (P_i + \Gamma_i) &= \frac{1}{4\pi} \oint \left(E_i E_k dS_k - \frac{1}{2} E^2 dS_i + B_i B_k dS_k - \frac{1}{2} B^2 dS_i \right) = \\ &= \{dS_i = \delta_{ik} dS_k\} = \oint \sigma_{ik} dS_k, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi} (E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \delta_{ik})$$

— тензор плотности потока импульса — так называемый максвелловский тензор натяжений. Плотность потока энергии есть вектор; плотность же потока импульса, который сам есть вектор, должна, очевидно, быть тензором (компонента σ_{ik} этого тензора есть количество i -й компоненты импульса, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси k).

Из (1.39) и (1.53) следует, что между вектором плотности импульса и вектором Пойнтинга имеется соотношение

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{g}}{c^2}. \quad (1.54)$$

Интересно отметить, что оно соответствует соотношению релятивистской механики между энергией и импульсом свободной частицы, которая движется со скоростью света c :

$$\mathcal{E} = c p. \quad (1.55)$$

Действительно, применим (1.55) к электромагнитному полю (как известно, поле распространяется со скоростью c , в дальнейшем этот результат будет

получен из уравнений Максвелла): $W = c\gamma$. Для вектора плотности потока энергии $\mathbf{g}$ из наглядных соображений (поле, распространяясь, переносит энергию, энергия единицы объёма – W) можем записать $\mathbf{g} = c\mathbf{W}$, что приводит к (1.54).

Докажем тождество (1.50). Возьмем в теореме Остроградского

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \oint_S \mathbf{a} d\mathbf{S} \quad (1.56)$$

вектор $\mathbf{a}$ равным

$$\mathbf{a} = (\mathbf{c}\mathbf{E})\mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2\mathbf{c},$$

где $\mathbf{c}$ – постоянный вектор. Вычислим

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = (\mathbf{c}\mathbf{E})\operatorname{div} \mathbf{E} + (\mathbf{E}\nabla(\mathbf{c}\mathbf{E})) - (\mathbf{c}, (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}) - (\mathbf{c}[\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}]).$$

Второе и третье слагаемые здесь взаимно уничтожаются

$$(\mathbf{E}\nabla(\mathbf{c}\mathbf{E})) - (\mathbf{c}, (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}) = E_i \frac{\partial}{\partial x_i} c_k E_k - c_i E_k \frac{\partial}{\partial x_k} E_i = 0.$$

Подставляя полученное выражение для $\operatorname{div} \mathbf{a}$ в (1.56), приходим к (1.50).

Электромагнитное поле обладает также моментом импульса. Момент импульса единицы объема поля равен

$$\mathbf{l} = [\mathbf{r}\boldsymbol{\gamma}] \quad (1.57)$$

(ср. с моментом импульса частицы в механике).

Рекомендуемая литература: [2], гл. 2, § 17.

2. Постоянное электрическое поле

Записав общие уравнения электромагнитного поля и выяснив основные вытекающие из них следствия, перейдем к рассмотрению различных частных случаев электромагнитных полей. При этом будем переходить от простых к более сложным случаям. Самым простым примером электромагнитных полей являются стационарные, которые создаются неподвижными зарядами или постоянными токами, когда $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0$. В этих условиях в уравнениях Максвелла производные по времени обращаются в нуль $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ и уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Таким образом, система уравнений Максвелла в статическом случае распадается на две пары уравнений, так что постоянные электрическое и магнитное поля существуют независимо друг от друга. Постоянное электрическое поле создается неподвижными зарядами, постоянное магнитное поле создается постоянными токами.

2.1. Основные уравнения постоянного электрического поля

Для постоянного электрического (электростатического) поля уравнения Максвелла имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) будет выполняться, если взять напряженность электрического поля в виде

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (2.4)$$

где φ — произвольная скалярная функция, так как $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$. Можно показать, что не только из (2.4) следует (2.3), но и из (2.3) следует (2.4), то есть при выборе $\mathbf{E}$ в виде (2.4) никакие решения уравнения (2.3) потеряны не были.

Напомним эти известные из интегрального исчисления рассуждения. Из теоремы Стокса и уравнения (2.3) следует, что циркуляция $\mathbf{E}$ равна нулю:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0.$$

Это означает, что криволинейный интеграл от $\mathbf{E}$ не зависит от пути интегрирования:

$$\int_{1a2} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{1b2} \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

а зависит только от начальной и конечной точки:

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varphi(1) - \varphi(2) = - \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = - \int_{(1)}^{(2)} \frac{\partial\varphi}{\partial l} dl.$$

Записав производную по направлению через градиент $\frac{\partial\varphi}{\partial l} = (\nabla\varphi, \mathbf{n}_l)$ и вводя элемент контура $d\mathbf{l} = \mathbf{n}_l dl$, получим

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_{(1)}^{(2)} (\nabla\varphi, \mathbf{n}_l) dl = - \int_{(1)}^{(2)} \nabla\varphi d\mathbf{l}.$$

Отсюда приходим к (2.4).

Функция φ , введенная в (2.4), называется *потенциалом электростатического поля*. Ясно, что потенциал определен с точностью до константы, поскольку если $\varphi' = \varphi + \text{const}$, то $\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\nabla\varphi'$.

Потенциальный характер электростатического поля, т.е. возможность представить напряженность $\mathbf{E}$ в виде (2.4), означает, что работа A электрических сил по перемещению заряда e из точки 1 в точку 2 не зависит от пути перемещения заряда. Действительно,

$$A = \int_{(1)}^{(2)} e\mathbf{E} d\mathbf{l} = -e \int_{(1)}^{(2)} \nabla\varphi d\mathbf{l} = -e \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = -e(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (2.5)$$

т.е. работа определяется разностью потенциалов начальной и конечной точек. Если, в частности, эти точки совпадают, то работа обращается в нуль:

$$A = e \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Таким образом, разность потенциалов в двух точках является однозначно определенной величиной — через неё выражается работа электрических сил по перемещению заряда между этими точками.

Подставляя (2.4) в (2.2), найдём уравнение, которому удовлетворяет электростатический потенциал

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (2.6)$$

где

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

— оператор Лапласа. Уравнение (2.6) называется *уравнением Пуассона*. В области, где зарядов нет, т.е. $\rho = 0$, потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0.$$

Определим теперь поле, создаваемое точечным зарядом. Из соображений симметрии ясно, что оно будет направлено по радиусу-вектору, проведенному из точки, в которой находится заряд, а его величина зависит только от расстояния до заряда. Пусть заряд e находится в начале координат, тогда

$$\mathbf{E} = E(r)\frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат. Для нахождения E применим (2.2) в интегральной форме, т.е. теорему Гаусса. В качестве

гауссовой поверхности выберем сферу. Поток через неё равен

$$\oint_{\vec{S}_r} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_{\vec{S}_r} E dS = E \oint_{\vec{S}_r} dS = E 4\pi r^2.$$

По теореме Гаусса (1.37.1)

$$E 4\pi r^2 = 4\pi e,$$

отсюда находим

$$\mathbf{E} = \frac{e}{r^3} \mathbf{r}. \quad (2.7)$$

В этом состоит закон Кулона. Естественно, что (2.7) следует из (1.37.1), так как ранее сама теорема Гаусса (см. стр. 13) была получена из закона Кулона.

Потенциал φ связан с напряженностью $\mathbf{E}$ соотношением

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi(r) = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

поэтому

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{e}{r^2}, \quad \varphi = \frac{e}{r} + \text{const.}$$

Если выбрать потенциал так, чтобы он исчезал на бесконечности, $\varphi(\infty) = 0$, то

$$\varphi = \frac{e}{r}.$$

Очевидно, что заряд e , находящийся не в начале координат, а в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}'$, создает в точке $\mathbf{r}$ поле

$$\varphi = \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{E} = \frac{e(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Обратим внимание на математическое соотношение, получающееся при подстановке в (2.6) значений ρ и φ для точечного заряда:

$$\Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.8)$$

Напомним также, что функция $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

называется функцией Грина уравнения Лапласа. Сравнивая две последние формулы, находим

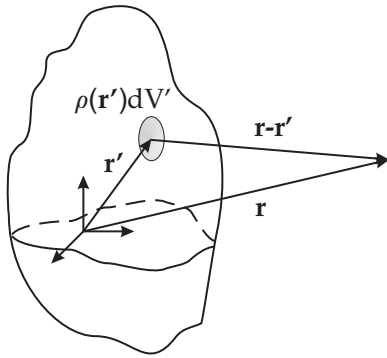
$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Линейность уравнений Максвелла обеспечивает выполнение *принципа суперпозиции*. Действительно, пусть заряды с плотностью ρ_1 создают поле $\mathbf{E}_1$, а заряды с плотностью ρ_2 — поле $\mathbf{E}_2$. Тогда выполняются равенства $\operatorname{div} \mathbf{E}_1 = 4\pi\rho_1$ и $\operatorname{div} \mathbf{E}_2 = 4\pi\rho_2$. Складывая их, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_1 + \operatorname{div} \mathbf{E}_2 = 4\pi\rho_1 + 4\pi\rho_2, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = 4\pi(\rho_1 + \rho_2),$$

т.е. заряды с плотностью $\rho_1 + \rho_2$ создают поле $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

Используя закон Кулона и принцип суперпозиции, можно в общем виде найти поле, создаваемое системой зарядов, распределенных в пространстве с известной плотностью ρ : заряд $\rho(\mathbf{r}')dV'$, находящийся в бесконечно малом объёме dV' , создает в точке наблюдения $\mathbf{r}$ потенциал (рис. 4)



$$d\varphi = \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Интегрируя по объёму, приходим к

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.9)$$

Напряженность поля находим, вычисляя градиент

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}dV'. \quad (2.10)$$

Если система состоит из точечных зарядов, то вместо (2.9) и (2.10) получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum \frac{e_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum \frac{e_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|^3}.$$

Проверим, что (2.9) есть решение уравнения Пуассона (2.6). Подействовав на φ оператором Лапласа и используя (2.8)

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \int \Delta_{\mathbf{r}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}dV' = -4\pi \int \rho(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')dV' = -4\pi\rho(\mathbf{r}),$$

убеждаемся, что это так.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 19; [3], § 36.

2.2. Энергия электростатического поля

Плотность энергии электростатического поля дается формулой (1.45) при $B = 0$:

$$W = \frac{E^2}{8\pi}.$$

Вычислим, исходя из этой формулы, энергию неподвижной системы зарядов:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV,$$

где интегрирование проводится по всему пространству. Подставляя сюда $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, можно преобразовать U следующим образом:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}, \nabla\varphi) dV = -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(\varphi\mathbf{E}) dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \mathbf{E} dV.$$

Первый интеграл здесь преобразуется в поверхностный

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi\mathbf{E}) dV = \int_S \varphi \mathbf{E} d\mathbf{S}$$

и для ограниченной системы зарядов обращается в нуль при интегрировании по бесконечной поверхности, охватывающей всё пространство. Действительно, при удалении от системы φ убывает не медленнее $1/r$, а E — не медленнее $1/r^2$ (подробнее см. разд. 2.3), тогда как сама поверхность растет как r^2 . Подставляя во второй интеграл $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$, находим следующее выражение для энергии системы зарядов:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV. \quad (2.11)$$

Рассмотрим систему точечных зарядов. Подставляя (1.8) в (2.11), получим для U сумму вместо интеграла

$$U = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi_a, \quad (2.12)$$

где $\varphi_a = \varphi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a}$ — потенциал, созданный в точке $\mathbf{r}_a$ (в которой находится заряд e_a) всеми зарядами системы. Запишем

$$\varphi_a = \sum_{b(b \neq a)} \frac{e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + \frac{e_a}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_a|}, \quad (2.13)$$

и, соответственно,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{a,b(b \neq a)} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + \frac{1}{2} \sum_a \frac{e_a^2}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_a|}. \quad (2.14)$$

Здесь первая сумма, в которой индексы a и b не совпадают, представляет собой энергию взаимодействия точечных зарядов. Вторая сумма (не зависящая от взаимного расположения зарядов) есть сумма собственных энергий

точечных зарядов. Каждый член в ней расходится ввиду расходимости кулоновского потенциала при $r \rightarrow 0$. Очевидная бессмысленность этого результата означает, что классическая электродинамика становится неприменимой на малых расстояниях. Трудность с расходимостью *собственной энергии* является фундаментальной и проявляется не только в классической электродинамике, но и в современной теории элементарных частиц, основу которой составляют квантовая механика и теория относительности. Для того чтобы избежать расходимости, следует считать элементарные частицы протяженными. Но это неизбежно означает наличие у них внутренней структуры, т.е. «неэлементарность». Обратим внимание, что на ограниченную область применимости классической электродинамики указывают противоречия внутри неё самой.

Ввиду невозможности вычислить в рамках классической электродинамики собственную энергию зарядов, ограничиваются вычислением энергии их взаимодействия:

$$U_{int} = \frac{1}{2} \sum_{b \neq a} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} = \sum_{b > a} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}. \quad (2.15)$$

В частности, энергия взаимодействия двух зарядов дается выражением

$$U_{12} = \frac{e_1 e_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим теперь непрерывное распределение зарядов. Пусть имеются две ограниченные системы (не обязательно разделенные в пространстве) с плотностями ρ_1 , ρ_2 , которые создают поля с потенциалами φ_1 , φ_2 . Воспользовавшись принципом суперпозиции и подставив в (2.11) $\rho = \rho_1 + \rho_2$ и $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, будем иметь

$$U = U_{11} + U_{22} + U_{12},$$

где

$$\begin{aligned} U_{11} &= \frac{1}{2} \int \rho_1 \varphi_1 dV, & U_{22} &= \frac{1}{2} \int \rho_2 \varphi_2 dV, \\ U_{12} &= \frac{1}{2} \int (\rho_1 \varphi_2 + \rho_2 \varphi_1) dV. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Величины U_{11} и U_{22} представляют собой собственные энергии систем 1 и 2, а U_{12} – энергия их взаимодействия (в механике её называют потенциальной энергией взаимодействия). Энергию взаимодействия можно записать в другом виде, если воспользоваться формулой

$$\varphi_{1,2}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_{1,2}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Поменяв местами в одном из слагаемых в U_{12} из (2.17) переменные интегрирования $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, получим

$$U_{12} = \iint \frac{\rho_1(\mathbf{r})\rho_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV' = \int \rho_1 \varphi_2 dV = \int \rho_2 \varphi_1 dV. \quad (2.18)$$

Энергию одной системы тоже можно записать через двойной интеграл

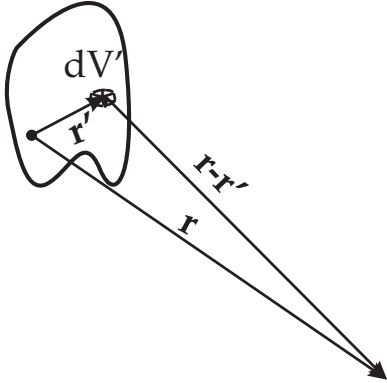
$$U_{11} = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho_1(\mathbf{r})\rho_1(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'.$$

Обратим внимание на множитель $1/2$, отличающий энергию одной системы от энергии взаимодействия двух систем (2.18).

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 22; [2], гл. 3, § 7; [3], § 37.

2.3. Поле на больших расстояниях от системы зарядов. Дипольный и квадрупольный моменты

Рассмотрим систему зарядов, локализованную в некоторой области пространства (рис. 5).



