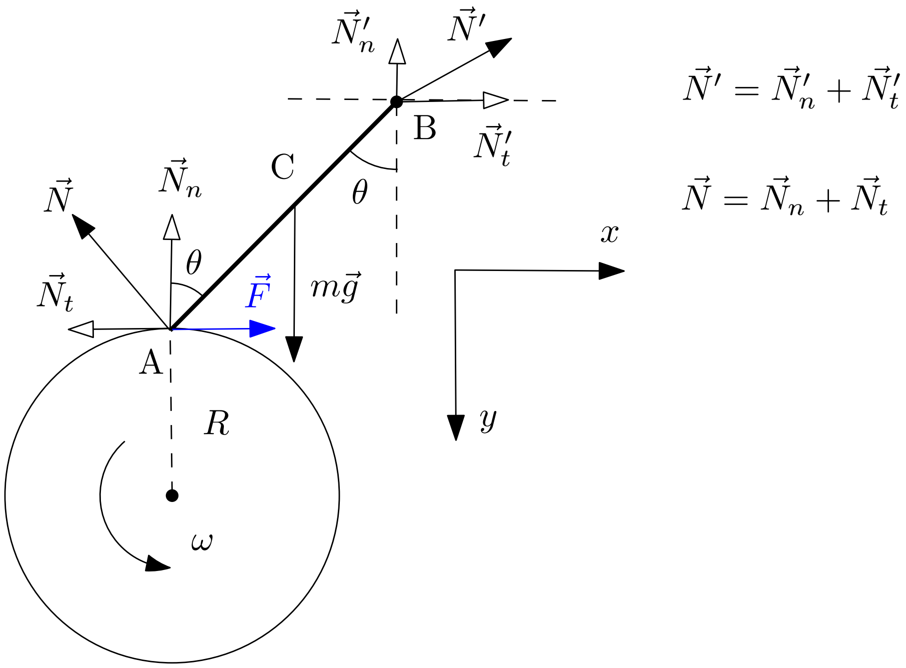

Рис. 1: Схема к задаче о стержне и вращающемся диске

1 Типовые задачи по механике

Ниже дано подробное решение некоторых поучительных задач из курса механики[1].

Задача о стержне и вращающемся диске

Задача 1.296 из [2].

На однородный диск, вращающийся вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, осторожно опускают конец стержня AB, см. рис. 1. Трение (коэффициент трения k) имеется только между диском и стержнем. Пусть n_1, n_2 – числа оборотов диска до остановки при его вращении по и против часовой стрелки при одинаковой начальной скорости. **Найти** отношение n_1/n_2.

Решение. Прежде всего рисуем схему, на которой обозначаем силы, действующие на тела, составляющие систему! На рис. 1 чёрным цветом изображены силы, действующие на стержень. Синий цвет – сила, действующая на диск. Понятно, что на диск ещё действует сила тяжести и сила реакции. Эти силы приложены к его центру масс и оси вращения, соответственно. Указанные силы уравновешивают друг друга и нас не интересуют.

Вращение диска тормозится только силой трения $\mathbf{F}$ (синий цвет на рисунке). Чтобы её найти нужно, очевидно, найти нормальную[2] компоненту $\mathbf{N}_n$ силы реакции $\mathbf{N}$, действующей на стержень в точке A, где он соприкасается с диском. Поскольку стержень во время вращения диска остаётся неподвижным, геометрическая сумма сил, приложенных к его

[1] Составил А. В. Меремьянин (30 ноября 2012)

[2] т.е. перпендикулярную к касательной в точке соприкосновения стержня с диском

центру масс C равна нулю,

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{N}' = 0.$$

Однако, это уравнение нам не нужно, поскольку нас не интересует сила реакции $\mathbf{N}'$ в точке подвеса B. Заметим теперь, что геометрическая сумма моментов сил относительно точки B также равна нулю (стержень не вращается). Отсюда получаем одно скалярное уравнение (оно есть проекция векторного уравнения моментов на ось z, перпендикулярную плоскости рисунка),

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta - N_n l \sin\theta - N_t l \cos\theta = 0, \tag{1}$$

где l – длина стержня. По третьему закону Ньютона, сила $\mathbf{N}_t$ по модулю равна $N_t = F$, а по закону Кулона-Амонтона $F = kN_n$. Это даёт возможность переписать уравнение (1) в следующем виде,

$$\frac{mg}{2} - N_n(1 + k\,\mathrm{ctg}\,\theta) = 0. \tag{2}$$

Отсюда сразу получаем

$$F = kN_n = \frac{kmg}{2\,(1 + k\,\mathrm{ctg}\,\theta)}. \tag{3}$$

Как видно, сила трения постоянна по величине. Чтобы получить силу трения при вращении по часовой стрелке надо в (1) заменить $N_t \to -N_t$, что приведёт к замене $k \to -k$ в уравнении (3).

Отметим, что с ростом θ сила трения возрастает.

Теперь запишем уравнение движения (вращения) диска,

$$J\dot{\omega} = -FR, \tag{4}$$

где J – момент инерции диска относительно оси, а R – его радиус. Поскольку $F = const$, получаем выражения для угловой скорости и угла поворота

$$\omega(t) = \omega - \frac{FR}{J}t,$$
$$\alpha(t) = \omega t - \frac{FR}{2J}t^2.$$

Диск остановится за время t_0, которое найдём из условия $\omega(t_0) = 0$,

$$t_0 = \frac{\omega J}{FR}.$$

Если $\alpha(t_0)$ угол поворота до остановки диска, по $n_2 = \alpha(t_0)/(2\pi)$,

$$n_2 = \frac{\omega^2 J}{4\pi FR} = \frac{\omega^2 J\,(1 + k\,\mathrm{ctg}\,\theta)}{2\pi kmgR}.$$

Учитывая замечания, написанные ниже уравнения (3) получаем для числа оборотов при вращении по часовой стрелки следующее выражение

$$n_1 = \frac{\omega^2 J}{4\pi FR} = \frac{\omega^2 J\,(1 - k\,\mathrm{ctg}\,\theta)}{2\pi kmgR}.$$

Очевидно, что $n_1 < n_2$.

Список литературы

[1] С. П. Стрелков, Д. В. Сивухин, В. А. Угаров, И. А. Яковлев. *Сборник задач по общему курсу физики. Маханика.* – Москва. – 1977 г.

[2] И. Е. Иродов. *Задачи по общей физике.* – БИНОМ. – 2010 г.