

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

**КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

***Колебания и волны. ОПТИКА***

*Физический факультет, направление «Радиофизика»*

*Конспект лекций для подготовки к экзамену  
студентов 2-курса д/о*

*Часть 2*

Составитель доц. Рисин В. Е.

## Интерференция света

Под интерференцией понимают широкий круг явлений, в которых при наложении пучков света результирующая интенсивность не равна сумме интенсивностей отдельных пучков.

### Условия наблюдения интерференции

Пусть в некоторую точку пространства приходят 2 волны. По принципу суперпозиции напряжённость суммарного светового поля:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1(t) + \mathbf{E}_2(t).$$

Для перехода к энергетическому описанию возведём это выражение в квадрат

$$E^2 = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2). \quad (1)$$

Любой прибор, регистрирующий потоки энергии инерционен, т. е. он усредняет мгновенные значения модуля вектора Пойтинга  $|\mathbf{S}|$  за некоторое время  $t'$  — время инерционности прибора

$$\langle S \rangle = \frac{1}{t'} \int_0^{t'} S dt; \quad S \sim E^2.$$

Усредним (1) по времени

$$\langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2\langle (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \rangle.$$

Умножим это выражение на  $cn/(4\pi)$  и таким образом перейдём к интенсивностям. Получим:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \frac{cn}{4\pi} \langle (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \rangle.$$

По приведённому выше определению интерференция возможна, если

$$I_{12} = 2 \frac{cn}{4\pi} \langle (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \rangle \neq 0. \quad (2)$$

Посмотрим, при каких условиях  $I_{12}$  — интерференционный член будет отличен от нуля.

Монохроматическая волна (бесконечная синусоида), уравнение которой мы ранее использовали, — идеализация. Время излучения отдельных

атомов конечно и является случайной величиной. В реальных (не лазерных) источниках света одновременно и *независимо* излучает множество атомов со случайно распределенными начальными фазами и длительностями излучения. Поэтому для реального оптического излучения характерно «постепенное» изменение начальной фазы  $\delta(t)$  и амплитуды  $E_0(t)$ . Промежуток времени  $\tau_k$ , в течение которого амплитуду и начальную фазу можно считать постоянными, назовём *временем когерентности*. Если  $\tau_k \gg T$  – периода оптических колебаний, то излучение называют *квазимонохроматическим*.

Уравнение квазимонохроматической световой волны можно записать в виде:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0(t) \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \delta(t)),$$

где  $\mathbf{E}_0(t)$  и  $\delta(t)$  не являются константами.

Рассмотрим наложение двух квазимонохроматических волн с одинаковыми частотами

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 E_{01}(t) \cos \varphi_1(t), \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2 E_{02}(t) \cos \varphi_2(t),$$

где  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  – единичные векторы,  $\varphi_1(t) = (\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 + \delta_1(t))$  и  $\varphi_2(t) = (\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2 + \delta_2(t))$  – фазы волн.

Запишем интерференционный член (2)

$$I_{12} = 2 \frac{cn}{4\pi} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \frac{1}{t'} \int_0^{t'} E_{01}(t) E_{02}(t) \cos \varphi_1(t) \cos \varphi_2(t) dt.$$

Воспользуемся формулой для произведения косинусов:

$$\cos \varphi_1(t) \cos \varphi_2(t) = \frac{1}{2} [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = (2\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 + \delta_1(t) + \delta_2(t))$  – будет многократно менять знак за время усреднения и интеграл от этого слагаемого обратится в ноль. Таким образом, для наблюдения интерференции должно выполняться условие:

$$I_{12} = 2 \frac{cn}{4\pi} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \frac{1}{t'} \int_0^{t'} E_{01}(t) E_{02}(t) \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) dt \neq 0.$$

Следовательно, должна быть обеспечена неперпендикулярность колебаний  $E_1$  и  $E_2$ , т. е.  $(e_1 e_2) \neq 0$  и постоянство разности фаз  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = const$ .

Если за время усреднения  $\cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$  многократно меняет знак, то  $I_{12} = 0$  – интерференция не наблюдается. Если изменения  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  происходят согласовано (например, когда частоты колебаний одинаковы и  $\delta_1(t) - \delta_2(t) = const$ ), то интерференция возможна, а колебания называют *когерентными*.

Волны с различными частотами или волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях, заведомо интерферировать не могут.

Рассмотрим сначала идеализированный вариант интерференции монохроматических волн с одинаковыми частотами, а затем выясним, как влияет на интерференцию немонохроматичность излучения.

### Интерференция монохроматических волн

При двухлучевой интерференции монохроматических (амплитуды и начальные фазы постоянны) волн с одинаковыми направлениями колебаний:  $E_1 = E_{01} \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1)$ ,  $E_2 = E_{02} \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2)$ , суммарная интенсивность определится выражением:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1), \quad (3)$$

где  $2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1)$  – интерференционный член,  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  – волновые векторы,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  – радиус-векторы, проведённые от соответствующих источников в точку наложения волн.

В зависимости от разности фаз колебаний  $[(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1) - (\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2)]$

$$-1 \leq \cos(\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1) \leq +1.$$

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2},$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}.$$

Чем больше  $I_{max}$  и меньше  $I_{min}$ , тем заметнее интерференция. Качество интерференционной картины, её заметность характеризуется *функцией видимости*

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}; \quad 0 \leq V \leq 1.$$

Очевидно, функция видимости максимальна, когда  $I_1 = I_2 = I_0$ . В этом случае  $I_{max} = 4I_0$ ,  $I_{min} = 0$ . При отсутствии интерференции  $I = 2I_0$ .

В большинстве используемых интерференционных схем обеспечивается равенство интенсивностей когерентных волн. В этом случае (3) запишется в виде:

$$I = 2I_0(1 + \cos(\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_1\mathbf{r}_1)). \quad (4)$$

Если обе волны распространяются в одной среде, то  $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = 2\pi/\lambda$ .

Тогда разность фаз колебаний:  $(\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_1\mathbf{r}_1) = 2\pi\Delta/\lambda$ ,  
где  $\Delta = r_2 - r_1$  – разность хода лучей.

$$I_{max} = 4I_0 \text{ при } \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \pm 2m\pi, \quad I_{min} = 0 \text{ при } \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \pm (2m + 1)\pi.$$

Отсюда получим условия:

$$\Delta = \pm m\lambda - \text{для интерференционных максимумов,}$$

$$\Delta = (m + 1/2)\lambda - \text{для минимумов} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Если же одна из волн распространяется в среде с показателем преломления  $n_1$ , а другая – в среде с показателем  $n_2$ , то в этом случае разность фаз

$$(\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_1\mathbf{r}_1) = 2\pi\left(\frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1}\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(r_2n_2 - r_1n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta_{\text{опт}},$$

где  $r_1n_1$  – оптический путь первого луча,  $r_2n_2$  – оптический путь второго луча,  $\Delta_{\text{опт}}$  – оптическая разность хода лучей,  $\lambda_0$  – длина волны света в вакууме.

Тогда условия интерференционных максимумов и минимумов запишутся в следующем виде:

$$(\text{max}) - \Delta_{\text{опт}} = \pm m\lambda_0; \quad (\text{min}) - \Delta_{\text{опт}} = (m + 1/2)\lambda_0. \quad (5)$$

$m$  – целое число, которое называют *порядком интерференции*.