Потенциал создаваемого ею поля определяется формулой (2.9)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.19)$$

или, если заряды точечные,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_a|}. \quad (2.20)$$

Рис. 5

Эти общие выражения для потенциала упрощаются, если поле рассматривается на большом расстоянии от системы $r \gg l$, где l – характерный размер системы. Выберем начало координат внутри системы, тогда в (2.19), (2.20) $r' \sim l$. Упростим (2.19), (2.20), разлагая

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = (r^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}' + r'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

в них по степеням r'/r с учетом членов, имеющих относительную малость $\sim (r'/r)^2$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r}\mathbf{r}')^2}{2r^5} - \frac{r'^2}{2r^3}. \quad (2.21)$$

Введем тензорные обозначения $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Записав через них скалярные произведения (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование)

$$\mathbf{r}\mathbf{r}' = x_\alpha x'_\alpha, \quad r^2 = x_\alpha x_\alpha = \delta_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

приведем слагаемые с квадратичной малостью в (2.21) к виду

$$\frac{3(\mathbf{r}\mathbf{r}')^2}{2r^5} - \frac{r'^2}{2r^5} = \frac{1}{2r^5}(3x_\alpha x'_\alpha x_\beta x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta) = \frac{x_\alpha x_\beta}{2r^5}(3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}). \quad (2.22)$$

Соответственно, для (2.20) получим приближенное равенство:

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{\sum e_a}{r} + \frac{(\mathbf{r}, \sum e_a \mathbf{r}'_a)}{r^3} + \frac{x_\alpha x_\beta}{2r^5} \sum e(3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}),$$

которое представим в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{d}\mathbf{r}}{r^3} + \frac{Q_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{2r^5} \dots \quad (2.23)$$

Здесь

$$q = \sum_a e_a$$

— полный заряд системы;

$$\mathbf{d} = \sum_a e_a \mathbf{r}'_a \quad (2.24)$$

— *дипольный момент* (или электрический дипольный момент) системы зарядов,

$$Q_{\alpha\beta} = \sum e(3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) \quad (2.25)$$

— *тензор квадрупольного момента* системы зарядов (сумма в $Q_{\alpha\beta}$ идет по зарядам системы).

Если заряды в системе распределены непрерывно, то выражения для q , $\mathbf{d}$ и $Q_{\alpha\beta}$ принимают вид:

$$q = \int \rho(\mathbf{r}') dV', \quad \mathbf{d} = \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV', \quad Q_{\alpha\beta} = \int \rho(\mathbf{r}') (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) dV'.$$

Продолжая разложение (2.21), мы могли бы определить не только дипольный и квадрупольный, но и высшие мультипольные моменты системы. Поэтому разложение (2.23) называется разложением электростатического потенциала по мультипольным моментам. Как следует из вывода, это есть разложение по степеням l/r . Действительно, оценивая второй член в (2.23)

$$d \sim ql, \quad \frac{\mathbf{d}\mathbf{r}}{r^3} \sim \frac{ql}{r^2},$$

видим, что он меньше первого в r/l раз. Точно так же, на больших расстояниях каждый следующий член разложения по мультиполям имеет малость $\sim l/r \ll 1$ по отношению к предыдущему.

Главным членом в (2.23) является потенциал точечного заряда $\varphi_q = q/r$. Смысл его очевиден: на больших расстояниях детали распределения заряда не существенны и система эквивалентна точечному заряду, помещенному в начало координат. Но если полный заряд равен нулю, то первым не исчезающим членом оказывается *потенциал диполя*

$$\varphi_d = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3},$$

этим определяется его важное значение во многих задачах электродинамики. Такой потенциал создает на больших расстояниях нейтральная система зарядов (например, молекула).

Дипольный момент электронейтральной системы (у которой $\sum e_a = 0$) оказывается не зависящим от выбора системы отсчета: сдвинув начало на вектор $\mathbf{b}$

$$\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \mathbf{b},$$

будем иметь в новой системе отсчета

$$\mathbf{d}' = \sum e_a \mathbf{r}'_a = \sum e_a (\mathbf{r}_a + \mathbf{b}) = \sum e_a \mathbf{r}_a + \mathbf{b} \sum e_a = \sum e_a \mathbf{r}_a,$$

т.е. $\mathbf{d}' = \mathbf{d}$.

Простейшей системой, обладающей дипольным моментом, является *элементарный диполь*, который состоит из двух точечных зарядов $+e$ и $-e$, находящихся на расстоянии l друг от друга. Дипольный момент такой системы есть

$$\mathbf{d} = el,$$

где вектор $\mathbf{l}$ направлен от отрицательного заряда к положительному.

Напряженность электрического поля диполя вычисляется дифференцированием потенциала φ_d

$$\mathbf{E}_d = -\nabla \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{d}}{r^3},$$

или

$$\mathbf{E}_d = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$.

Таким образом, потенциал поля, создаваемого системой с равным нулю полным зарядом, на больших расстояниях обратно пропорционален квадрату, а напряженность поля — кубу расстояния: $\varphi_d \sim r^{-2}$, $E_d \sim r^{-3}$. Это поле обладает осевой симметрией относительно направления $\mathbf{d}$.

Если распределение зарядов в системе имеет сферическую симметрию, то, как легко понять, вне области расположения зарядов поле в точности совпадает с полем точечного заряда q (равного суммарному заряду системы), и, следовательно, все мультипольные моменты такой системы равны нулю. Поэтому мультипольные моменты должны характеризовать асимметрию (отклонение от сферической симметрии) в распределении зарядов. Выясним, с каким свойством в расположении зарядов связан дипольный момент. Пусть e_a^+ , $\mathbf{r}_a^+$ и e_a^- , $\mathbf{r}_a^-$ есть положительные и отрицательные заряды системы и их радиус-векторы, тогда дипольный момент можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+ + \sum e_a^- \mathbf{r}_a^- = \frac{\sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+}{\sum e_a^+} \sum e_a^+ + \frac{\sum e_a^- \mathbf{r}_a^-}{\sum e_a^-} \sum e_a^- = \\ &= \mathbf{R}^+ \sum e_a^+ + \mathbf{R}^- \sum e_a^- , \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{R}^\pm = \frac{\sum e_a^\pm \mathbf{r}_a^\pm}{\sum e_a^\pm} \quad (2.26)$$

— радиус-векторы «центров зарядов» положительных и отрицательных (ср. (2.26) с выражением для центра масс системы). Если система электронейтральна,

$$\sum e_a^+ = - \sum e_a^- = e ,$$

то

$$\mathbf{d} = e(\mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-), \quad (2.27)$$

и можно утверждать, что дипольный момент характеризует асимметрию в расположении зарядов, связанную со смещением центров положительного и отрицательного зарядов.

Если электронейтральная система имеет нулевой дипольный момент, то главным в разложении (2.23) является квадрупольный член

$$\varphi_Q = \frac{Q_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{2r^5} = \frac{Q_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2r^3},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор. Отсюда видно, что $\varphi_Q \sim 1/r^3$; соответственно $E_Q \sim 1/r^4$.

Квадрупольный момент представляет собой тензор второго ранга. Из определения (2.25) следует, что он симметричен:

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha},$$

а его след (сумма диагональных элементов) равен нулю:

$$\text{Sp } Q = Q_{\alpha\alpha} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0.$$

Действительно,

$$\text{Sp } Q = \sum_{\substack{\text{по} \\ \text{зарядам}}} e \sum_{\alpha} [3(x'_{\alpha})^2 - r'^2 \delta_{\alpha\alpha}] = \sum_{\substack{\text{по} \\ \text{зарядам}}} e(3r'^2 - 3r'^2) = 0. \quad (2.28)$$

Из этих свойств следует, что из девяти компонент тензора квадрупольного момента независимыми являются пять.

Как и всякий трехмерный симметричный тензор второго ранга, $Q_{\alpha\beta}$ может быть приведен к главным осям (для их характеристики, очевидно, нужны три величины), в которых отличны от нуля только диагональные элементы:

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

В силу условия (2.28) только два из трех главных значений Q_i независимы.

Если система зарядов симметрична относительно некоторой оси (Oz — ось симметрии), то

$$Q_1 = Q_2 = -\frac{1}{2}Q_3.$$

Величину $Q_3 = Q$ называют в этом случае просто квадрупольным моментом. Найдем квадрупольный потенциал для аксиального распределения зарядов. Вводя сферические координаты r, θ, φ ($x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$), получим

$$\varphi_Q = \frac{x^2 Q_1 + y^2 Q_2 + z^2 Q_3}{2r^5} = \frac{Q}{4r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{Q}{2r^3} P_2(\cos \theta),$$

где $P_2(\cos \theta)$ — полином Лежандра.

Подобно тому, как это было сделано для дипольного момента, нетрудно убедиться, что квадрупольный момент системы не зависит от выбора начала координат, если равны нулю как полный заряд, так и дипольный момент системы.

Аналогично тому, как это сделано выше, можно получить последующие члены разложения потенциала по степеням l/r . Удобнее, однако, получить общий член разложения

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots, \quad \varphi^{(n)} \sim 1/r^{n+1}$$

в другом виде, воспользовавшись известной из теории сферических функций формулой:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \alpha) Y_{lm}^*(\theta', \alpha'), \quad \text{при } r > r'. \quad (2.30)$$

Здесь θ, α — углы вектора $\mathbf{r}$, θ', α' — углы вектора $\mathbf{r}'$ в фиксированной системе координат. С помощью (2.30) представим потенциал (2.19) в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Q_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}. \quad (2.31)$$

Совокупность $2l+1$ величин Q_{lm} составляет мультипольный момент порядка l :

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \alpha') dV'. \quad (2.32)$$

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 21; [2], гл. 3, § 4; [3], § 40.

2.4. Система зарядов в квазиоднородном внешнем поле

Рассмотрим систему зарядов, находящуюся во внешнем поле. Обозначим $\varphi(\mathbf{r})$ потенциал этого внешнего поля. Будем считать, что поле слабо меняется на протяжении системы зарядов: если l — характерный размер системы, а L — характерное расстояние, на котором поле меняется заметным образом, то $l \ll L$. Это условие позволяет произвести разложение в ряд и выразить энергию через мультипольные моменты системы, введенные в разд. 2.3.

Запишем общее выражение для энергии в виде

$$U = \sum_a e_a \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}'_a). \quad (2.33)$$

Здесь предполагается, что радиус-векторы $\mathbf{r}'_a$ проведены к зарядам из точки O' , расположенной внутри системы, а сама точка O' имеет радиус-вектор $\mathbf{r}$ относительно начала системы координат O (рис. 6).

Имея в виду квазиоднородность внешнего поля, разложим его потенциал в ряд по степеням $\mathbf{r}'$:

$$\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}') = \varphi(\mathbf{r}) + x'_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots, \quad (2.34)$$

где значения производных берутся в точке $\mathbf{r}$. В пределах системы источников внешнего поля нет, поэтому потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \delta_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.35)$$

Перепишем с учетом последнего равенства выражение (2.34) для потенциала

$$\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}') = \varphi(\mathbf{r}) + \mathbf{r}' \nabla \varphi + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) + \dots \quad (2.36)$$

Энергия (2.33) теперь представляется в виде

$$U = \varphi(\mathbf{r}) \sum e_a + (\nabla \varphi, \sum e_a \mathbf{r}'_a) + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \sum e (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) + \dots \quad (2.37)$$

Оценивая производные в (2.37)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \sim \frac{\varphi}{L}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \sim \frac{\partial \varphi / \partial x_\alpha}{L} \sim \frac{\varphi}{L^2},$$

закключаем, что разложение в (2.33) идет по параметру l/L .

Запишем выражение (2.37) через мультипольные моменты:

$$U = q\varphi - \mathbf{d}\mathbf{E} + \frac{1}{6} Q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots, \quad (2.38)$$

где величины φ и $\mathbf{E}$ берутся при аргументе $\mathbf{r}$. Первый член в (2.38) представляет собой энергию точечного заряда во внешнем поле, дифференцирование его по $\mathbf{r}$ дает известное выражение для силы

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -q\nabla \varphi = q\mathbf{E}.$$

Если суммарный заряд системы равен нулю, то первое слагаемое в (2.38) исчезает и энергия системы дается выражением

$$U \approx -\mathbf{d}\mathbf{E} \quad (2.39)$$

(энергия диполя во внешнем поле). Вычисляя силу, действующую на систему, находим

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{d}\mathbf{E}) = (\mathbf{d}\nabla)\mathbf{E} + [\mathbf{d}, \text{rot } \mathbf{E}] = (\mathbf{d}\nabla)\mathbf{E}. \quad (2.40)$$

Если поле однородное ($\mathbf{E}$ – постоянный вектор), то $\mathbf{F} = 0$, но момент сил $\mathbf{K}$ не равен нулю. Действительно,

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{r}_a, \mathbf{F}_a] = \sum [\mathbf{r}_a, e_a \mathbf{E}_a] = \{\mathbf{E}_a = \mathbf{E}\} = \sum [e_a \mathbf{r}_a, \mathbf{E}] = \left[\sum e_a \mathbf{r}_a, \mathbf{E} \right],$$

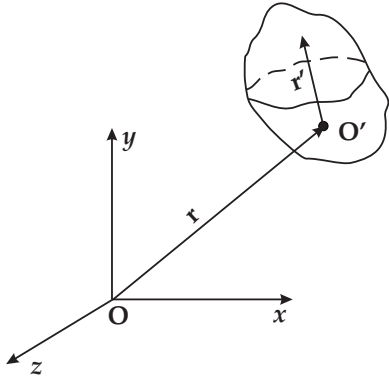


Рис. 6

так что окончательно

$$\mathbf{K} = [\mathbf{dE}]. \quad (2.41)$$

Таким образом, дипольный момент не только определяет поле системы на больших расстояниях от нее, но и действие на систему внешнего поля.

Если $q = 0$ и $\mathbf{d} = 0$, то энергия системы определяется квадрупольным моментом

$$U \approx \frac{1}{6} Q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 22; [2], гл. 3, § 8; [3], § 42.

3. Постоянное магнитное поле

3.1. Основные уравнения. Закон Био – Савара – Лапласа

Индукция магнитного поля, не зависящего от времени, удовлетворяет системе уравнений (см. 2.1)

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (3.2)$$

Поскольку $\partial \rho / \partial t = 0$, то из уравнения непрерывности вытекает условие стационарности токов:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (3.3)$$

Последнее соотношение можно получить и из уравнения (3.2), применив к обеим частям операцию div . При расчете магнитных полей от симметричных распределений токов полезна интегральная форма уравнения (3.2) (закон Ампера):

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} J. \quad (3.4)$$

Применим это уравнение для расчета магнитного поля, создаваемого длинным цилиндрическим проводником, ток в котором имеет осевую симметрию $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r)$. Вследствие аксиальной симметрии $B = B(r)$, причем вектор $\mathbf{B}$ лежит в плоскости, перпендикулярной проводнику, и направлен по касательной к окружности с центром на оси проводника. Вычисляя циркуляцию $\mathbf{B}$ по такой окружности

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint B dl = B \oint dl = B 2\pi r,$$

находим

$$B(r) = \frac{2J}{cr},$$

где

$$J = \int \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int j dS = 2\pi \int_0^r j(r) r dr.$$

В общем случае произвольного распределения токов уравнение (3.1) позволяет представить $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ в виде ротора некоторого вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — *векторного потенциала*:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (3.5)$$

Можно показать, что (3.1) и (3.5) эквивалентны. Действительно, $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$, так что из (3.5) следует (3.1). Убедимся, что из (3.1) следует (3.5). Из (3.1) и теоремы Остроградского – Гаусса имеем

$$0 = \int_V \text{div } \mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Поток $\mathbf{B}$ через замкнутую поверхность равен нулю, поэтому поток $\mathbf{B}$ через незамкнутую поверхность, опирающуюся на контур, не зависит от формы поверхности, а зависит только от контура: $\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}$, где $\mathbf{A}$ — неизвестная функция. Вычисляя проекцию $\text{rot } \mathbf{A}$ на произвольное направление (считаем поверхность S плоской, перпендикулярной направлению $\mathbf{n}$), находим

$$(\text{rot } \mathbf{A})_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int \mathbf{B} d\mathbf{S}}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int B_n dS}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \bar{B}_n \frac{\int dS}{S} = B_n,$$

где $\bar{B}_n$ — значение B_n в какой-либо точке поверхности. Таким образом, из (3.1) следует (3.5).