Если рассмотреть отношение  $m = \Delta/\lambda$ , то оно показывает, сколько длин волн укладывается в разности хода. Если это отношение – целое число, то

будет максимум интерференции. Если «полуцелое» – будет минимум. Если нечто промежуточное – будет некая «промежуточная» интенсивность, также определяемая формулой (4).

Различные реальные источники излучают свет независимо друг от друга, и их излучение является некогерентным. Поэтому, для наблюдения интерференции поступают следующим образом. Излучение одного источника с помощью различных оптических приспособлений делят на два пучка. Эти пучки затем сводят в одну область пространства, где они накладываются и интерферируют. В настоящее время известно множество интерференционных схем, построенных таким образом.

Рассмотрим для примера схему с бипризмой Френеля, которая представлена на рисунке 1.

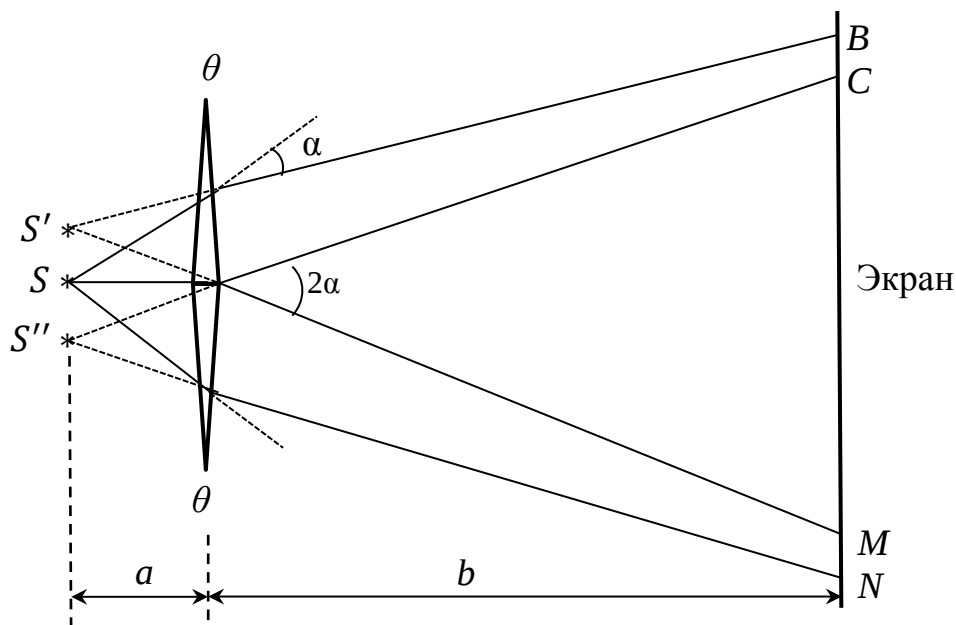


Рис. 1. Интерференционная схема с бипризмой Френеля.

Две призмы с малыми преломляющими углами  $\theta$  склеены основаниями. Источник  $S$  представляет собой светящуюся нить (или щель), перпендикулярную плоскости рисунка. Для малых преломляющих углов  $\varphi$  (когда  $\sin\varphi \approx \varphi$ ) угол отклонения луча призмой  $\alpha$  не зависит от угла падения и определяется выражением:

$$\alpha = \theta(n - 1), \quad (6)$$

где  $n$  — показатель преломления стекла призмы; угол  $\theta$  задаётся в радианах.

Лучи из источника  $S$ , падающие на верхнюю половину бипризмы, будут отклоняться вниз на угол  $\alpha$ . Эти лучи будут приходить в область  $BM$  экрана и как бы исходить из мнимого источника  $S'$ . Лучи падающие на нижнюю половину бипризмы будут приходить в область  $CN$  экрана и как бы исходить из мнимого источника  $S''$ .

Таким образом, бипризма обеспечивает деление волнового фронта излучения источника  $S$  на два когерентных пучка. В области перекрытия этих пучков  $CM$  будет наблюдаться интерференция. На экране увидим систему параллельных светлых и тёмных полос, перпендикулярных плоскости рисунка. Область перекрытия когерентных пучков называется *полем интерференции*.

Множество различных интерференционных схем сводится к задаче с двумя когерентными источниками и экраном, где наблюдается интерференция. Решим такую задачу.

Задача 1. На рисунке 2  $S_1$  и  $S_2$  — когерентные источники одинаковой интенсивности в виде тонких светящихся нитей (перпендикулярных плоскости рисунка), расстояние между которыми обозначим  $2l$ . Параллельно светящимся нитям, на расстоянии  $D$  от них располагается экран, на котором наблюдается интерференционная картина. Найти распределение интенсивности на экране и ширину интерференционных полос.

Решение. Для произвольной точки  $P$  экрана разность хода лучей  $\Delta = r_2 - r_1$ .

Из рисунка видно, что  $r_2^2 = D^2 + (h + l)^2$ ,  $r_1^2 = D^2 + (h - l)^2$ . Откуда следует:  $r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1) \cdot (r_2 + r_1) = \Delta(r_2 + r_1) = 4hl$ .

Обычно размер интерференционной картины невелик,  $h \ll D$ , кроме того  $2l \ll D$ , поэтому можем положить  $(r_2 + r_1) = 2D$ . Тогда для разности хода получим:

$$\Delta = 2l \cdot h/D.$$

Подставляя это выражение в формулу (4), получим распределение интенсивности в зависимости от координаты экрана

$$I = 2I_0[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2l \cdot h}{D}\right)].$$

Координаты интерференционных максимумов найдём из условия  $\Delta = 2l \cdot h/D = \pm m\lambda$ .

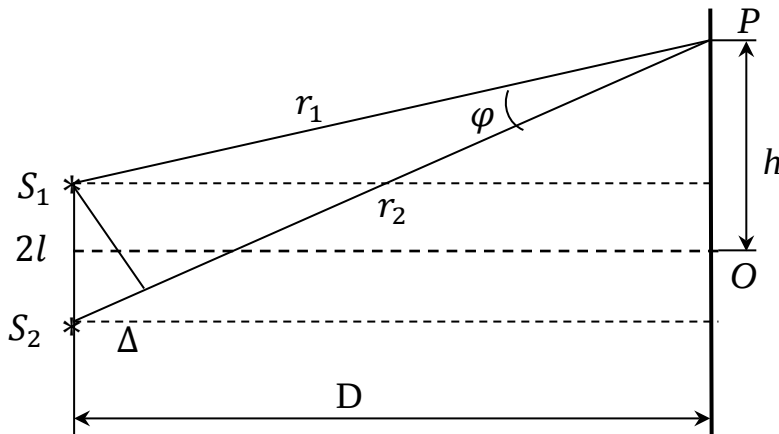


Рис. 2. Интерференционная схема с двумя когерентными источниками.

$$h_{max} = mD\lambda/2l. \quad (7)$$

Расстояние между соседними максимумами (или минимумами) называется *шириной интерференционной полосы*

$$\delta h = D\lambda/2l. \quad (8)$$

Сделаем оценку. Зададим  $D = 0,4$  м;  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м. Если мы хотим, чтобы ширина интерференционных полос была хотя бы 2 мм, то из (8) получим необходимое расстояние между когерентными источниками  $2l = 0,1$  мм.

Задача 2. Расстояние от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана равны соответственно  $a = 25$  см и  $b = 100$  см. Бипризма стеклянная с преломляющим углом  $\theta = 20'$ . Найти ширину  $\delta h$  и число интерференционных полос  $N$ , наблюдаемых на экране. Показатель преломления стекла бипризмы  $n = 1,5$ , длина волны света  $\lambda = 0,6$  мкм.

Решение. Из (8) следует:  $\delta h = D\lambda/2l$ , где  $D=a+b$  (см. рис. 1).

По условию задачи угол  $\theta$  мал. Малы и углы отклонения лучей бипризмой  $\alpha$  (см. (6)). Поэтому можем записать:  $2l = 2\alpha \cdot a = 2a\theta(n-1)$ .

Таким образом, получим:

$$\delta h = \lambda(a+b)/2a\theta(n-1).$$

Протяжённость участка  $CM$  экрана (см. рис. 3), на котором наблюдается интерференция  $CM = \Delta h = 2b\alpha = 2b\theta(n-1)$ .

Число полос интерференции  $N$ , наблюдаемых на экране определится из отношения

$$N = \frac{\Delta h}{\delta h} = \frac{4ab\theta^2(n-1)^2}{\lambda(a+b)}.$$

Задача 3. Плоская световая волна падает нормально на диафрагму с двумя узкими параллельными щелями, отстоящими друг от друга на  $2l = 2,5$  мм. На экране, расположенном за диафрагмой на расстоянии  $D = 100$  см, образуется система интерференционных полос. На какое расстояние и в какую сторону сместятся эти полосы, если одну из щелей перекрыть стеклянной пластинкой толщиной  $x = 100$  мкм. Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .

Решение. Интерференционная схема аналогична рис. 2, т. к. щели играют роль когерентных источников. До размещения стеклянной пластинки, в точке  $O$  экрана должен наблюдаться максимум нулевого порядка  $m = 0$ , т. к. расстояния от обоих источников до точки  $O$  одинаковы. Если одну из щелей перекрыть стеклянной пластинкой, то оптический путь луча от щели до точки  $O$  изменится на величину  $x(n-1)$ .

Действительно, слой воздуха толщиной  $x$  и показателем преломления равным единице заменили стеклом той же толщины с показателем преломления  $n = 1,5$ . На эту же величину изменится разность хода лучей в точке  $O$ :

$$\Delta = x(n-1).$$

Порядок интерференции в точке  $O$  станет равным  $m = x(n - 1)/\lambda$ .

Подставив это значение  $m$  в формулу (7), найдём смещение интерференционной картины

$$h = x(n - 1)D/2l.$$

Максимум нулевого порядка интерференционной картины сместится в сторону перекрытой щели, так, чтобы времена распространения волн от обоих источников до точки экрана были одинаковы.

### Влияние размера источника на интерференцию

Рассмотрим схему *опыта Юнга* (рис. 3). Свет от бесконечно тонкой светящейся нити  $S$  падает на диафрагму с двумя узкими параллельными щелями, которые делят волновой фронт на два когерентных пучка. На расстоянии  $D$  от диафрагмы находится экран. В точке  $P$  экрана будет наблюдаться максимум нулевого порядка и симметрично относительно него – максимумы  $\pm 1$ -го,  $\pm 2$ -го, ..., и. т. д. порядка. Если мы сместим источник в положение  $S'$ , то интерференционная картина также сместится, а максимум нулевого порядка окажется в точке  $P'$ .

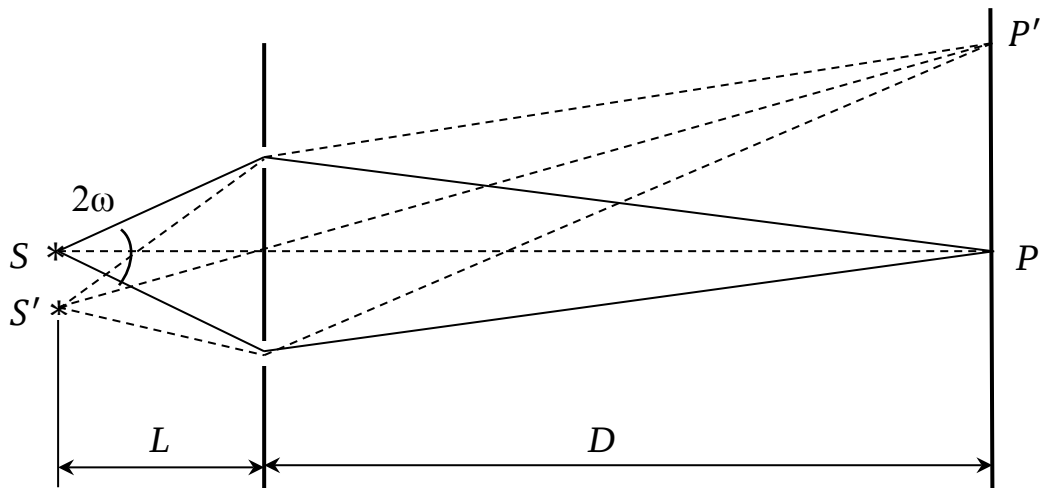


Рис. 3. Схема опыта Юнга.

Представим теперь, что источник не бесконечно тонкая нить, а светящаяся полоска  $SS'$  шириной  $2d$ . Различные точки такого реального неточечного источника излучают независимо. Интерференционная картина на экране

будет представлять собой наложение множества интерференционных картин от различных точек источника, сдвинутых друг относительно друга. По мере увеличения размера источника максимальный сдвиг будет увеличиваться, максимумы одних интерференционных картин будут накладываться на минимумы других и видимость суммарной картины будет ухудшаться.

В оптике принято считать хорошей видимость  $V \geq 2/3$ . Анализ различных интерференционных схем позволил установить условие хорошей видимости для протяжённых источников:

$$2d \cdot \operatorname{tg} \omega \leq \lambda/4, \quad (9)$$

где  $2d$  – размер источника,  $\omega$  – половина угла апертуры интерференции.

Углом апертуры интерференции называют угол между лучами, исходящими из источника, которые затем сходятся в той или иной точке пространства и могут интерферировать (см., например,  $2\omega$  на рис. 3).

Задача 4. На диафрагму с двумя узкими параллельными щелями падают лучи непосредственно от Солнца  $S$ . При каком расстоянии  $2l$  между щелями, на экране, установленном за диафрагмой, будут наблюдаться интерференционные полосы? Угловой размер Солнца  $\alpha \approx 0,01$  рад.

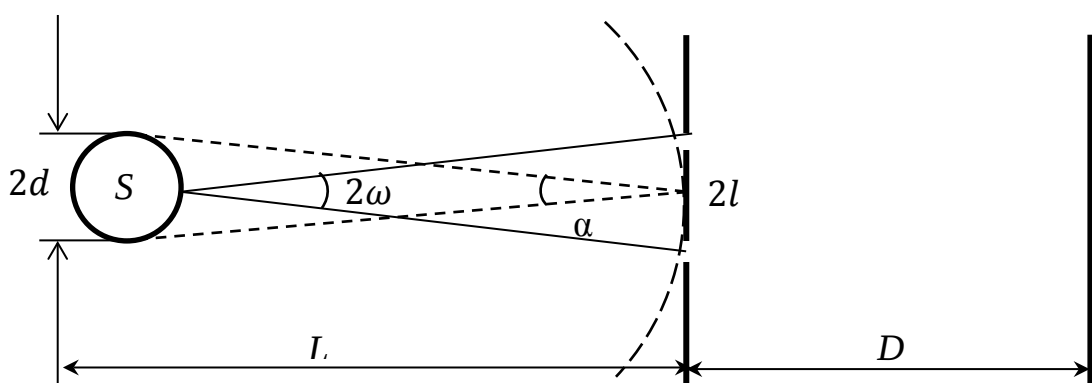


Рис. 4. Схема наблюдения интерференции. Источник света – Солнце.