Отметим, что векторный потенциал определен неоднозначно. В самом деле, градиентное преобразование

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} + \nabla \chi$$

(χ — произвольная скалярная функция) не изменяет значения $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, так как равенство $\text{rot } \nabla \chi = 0$ выполняется тождественно при всех χ .

Подставим (3.5) в (3.2):

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (3.6)$$

Используя неоднозначность векторного потенциала, наложим на него дополнительное условие. Потребуем, чтобы

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (3.7)$$

Если потенциал $\tilde{\mathbf{A}}$ не удовлетворяет этой калибровке, то добавляя к нему $\nabla\chi$: $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} + \nabla\chi$, можно обеспечить его выполнение. При этом функция χ должна быть такой, чтобы выполнялось уравнение

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{A}} + \Delta\chi = 0.$$

Иначе говоря, последнее уравнение фиксирует функцию χ .

После выбора калибровки (3.7), из (3.6) приходим к уравнению Пуассона для векторного потенциала:

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \quad (3.8)$$

Зная решение (2.9) для скалярного уравнения Пуассона (2.6), сразу можем записать решение (3.8):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.9)$$

Найдем теперь магнитную индукцию:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \operatorname{rot}_{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Введем новую переменную $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{R}$, так что $\operatorname{rot}_{\mathbf{r}} = \operatorname{rot}_{\mathbf{R}}$. Вычисляя

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \operatorname{rot}_{\mathbf{R}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} = [\nabla \frac{1}{R}, \mathbf{j}(\mathbf{r}')] = \frac{[\mathbf{j}\mathbf{R}]}{R^3},$$

находим

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{R}]}{R^3} dV' = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r} - \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (3.10)$$

Таким образом, ток $\mathbf{j}$, текущий в объеме dV' , создает поле

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{R}]}{R^3} dV'. \quad (3.11)$$

В этом состоит *закон Био – Савара – Лапласа*.

Рассмотрим замкнутый *квазилинейный ток* (ток называется квазилинейным, если линейные размеры поперечного сечения проводника пренебрежимо малы по сравнению с линейными размерами контура и с расстоянием до точки наблюдения). В этом случае $\mathbf{j} \parallel d\mathbf{l}$, или $\mathbf{j} = j\mathbf{n}_l$, где $\mathbf{n}_l$ – единичный вектор касательной к контуру: $d\mathbf{l} = \mathbf{n}_l dl$. Вектор плотности тока можем поэтому представить в виде $\mathbf{j} = j\mathbf{n}_l$ и записать

$$\mathbf{j}dV = \mathbf{j}dl dS = j dS d\mathbf{l} = J d\mathbf{l}. \quad (3.12)$$

Тогда для квазилинейного тока вместо (3.9), (3.10), (3.11) получаем:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{J}{c} \int \frac{d\mathbf{l}}{R}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{J}{c} \int \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{R}]}{R^3}, \quad (3.14)$$

$$d\mathbf{B} = \frac{J}{c} \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{R}]}{R^3}. \quad (3.15)$$

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 24; [3], § 43.

3.2. Магнитный момент

Вычислим магнитное поле на больших расстояниях от ограниченной системы стационарных токов. В этом случае общее выражение для векторного потенциала

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

можно упростить. Считаем, что $r \gg l$ ($l/r \ll 1$), где r — расстояние до точки наблюдения, l — размеры области, внутри которой существуют токи. Разложим $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ по r'/r , ограничиваясь двумя членами:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - \mathbf{r}' \nabla \frac{1}{r} + \dots = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \mathbf{r}'}{r^3} + \dots$$

На больших расстояниях это быстро сходящийся ряд. Подставив это разложение в (3.16), получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{cr^3} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} \mathbf{r}') dV'. \quad (3.16)$$

Покажем, что

$$\int \mathbf{j} dV' = 0. \quad (3.17)$$

Воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса

$$\int \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \oint \mathbf{a} d\mathbf{S}, \quad (3.18)$$

в которой положим $\mathbf{a} = (\mathbf{c} \mathbf{r}) \mathbf{j}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор. Вычислим дивергенцию

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} (\mathbf{c} \mathbf{r}) \mathbf{j} = (\nabla, (\mathbf{c} \mathbf{r}) \mathbf{j}) = (\mathbf{c} \mathbf{r}) (\nabla \mathbf{j}) + (\mathbf{j}, \nabla (\mathbf{c} \mathbf{r})) = (\mathbf{c} \mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{j} + (\mathbf{c} \mathbf{j}).$$

Подставляя в (3.18), интегрирование в которой будем вести по всей области, где имеются токи, получим:

$$\int_V \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{j} dV + \int_V \mathbf{j} dV = \oint_S \mathbf{r} j_n dS.$$

Но $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ по условию стационарности, а на границе области $j_n|_S = 0$, так как ток через граничную поверхность не протекает. Таким образом, из последнего равенства следует равенство (3.17). Оно означает, что в разложении (3.16) члена, аналогичного потенциалу точечного заряда в (2.23), не существует.

Рассмотрим теперь второй член в (3.16). Можно показать, что

$$\int_V (\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = \frac{1}{2} \int_V [[\mathbf{r}'\mathbf{j}(\mathbf{r}')] \mathbf{r}] dV'. \quad (3.19)$$

Используя это интегральное тождество, представим $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2cr^3} \int_V [[\mathbf{r}'\mathbf{j}(\mathbf{r}')] \mathbf{r}] dV'.$$

Введем вектор

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}\mathbf{j}(\mathbf{r})] dV, \quad (3.20)$$

который называется *магнитным моментом* системы (или магнитным дипольным моментом). С его помощью векторный потенциал на больших расстояниях записывается в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{[\mathbf{M}\mathbf{r}]}{r^3}. \quad (3.21)$$

Итак, $\mathbf{M}$ определяет магнитное поле на больших расстояниях от системы токов.

Докажем теперь тождество (3.19). Можем записать

$$[[\mathbf{r}'\mathbf{j}] \mathbf{r}] = \mathbf{j}(\mathbf{r}\mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{j}\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}\mathbf{r}') - \mathbf{r}' \operatorname{div}_{\mathbf{r}'}((\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j}). \quad (3.22)$$

Действительно,

$$\operatorname{div}_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j} = (\mathbf{r}\mathbf{r}')\operatorname{div} \mathbf{j} + (\mathbf{j}, \nabla_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}\mathbf{r}')) = (\mathbf{j}\mathbf{r}), \quad (3.23)$$

так как $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и $\nabla_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}\mathbf{r}') = \mathbf{r}$. Проинтегрируем соотношение (3.22) по всему объему:

$$\int_V [[\mathbf{r}'\mathbf{j}] \mathbf{r}] dV' = \int_V (\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j} dV' - \int_V \mathbf{r}' \operatorname{div}_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j} dV'. \quad (3.24)$$

Воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса

$$\int \operatorname{div} \mathbf{a} dV' = \oint \mathbf{a} d\mathbf{S}'$$

и возьмем вектор $\mathbf{a}$ равным

$$\mathbf{a} = (\mathbf{c}\mathbf{r}')(\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j}, \quad \mathbf{c} - \text{постоянный вектор.}$$

Тогда

$$\operatorname{div}_{\mathbf{r}'} \mathbf{a} = (\mathbf{c}\mathbf{r}')\operatorname{div}_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j} + (\nabla(\mathbf{c}\mathbf{r}'), (\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j}) = (\mathbf{c}\mathbf{r}')\operatorname{div}_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j} + (\mathbf{c}, (\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j}). \quad (3.25)$$

Поскольку

$$\int \operatorname{div} \mathbf{a} dV' = \oint a_n dS' = 0,$$

так как $j_n|_S = 0$, то из (3.25) получаем

$$\int \mathbf{r}'\operatorname{div}_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j} dV' = - \int (\mathbf{r}\mathbf{r}')\mathbf{j} dV'.$$

Подставляя последнее равенство в (3.24), убеждаемся в справедливости (3.19).

Вычислим с помощью (3.21) индукцию магнитного поля на больших расстояниях:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{M}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{M}}{r^3}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.26)$$

Таким образом, из (3.21), (3.26) следует, что поле магнитного момента обладает осевой симметрией относительно $\mathbf{M}$. На больших расстояниях $r \rightarrow \infty$ от системы стационарных токов $A \sim 1/r^2$, $B \sim 1/r^3$.

Рассмотрим два простых примера вычисления магнитных моментов.

1. Магнитный момент плоского контура с током. Пусть постоянный ток J течет по плоскому контуру, образованному тонким проводником, лежащим в плоскости xy (рис. 7).

Заменяя $\mathbf{j}dV \rightarrow Jd\mathbf{l}$ в формуле (3.20) и учитывая, что

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2}[\mathbf{r}d\mathbf{l}],$$

где $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, dS — площадь треугольника, образованного радиус-вектором $\mathbf{r}$, проведенным к элементу тока, и элементом контура $d\mathbf{l}$, получим

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r}\mathbf{j}] dV = \frac{J}{2c} \oint [\mathbf{r}d\mathbf{l}] = \frac{J}{c} \oint d\mathbf{S} = \frac{J}{c} \mathbf{n} \oint dS = \frac{J}{c} S\mathbf{n}.$$

Итак, магнитный момент плоского контура определяется произведением тока J на площадь контура S (т.е. не зависит от формы контура) и направлен по нормали к плоскости контура:

$$\mathbf{M} = \frac{J}{c} S\mathbf{n}. \quad (3.27)$$

2. Магнитный момент системы частиц с одинаковым отношением заряда к массе $\frac{e_i}{m_i} = \frac{e}{m}$ (например, системы одинаковых частиц). Записав плотность тока в виде

$$\mathbf{j} = \sum e_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a),$$

получим для магнитного момента

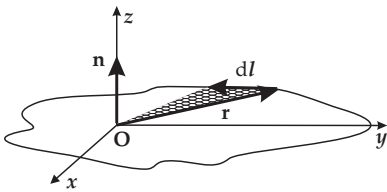
$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \sum e_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i] = \frac{1}{2c} \sum \frac{e_i}{m_i} [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] = \frac{e}{2mc} \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i],$$

или

$$\mathbf{M} = \frac{e}{2mc} \mathbf{L},$$

где $\mathbf{L} = \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i]$ — полный момент импульса системы. Если имеется одна частица, то формула (3.28) дает связь между магнитным моментом, создаваемым движением одной частицы в пространстве, и ее механическим моментом. Многим частицам, как заряженным (электроны, протоны), так и нейтральным (нейтроны), присущ внутренний (спиновый) магнитный момент, определяемый их внутренней структурой. Между спиновым магнитным $\mathbf{M}_s$ и механическим $\mathbf{L}_s$ моментами выполняется соотношение $\mathbf{M}_s = \eta_s \mathbf{L}_s$, однако коэффициент пропорциональности η_s не совпадает с $e/2mc$ и различен для разных частиц. Спиновый магнитный момент представляет собой квантовое явление, не объясняемое классической электродинамикой.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 25; [2], гл. 5, § 2; [3], § 44.



3.3. Магнитная энергия постоянных токов.

Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции

Рис. 7
Вычислим полную магнитную энергию ограниченной системы стационарных токов. Исходим из выражения для плотности магнитной энергии (формула (1.45) при $E = 0$):

$$W = \frac{B^2}{8\pi}.$$

Интегрируя по всему пространству

$$U = \int \frac{B^2}{8\pi} dV$$

и преобразуя подынтегральное выражение,

$$B^2 = \mathbf{B}\mathbf{B} = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} = (\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{A}) + \operatorname{div} [\mathbf{A}\mathbf{B}],$$

приходим к

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{A}) dV + \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div} [\mathbf{A}\mathbf{B}] dV = \frac{1}{2c} \int \mathbf{j}\mathbf{A} dV + \oint \frac{1}{8\pi} [\mathbf{A}\mathbf{B}] d\mathbf{S},$$

где в первом интеграле учтено, что $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, а ко второму интегралу применена теорема Остроградского – Гаусса. Поскольку на больших расстояниях

$$A \sim \frac{1}{r^2}, \quad B \sim \frac{1}{r^3},$$

то второй интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю, и

$$U = \frac{1}{2c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV \quad (3.28)$$

(ср. с выражением (2.11) для энергии электростатического поля).

Найдем энергию системы проводников с током. Запишем векторный потенциал $\mathbf{A} = \sum_a \mathbf{A}_a$, где $\mathbf{A}_a$ — векторный потенциал, создаваемый a -м проводником; в силу линейности уравнений электродинамики значение $\mathbf{A}_a$ не зависит от наличия других проводников и силы тока в них. Из (3.28) получим

$$U = \frac{1}{2c} \sum_{ab} \int \mathbf{j}_a \mathbf{A}_b dV = \frac{1}{2c} \sum_a \int \mathbf{j}_a \mathbf{A}_a dV + \frac{1}{2c} \sum_{a < b} \int (\mathbf{j}_a \mathbf{A}_b + \mathbf{j}_b \mathbf{A}_a) dV.$$

Введем обозначения

$$U = \sum_a U_{aa} + \sum_{a < b} U_{ab},$$

где

$$U_{aa} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{j}_a \mathbf{A}_a dV \quad (3.29)$$

— собственная магнитная энергия a -го проводника,

$$U_{ab} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{j}_a \mathbf{A}_b dV + \frac{1}{2c} \int \mathbf{j}_b \mathbf{A}_a dV$$

— энергия взаимодействия проводников a и b . Интегрирование производится по объему проводников. Используя (3.9), легко убедиться, что интегралы в последнем равенстве одинаковы, и представить U_{aa} и U_{ab} в виде

$$\begin{aligned} U_{aa} &= \frac{1}{2c^2} \iint \frac{\mathbf{j}_a(\mathbf{r})\mathbf{j}_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV', \\ U_{ab} &= \frac{1}{c^2} \iint \frac{\mathbf{j}_a(\mathbf{r})\mathbf{j}_b(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'. \end{aligned} \quad (3.30)$$

При заданном законе распределения тока по объему проводника плотность тока и создаваемое им поле пропорциональны силе тока: $j_a \sim J_a$, $A_a \sim J_a$. Поэтому собственную и взаимную энергии можно записать в виде

$$U_{aa} = \frac{J_a^2}{2c^2} L_{aa}, \quad U_{ab} = \frac{J_a J_b}{c^2} L_{ab}, \quad (3.31)$$

где L_{aa} , $L_{ab} = L_{ba}$ — коэффициенты, которые не зависят от силы тока, но зависят от формы и размеров проводника и от распределения токов внутри проводников. Коэффициент L_{ab} зависит также от взаимного расположения проводников a и b . L_{aa} и L_{ab} называются *коэффициентами самоиндукции и взаимной индукции*.

Если мы имеем дело с квазилинейными проводниками, то, заменив в (3.30) $\mathbf{j}dV \rightarrow Jd\mathbf{l}$ и сравнив результат с (3.31), найдем выражение для взаимной индукции в виде двойного контурного интеграла:

$$L_{ab} = \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_a \cdot d\mathbf{l}_b}{R_{ab}}.$$

Видно, что L_{ab} имеет размерность длины, причем по порядку величины $L_{ab} \approx l_1 l_2 / R$, где l_1 и l_2 — длины проводников, R — среднее расстояние между ними. Однако приближение бесконечно тонкого проводника неприменимо при вычислении коэффициента самоиндукции, так как оно приводит к расходимости соответствующего интеграла. Поэтому коэффициент самоиндукции следует вычислять через магнитную энергию:

$$L_{aa} = 2c^2 U_{aa} / J_a^2.$$

Установим связь коэффициентов индуктивности с магнитными потоками для системы квазилинейных проводников. Для этого выразим сначала собственную энергию через магнитный поток. Заменив в (3.29) $\mathbf{j}_a dV_a \rightarrow J_a d\mathbf{l}_a$, получим

$$U_{aa} = \frac{J_a}{2c} \oint \mathbf{A}_a d\mathbf{l}_a = \frac{J_a}{2c} \int \text{rot } \mathbf{A}_a d\mathbf{S}_a = \frac{J_a}{2c} \int \mathbf{B}_a d\mathbf{S}_a = \frac{1}{2c} J_a \Phi_{aa},$$

где $\Phi_{aa} = \int \mathbf{B}_a d\mathbf{S}_a$ — поток магнитной индукции, создаваемой током в проводнике, через поверхность, ограниченную проводником. Аналогичное преобразование для U_{ab} приводит к

$$U_{ab} = \frac{1}{c} J_a \Phi_{ab} = \frac{1}{c} J_b \Phi_{ba},$$

где $\Phi_{ab} = \int \mathbf{B}_b d\mathbf{S}_a$ — магнитный поток, создаваемый током в проводнике b через контур a . Сравнивая две последние формулы с (3.31), находим

$$\Phi_{aa} = L_{aa} J_a / c, \quad \Phi_{ab} = L_{ab} J_b / c, \quad (3.32)$$

т.е. индуктивности выступают как коэффициенты пропорциональности между магнитным потоком и силой тока.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 26, [2], гл. 5, § 3.