Решение. Из рисунка 4 видно, что  $tg\omega = l/L$ . Подставим это выражение в условие хорошей видимости для протяжённого источника  $2d \cdot l/L \leq \lambda/4$ . Учитывая, что  $2d/L = tg\alpha \approx \alpha$ , получим оценку:  $2l \leq \lambda/2\alpha$ .

Две щели диафрагмы при наблюдении интерференции являются когерентными источниками. Они возбуждаются волновым фронтом излучения Солнца. Если начать увеличивать расстояние  $2l$  между ними, то видимость интерференционной картины начнёт ухудшаться. Это происходит из-за неточности, конечного размера источника (в данном случае Солнца).

Различные точки реального источника излучают независимо друг от друга. По мере увеличения расстояния между точками суммарного волнового фронта согласованность, когерентность колебаний в этих точках ухудшается. Поэтому излучение реального источника имеет ограниченную *пространственную когерентность*. Размер области пространственной когерентности, в пределах которой колебания в достаточной мере согласованы, можно определить как

$$\rho = 2l \leq \lambda/\alpha, \text{ где } \alpha - \text{угловой размер источника.}$$

### **Влияние немонохроматичности излучения на интерференцию**

Как уже указывалось, монохроматическое излучение, т. е. бесконечная синусоида, у которой амплитуда и начальная фаза константы, является идеализацией. Реальные источники излучают немонохроматический свет (в лучшем случае – квазимонохроматический).

Квазимонохроматическую волну  $E(t) = E_0(t)\cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \delta(t))$  (у которой  $E_0(t) \neq const$ ,  $\delta(t) \neq const$ ) можно смоделировать в виде суперпозиции монохроматических волн с различными частотами и амплитудами. На практике этому соответствует разложение исследуемого излучения в спектр с помощью монохроматора, спектрометра или интерферометра.

*Под спектром или спектральным распределением* обычно понимают совокупность монохроматических волн (колебаний) с различными амплиту-

дами и частотами (или длинами волн), с помощью которых можно смоделировать исследуемое излучение.

На рисунке 5 представлены различные виды спектров: а) монохроматического излучения (дельта-функция); б) дискретный спектр (например, звуковых колебаний); в) непрерывный спектр ( $i(\omega)$  — плотность интенсивности,  $I = \int i(\omega)d\omega$ ).

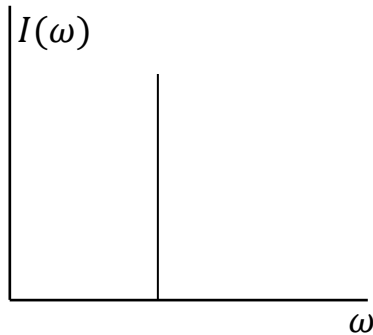


Рис. 5а.

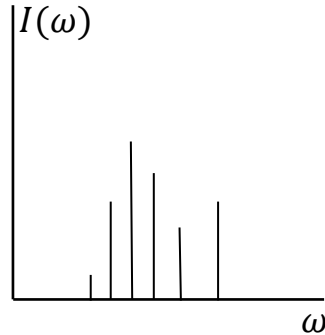


Рис. 5б.

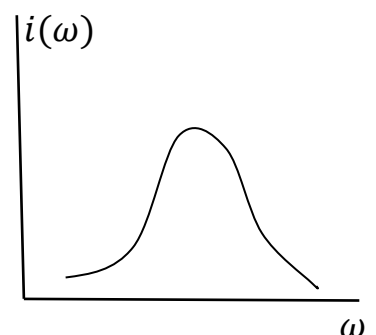


Рис. 5в.

Немонохроматичность (квазимонохроматичность) излучения реальных источников приводит к ухудшению видимости интерференционной картины, уменьшению числа наблюдаемых интерференционных полос.

Пусть источник излучает свет в интервале длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$  ( $\Delta\lambda$  — ширина спектрального интервала). Интерференционные картины, соответствующие разным длинам волн, будут сдвинуты друг относительно друга. В соответствии с (7) эти сдвиги будут увеличиваться с ростом порядка интерференции  $m$ . Для некоторого порядка следует ожидать настолько большого сдвига, что суммарная интерференционная картина будет неразличима. Таким образом, следует ожидать, что немонхроматичность излучения приведёт к ограничению наблюдаемого порядка интерференции.

Сделаем количественные оценки. Пусть максимум порядка  $m$  для длины волны  $\lambda + \Delta\lambda$  совпадает с максимумом порядка  $m + 1$  для длины волны  $\lambda$ . Тогда максимумы порядка  $m$  для всех промежуточных длин волн между  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$  сплошь заполнят участок (минимум) между максимумами порядка

$m$  и  $m + 1$  для длины волны  $\lambda$ . В результате интерференционная картина, начиная с максимума порядка  $m$ , не будет наблюдаться.

Приравняем координаты интерференционных максимумов

$$h_{max} = (m + 1) \frac{D\lambda}{2l} \text{ и } h_{max} = m \frac{D(\lambda + \Delta\lambda)}{2l}.$$

Условие неразличимости полос:  $(m + 1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda)$ . Откуда получим ограничение порядка интерференции:

$$m_{max} \leq \lambda / \Delta\lambda. \quad (10)$$

Максимальная разность хода интерферирующих лучей:

$$\Delta_{max} \leq \lambda^2 / \Delta\lambda. \quad (11)$$

*Таким образом, некогерентность излучения, конечное время когерентности  $\tau_k$  накладывают ограничения на максимальную разность хода и максимальный порядок интерференции.*

Задача 5. В схеме опыта Юнга источник света состоит из лампы накаливания и светофильтра, пропускающим свет в интервале  $0,48 - 0,52$  мкм. Сколько примерно интерференционных полос можно наблюдать на экране?

Решение. Подставляя данные задачи в формулу (10), получим оценку:

$$m \leq \frac{0,5}{(0,52 - 0,48)} = 12,5.$$

Число наблюдаемых интерференционных полос

$$N = 2m + 1 = 2 \cdot 12 + 1 = 25 \text{ полос.}$$

### **Спектральный состав излучения источников света**

Наиболее приближенным к монохроматическому является излучение одноатомных разреженных газов. Такие «изолированные» атомы излучают независимо друг от друга в течение малого промежутка времени  $\tau \leq 10^{-8}$  с. Простейшая модель такого излучения – последовательность одинаковых световых импульсов, которые можно представить как обрывки синусоид.

Зафиксируем некоторую точку пространства, через которую распространяется наши световые импульсы длительностью  $\tau$ . Тогда от уравнения волны можно перейти к уравнению колебаний ( $\mathbf{kr}=\text{const}$ ):

$$E(t) = \begin{cases} 0 & (-\infty < t < 0) \\ E_0 e^{i\omega_0 t} & (0 < t < \tau) \\ 0 & (\tau < t < \infty) \end{cases}$$

( $E_0$  – амплитуда,  $\omega_0$  – частота излучения светового импульса)

Представим  $E(t)$  как суперпозицию монохроматических волн с различными частотами и амплитудами, т. е. представим в виде *интеграла Фурье*.\*)

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где  $E(\omega)$  – непрерывная функция частоты, называемая *спектральная плотность*.  $E(\omega)d\omega$  – определяет вклад в  $E(t)$  монохроматических составляющих в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

$E(\omega)$  можно найти с помощью обратного преобразования

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt. \\ E(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} E_0 e^{-i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{E_0}{2\pi} \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} - 1}{i(\omega_0 - \omega)} = \\ &= \frac{E_0 \tau}{2\pi} e^{i(\omega_0 - \omega)\tau/2} \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)\tau/2} - e^{-i(\omega_0 - \omega)\tau/2}}{2i(\omega_0 - \omega)\tau/2}; \\ E(\omega) &= \frac{E_0 \tau}{2\pi} e^{i(\omega_0 - \omega)\tau/2} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\tau/2]}{(\omega_0 - \omega)\tau/2}. \end{aligned}$$

Перейдём к спектральной плотности энергии

$$i(\omega) \sim |E(\omega)|^2 = E(\omega) \cdot E^*(\omega);$$

\*) Практически любую используемую в физике функцию можно представить в виде интеграла Фурье. Для этого она должна быть кусочно-непрерывна, иметь конечное число экстремумов и быть абсолютно интегрируемой в интервале  $(-\infty, +\infty)$ .

$$i(\omega) \sim \left\{ \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\tau/2]}{(\omega_0 - \omega)\tau/2} \right\}^2.$$

Введём обозначение  $u = (\omega_0 - \omega)\tau/2$ .  $i(\omega) \sim \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2$ .

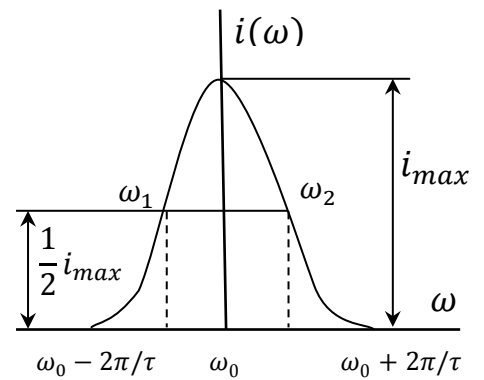
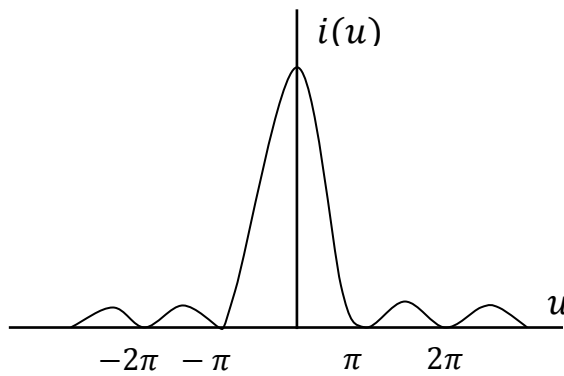
При  $u \rightarrow 0$ :  $\lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{\sin u}{u} \right) = 1$  – будет наблюдаться максимум.

$\min$  при  $\begin{cases} \sin u = 0 \\ u \neq 0 \end{cases}$  т.е. минимумы будут наблюдаться при  $u = \pm m\pi$ .

Построим график функции  $i(u)$ .

Интенсивность в центральном максимуме составляет 95% всей интенсивности.

Построим график зависимости  $i(\omega)$  для центрального максимума. Этот график даёт представление о, так называемом, *контуре спектральной линии*.



В оптике в качестве характеристики монохроматичности света используют ширину распределения  $i(\omega)$  на половине высоты этого распределения (полуширину)  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ .

$$\left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 = \frac{1}{2} \text{ при } |u| = 1,39 \approx 1,4.$$

Таким образом,  $u_2 = \frac{(\omega_0 - \omega_2)\tau}{2} = -1,4$ ;  $u_1 = \frac{(\omega_0 - \omega_1)\tau}{2} = 1,4$ .

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{2,8}{\tau}; \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{2,8}{\tau}; \quad \Delta\omega = 5,6/\tau.$$

В качестве оценки используют соотношение

$$\Delta\omega \cdot \tau = 2\pi, \quad \text{или} \quad \Delta\nu \cdot \tau = 1.$$

Таким образом, ширина спектрального интервала обратно пропорциональна длительности светового импульса  $\tau$ .

При  $\Delta\omega \ll \omega$  — излучение называют квазимонохроматическим.

Для атомов одноатомного разреженного газа характерно среднее время излучения  $\tau \approx 1 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ . Тогда  $\Delta\omega \approx 6 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ . В шкале длин волн этому соответствует ширина интервала  $\Delta\lambda \sim 10^{-5} \text{ нм}$  — естественная ширина спектральной линии (обусловлена естественным, т. е. самопроизвольным обрывом колебаний).

Столкновения атомов приводят к преждевременному прекращению излучения, т. е. уменьшению  $\tau$ . Для одноатомного газа при атмосферном давлении  $\Delta\lambda_{\text{ст}} \sim 10^{-3} \text{ нм}$ .

Другая причина уширения спектральных линий — эффект Доплера. Спектр излучения движущегося атома в лабораторной системе отсчёта сдвинут по частоте, причём знак сдвига (+ или -) зависит от направления движения, а величина сдвига — как от скорости движения атома, так и от направления движения (продольный и поперечны эффект Доплера).

Излучающие атомы в источнике совершают хаотическое движение и результирующее спектральное распределение представляет собой наложение сдвинутых (в сторону больших и меньших частот) друг относительно друга одинаковых распределений. Доплеровская ширина для водорода при комнатной температуре в 500 раз больше естественной ширины, т. е.  $\Delta\lambda_{\text{доп}} \sim 10^{-3} \text{ нм}$ .

Для других реальных (не лазерных) источников света ширина спектра излучения  $\Delta\omega$  (или  $\Delta\lambda$ ) гораздо больше.

### **Степень когерентности излучения**

Как указывалось выше, в случае интерференции квазимонохроматических волн по мере увеличения разности хода  $\Delta$  и порядка интерференции  $m$  ухудшается видимость  $V$  интерференционной картины. Это происходит из-за ухудшения когерентности, согласованности колебаний.

При двухлучевой интерференции квазимонохроматических волн результирующая интенсивность определяется выражением:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot |\gamma(\Delta/c)| \cos(k\Delta + \alpha),$$

где  $\gamma(\Delta/c)$  – комплексная степень когерентности.

Степень когерентности характеризует согласованность колебаний. Модуль степени когерентности  $0 \leq |\gamma(\Delta/c)| \leq 1$ .

В случае полностью когерентных колебаний (идеально монохроматические волны)  $|\gamma(\Delta/c)| = 1$ . Если колебания некогерентные, то  $|\gamma(\Delta/c)| = 0$ . Когда  $0 < |\gamma(\Delta/c)| < 1$  – говорят о *частично когерентных колебаниях*.