3.4. Токи в квазиоднородном магнитном поле

Пусть система токов, имеющая линейный размер l , находится во внешнем постоянном магнитном поле с векторным потенциалом $\mathbf{A}$. Магнитное поле слабо меняется на протяжении размера системы: $L \gg l$, где L — расстояние, на котором поле изменяется заметным образом. Введем систему координат с началом в точке O . Пусть $\mathbf{r}$ — вектор, проведенный из O к точке O' внутри системы, а $\mathbf{r}'$ — вектор, проведенный из O' к элементу объема dV' , в котором имеется ток $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$. Тогда энергию взаимодействия тока с внешним магнитным полем можем записать в виде:

$$U = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') dV'. \quad (3.33)$$

Имея в виду медленность изменения магнитного поля, разложим векторный потенциал $\mathbf{A}$ по степеням $\mathbf{r}'$. Запишем сначала разложение для компоненты A_x

$$A_x(\mathbf{r} + \mathbf{r}') = A_x(\mathbf{r}) + x' \frac{\partial A_x}{\partial x} + y' \frac{\partial A_x}{\partial y} + z' \frac{\partial A_x}{\partial z} + \dots = A_x(\mathbf{r}) + (\mathbf{r}' \nabla) A_x + \dots$$

Теперь ясно, что разложение для вектора $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + (\mathbf{r}' \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{r}) \dots, \quad (3.34)$$

где оператор ∇ действует на координаты $\mathbf{r}$. Энергия U выражается как

$$U = \frac{1}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV'. \quad (3.35)$$

В силу равенства (3.17) первое слагаемое обращается в нуль. Интеграл во втором слагаемом преобразуется с помощью формулы (3.19), в которой $\mathbf{r}$ следует заменить вектором ∇ :

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'\nabla_{\mathbf{r}}) dV' = \frac{1}{2} \int [[\mathbf{r}'\mathbf{j}(\mathbf{r}')] \nabla_{\mathbf{r}}] dV'. \quad (3.36)$$

Выражение (3.35) преобразуется к

$$U = \frac{1}{2c} \int ([\mathbf{r}'\mathbf{j}(\mathbf{r}')] \nabla_{\mathbf{r}}] \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV' = \left(\int \frac{1}{2c} [\mathbf{r}'\mathbf{j}(\mathbf{r}')] dV', [\nabla \mathbf{A}(\mathbf{r})] \right).$$

Принимая во внимание определение магнитного момента (3.20) и связь магнитной индукции с векторным потенциалом (3.5), запишем для энергии U

$$U \approx (\mathbf{M}\mathbf{B}), \quad (3.37)$$

где $\mathbf{B}$ — индукция внешнего магнитного поля.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, §26.

3.5. Силы в постоянном магнитном поле

Силу, действующую на контур с током J в магнитном поле $\mathbf{B}$, можно вычислить, интегрируя силу Ампера (1.25)

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c} \oint [d\mathbf{l}\mathbf{B}].$$

Укажем здесь другой способ вычисления силы. Работа магнитного поля по перемещению элемента контура $d\mathbf{l}$ на малое расстояние $\delta\mathbf{r}$ есть

$$d\mathbf{F}\delta\mathbf{r} = \frac{J}{c} [d\mathbf{l}\mathbf{B}]\delta\mathbf{r} = \frac{J}{c} [\delta\mathbf{r}d\mathbf{l}]\mathbf{B}.$$

Работа по перемещению всего контура

$$\delta A = \frac{J}{c} \oint_{(l)} [\delta\mathbf{r}d\mathbf{l}]\mathbf{B} = \frac{J}{c} \int_{(S)} \mathbf{B}d\mathbf{S}.$$

Поток магнитной индукции $\int_{(S)} \mathbf{B}d\mathbf{S}$ через поверхность S , «заметенную» контуром при его перемещении и деформации, равен разности потоков через поверхности S_2 и S_1 , где S_1 — поверхность, ограниченная контуром в начальном положении, а S_2 получается из S_1 добавлением S (рис. 8):

$$\int_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_{(S_2)} \mathbf{B} d\mathbf{S} - \int_{(S_1)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi_2 - \Phi_1 = \delta\Phi.$$

Если перемещение контура происходит медленно, то изменением тока в нем за счет электромагнитной индукции можно пренебречь и считать J постоянной величиной. Тогда работа δA представляется в виде

$$\delta A = \frac{J}{c} \delta\Phi = \delta\left(\frac{J}{c}\Phi\right).$$

Последняя величина в круглых скобках равна магнитной энергии U тока в контуре. Действительно,

$$U = \frac{1}{c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV = \frac{J}{c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{J}{c} \int \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \frac{J}{c} \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{J}{c} \Phi.$$

Поэтому

$$\delta A = \delta U.$$

Если ввести *потенциальную функцию* проводника с током:

$$V = -U,$$

то элементарная работа выражается в виде

$$\delta A = -\delta V, \quad (3.38)$$

т.е. так же, как в механике работа выражается через потенциальную энергию. Поэтому сила, действующая на контур, может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{F} = -\nabla V. \quad (3.39)$$

Как видно из (3.38), (3.39), величина V играет такую же роль при вычислении сил в магнитном поле, как потенциальная энергия в механике. Но поскольку магнитное поле не потенциально, эта величина называется не потенциальной энергией, а *потенциальной функцией*.

Хотя формула $V = -U$ получена для контура с током, она сохраняет силу и для других систем. В частности, для системы с магнитным моментом $\mathbf{M}$ в квазиоднородном внешнем поле

$$V = -\mathbf{M}\mathbf{B}$$

(см. (3.37)). Это приводит к выражению

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{M}\mathbf{B}) \quad (3.40)$$

для силы и выражению

$$\mathbf{K} = [\mathbf{M}\mathbf{B}] \quad (3.41)$$

для момента сил, действующих на магнитный диполь (ср. с формулами (2.40) и (2.41) для электрического диполя).

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 26.

4. Переменное электромагнитное поле

4.1. Уравнения для электромагнитных потенциалов



Рис. 8

Ваннем снова полную систему уравнений Максвелла:

$$(4.1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$(4.1.2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$(4.1.3) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (4.1)$$

$$(4.1.4) \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Из первого уравнения следует, что вектор $\mathbf{B}$ может быть представлен как ротор некоторого другого вектора $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (4.2)$$

Подставляя последнее соотношение в (4.1.2), получим

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (4.3)$$

Это означает, что поле $\mathbf{E}$ может быть представлено в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad (4.4)$$

где $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ – некоторая скалярная функция. Обратим внимание, что в случае статических полей (4.2), (4.4) совпадают с (3.5), (2.4). Введенные величины $\mathbf{A}$ и φ называются векторным и скалярным *потенциалами электромагнитного поля*. Эти потенциалы определены неоднозначно. Как уже отмечалось, добавление к векторному потенциалу градиента произвольной скалярной функции $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \chi$ не меняет величины $\mathbf{B}$. Чтобы поле $\mathbf{E}$

при этом тоже не изменилось, необходимо изменить скалярный потенциал $\varphi = \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$. Итак, преобразования

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{A}' + \nabla \chi, \\ \varphi &= \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}\end{aligned}\tag{4.5}$$

не меняют векторов поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$. Эти преобразования называются *градиентными* или *калибровочными преобразованиями*.

Найдем уравнения, которым удовлетворяют электромагнитные потенциалы. Для этого подставим (4.2), (4.4) в (4.1.3), (4.1.4):

$$\begin{aligned}-\Delta \varphi - \operatorname{div} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= 4\pi \rho, \\ \nabla \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi.\end{aligned}$$

Перегруппировав члены, приходим к

$$\begin{aligned}\Delta \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} &= -4\pi \rho, \\ \nabla \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} &= \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Так как потенциалы определены неоднозначно, то на них можно наложить дополнительные условия, чтобы упростить полученную систему уравнений. Потребуем, чтобы потенциалы удовлетворяли дополнительному соотношению

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,\tag{4.6}$$

которое называется *условием Лоренца*. В результате получаем для φ и $\mathbf{A}$ разделенные уравнения

$$\begin{aligned}\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho, \\ \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j},\end{aligned}\tag{4.7}$$

которые в математике называются неоднородными волновыми уравнениями или неоднородными уравнениями Даламбера. Таким образом, мы пришли к другой форме законов электродинамики, в точности эквивалентной уравнениям Максвелла; во многих случаях уравнения для потенциалов оказываются более простыми в обращении.

Введем оператор Даламбера

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (4.8)$$

С его использованием уравнения для потенциалов записываются в виде

$$\begin{aligned} \square \varphi &= -4\pi \rho, \\ \square \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Условие Лоренца не устраняет произвола в выборе потенциалов, а лишь ограничивает класс допустимых функций χ , осуществляющих градиентное преобразование. Пусть на потенциалы $\mathbf{A}$, φ наложено условие Лоренца (4.6). Перейдем к новым потенциалам $\mathbf{A}'$, φ' с помощью преобразования (4.5). По условию имеем равенства

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{A}' + \Delta \chi + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

Следовательно, потенциалы поля, удовлетворяющие условию Лоренца, можно преобразовывать с помощью соотношения (4.5), если функция χ подчиняется однородному уравнению Даламбера

$$\square \chi = 0.$$

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 18; [7], гл. 18, § 6.

4.2. Электромагнитные волны

Рассмотрим электромагнитные поля, которые могут существовать в отсутствие токов и зарядов. Уравнения для их потенциалов получим, положив в (4.7) $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$:

$$\square \mathbf{A} = 0, \quad \square \varphi = 0. \quad (4.10)$$

В отличие от статического случая, для переменных полей эти уравнения могут иметь ненулевые решения. При этом изменение состояния (возмущение) поля, существующего самостоятельно, без зарядов и токов, обязательно имеет волновой характер. Поля такого рода называются *электромагнитными волнами*.

В предыдущем разделе было отмечено, что условием Лоренца потенциалы определяются ещё не однозначно. Оказывается, что при отсутствии зарядов всегда с помощью градиентного преобразования можно обратить скалярный потенциал в нуль.

Действительно, пусть электромагнитная волна описывается потенциалами $\mathbf{A}$, φ . Перейдем к потенциалу φ' с помощью преобразования

$$\varphi = \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

в котором χ удовлетворяет уравнению

$$\square \chi = 0.$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получим

$$\square \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = 0.$$

Но такому же уравнению при $\rho = 0$ удовлетворяет скалярный потенциал. Это дает возможность выбрать χ таким, чтобы φ' равнялся нулю и иметь дело только с векторным потенциалом.

Итак, будем считать, что $\varphi = 0$ и электромагнитное поле описывается только векторным потенциалом $\mathbf{A}$, который удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.11)$$

Условие Лоренца принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (4.12)$$

Векторы поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ связаны с потенциалом $\mathbf{A}$ формулами

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (4.13)$$

используя которые можно проверить, что $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ тоже удовлетворяют волновому уравнению

$$\square \mathbf{E} = 0, \quad \square \mathbf{B} = 0. \quad (4.14)$$

Из (4.11), (4.14) следует, что любая компонента f векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (4.15)$$

Рассмотрим сначала решения этого уравнения, зависящие только от одной координаты (x) и времени t . Такие решения называются *плоскими волнами*. Уравнение на функцию $f(x, t)$ есть, очевидно, одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (4.16)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение этого уравнения имеет вид

$$f(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \quad (4.17)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции. Выясним смысл этого решения. Рассмотрим первое слагаемое в (4.17). Очевидно, что $f_1(x - ct)$ имеет одинаковое значение для координат x и моментов времени t , удовлетворяющих соотношениям $x - ct = \text{const}$ (условие постоянства аргумента). Это значит, что если в момент времени $t = 0$ в некоторой точке x поле имело определенное значение, то через промежуток времени t то же самое значение поле имеет на расстоянии ct вдоль оси x от первоначального места. Можно сказать, что все значения электромагнитного поля распространяются в пространстве со скоростью c (рис. 9).

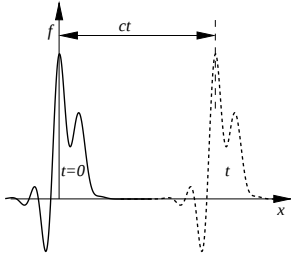


Рис. 9

Таким образом, $f_1(x - ct)$ представляет собой плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси x . Очевидно, что $f_2(x + ct)$ представляет собой волну, бегущую в отрицательном направлении оси x . Решение (4.17) есть наложение двух возмущений (бегущих плоских волн), каждое из которых распространяется вдоль оси x (в сторону возрастания или убывания x) со скоростью c .

Определим теперь взаимную ориентацию векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и направления распространения поля. Рассмотрим волну, бегущую вправо вдоль оси x , векторный потенциал которой

$$\mathbf{A}(x - ct) \equiv \mathbf{A}(\xi).$$

Будем обозначать штрихом производную по аргументу ξ

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\xi} = \mathbf{A}'.$$

Из условия (4.12) следует

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} = A'_x = 0, \quad (4.18)$$

так что вектор $\mathbf{A}'$ не имеет проекции вдоль направления распространения волны:

$$\mathbf{A}' \perp \mathbf{n},$$

$\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения волны.

Вычисляя напряженность электрического поля в соответствии с (4.13)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} (-c) \mathbf{A}' = \mathbf{A}',$$

видим, что и $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}$.

Найдем магнитное поле $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Для вычисления ротора можно использовать декартову систему координат:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{dA_z}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{dA_y}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = [\nabla \xi, \mathbf{A}']_x,$$

или, поскольку, $\nabla \xi = \mathbf{n}$,

$$B_x = [\mathbf{n} \mathbf{A}']_x.$$

Вычисляя аналогично B_y и B_z , получаем

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \mathbf{A}'], \quad (4.19)$$

или

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \mathbf{E}]. \quad (4.20)$$

Мы видим, что электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ плоской волны направлены перпендикулярно направлению распространения волны — плоские электромагнитные волны в вакууме поперечны. Из (4.20) видно также, что электрическое и магнитное поля плоской волны перпендикулярны друг другу и равны по абсолютной величине

$$\mathbf{B} \perp \mathbf{E}, \quad B = E.$$

Вычислим вектор Пойнтинга в плоской волне. Поскольку $\mathbf{E} \mathbf{n} = 0$, то

$$\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{B}] = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} [\mathbf{n} \mathbf{E}]] = \frac{c}{4\pi} E^2 \mathbf{n} = \frac{c(E^2 + B^2)}{8\pi} \mathbf{n} = cW \mathbf{n}, \quad (4.21)$$

где

$$W = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}$$

— плотность электромагнитной энергии в плоской волне. Полученная формула наглядно демонстрирует перенос энергии в направлении распространения волны со скоростью c .

Любая электромагнитная волна может быть представлена как суперпозиция плоских волн. Часто, однако, удобнее представлять поле в виде *сферических волн* $U(r, t)$. Нетрудно получить соответствующее решение волнового уравнения. Используя для оператора Лапласа Δ , действующего на сферически-симметричную функцию $f(r)$, форму

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r f(r)), \quad (4.22)$$

запишем волновое уравнение (4.15) на $U(r, t)$ вне области, занятой источниками, как

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (4.23)$$

Если искать его решение в виде

$$U(r, t) = \frac{f(r, t)}{r},$$

то новая функция $f(r, t)$ будет удовлетворять одномерному волновому уравнению (ср. (4.16))

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

решения которого уже были найдены. Таким образом, общее решение (4.23) уравнения имеет вид

$$U = \frac{f_1(r - ct)}{r} + \frac{f_2(r + ct)}{r}. \quad (4.24)$$

Первое слагаемое описывает сферическую волну, расходящуюся из начала координат со скоростью c . Ее амплитуда убывает с удалением от центра как r^{-1} в силу того, что заданный поток энергии распределяется на все большую площадь. Второе слагаемое описывает волну, испущенную из бесконечности и сходящуюся к центру.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 27; [3], § 46, 47.

4.3. Плоские монохроматические волны

Важным частным случаем электромагнитных волн является волна, в которой все величины (компоненты $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$) зависят от времени по простому периодическому (гармоническому) закону $\cos(\omega t + \alpha)$. Такие волны называют *монохроматическими*. Напомним, что любую периодическую функцию (с периодом T) можно разложить в ряд Фурье по гармоническим функциям

$$f(t) = \sum_{n=0, \pm 1, \dots} f_n e^{-in\omega t}, \quad \omega = 2\pi/T,$$

а «почти любую» непериодическую функцию можно представить в виде интеграла Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Величина f_{ω} в последнем выражении характеризует вклад гармонического колебания с частотой ω в $f(t)$.

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x . В плоской волне зависимость всех величин от координат и времени имеет вид

$$x - ct = -c\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Поэтому в плоской монохроматической волне все величины зависят от x, t следующим образом:

$$\cos(\omega(t - x/c) + \alpha) = \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (4.25)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ – волновое число, ω – циклическая частота, $\omega t - kx + \alpha$ – фаза волны. Функция (4.25) периодична по x и t . Найдем период волны по времени при фиксированной координате,

$$\omega(t + T) - \omega t = 2\pi, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

и период по координате при фиксированном времени:

$$k(x + \lambda) - kx = 2\pi, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega}c = cT.$$

Здесь λ – длина волны (расстояние, которое проходит волна за период T).

Запишем компоненты векторного потенциала в плоской монохроматической волне, распространяющейся в положительном направлении оси x . Поскольку $A'_x = 0$ (см. (4.18)), то и $\partial A_x / \partial t = 0$. Ясно, что постоянная по времени составляющая A_x не может иметь отношение к электромагнитной волне, поэтому можно положить ее равной нулю. Две другие составляющие зависят от x, t по закону (4.25), так что

$$\begin{aligned} A_x &= 0, \\ A_y &= a_{0y} \cos(\omega t - kx + \alpha_y), \\ A_z &= a_{0z} \cos(\omega t - kx + \alpha_z). \end{aligned}$$

Выражения для A_y и A_z перепишем в виде

$$\begin{aligned} A_y &= a_{0y} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\alpha_y} e^{i(kx - \omega t)} \right\}, \\ A_z &= a_{0z} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\alpha_z} e^{i(kx - \omega t)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Введем комплексный вектор

$$\mathbf{A}_0 = (0, a_{0y} e^{-i\alpha_y}, a_{0z} e^{-i\alpha_z})$$

и запишем (4.26) в векторной форме

$$\mathbf{A} = \text{Re} \left\{ \mathbf{A}_0 e^{i(kx - \omega t)} \right\}.$$

Введем еще волновой вектор $\mathbf{k}$ соотношением

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — направление распространения волны. Теперь можем записать $kx = \mathbf{k}\mathbf{r}$ (напомним, что мы рассматриваем волну, распространяющуюся вдоль оси x) и представить окончательно векторный потенциал в виде

$$\mathbf{A} = \text{Re} \left\{ \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right\}.$$

В такой же форме можем записать и, например, вектор электрического поля:

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right\}, \quad (4.27)$$

где постоянный комплексный вектор $\mathbf{E}_0$ выражается через $\mathbf{A}_0$.

Линейные операции (например, дифференцирование) и взятие вещественной части перестановочны. Поэтому до тех пор, пока над величинами производятся лишь линейные операции, можно опускать знак взятия вещественной части и оперировать с комплексными величинами как таковыми (хотя физический смысл имеет лишь их вещественная часть). Иметь дело с экспонентой математически гораздо удобнее, чем с тригонометрическими функциями, поскольку применение дифференциальных операторов не изменяет ее вида. Так, подставив

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

в (4.13), получим связь между напряженностями и векторным потенциалом в плоской монохроматической волне:

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = [\nabla(i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)), \mathbf{A}] = i[\mathbf{k}\mathbf{A}].$$

Из этих соотношений следует связь $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$,

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n}\mathbf{E}],$$

которая справедлива и для плоской волны с произвольной (немонохроматической) зависимостью от времени, см. (4.20).

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 28; [3], § 48; [7], гл. 20, § 1,2.

4.4. Поляризация волны

Ранее мы выяснили, что в плоской волне вектора $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны в каждой точке пространства. При этом $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, вообще говоря, меняются по направлению. Характер их движения называется *поляризацией*.

Запишем вектор электрического поля в плоской монохроматической волне в виде (4.27):

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right\}. \quad (4.28)$$

$\mathbf{E}_0$ есть некоторый комплексный вектор. Его квадрат $\mathbf{E}_0^2$ есть некоторое, вообще говоря, комплексное число. Обозначим аргумент этого числа 2α , т.е. $\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0^2| e^{-2i\alpha}$. Определим вектор $\mathbf{b}$ согласно

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-i\alpha},$$

тогда этот вектор будет иметь вещественный квадрат $\mathbf{b}^2 = |\mathbf{E}_0^2|$. Перепишем $\mathbf{E}$ в (4.28) через $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{b} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t - \alpha)} \right\}. \quad (4.29)$$

Представим $\mathbf{b}$ в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2,$$

где $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ — два вещественных вектора. Поскольку квадрат

$$\mathbf{b}^2 = b_1^2 + b_2^2 + 2i\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$$

есть вещественная величина, то $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$, т.е. векторы взаимно перпендикулярны. Направим ось x по направлению распространения волны, а ось y по направлению $\mathbf{b}_1$. Тогда, очевидно, ось z будет направлена по или против направления вектора $\mathbf{b}_2$, и из (4.29) имеем

$$\begin{aligned} E_y &= b_1 \cos(\omega t - kx + \alpha), \\ E_z &= \pm b_2 \sin(\omega t - kx + \alpha). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Из (4.30) следует, что компоненты E_y , E_z связаны уравнением

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \quad (4.31)$$

Мы видим, таким образом, что в каждой точке пространства вектор электрического поля вращается в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, причем его конец описывает эллипс (4.31). Такая волна

называется *эллиптически поляризованной*. Вращение происходит в направлении по или против направления винта, ввинчиваемого вдоль оси x , соответственно при знаке плюс или минус в (4.30).

Если $b_1 = b_2$, то эллипс (4.31) превращается в круг, т.е. вектор $\mathbf{E}$ вращается, оставаясь постоянным по величине. В этом случае говорят о *циркулярно поляризованной* волне. Выбор осей y и z при этом становится, очевидно, произвольным.

Наконец, если b_1 или b_2 равно нулю, то поле волны направлено везде и всегда параллельно (или антипараллельно) одному и тому же направлению. Волну называют в этом случае *линейно поляризованной* или поляризованной в плоскости. Эллиптически поляризованную волну можно, очевидно, рассматривать как наложение двух линейно поляризованных волн.

Электрический вектор в плоской монохроматической волне часто записывается следующим образом (ср. (4.27))

$$\mathbf{E} = E_0 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{e} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right\}, \quad (\mathbf{e}^* \mathbf{e}) = 1, \quad (4.32)$$

где E_0 — вещественная амплитуда волны, $\mathbf{e}$ — единичный комплексный *вектор поляризации*. В системе координат, в которой эллипс поляризации имеет канонический вид (4.31) (т.е. той, о которой шла речь выше) для вектора $\mathbf{e}$ можем записать (считаем, что ось y направлена вдоль главной оси эллипса поляризации, т.е. что в (4.31) $b_1 > b_2$)

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}_y + i\eta \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \eta^2}}. \quad (4.33)$$

Величина η может принимать значения от -1 до $+1$, соответствующие всем видам эллиптической поляризации от левой круговой ($\eta = -1$) до правой круговой ($\eta = +1$). При $\eta = 0$ волна линейно поляризована вдоль оси y .

Величина $l = (\mathbf{e}\mathbf{e}) = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}$ называется степенью линейной поляризации волны; очевидно, что $0 \leq l \leq 1$, причем $l = 1$ при $\eta = 0$ и $l = 0$ при $\eta = \pm 1$.

Выражение $A = \frac{2\eta}{1 + \eta^2}$ называется степенью круговой поляризации волны.

Нетрудно проверить, что $l^2 + A^2 = 1$.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 28; [3], § 48.

4.5. Запаздывающие потенциалы

В разд. 2, 3 мы изучали постоянное поле, создаваемое покоящимися зарядами и постоянными токами, в разд. 4.2 — переменное поле, но в отсутствие

зарядов. Займемся теперь изучением переменных полей при наличии произвольно движущихся зарядов. Потенциалы электромагнитного поля определяются уравнениями (4.7):

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (4.34)$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (4.35)$$

где $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ — некоторые функции координат и времени. Следует подчеркнуть, что постановка задачи о нахождении электромагнитного поля при заданных источниках ρ , $\mathbf{j}$ с самого начала носит приближенный характер. В действительности создаваемое заряженными частицами поле влияет на их движение, поэтому стоящие в правых частях ρ , $\mathbf{j}$ сами зависят от искомых потенциалов. Но во многих случаях обратным влиянием поля на движение зарядов можно пренебречь.

Решение неоднородных линейных уравнений (4.34), (4.35) может быть представлено, как известно, в виде суммы общего решения этих же уравнений без правой части и частного решения уравнений с правой частью. Для нахождения этого частного интеграла разделим все пространство на бесконечно малые участки и определим поле, создаваемое зарядом, находящимся в одном из таких элементов объема. Вследствие линейности уравнений истинное поле будет равно сумме полей, создаваемых всеми такими элементами.

Заряд de в заданном элементе объема является, вообще говоря, функцией от времени. Если выбрать начало координат в рассматриваемом элементе объема, то плотность заряда $\rho = de(t)\delta(\mathbf{r})$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат. Чтобы найти поле, создаваемое рассматриваемым зарядом, необходимо решить уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi de(t)\delta(\mathbf{r}). \quad (4.36)$$

Везде, кроме начала координат, $\delta(\mathbf{r}) = 0$, и мы имеем уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (4.37)$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае φ обладает сферической симметрией, т.е. $\varphi = \varphi(r, t)$. Поэтому, если написать оператор Лапласа в сферических координатах, то (4.37) примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (4.38)$$

Для решения этого уравнения сделаем подстановку $\varphi = \chi(r, t)/r$. Тогда для χ получим

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

Но это есть уравнение плоских волн, решение которого имеет вид (см. разд. (4.2)):

$$\chi = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right).$$

Поскольку мы ищем поле, создаваемое зарядом, находящимся в начале координат, то надо оставить только расходящуюся волну

$$\varphi = \frac{f(t - r/c)}{r}. \quad (4.39)$$

Функция f в этом равенстве пока произвольна; выберем ее теперь так, чтобы получить правильное значение для потенциала также и в начале координат. Иначе говоря, мы должны подобрать f так, чтобы в начале координат выполнялось уравнение (4.36). Это можно сделать, заметив, что при $r \rightarrow 0$ потенциал φ стремится к бесконечности, а потому его производные по координатам растут быстрее, чем производные по времени. Следовательно, при $r \rightarrow 0$ в уравнении (4.36) можно пренебречь членом $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi$ по сравнению с $\Delta \varphi$. Тогда оно переходит в уравнение для потенциала электростатического поля (2.6), которое приводит к закону Кулона. Таким образом, в начале координат формула (4.39) должна переходить в закон Кулона, откуда следует, что $f(t) = de(t)$, т.е.

$$\varphi = \frac{de(t - r/c)}{r}.$$

Отсюда легко перейти к решению уравнения (4.36) для произвольного распределения зарядов. Для этого надо положить $de = \rho dV$ и проинтегрировать по всему пространству.

В результате приходим к следующему выражению для скалярного потенциала:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.40)$$

Аналогичную формулу можно получить для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.41)$$

Напомним, что (4.40), (4.41) есть частные интегралы уравнений (4.34), (4.35); обратим внимание, что они не содержат никаких произвольных постоянных. Эти решения называются *запаздывающими потенциалами*.

Общее решение $\varphi_{\text{н.у.}}$ неоднородных уравнений (4.34), (4.35) получим, прибавив к (4.40), (4.41) решение φ_0 этих же уравнений без правой части:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{н.у.}} &= \varphi_0 + \varphi, \\ \mathbf{A}_{\text{н.у.}} &= \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Потенциалы φ_0 и $\mathbf{A}_0$, никак не зависящие от ρ и $\mathbf{j}$, физически соответствуют внешнему полю, действующему на систему. Потенциалы φ и $\mathbf{A}$ соответствуют полю, созданному самой системой; характер этого поля будет выяснен в разд. 5.1.

Вид временного аргумента в (4.40), (4.41) показывает, что поле в точке r в момент t определяется состоянием источников в предшествующий момент времени $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$, отличающийся на время распространения электромагнитного возмущения от источника в

точку наблюдения. Но следует подчеркнуть, что законы электродинамики не утверждают, что при движении зарядов поля, оставаясь статическими, начинают просто запаздывать. Например, потенциал поля движущегося точечного заряда e не равен

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{неверно}),$$

где $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор точки, в которой заряд находился в момент $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$, а определяется более сложной формулой (потенциалами Лиенара – Вихерта).

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 32; [3], § 62; [7], гл. 21, § 2,3.

4.6. Потенциалы Лиенара – Вихерта

Найдем с помощью общих формул (4.40), (4.41) потенциалы, создаваемые произвольным образом движущейся точечной заряженной частицей. Заметим, что запаздывающим потенциалам можно придать вид четырехмерных интегралов, вводя в них дельта-функцию:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(\tau - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dV' d\tau, \quad (4.1)$$

и аналогично для векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Пусть есть точечный заряд e , совершающий движение по траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$. При этом

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \quad (4.2)$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0$. Подставляя ρ из (4.35) в (4.34) и интегрируя по координатам, получим

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = e \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|} \delta(\tau - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|) d\tau.$$

Интегрирование по τ легко выполнить, если воспользоваться правилом интегрирования выражений, содержащих дельта-функцию сложного аргумента:

$$\int g(x) \delta(f(x) - a) dx = g(x_0) \frac{1}{|df/dx|_{x=x_0}}, \quad f(x_0) = a. \quad (4.3)$$

В нашем случае $f(\tau) = \tau + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|$,

$$\frac{df}{d\tau} = 1 + \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{c} \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}_0(\tau) + r_0^2(\tau)} \right\} = 1 - \frac{\mathbf{v}(\tau)}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|} = 1 - \frac{1}{c} \mathbf{n}\mathbf{v},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. В результате для φ имеем

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \frac{1}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}(t')/c}, \quad (4.4)$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|},$$

а t' есть корень уравнения

$$t' = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|. \quad (4.5)$$

Разность $t - t' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|/c$ представляет собой время распространения электромагнитного возмущения от частицы до точки наблюдения поля.

Для векторного потенциала аналогичные вычисления приводят к следующему результату:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \frac{1}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}(t')/c}. \quad (4.6)$$

Потенциалы поля в виде (4.4), (4.6) называются потенциалами Лиенара – Вихерта.