Экспериментальное определение функции  $|\gamma(\Delta/c)|$  для исследуемого излучения можно провести с помощью, например, *интерферометра Майкельсона*.

Схема интерферометра представлена на рисунке 6.

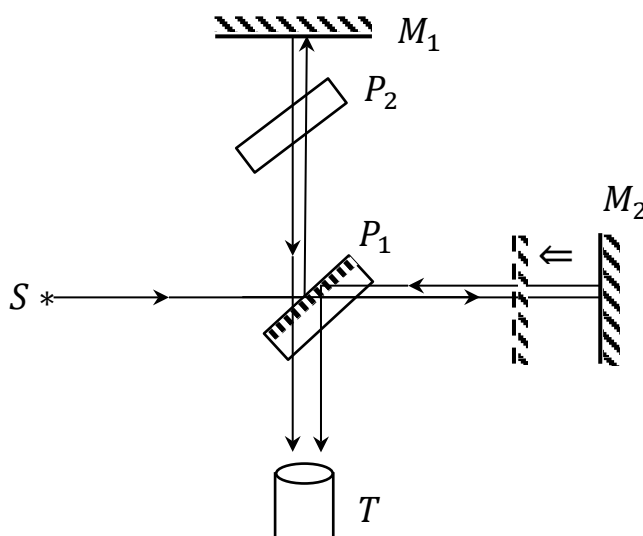


Рис. 6. Схема интерферометра Майкельсона.

Два плоских зеркала  $M_1, M_2$  укреплены на массивном основании перпендикулярно друг другу.  $M_2$  может передвигаться, оставаясь перпендикулярным  $M_1$ .  $P_2$  – плоскопараллельная стеклянная пластинка.  $P_1$  – плоскопараллельная стеклянная пластинка с зеркальным напылением и

коэффициентом отражения  $R = 0,5$ .  $T$  – зрительная труба или фотоэлемент,  $S$  – квазимонохроматический источник света.

Интерференционная картина представляет собой концентрические светлые и темные кольца. Она наблюдается в зрительную трубу или регистрируется фотоэлементом. Поскольку коэффициент отражения зеркальной пластинки  $P_1$   $R = 0,5$ , интенсивности интерферирующих лучей  $I_1 = I_2$ . При

разности хода лучей  $\Delta = 0$  это обеспечивает видимость интерференции  $V = 1$ , т. е. наблюдается полная когерентность излучения.

При перемещении  $M_2$  и увеличении разности хода видимость  $V$  интерференционных полос будет постепенно ухудшаться и при некотором значении  $\Delta > c\tau_k$  интерференционная картина станет плохо различимой, следовательно, нарушится когерентность колебаний.

Вернёмся к нашей модели квазимонохроматического излучения. Это излучение можно представить в виде последовательности световых импульсов длительностью  $\tau_k$ . В процессе излучения каждого импульса амплитуда и начальная фаза остаются неизменными, но изменяются случайным образом, скачком при переходе от одного светового импульса к другому. Световые импульсы идут последовательно друг за другом. С помощью полупрозрачного зеркала  $P_1$  каждый световой импульс делится на два тождественных, то есть когерентных импульса одинаковой амплитуды.

При  $\Delta \neq 0$  один тождественный световой импульс будет в точке наблюдения запаздывать относительно другого. Если время запаздывания  $t_3 = \Delta/c$  превысит время когерентности, то в точке наблюдения будут накладываться «чужие» световые импульсы. У них разные начальные фазы, причём *разность начальных фаз изменяется случайным образом* при переходе от одной пары нетождественных световых импульсов к последующей. Таким образом, при  $t_3 = \Delta/c > \tau_k$  — интерференция наблюдаться не будет, т. к. колебания становятся некогерентными

При  $t_3 = \Delta/c < \tau_k$  будут наблюдаться *частично когерентные колебания*. Видимость  $V$  интерференционной картины в этом случае будет хуже, чем при использовании идеально монохроматических источников (т. е. при  $\tau_k = \infty$ ).

Поскольку  $I_1 = I_2$  функция видимости  $V = |\gamma(\Delta/c)|$ . Таким образом, изменяя  $\Delta$  и регистрируя  $I_{max}$  и  $I_{min}$ , можно установить зависимость  $|\gamma(\Delta/c)|$ . По характеру этой зависимости можно судить о физических процессах в источнике света. Можно определить и время когерентности как  $\tau_k = \Delta/c$ , где  $\Delta$  — разность хода лучей, при которой видимость  $V = 2/3$ .

## Полосы равной толщины и полосы равного наклона

Во всех рассмотренных выше интерференционных схемах для получения когерентных волн использовался так называемый метод деления волнового фронта. Рассмотрим теперь схемы, построенные по «методу деления амплитуды». В этом случае когерентные волны образуются при отражении света от поверхностей прозрачных пластин и плёнок.

На рис. 7 луч 1 падает на плоскопараллельную прозрачную пластинку толщиной  $b$  с показателем преломления  $n$ . Допустим в общем случае, что среда над пластинкой имеет показатель преломления  $n_1$ , а среда под пластинкой – показатель  $n_2 \neq n_1$ . Лучи 2 и 3 возникают в результате отражения луча 1; они имеют *примерно одинаковую интенсивность*.

Пусть 1 – монохроматическая волна. Тогда параллельные лучи 2 и 3 когерентны при любой разности хода  $\Delta$  между ними. Линза  $L$  сводит лучи 2 и 3 в одну точку пространства (в фокальной плоскости линзы), где они интерферируют. Результат интерференции будет зависеть от  $\Delta$ . (Следует отметить, что линза  $L$  не вносит дополнительную разность хода между лучами 2 и 3.)

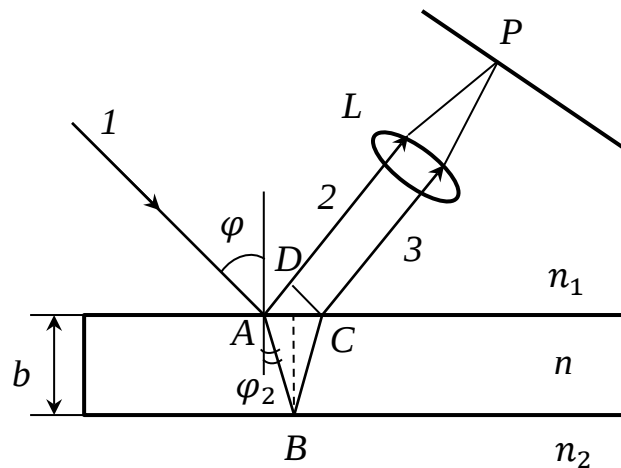


Рис. 7. Интерференция по методу деления амплитуды.

Найдём оптическую разность хода между лучами 2 и 3. Из рисунка следует:

$$\Delta = (AB + BC) \cdot n - AD \cdot n_1. \quad (12)$$

Кроме того, надо учесть, что при отражении от оптически более плотной среды фаза волны скачком меняется на  $\pi$ , что эквивалентно изменению оптического пути луча на  $\lambda/2$  (физики называют это потерей полуволны).

Если изменение фазы на  $\pi$  при отражении происходит только с одним из лучей 2 или 3, то в формулу (11) следует добавить дополнительную разность хода  $\pm\lambda/2$  и записать

$$\Delta = (AB + BC) \cdot n - AD \cdot n_1 \pm \lambda/2. \quad (13)$$

Обратите внимание на знаки  $\pm\lambda/2$ . Вы можете выбрать либо плюс, либо минус по своему усмотрению; на результат интерференции не влияет, опережает ли волна 2 волну 3 или наоборот.

Формула (13) справедлива при  $n > n_1$  и  $n > n_2$  или при  $n < n_1$  и  $n < n_2$ , а формула (12) справедлива при  $n_1 > n > n_2$  или при  $n_1 < n < n_2$ .

Пусть  $n_1 = n_2 = 1$  (например, стеклянная пластинка с показателем преломления  $n$  находится в воздухе). Тогда справедлива формула (13). Учтём, что

$$AB = BC = b/\cos\varphi_2, \quad AD = AC \cdot \sin\varphi = 2btg\varphi_2 \cdot \sin\varphi. \quad (14)$$

Подставим  $AB = BC$  и  $AD$  из (14) в (13), получим:

$$\Delta = 2bncos\varphi_2 \pm \lambda/2. \quad (15)$$

В точке  $P$  будет наблюдаться интерференционный максимум, если  $\Delta = m\lambda$ , т. е.

$$2bncos\varphi_2 \pm \lambda/2 = m\lambda, \quad (max) \quad (16)$$

и минимум, если  $\Delta = (m + 1/2)\lambda$ , т. е.

$$2bncos\varphi_2 = m\lambda. \quad (min) \quad (17)$$

Если же за исходную взять формулу (12), а не (13), то условия максимумов и минимумов поменяются местами. Это следует учитывать при решении конкретных задач.

Интерференционные полосы (максимумы и минимумы) будут наблюдаться при изменении  $\Delta$ . Как видно из (15), изменять  $\Delta$  можно, варьируя  $\varphi$

или  $b$  (изменять  $n$  монотонным образом сложно). Если зафиксировать  $b$  (т. е. строго плоскопараллельная пластинка) и варьировать угол падения  $\varphi$ , то получим интерференционные *полосы равного наклона*. Если  $\varphi = \text{const}$  (т. е. на пластинку падает плоскопараллельный пучок лучей), а толщина пластинки изменяется, то получим интерференционные *полосы равной толщины*.

### Полосы равного наклона

Схема опыта по наблюдению полос равного наклона приведена на рис. 8.

Протяжённый источник освещает плоскопараллельную прозрачную пластинку. Из каждого луча, падающего на пластинку, в результате отражений возникает два параллельных луча, которые линза  $L$  сводит в одну точку в фокальной плоскости. Результат интерференции каждой такой пары когерентных лучей определяется разностью хода  $\Delta$  и длиной волны  $\lambda$ . Угол падения луча на пластинку  $\varphi$  однозначно связан с положением точки  $P$  в фокальной плоскости линзы, где происходит интерференция. Одинаковым углам падения соответствуют одинаковые  $\Delta$ , т. е. одинаковые условия интерференции. Поэтому интерференционные полосы, наблюдаемые в фокальной плоскости линзы, называют полосами равного наклона.

Перемещение источника не влияет на интерференционную картину полос равного наклона.

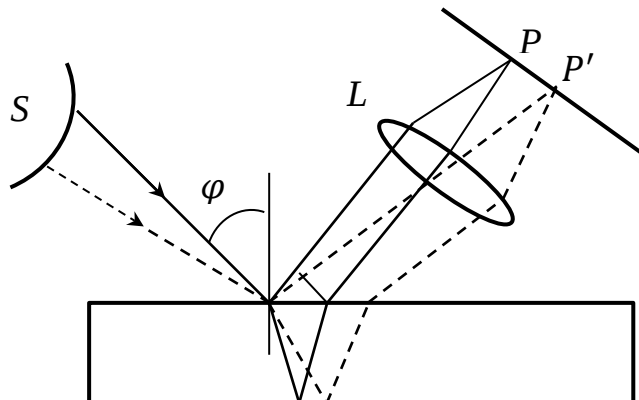


Рис. 8. Наблюдение интерференции полос равного наклона.

Каждая точка источника даёт свою интерференционную картину. Однако положение интерференционных минимумов и максимумов в данной схеме зависит только от углов падения  $\varphi$ . Интерференционные картины от разных точек источника будут совпадать. В фокальной плоскости линзы  $L$  произойдёт наложение множества совершенно одинаковых интерференционных картин. Поэтому видимость суммарной интерференционной картины полос равного наклона не зависит от размера источника.

К такому же выводу можно прийти и из анализа условия хорошей видимости для протяжённого источника (9). Как видно из рис. 6, угол апертуры  $2\omega = 0$  (из каждой точки источника выходят как бы два луча в одном направлении, которые затем разделяются преломляющей поверхностью).

Полосы равного наклона наблюдаются строго в определённой области. Поэтому интерференционная картина называется локализованной.

Полосы равного наклона можно наблюдать и без линзы  $L$  и экрана. Роль линзы будет играть хрусталик глаза.

### **Полосы равной толщины**

Возьмём прозрачную пластинку в виде клина с малым углом при вершине  $\alpha$ . Пусть на неё падает параллельный пучок лучей. Теперь лучи, отразившиеся от разных поверхностей пластинки, не будут параллельными. Допустим, свет монохроматический и поэтому интерференция наблюдается при любой разности хода.

В опытах по наблюдению интерференции полос равной толщины обычно используются протяжённые источники. Интерференционную схему с пластинкой переменной толщины рисуют так, как представлено на рис. 7.

При достаточно далёком расположении источника света по сравнению с размерами участка клина, на котором наблюдается интерференция, углы падения лучей на поверхность клина  $\varphi \approx \text{const}$  и разность хода  $\Delta$  будет зависеть только от толщины пластинки. Одинаковым толщинам  $b$  будут соот-

ветствовать одинаковые условия интерференции (отсюда и название «полосы равной толщины»). Интерференционная картина будет локализована вблизи поверхности клина. Если поверхности клина идеально плоские, то интерференционная картина будет представлять собой прямые светлые и тёмные полосы, параллельные ребру клина, проходящему через точку  $O$ .

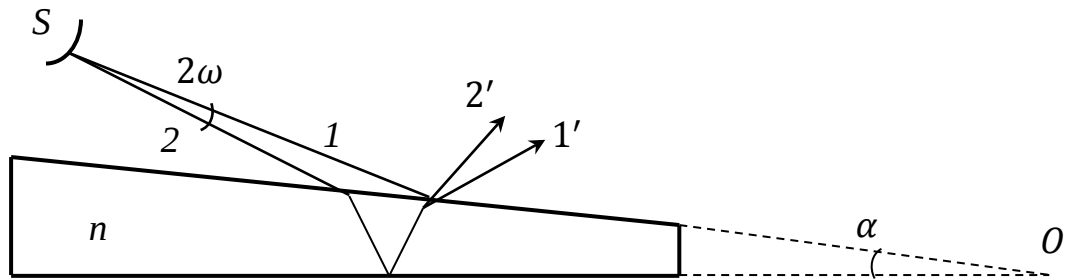


Рис. 9. Локализация полос равной толщины в случае протяжённого источника.