Чтобы вычислить напряженности электрического и магнитного полей по формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (4.7)$$

надо дифференцировать φ и $\mathbf{A}$ по координатам x, y, z точки и моменту t наблюдения. Между тем формулы (4.4), (4.6) выражают потенциалы как функции от t' и лишь через соотношение (4.5) — как неявные функции от x, y, z, t , что надо учитывать при вычислении производных в (4.7). Опуская соответствующие выкладки, приведем окончательный результат:

$$\mathbf{E} = e \frac{1 - v^2/c^2}{R^2(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}/c)^3} (\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) + \frac{e}{c^2 R(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}/c)^3} [\mathbf{n}[(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c)\dot{\mathbf{v}}]], \quad (4.8)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n}\mathbf{E}].$$

Здесь $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, $\dot{\mathbf{v}} = \partial \mathbf{v} / \partial t'$; все величины в правых сторонах равенств берутся в момент t' , который определяется из уравнения (4.5). Отметим некоторые характерные черты полученных напряженностей поля. Вектор $\mathbf{B}$ перпендикулярен $\mathbf{E}$ и линии, которая соединяет заряд в запаздывающий момент времени с точкой наблюдения (но вектор $\mathbf{E}$ имеет проекцию на эту линию). Каждая из напряженностей состоит из двух слагаемых: первое изменяется в пространстве как R^{-2} и не содержит ускорения заряда, а второе пропорционально ускорению $\dot{\mathbf{v}}$ и убывает как R^{-1} . Слагаемое первого типа, присущее в том числе равномерно движущемуся заряду, имеет закон убывания такой же, как у статического поля. Слагаемое второго типа описывает волновое поле

излучения, поскольку оно медленно спадает с расстоянием и создает конечный поток электромагнитной энергии через замкнутую поверхность сколь угодно большого радиуса, окружающего частицу. Поле излучения возникает только при ускоренном движении заряда ($\dot{\mathbf{v}} \neq 0$).

Рекомендуемая литература: [2], гл. 7, § 1; [3], § 63; [7], гл. 21, § 5.

5. Излучение и рассеяние электромагнитных волн

5.1. Поле системы зарядов на далеких расстояниях

Общие формулы для запаздывающих потенциалов (4.40), (4.41) весьма сложны. Действительно, для вычисления потенциалов поля необходимо брать значение плотности заряда и плотности тока в разные моменты времени в каждой точке системы. Поэтому конкретных точных выражений для φ и $\mathbf{A}$ с помощью этих формул получить не удастся. Если, однако, точка наблюдения находится достаточно далеко от системы движущихся зарядов, выражения (4.40), (4.41) можно существенно упростить. Итак, пусть заряды движутся в области, размер которой a , а поле рассматривается на больших расстояниях $r \gg a$. Тогда выражение $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ в (4.40), (4.41) можно разложить в ряд

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}' + \mathbf{r}'^2)^{\frac{1}{2}} = r \left(1 - \frac{2\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{\mathbf{r}'^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx r \left(1 - \mathbf{n} \frac{\mathbf{r}'}{r} \right) = r - \mathbf{n}\mathbf{r}', \quad (5.9)$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ — единичный вектор в направлении точки наблюдения. В знаменателях (4.40), (4.41) можно оставить только первый член из (5.9): $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r}$.

В аргументах ρ и $\mathbf{j}$ в числителе оставляем два слагаемых:

$$\rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) = \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c} \right)$$

и аналогично для $\mathbf{j}$. Хотя $\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c} \ll \frac{r}{c}$, но последнее слагаемое в аргументах ρ и $\mathbf{j}$ можно отбросить лишь в том случае, когда за время $\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}$ конфигурация зарядов в системе не успевает заметно измениться.

После упрощений запаздывающие потенциалы принимают вид:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \int \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c} \right) dV', \quad (5.10)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{nr}'}{c} \right) dV'. \quad (5.11)$$

Уже отсюда становится ясно, что при фиксированном $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ зависимость от r и t в (5.10), (5.11) аналогична той, которая имеется в расходящейся сферической волне (4.23). Другими словами, запаздывающие потенциалы на больших расстояниях имеют асимптотику расходящихся сферических волн. Это и говорит о том, что произвольно движущиеся системы зарядов излучают электромагнитные волны. Теперь можно сказать, что в уравнении (4.42)

$$\varphi_{\text{н.у.}} = \varphi_0 + \varphi$$

φ_0 есть внешняя электромагнитная волна, а φ — электромагнитная волна, созданная самой системой.

Найдем теперь по общим формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (5.12)$$

напряженности электрического и магнитного полей, создаваемые системой зарядов на большом расстоянии. Производные в правой части вычислим приближенно. Во-первых, при вычислении $\nabla(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{nr}'}{c})$, учтем, что $|\nabla r| = 1$, а $|\nabla_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}'\mathbf{r}/r)| \sim r'/r \ll 1$, поэтому

$$\nabla(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c}) \approx -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Во-вторых, не будем дифференцировать общий множитель $\frac{1}{r}$ в (5.10), (5.11). Действительно, векторный потенциал (5.11) содержит зависимость от координат точки наблюдения в двух факторах: $\frac{1}{r}$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - r/c + \mathbf{r}'\mathbf{n}/c)$. Сравним величину двух слагаемых, которые возникают при их дифференцировании при вычислении $\text{rot } \mathbf{A}$. Возьмем для оценки $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)$, так что $\text{rot } \mathbf{j} = [\nabla \cos(\omega(t - r/c) + \alpha), \mathbf{j}_0]$ и

$$|\text{rot } \mathbf{j}| \sim \frac{\omega}{c} |\mathbf{j}|.$$

Поскольку $|\nabla(1/r)| \sim 1/r^2$, то при $\frac{1}{r^2} \ll \frac{\omega}{cr}$, или

$$r \gg \frac{c}{\omega} \sim \lambda \quad (5.13)$$

слагаемое с $1/r^2$ можно опустить. Область (5.13) называют *волновой зоной* излучения.

Найдем магнитное поле в волновой зоне

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}] = [\nabla(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}), \dot{\mathbf{A}}] = -\frac{1}{c}[\mathbf{n}\dot{\mathbf{A}}],$$

где $\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. Таким образом, в волновой зоне связь между $\mathbf{B}$ и $\dot{\mathbf{A}}$

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}] = \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}] \quad (5.14)$$

такая же, как в плоской волне (см. (4.19)). Поэтому напряженность электрического поля можно не вычислять по формуле из (5.12), а воспользоваться связью $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ в плоской волне: $\mathbf{B} = [\mathbf{n}\mathbf{E}]$. Умножив это равенство векторно на $\mathbf{n}$

$$[\mathbf{n}\mathbf{B}] = [\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{E}]] = \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{n}\mathbf{n}) = \{(\mathbf{n}\mathbf{E}) = 0\} = -\mathbf{E},$$

выразим $\mathbf{E}$ через $\mathbf{B}$ и $\mathbf{n}$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{B}\mathbf{n}]. \quad (5.15)$$

Выпишем здесь также связь $\mathbf{E}$ и $\dot{\mathbf{A}}$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c}[[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]. \quad (5.16)$$

Оценим убывание полей на больших расстояниях. Дифференцируя по времени $\mathbf{A}$ в (5.11), найдем, что при $r \rightarrow \infty$

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}'_t \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c} \right) dV' \sim \frac{1}{r}.$$

Отсюда и из (5.14), (5.16) следует, что на далеких расстояниях напряженности поля оказываются обратно пропорциональными первой степени расстояния от излучающей системы, $E, B \sim \frac{1}{r}$, т.е. спадают медленнее постоянного поля.

Излучаемые системой электромагнитные волны уносят с собой определенную энергию. Поток энергии дается вектором Пойнтинга $\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{B}]$, который в плоской волне равен

$$\mathbf{g} = c \frac{B^2}{4\pi} \mathbf{n},$$

т.е. через единичную площадку, перпендикулярную $\mathbf{n}$, в единицу времени протекает количество энергии, равное $|\mathbf{g}| = c \frac{B^2}{4\pi}$.

Введем понятие *интенсивности излучения* dI в элемент телесного угла $d\Omega$ как количества энергии, протекающей в единицу времени t через элемент

площади $dS = r^2 d\Omega$ шаровой поверхности с центром в начале координат и с радиусом r . Это количество равно, очевидно,

$$dI = \frac{c}{4\pi} B^2 r^2 d\Omega. \quad (5.17)$$

Поскольку поле B обратно пропорционально r , то, как видим, количество энергии, излучаемое системой в единицу времени t в элемент телесного угла $d\Omega$, одинаково для всех расстояний (при одинаковой разности $t - \frac{r}{c}$). Так и должно быть, поскольку излучаемая системой энергия распространяется в окружающем пространстве со скоростью c , нигде не накапливаясь и не исчезая.

Рекомендуемая литература: [3], § 66; [4], ч. I, § 26.

5.2. Дипольное излучение

Проведем дальнейшее упрощение приближенного выражения (5.11) для векторного потенциала на больших расстояниях. Очевидно, временем $\mathbf{nr}'/c \sim a/c$ в подынтегральном выражении (5.11) можно пренебречь, если за это время распределение зарядов мало изменяется. Найдем соотношения, которые выражают это условие. Пусть T — характерное время, за которое заряды смещаются заметным образом (например, при периодическом движении T есть время порядка периода движения зарядов).

Раскладывая $\mathbf{j}$ в (5.11) по $\mathbf{nr}'/c$

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{nr}'}{c}\right) \approx \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{nr}'}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \quad (5.18)$$

и оценивая производную $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \sim \frac{\mathbf{j}}{T}$, видим, что второй член в (5.18) можно отбросить, если

$$\frac{a}{c} \ll T,$$

т.е. время распространения электромагнитных возмущений в пределах излучающей системы мало по сравнению с характерным временем движения зарядов в системе. Последнее неравенство может быть переписано следующим образом:

$$a \ll \lambda \quad (5.19)$$

— размеры системы должны быть малы по сравнению с длиной излучаемой волны $\lambda = cT$.

Условие (5.19) можно записать и в другом виде. Пусть v — характерная скорость движения зарядов, тогда $T \sim \frac{a}{v}$, так что $\lambda \sim ca/v$. Из (5.19) находим тогда

$$v \ll c, \quad (5.20)$$

т.е. скорости зарядов должны быть малы по сравнению со скоростью света.

Будем считать, что условие (5.19), (5.20) выполняется, и в разложении (5.18) оставим только один член. Тогда для векторного потенциала (5.11) имеем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV'.$$

Подставляя сюда выражение

$$\mathbf{j} = \sum e_a \mathbf{v}_a \delta \left(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

для плотности тока, преобразуем $\mathbf{A}$ к виду

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \sum e_a \mathbf{v}_a = \frac{1}{cr} \frac{d}{dt} \sum e_a \mathbf{r}_a.$$

Вспоминая определение дипольного момента, окончательно запишем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \dot{\mathbf{d}} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (5.21)$$

Зная векторный потенциал в волновой зоне, найдем $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ по формулам (5.14), (5.16):

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}] = \frac{1}{c^2 r} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}], \quad (5.22)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{B}\mathbf{n}] = \frac{1}{c^2 r} [[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]. \quad (5.23)$$

Мы видим, что в рассматриваемом приближении все характеристики излучения определяются дипольным моментом системы. Такое излучение называется *дипольным*. Приближение, в котором вычислены поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, называется *дипольным приближением*, условие применимости дипольного приближения состоит в выполнении неравенств (5.19), (5.20).

Если $\ddot{\mathbf{d}} = 0$, то дипольное излучение отсутствует. В частности, дипольное излучение отсутствует, если заряды движутся равномерно. Отсутствие излучения (в том числе дипольного) при равномерном движении зарядов непосредственно следует из принципа относительности, так как равномерно движущийся заряд можно рассматривать в такой системе, где он покоится, а покоящиеся заряды не излучают. Таким образом, заряды могут излучать только, если они движутся с ускорением.

Подставляя (5.22) в (5.17), найдем интенсивность дипольного излучения:

$$dI = \frac{c}{4\pi} B^2 r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (5.24)$$

где θ — угол между векторами $\ddot{\mathbf{d}}$ и $\mathbf{n}$. Это есть количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega$. Подставив $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ и интегрируя по $d\theta$ от 0 до π и по $d\varphi$ от 0 до 2π , найдем полную интенсивность излучения:

$$I = \int dI = \frac{1}{2c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 \int_0^\pi \sin^2\theta \sin\theta d\theta = \{\cos\theta = x\} = \frac{1}{2c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx. \quad (5.25)$$

Окончательно

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3}. \quad (5.26)$$

Если имеется всего один движущийся во внешнем поле заряд, то $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ и $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — ускорение заряда. Полное излучение движущегося заряда

$$I = \frac{2e^2 w^2}{3c^3} \quad (5.27)$$

есть энергия, которую заряд теряет в единицу времени. В частности, движущийся по орбите электрон должен терять энергию и падать на ядро. Классическая физика не может объяснить устойчивости атома.

Если условие дипольного приближения выполняется, но дипольный момент системы равен нулю или не зависит от времени ($\ddot{\mathbf{d}} = 0$), то дипольное излучение отсутствует, и для расчета поля излучения и его интенсивности нужно учесть следующие члены разложения (5.18). Такая ситуация возникает, например, для замкнутой системы частиц с одинаковым отношением заряда к массе:

$$\dot{\mathbf{d}} = \sum e_a \mathbf{v}_a = \sum \frac{e_a}{m_a} \mathbf{p}_a = \frac{e}{m} \mathbf{P}.$$

Но в замкнутой системе полный импульс $\mathbf{P}$ есть интеграл движения (т.е. величина, не изменяющаяся со временем), поэтому $\ddot{\mathbf{d}} = 0$.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 36; [3], § 67; [4], ч. I, § 27.

5.3. Квадрупольное и магнитно-дипольное излучения

Рассмотрим случай, когда условие $a \ll \lambda$ выполняется, но вторая производная дипольного момента обращается в ноль, $\ddot{\mathbf{d}} = 0$, так что и интенсивность дипольного излучения (5.24), (5.25) обращается в ноль. Это не означает отсутствия излучения системой вообще. Чтобы найти интенсивность излучения в этом случае, разложим плотность тока под интегралом в (5.11), удержав второй член:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{nr}'}{c}) \approx \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) + \frac{\mathbf{nr}'}{c} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c})}{\partial t},$$

так что будем иметь следующее разложение для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dV' + \frac{1}{cr} \int \frac{(\mathbf{nr}')}{c} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c})}{\partial t} dV'.$$

Обозначим

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dV', \quad \mathbf{A}_2 = \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t} \int (\mathbf{nr}') \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dV'.$$

Будем считать систему зарядов точечной, тогда

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)),$$

и для $\mathbf{A}_2$ имеем

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t} \sum (\mathbf{nr}_a) e_a \mathbf{v}_a. \quad (5.28)$$

Проведем тождественное преобразование последнего выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a(\mathbf{nr}_a) &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_a(\mathbf{nr}_a) + \frac{1}{2} \mathbf{v}_a(\mathbf{nr}_a) = \frac{1}{2} \mathbf{v}_a(\mathbf{nr}_a) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{r}_a(\mathbf{nr}_a) - \frac{1}{2} \mathbf{r}_a(\mathbf{nv}_a) = \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{n}[\mathbf{v}_a \mathbf{r}_a]] + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{r}_a(\mathbf{nr}_a). \end{aligned}$$

Теперь для $\mathbf{A}_2$ имеем

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e_a \mathbf{r}_a(\mathbf{nr}_a) + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial}{\partial t} \sum e_a [[\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a] \mathbf{n}]. \quad (5.29)$$

Вспоминая, что

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \sum e_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a]$$

есть магнитный момент системы частиц, перепишем $\mathbf{A}_2$ в виде

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{cr} [\dot{\mathbf{M}} \mathbf{n}] + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e_a \mathbf{r}_a(\mathbf{nr}_a).$$

Введем вспомогательный вектор $\mathbf{Q}$ с помощью соотношения

$$Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} n_\beta = Q_{\alpha\beta} n_\beta = \sum e (3x_\alpha(\mathbf{rn}) - r^2 n_\alpha), \quad (5.30)$$

где

$$Q_{\alpha\beta} = \sum e (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})$$