Апертура интерференции  $2\omega$  увеличивается с ростом угла падения  $\varphi$  (см. рис. 9). При использовании протяжённых источников желательно уменьшить  $2\omega$ . Поэтому в схеме колец Ньютона (частный случай полос равной толщины) используют нормальное ( $\varphi = 0$ ) падение света.

В очень тонких плёнках интерференция может наблюдаться и в белом свете. При этом возникают цветные полосы. Пусть в некотором месте толщина плёнки такова, что разность хода  $\Delta$  равна  $\lambda$  для красных лучей с длиной волны  $0,70$  мкм. Тогда этим лучам соответствует интерференционный максимум. Все другие лучи в видимой области ( $0,4 - 0,76$  мкм) более или менее ослабятся также вследствие интерференции. Таким образом, данное место плёнки приобретёт красную окраску в отражённом свете. Допустим, некоторая плёнка имеет на одном участке постоянную толщину  $b_1$ , а на другом участке – также постоянную толщину  $b_2$ . Тогда при освещении плёнки белым светом эти участки будут казаться по-разному окрашенными. Такая окрашенность, вызванная интерференцией отражённых лучей, носит название цветов тонких плёнок. Цвета тонких плёнок наблюдаются при рассмат-

ривании мыльных плёнок, тонких плёнок масла на поверхности воды, плёнок окислов на поверхности металлов.

Задача 6. Свет с длиной волны  $\lambda$  от удалённого точечного источника падает нормально на поверхность стеклянного клина. В отражённом свете наблюдают систему интерференционных полос. Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ . Расстояние между соседними максимумами  $\delta h = 0,21$  мм. Найти: а) угол  $\alpha$  между гранями клина; б) степень монохроматичности света  $(\Delta\lambda/\lambda)$ , если исчезновение интерференционных полос наблюдается на расстоянии  $x = 1,5$  см от вершины клина.

Решение. По условию задачи  $\varphi = 0$ . Поэтому для интерференционных максимумов порядка  $m$  и  $(m + 1)$  можно записать:

$$\begin{cases} 2b_{m+1}n \pm \lambda/2 = (m + 1)\lambda; \\ 2b_m n \pm \lambda/2 = m\lambda. \end{cases}$$

Вычитая из верхнего уравнения нижнее, получим:  $2(b_{m+1} - b_m)n = \lambda$ .

Как видно из рис. 10,  $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = (b_{m+1} - b_m)/\delta h$ . Таким образом,  $\alpha = \lambda/2n\delta h$ .

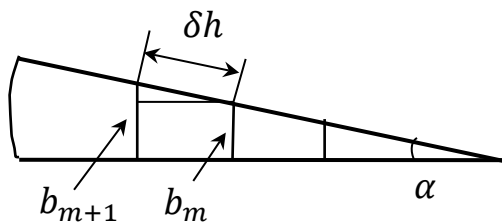


Рис. 10.

Степень монохроматичности света можем найти из условия (10).

В нашей задаче  $m_{\max} = x/\delta h$ . Отсюда следует:  $\Delta\lambda/\lambda = \delta h/x$ .

Задача 7. Кольца Ньютона можно получить, если плосковыпуклую стеклянную линзу прижать выпуклой поверхностью к плоскопараллельной стеклянной пластинке. При наблюдении интерференции в отражённом синем свете ( $\lambda_c = 450$  нм) радиус третьего светлого кольца оказался равным  $r_3 = 1,06$  мм. После замены синего светофильтра на красный радиус пятого

светлого кольца оказался равным  $r_5 = 1,77$  мм. Найти радиус кривизны  $R$  линзы и длину волны красного света  $\lambda_{\text{кр}}$ .

Решение. Ход лучей при наблюдении колец Ньютона приведён на рис. 11. От источника  $S$  исходят когерентные лучи 1 и 2. Луч 1 преломляется на нижней поверхности линзы, входит в воздушную прослойку, отражается от верхней поверхности пластинки и опять входит в линзу в точке  $A$ . Дальней-

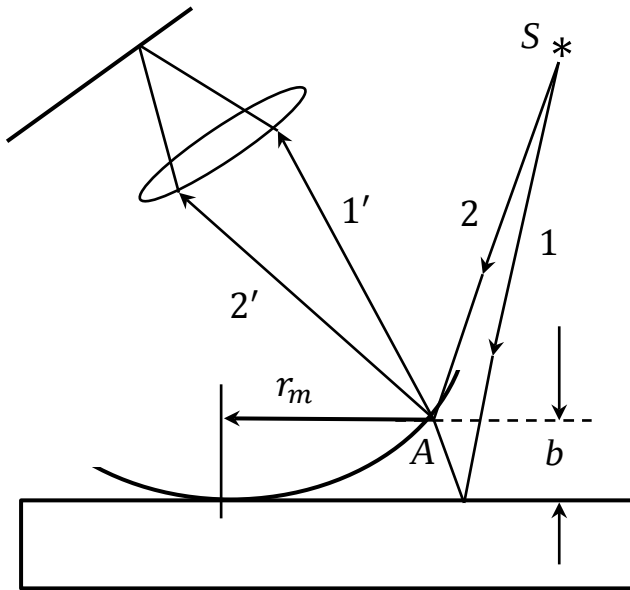


Рис. 11. Ход лучей при наблюдении колец Ньютона.

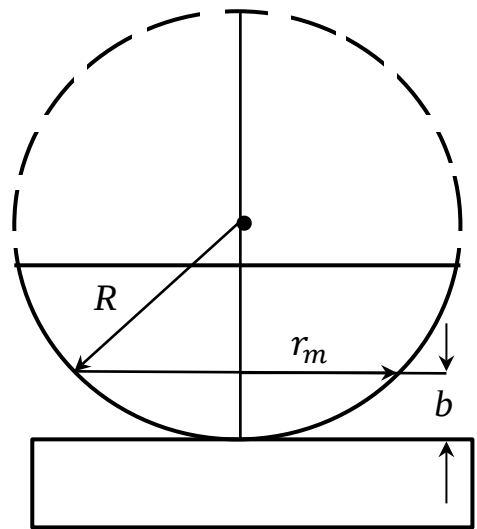


Рис. 12.

ший путь его обозначен  $1'$ . Луч 2, попадающий в точку  $A$ , отражается от нижней поверхности линзы. Его дальнейший ход обозначен  $2'$ . Разность хода лучей, приходящих в точку  $A$ , при условии их нормального падения (см. (15))

$$\Delta = 2bn \pm \lambda/2$$

Здесь  $b$  – толщина воздушной прослойки для данной пары лучей;  $n$  – показатель преломления вещества, образующего клин.

Для светлого интерференционного кольца ( $m$ -го) в точке  $A$  запишем условие (учтём, что в нашем случае  $n = 1$ ):

$$2b + \lambda/2 = m\lambda. \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

Знак плюс перед  $\lambda/2$  выбран, чтобы значение  $m$  соответствовало номеру светлого интерференционного кольца.

Из геометрических соотношений (см. рис. 12)

$$b = r^2/2R. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), получим для квадрата радиуса светлого кольца:

$$r^2 = (m - 1/2)R\lambda.$$

По условиям нашей задачи:  $(r_3)^2 = 2,5R\lambda_c$ , откуда найдём  $R$ .

Используя это значение  $R$  можем найти  $\lambda_{кр} = (r_5)^2/(4,5R)$ .