— тензор квадрупольного момента системы. Запишем (5.30) в векторном виде

$$\mathbf{Q} = \sum e_a (3\mathbf{r}_a(\mathbf{r}_a \mathbf{n}) - r_a^2 \mathbf{n})$$

и преобразуем второе слагаемое в (5.29)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e_a \mathbf{r}_a (\mathbf{n} \mathbf{r}_a) = \frac{1}{3} \ddot{\mathbf{Q}} + \frac{1}{3} \mathbf{n} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e_a r_a^2.$$

В результате получаем для $\mathbf{A}_2$ следующее окончательное выражение:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{cr} [\dot{\mathbf{M}} \mathbf{n}] + \frac{1}{6c^2 r} \ddot{\mathbf{Q}} + \frac{1}{6c^2 r} \mathbf{n} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e_a r_a^2. \quad (5.31)$$

При вычислении напряженностей поля последнее слагаемое в (5.31) не дает вклада (поскольку $[\mathbf{n} \mathbf{n}] = 0$), и при условии $\ddot{\mathbf{d}} = 0$ поле излучения выражается только через магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}} \mathbf{n}] = \frac{1}{c^2 r} [\ddot{\mathbf{M}} \mathbf{n}] + \frac{1}{6c^3 r} [\ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n}], \quad (5.32)$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{B} \mathbf{n}] = \frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n} \ddot{\mathbf{M}}] + \frac{1}{6c^3 r} [[\ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n}] \mathbf{n}]. \quad (5.33)$$

Вычислим интенсивность излучения системы, у которой $\ddot{\mathbf{d}} = 0$, но имеются электрический квадрупольный момент $Q_{\alpha\beta}$ и магнитный момент $\mathbf{M}$. Учитывая, что $E = B$, подставляя (5.33) в (5.17) и учитывая, что

$$([\mathbf{n} \ddot{\mathbf{M}}] [[\ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n}] \mathbf{n}]) = ([\mathbf{n} \ddot{\mathbf{M}}], -\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{n}(\ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n})) = -([\mathbf{n} \ddot{\mathbf{M}}] \ddot{\mathbf{Q}}),$$

$$[[\ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n}] \mathbf{n}]^2 = (\mathbf{n}(\ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n}) - \ddot{\mathbf{Q}}, [[\ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n}] \mathbf{n}]) = -(\ddot{\mathbf{Q}} [[\ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n}] \mathbf{n}]) = [\ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n}]^2,$$

приходим к следующему выражению для дифференциальной интенсивности

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} \left([\mathbf{n} \ddot{\mathbf{M}}]^2 + \frac{1}{36c^2} [\ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n}]^2 - \frac{1}{3c} ([\mathbf{n} \ddot{\mathbf{M}}] \ddot{\mathbf{Q}}) \right). \quad (5.34)$$

Чтобы найти полную интенсивность, проинтегрируем последнее выражение по углам. При этом интерференционный член пропадает, и результат выражается в виде суммы интенсивностей магнитно-дипольного и квадрупольного излучений:

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{M}}^2}{3c^3} + \frac{\ddot{Q}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} \equiv I_{M1} + I_{E2}. \quad (5.35)$$

Если существует дипольное излучение системы с интенсивностью I_{E1} (см. формулу (5.25)), то I_{M1} и I_{E2} дают поправки порядка $(a/\lambda)^2$ к нему

$$I_{M1}, I_{E2} \sim \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 I_{E1}. \quad (5.36)$$

Следует иметь в виду, что в этом случае ($I_{E1} \neq 0$) имеется еще одно поправочное слагаемое (объясните его происхождение!) ΔI к I_{E1} того же порядка, что и I_{M1}, I_{E2} (см. [1]):

$$I = I_{E1} + I_{M1} + I_{E2} + \Delta I, \quad \Delta I \sim I_{M1}, I_{E2}.$$

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 36; [3], § 67; [4], ч. I, § 27.

5.4. Поле на близких расстояниях

Если расстояние до системы движущихся зарядов удовлетворяет условию

$$l \ll r \ll \lambda, \quad (5.37)$$

то вычисление поля, как и в волновой зоне, упрощается, но поле на таких расстояниях имеет существенно иной характер и называется *квазистационарным*. Условие (5.37) означает, что время распространения электромагнитного излучения до точки наблюдения r/c мало по сравнению с характерным периодом движения зарядов $T \sim \lambda/c$, поэтому при вычислении потенциалов можно пренебречь запаздыванием

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Поле определяется мгновенными распределениями зарядов и токов в системе.

Разложение скалярного потенциала в ряд по степеням l/r производится таким же образом, как и в статическом случае (см. разд. 2.3). Ограничиваясь дипольным приближением, будем иметь

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{d}(t)\mathbf{r}}{r^3}, \quad (5.39)$$

где q — полный заряд системы,

$$\mathbf{d}(t) = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t) dV' \quad (5.40)$$

— её электрический дипольный момент.

При разложении векторного потенциала возникают некоторые отличия от статического случая. Проводя разложение, как в разд. 3.2, получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) dV' + \frac{1}{cr^3} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)(\mathbf{r}\mathbf{r}') dV'. \quad (5.41)$$

Второй член преобразуется к потенциалу магнитного диполя (3.21), первый же член для нестационарной системы не обращается в нуль:

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) dV' = - \int \mathbf{r}' \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) dV' = \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t) dV' = \dot{\mathbf{d}}(t).$$

Таким образом, векторный потенциал принимает вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(t)}{cr} + \frac{[\mathbf{M}(t) \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (5.42)$$

Ему соответствует магнитное поле

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{[\dot{\mathbf{d}}(t) \mathbf{r}]}{cr^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{M}\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3}. \quad (5.43)$$

Последние два члена описывают поле магнитного диполя. Первый же член представляет собой поле, создаваемое элементарным током. Пусть имеется элементарный диполь $\mathbf{d}(t) = q(t)\mathbf{l}$. Тогда $\mathbf{B}_{BS} = [\dot{\mathbf{d}}(t) \mathbf{r}]/cr^3 = J(t)[\mathbf{l}\mathbf{r}]/cr^3$ представляет собой вычисленное по закону Био – Савара поле элементарного тока $J(t) = \dot{q}(t)$, текущего в отрезке l .

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 36.

5.5. Торможение излучением

Ускоренно движущаяся заряженная частица излучает электромагнитные волны, которые уносят энергию. Очевидно, что энергия частицы при этом убывает, т.е. происходит торможение частицы. Следовательно, на любой ускоренно движущийся заряженный объект должна действовать сила торможения. Очевидно, что эта сила действует на частицу со стороны электромагнитного поля, излученного самой частицей, т.е. в электродинамике возникает специфическое самодействие частицы.

Найдем, опираясь на энергетические соображения, силу радиационного трения. Предположим, что заряд двигался ускоренно только в промежутке времени $t_1 < t < t_2$:

$$\dot{\mathbf{v}}(t_1) = \dot{\mathbf{v}}(t_2) = 0. \quad (5.44)$$

Потеря энергии $\Delta\mathcal{E}$ зарядом может быть выражена как работа силы торможения $\mathbf{f}_{\text{rad}}$:

$$\Delta\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{\text{rad}} \mathbf{v} dt. \quad (5.45)$$

С другой стороны, $-\Delta\mathcal{E}$ – это энергия, потраченная частицей на излучение. Считая скорость частицы много меньшей скорости света, $v \ll c$, воспользуемся формулой (5.26) для интенсивности дипольного излучения и найдем

энергию, излученную частицей на интервале времени от t_1 до t_2 :

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E} &= - \int_{t_1+r/c}^{t_2+r/c} I(t)dt = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1+r/c}^{t_2+r/c} \dot{\mathbf{v}}^2(t-r/c)dt = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}^2(t)dt = \\ &= -\frac{2e^2}{3c^3} \mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}\mathbf{v}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}\mathbf{v}dt,\end{aligned}\quad (5.46)$$

где учтены условия (5.44). Сравнивая (5.45) и (5.46), видим, что закон сохранения энергии будет выполняться, если

$$\mathbf{f}_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (5.47)$$

Для учета реакции излучения необходимо добавить силу радиационного трения в правую часть уравнения движения частицы

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_{\text{rad}}. \quad (5.48)$$

Вид силы радиационного торможения был установлен из нестрогих соображений. Применение более последовательных подходов либо тоже приводит к формуле (5.47), либо требует рассмотрения неизвестной и не описываемой классической электродинамикой внутренней структуры элементарной частицы.

Лоренцева сила лучистого трения (5.47) описывает реакцию излучения не вполне удовлетворительным образом. Она повышает порядок уравнения движения, так как содержит третью производную от радиус-вектора. Это противоречит общей схеме классической механики, в которой предполагается, что уравнения движения должны иметь второй порядок по времени. Поэтому некоторые решения уравнения (5.48) оказываются физически бессмысленными. Например, при $\mathbf{f} = 0$ уравнение (5.48) принимает вид

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{v}}$$

и имеет решение

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 e^{t/\tau}, \quad \tau = \frac{3mc^3}{2e^2},$$

которое неограниченно возрастает со временем. Это значит, например, что заряд, прошедший через какое-нибудь поле, по выходе из поля должен был бы неограниченно «самоускоряться», что является физически бессмысленным.

Но в тех случаях, когда сила лучистого трения (5.48) входит в уравнение движения как малая добавка к внешним силам, она дает физически

осмысленные результаты. Сформулируем условие малости $\mathbf{f}_{\text{rad}}$ по сравнению с внешней электромагнитной силой

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Из (5.48) в нулевом приближении по радиационной силе имеем

$$\ddot{\mathbf{v}} \approx \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{mc}[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{B}] + \frac{e}{mc}[\mathbf{v}\dot{\mathbf{B}}] \approx \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e^2}{m^2c}[\mathbf{E}\mathbf{B}]$$

(опущены члены, имеющие малость $\frac{v}{c} \ll 1$). Таким образом, получаем приближенное выражение для радиационной силы:

$$\mathbf{f}_{\text{rad}} = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}[\mathbf{E}\mathbf{B}],$$

которое не содержит третьей производной по времени. Условие малости $\mathbf{f}_{\text{rad}}$ по сравнению с $\mathbf{f}$ приводит к неравенствам

$$\frac{e^3}{mc^3}|\dot{\mathbf{E}}| \ll e|\mathbf{E}|, \quad \frac{e^4}{m^2c^4}|[\mathbf{E}\mathbf{B}]| \ll e|\mathbf{E}|. \quad (5.49)$$

Если поле имеет частоту ω , то $\dot{\mathbf{E}} \sim \omega\mathbf{E}$, поэтому первое неравенство в (5.49) дает $\omega \ll \frac{mc^3}{e^2}$. Вводя длину волны $\lambda \sim c/\omega$, перепишем его в виде

$$\lambda \gg r_0, \quad r_0 \equiv \frac{e}{mc^2}. \quad (5.50)$$

Таким образом, формула (5.47) для силы лучистого трения применима только в том случае, если длина падающей на заряд волны велика по сравнению с «радиусом» заряда r_0 .

Второе неравенство в (5.49) приводит к условию

$$B \ll \frac{e}{r_0^2}, \quad (5.51)$$

т.е. необходимо также, чтобы само поле не было слишком велико. Следует иметь в виду, что в действительности классическая электродинамика становится неприменимой, вследствие квантовых эффектов, уже при значительно меньших полях (порядка $m^2c^3/\hbar e$, где $\hbar$ – постоянная Планка).

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 38; [3], § 75.

5.6. Спектральное разложение излучения

Рассмотрим излучение, возникающее при ускоренном неперiodическом движении заряженной частицы, например, при рассеянии электрона на ядре. Рассчитаем спектральную плотность излучения $\mathcal{E}_\omega$, которая определяет количество энергии $\mathcal{E}_\omega d\omega$, излученное за все время излучения в виде волн с частотами в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$. Пусть $f(t)$ — функция, характеризующая поле рассматриваемой системы. Разложим ее в интеграл Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t} d\omega. \quad (5.52)$$

Компоненты Фурье определяются по самой функции $f(t)$ интегралами

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (5.53)$$

Ввиду вещественности функции $f(t)$ очевидно, что

$$f_{-\omega} = f_\omega^*. \quad (5.54)$$

Выразим полную интенсивность волны, пропорциональную интегралу от f^2 , через компоненты Фурье. С помощью (5.52), (5.53) получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right\} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right\} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega f_{-\omega} \frac{d\omega}{2\pi}, \end{aligned}$$

или, учитывая (5.54),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int_0^{\infty} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (5.55)$$

Энергию, излученную системой за все время движения, можно представить как интеграл от интенсивности излучения $I(t)$ по времени или как интеграл от спектральной плотности излучения $\mathcal{E}_\omega$ по частоте:

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \int_0^{\infty} \mathcal{E}_\omega d\omega. \quad (5.56)$$

Если условия применимости длинноволнового приближения (5.19), (5.20) справедливы, то система излучает дипольно. В этом случае интенсивность $I(t)$ дается формулой (5.26), которая вместе с (5.55), (5.56) приводит к следующему выражению для спектральной плотности

$$\mathcal{E}_\omega = \frac{2}{3\pi c^3} |\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2, \quad (5.57)$$

где $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$ — компонента Фурье вектора $\ddot{\mathbf{d}}$. Учитывая известное свойство фурье-компонент

$$\ddot{f}_\omega = -\omega^2 f_\omega,$$

спектральную плотность можно также представить в виде

$$\mathcal{E}_\omega = \frac{2\omega^4}{3\pi c^3} |\mathbf{d}_\omega|^2. \quad (5.58)$$

Аналогичным образом находится спектральная плотность излучения в случае магнитно-дипольного, квадрупольного и т.д. излучений. Так, спектральная плотность магнитно-дипольного излучения дается выражением (ср. с (5.57))

$$\mathcal{E}_\omega = \frac{2}{3\pi c^3} |\ddot{\mathbf{M}}_\omega|^2. \quad (5.59)$$

Рекомендуемая литература: [3], § 49,67.

5.7. Излучение осциллятора. Естественная ширина спектральных линий

Излучение, поглощение и рассеяние волн атомными системами — квантовые процессы, последовательное описание которых возможно только на основе квантовой механики и квантовой электродинамики. Но многие качественные характеристики этих явлений хорошо передаются классической моделью взаимодействия электромагнитной волны с гармоническим осциллятором. Под осциллятором мы понимаем заряженную частицу, связанную упругой силой с некоторым центром.

Пусть электрон, связанный с началом координат изотропной упругой силой $\mathbf{F}_e = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$, совершает свободные колебания. В отсутствие излучения нерелятивистское уравнение движения электрона имело бы вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0 \quad (5.60)$$

и описывало бы незатухающие гармонические колебания с частотой ω_0 . Но реакция излучения приводит к появлению силы трения (5.47), которую следует добавить в правую часть уравнения (5.60):

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{r}}. \quad (5.61)$$

Решение будем искать методом последовательных приближений, считая силу радиационного трения малой. В нулевом приближении из (5.60) получаем $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2 \mathbf{r}$. Введя обозначение

$$\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}, \quad (5.62)$$

приходим к уравнению движения осциллятора с трением:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0. \quad (5.63)$$

Малость силы радиационного трения по сравнению с упругой силой соответствует выполнению условия

$$\gamma \ll \omega_0. \quad (5.64)$$

Ищем частные решения уравнения (5.63) в виде $\mathbf{a}e^{\beta t}$. С учетом неравенства (5.64), находим $\beta_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_0$. Соответственно, если заряд e , находившийся в точке $\mathbf{r}_0$, начал колебаться в момент времени $t = 0$, то его радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ приближенно дается выражением

$$\mathbf{r} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \mathbf{r}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_0 t & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Осциллятор с трением совершает непериодическое движение, поэтому излучаемые им электромагнитные волны не имеют определенной частоты. Напротив, в излучении будут представлены все частоты $0 \leq \omega < \infty$, т.е. затухающий осциллятор излучает сплошной спектр частот.

Вычислим фурье-образ второй производной дипольного момента. Принимая во внимание малую величину затухания, можно считать, что

$$\ddot{\mathbf{r}} \approx -\omega_0^2 \mathbf{r},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{d}}_\omega &= -\frac{e\omega_0^2}{2} \mathbf{r}_0 \left[\int_0^\infty e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\omega_0 t + i\omega t} dt + \int_0^\infty e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega_0 t + i\omega t} dt \right] = \\ &= -\frac{e\omega_0^2}{2} \mathbf{r}_0 \left[\frac{1}{\gamma/2 - i(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{\gamma/2 - i(\omega - \omega_0)} \right]. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Подстановка этого выражения в (5.57) приводит к довольно громоздкому выражению для спектральной плотности $\mathcal{E}_\omega$. Однако при малом затухании (5.64) спектральные линии будут узкими, поэтому интерес представляют лишь частоты вблизи ω_0 . При $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ слагаемое в (5.65), которое содержит $\omega - \omega_0$ в знаменателе много больше слагаемого, которое содержит $\omega + \omega_0$. Опуская последнее, получаем следующее выражение для спектральной плотности:

$$\mathcal{E}_\omega = \frac{e^2 r_0^2}{6\pi c^3} \omega_0^4 \frac{1}{\gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (5.66)$$

Общий множитель в последнем выражении обычно выражают через полную энергию $\mathcal{E}_0$ излучения затухающего осциллятора $\mathcal{E}_0 = \int_0^\infty \mathcal{E}_\omega d\omega$. Поскольку спектральная плотность сосредоточена вблизи частоты ω_0 , то

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} \approx \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} = \frac{2\pi}{\gamma},$$

так что

$$\mathcal{E}_\omega = \frac{\mathcal{E}_0}{2\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (5.67)$$

Такая форма линии называется *лоренцевским контуром*, а постоянная γ — *естественной шириной линии*. Обратная величина $\tau = \gamma^{-1}$ характеризует время жизни возбужденного состояния осциллятора: за время порядка нескольких τ осциллятор высвечивается и его колебания прекращаются.

Таким образом, радиационное затухание приводит к уширению спектральной линии. Максимум интенсивности в спектре излучения, согласно (5.66), приходится на частоту $\omega = \omega_0$, при удалении от этого максимума интенсивность быстро уменьшается. При $\omega = \omega_0 \pm \gamma/2$ излучаемая интенсивность уменьшается в два раза. По этой причине величина $\gamma/2$ носит название *полуширины спектральной линии*.

Квантовомеханический расчет дает для атомных спектров такую же форму линии (5.67), но с другим значением постоянной γ . В реальных условиях форма и ширина спектральных линий атомов определяются не только реакцией излучения, но и другими факторами, среди которых главную роль обычно играют столкновения атомов и их тепловое движение.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 39; [4], ч. I, § 30.

5.8. Рассеяние электромагнитных волн свободными зарядами

Если на систему зарядов падает электромагнитная волна, то под ее влиянием заряды приходят в движение. Это движение сопровождается излуче-

нием во все стороны, т.е. происходит *рассеяние* первоначальной волны.

Рассеяние удобно характеризовать отношением количества энергии, испускаемой рассеивающей системой в данном направлении в единицу времени, к плотности потока энергии, падающего на систему излучения. Это отношение имеет размерность площади и называется *сечением рассеяния*.

Пусть dI есть энергия, излучаемая системой в телесный угол $d\Omega$ в единицу времени при падении на неё волны с вектором Пойнтинга $\mathbf{g}$. Тогда сечение рассеяния в телесный угол $d\Omega$ равно

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\bar{g}} \quad (5.68)$$

(черта над буквой означает усреднение по времени). Интеграл от $d\sigma$ по всем направлениям есть полное сечение рассеяния

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (5.69)$$

Рассмотрим рассеяние, производимое одним свободным зарядом. Пусть на заряд падает плоская линейно поляризованная монохроматическая волна. Ее электрическое поле можно записать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha). \quad (5.70)$$

Будем предполагать, что скорость, приобретаемая зарядом под действием поля падающей волны, мала по сравнению со скоростью света $v \ll c$. Тогда можно считать, что на заряд действует сила $e\mathbf{E}$, а силой $\frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ можно пренебречь. Будем также считать амплитуду колебаний электрона a малой по сравнению с длиной волны внешнего поля $a \ll \lambda_0$ (т.е. $kr \ll 1$) и пренебрежем силой лучистого трения. Тогда уравнение движения заряда примет вид:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha). \quad (5.71)$$

Заметим, что в данном приближении частота излучаемой зарядом (т.е. рассеянной им) волны равна, очевидно, частоте падающей волны.

Поскольку условие (5.20) выполняется, для вычисления интенсивности рассеянного излучения воспользуемся формулой (5.24)

$$dI = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2}{4\pi c^3} d\Omega. \quad (5.72)$$

Используя уравнение движения (5.71), найдем $\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}$ и подставим в (5.72):

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} [\mathbf{E}\mathbf{n}]^2 d\Omega = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} E^2 \sin^2 \theta d\Omega.$$

Вектор Пойнтинга падающей волны равен

$$|\mathbf{g}| = \frac{c}{4\pi} |[\mathbf{E}\mathbf{B}]| = \frac{c}{4\pi} E^2.$$

Отсюда находим сечение рассеяния телесный угол $d\Omega$:

$$d\sigma = \frac{dI}{g} = \frac{e^4}{m^2 c^4} \sin^2 \theta d\Omega, \quad (5.73)$$

где θ — угол между направлением рассеяния (вектором $\mathbf{n}$) и направлением электрического поля $\mathbf{E}$ падающей волны. Мы видим, что эффективное сечение рассеяния свободным зарядом не зависит от частоты.

Обозначая $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$, перепишем (5.73) в виде

$$d\sigma = r_0^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (5.74)$$

Величина r_0 (которую можно получить, приравнявая $e^2/r_0 = mc^2$) появляется во многих задачах электродинамики. Для электрона $r_0 = 2.8 \cdot 10^{-13}$ см и называется классическим радиусом электрона. Подчеркнем, что этому параметру нельзя приписывать буквальный смысл радиуса элементарной частицы.

Определим полное сечение σ . Для этого выберем направление $\mathbf{E}$ в качестве полярной оси и интегрируя (5.74) по θ и φ точно так же, как в (5.25), находим:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2. \quad (5.75)$$

Последнее выражение называется *формулой Томсона*.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 40; [3], § 78; [4], ч. I, § 36.

5.9. Рассеяние электромагнитных волн осциллятором

Пусть на осциллятор воздействует плоская монохроматическая линейно поляризованная волна. Предполагаем, что 1) скорость, приобретенная зарядом, много меньше скорости света; 2) амплитуда колебаний мала по сравнению с длиной волны внешнего поля $a \ll \lambda_0$. Напомним, что $k \sim 1/\lambda_0$, поэтому второе условие позволяет опустить слагаемое $\mathbf{k}\mathbf{r}$ в аргументе косинуса из (5.70). Запишем уравнение движения осциллятора в пренебрежении силой радиационного трения:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \varkappa\mathbf{r} = e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

или

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \cos(\omega t + \alpha), \quad (5.76)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$ — собственная частота осциллятора. В задаче о рассеянии достаточно найти частное решение (5.76), поскольку собственные колебания осциллятора при учете трения затухнут за время γ^{-1} (см. ниже). Частное решение уравнения (5.76) ищем в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \cos(\omega t + \alpha),$$

($\mathbf{a}$ — постоянный вектор), что приводит к

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \alpha)$$

и

$$\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2\mathbf{E}_0\omega^2}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos(\omega t + \alpha).$$

Теперь из (5.24) находим интенсивность рассеянной волны, затем из (5.68) сечение рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4\omega^4}{m^2c^4(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \sin^2 \theta = r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \sin^2 \theta. \quad (5.77)$$

Выше мы не учитывали потерь энергии, обусловленных действующим на осциллятор трением. Напомним, что при ускоренном движении заряженной частицы принципиально невозможно исключить эффекты трения, поскольку возникающее излучение электромагнитных волн приводит к потере энергии частицей (см. разд. 5.5). Учитывая в уравнении движения радиационную силу трения $\mathbf{f}_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}$ и подставляя приближенно $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2\mathbf{r}$, получим

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \cos(\omega t + \alpha), \quad (5.78)$$

где $\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3}\omega_0^2$. Отсюда находим

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \text{Re} \left[\frac{e^{i(\omega t + \alpha)}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right], \quad (5.79)$$

и для сечения рассеяния в телесный угол $d\Omega$ вместо (5.77) получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \sin^2 \theta. \quad (5.80)$$

Интегрируя по телесному углу, получаем полное сечение рассеяния

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (5.81)$$

Сравнивая (5.81) с формулой Томсона (5.75), видим, что сечение рассеяния электромагнитной волны осциллятором, в отличие от рассеяния свободным зарядом, зависит от частоты. Эта зависимость имеет следующие характерные свойства.

1) При низких частотах $\omega \ll \omega_0$

$$\sigma \approx \frac{8\pi r_0^2 \omega^4}{3 \omega_0^4} \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}.$$

Это соотношение представляет собой *закон Рэлея*. Оно показывает, что волны с меньшей длиной волны рассеиваются сильнее. Синий свет рассеивается сильнее красного. Очевидно, в этой области частот $\sigma \ll \frac{8}{3}\pi r_0^2$.

2) При приближении частоты внешнего поля к собственной частоте осциллятора сечение рассеяния возрастает (явление резонанса) и точно в резонансе ($\omega = \omega_0$)

$$\sigma = \frac{8}{3}\pi r_0^2 \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} \gg \frac{8}{3}\pi r_0^2.$$

3) В высокочастотном пределе $\omega \gg \omega_0$ зависимость от частоты исчезает и связанная частица рассеивает как свободная:

$$\sigma = \frac{8}{3}\pi r_0^2.$$

Фактически, однако, применимость этой формулы ограничена сверху условием $\hbar\omega \ll mc^2$ — энергия кванта электромагнитного поля должна быть мала по сравнению с энергией частицы.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 39; [2], гл. 9, § 2; [4], ч. I, § 36.

5.10. Когерентное и некогерентное рассеяние

Рассмотрим теперь взаимодействие плоской монохроматической линейно поляризованной волны с системой одинаковых частиц, совершающих колебания, каждая около своего положения равновесия $\mathbf{r}_j$. По-прежнему будем пренебрегать неоднородностью падающей волны в пределах области колебаний отдельной частицы, но расстояние между частицами может быть произвольным по сравнению с длиной волны. Поэтому на частицу с номером j будет действовать поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_j - i\omega t)$, где $\mathbf{k}$ — волновой вектор падающей волны. Радиус-вектор $\mathbf{s}_j$ j -й частицы, отсчитываемый от положения равновесия, определяется из уравнения движения в пренебрежении магнитной силой ($v/c \ll 1$), решение его дает $\mathbf{s}_j = \mathbf{a} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_j - i\omega t)$, где амплитуда колебаний

$$\mathbf{a} = \frac{e\mathbf{E}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (5.82)$$

одинакова для всех частиц.

Запишем векторный потенциал поля рассеянных волн в приближении (5.11) (на большом расстоянии от системы)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR} \sum_j e_j \dot{\mathbf{s}}_j \left(t - \frac{R}{c} + \frac{\mathbf{n}' \mathbf{r}_j}{c} \right),$$

где R — расстояние от начала координат до точки наблюдения, $\mathbf{n}'$ — единичный вектор в направлении рассеяния. Подставляя сюда выражение для $\mathbf{s}_j$, находим

$$\mathbf{A} = -\frac{i}{cR} \frac{\mathbf{E}_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} e^{-i\omega(t-R/c)} \sum_j \frac{e^2}{m} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}, \quad (5.83)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ есть разность между волновым вектором рассеянной $\mathbf{k}' = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}'$ и волновым вектором падающей $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$ волн.

Для поля $\mathbf{B}$ рассеянной волны находим согласно (5.14)

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}} \mathbf{n}'] = \frac{[\mathbf{E}_0 \mathbf{n}']}{c^2 R} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} e^{-i\omega(t-R/c)} \frac{e^2}{m} \sum_j e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}. \quad (5.84)$$

Поток энергии в элемент телесного угла в направлении $\mathbf{n}'$, усредненный по периоду, равен $\frac{c|\mathbf{B}|^2}{8\pi} R^2 d\Omega$ (напомним, что выражение (5.84) для $\mathbf{B}$ записано в комплексной форме, поэтому в знаменателе возникает множитель 8π , а не 4π). Вычисляя дифференциальное сечение рассеяния по формуле (5.68), находим

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = F(\mathbf{q}) \frac{d\sigma}{d\Omega}, \quad (5.85)$$

где $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ — сечение рассеяния отдельным осциллятором (5.80) или свободным электроном (5.74) (при $\omega_0 = \gamma = 0$).

Множитель

$$F(\mathbf{q}) = \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j} \right|^2 \quad (5.86)$$

представляет собой фактор когерентности, показывающий, в какой мере рассеяние системой зарядов отличается от рассеяния отдельной частицей. Он сильно зависит от соотношения между обратным переданным рассеивателю волновым вектором q^{-1} и размерами области, в которой движутся частицы.

1. Переданный волновой вектор мал, так что $|\mathbf{q}\mathbf{r}_j| \ll 1$ для всех j . Заменяя в (5.86) экспоненты единицами, имеем $F = N^2$, где N — полное число

рассеивателей. Это случай полностью когерентного рассеяния, когда поля от отдельных частиц складываются в одной фазе. Сечение пропорционально квадрату числа рассеивателей:

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = N^2 \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (5.87)$$

Если рассеиваются длинные волны $\lambda \gg r_j$, то формула (5.87) справедлива при всех углах рассеяния. Если же $\lambda \lesssim r_j$, то (5.87) справедливо только при рассеянии на малые углы, при которых $qr_j \ll 1$, несмотря на то, что $kr_j \gtrsim 1$. Поскольку $q = 2k \sin(\theta/2)$, где θ — угол рассеяния, то область углов когерентного рассеяния дается неравенством

$$\theta \ll \theta_c \approx \frac{1}{kl}, \quad (5.88)$$

где l — размер рассеивающей системы.

2. Переданный импульс велик, $|\mathbf{q}\mathbf{r}_j| \gg 1$. Запишем (5.86) в виде

$$F = \sum_{j=1}^N \exp[i\mathbf{q}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j)] + \sum_{j \neq m} \exp[i\mathbf{q}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)].$$

Первая сумма, очевидно, равна N . Значение же второй суммы зависят, вообще говоря, от расположения зарядов. Если оно случайно, то при достаточно большом N произойдет взаимное гашение осциллирующих слагаемых, и $F = N$. Поэтому будем иметь

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = N \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (5.89)$$

Здесь складываются не амплитуды, а интенсивности волн, рассеянных отдельными частицами, и эффект пропорционален числу рассеивателей, а не их квадрату.

Следует иметь в виду, что выше не учитывалось воздействие рассеянных волн на другие заряды — многократное рассеяния света, которым можно пренебречь в разреженной среде.

Рекомендуемая литература: [1], ч. I, § 40; [3], § 80.

Список литературы

1. Бредов М.М. Классическая электродинамика / М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. — СПб. : Лань, 2003. — 398 с.
2. Запрягаев С.А. Электродинамика / С.А. Запрягаев. — Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005. — 536 с.
3. Ландау Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: Физматлит, 2003. — 530 с.
4. Левич В.Г. Курс теоретической физики : в 2-х т. / В.Г. Левич. — М. : Наука, 1969. — Т. 1. — 912 с.
5. Терлецкий Я.П. Электродинамика / Я.П. Терлецкий, Ю.П. Рыбаков. — М. : Высш. шк., 1990. — 352 с.
6. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике : в 9-ти т. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. — М. : Мир, 1977. — Т.5. — 300 с.
7. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике : в 9-ти т. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. — М. : Мир, 1977. — Т.6. — 347 с.
8. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М. : Физматлит, 2003. — 651 с.

Учебное издание

Мармо Сергей Иванович,
Фролов Михаил Владимирович

ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ
Часть I

Учебное пособие для вузов

Редактор О.А. Исаева