

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

## КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

### *Колебания и волны. ОПТИКА*

*Физический факультет, направление «Радиофизика»*

*Конспект лекций для подготовки к экзамену*

*студентов 2-курса д/о*

*Часть 3*

Составитель доц. Рисин В. Е.

2015

## **Дифракция света**

*Дифракцией* называют совокупность явлений, возникающих при распространении света в среде с резкими неоднородностями (например, преградами, закрывающими часть волнового фронта), когда происходит отступление от законов геометрической оптики (например, огибание преград).

Между дифракцией и интерференцией нет существенных физических различий. Оба явления заключаются в перераспределении светового потока в результате суперпозиции когерентных волн.

По историческим причинам перераспределение интенсивности в результате суперпозиции волн от конечного числа дискретных источников принято называть интерференцией. Перераспределение интенсивности, возникающее вследствие суперпозиции волн от бесконечной совокупности непрерывно распределённых источников, называют дифракцией.

Дифракция в оптике выражена тем сильнее, чем меньше размеры препятствий и чем больше длина волны. Вообще дифракция наиболее заметна, когда размеры препятствий соизмеримы с длиной волны.

Наблюдение дифракции обычно осуществляется по следующей схеме. На пути световой волны, распространяющейся от некоторого источника, помещается непрозрачная преграда, закрывающая часть волновой поверхности. За преградой располагается экран, на котором наблюдают дифракционную картину.

Различают 2 вида дифракции. *Дифракцию Френеля и дифракцию Фраунгофера.*

Если лучи, падающие на преграду и лучи, интерферирующие за преградой, образуют параллельные пучки – говорят о дифракции Фраунгофера. В остальных случаях говорят о дифракции Френеля. Такое деление связано с особенностями постановки экспериментов и с особенностями расчёта дифракционных картин.

## Принцип Гюйгенса-Френеля

Объяснение дифракции света было впервые сделано Френелем в 1818 г. В соответствии с так называемым принципом Гюйгенса-Френеля *каждая точка пространства, до которой дошёл волновой фронт, становится источником вторичных волн, распространяющихся по различным направлениям. Эти волны когерентны и при расчёте суммарного светового поля за преградой следует учитывать их интерференцию.* Таким образом, при дифракции происходит перераспределение светового потока в результате суперпозиции когерентных волн.

Допустим, имеется бесконечная преграда с отверстием. Излучение от источника падает на эту преграду. Пусть  $S$  – площадь открытой волновой поверхности первичной волны. Выделим на ней бесконечно малый участок  $dS$ . По принципу Гюйгенса-Френеля участок  $dS$  является источником вторичных волн. Запишем уравнение сферической волны, излучаемой элементом  $dS$

$$dE = \frac{a \cdot dS}{r} \cos(\omega t - kr)$$

( $a$  – определяется амплитудой первичной волны в том месте, где находится элемент  $dS$ ). Результирующая вторичная волна в точке наблюдения  $P$  должна представлять собой суперпозицию волн от всех участков открытой волновой поверхности.

Однако когда Френель попытался согласовать результаты расчётов с экспериментом, то пришёл к выводу, что вторичные волны должны быть не вполне сферическими. Их амплитуда должна убывать с ростом угла  $\varphi$  между нормалью к волновому фронту первичной волны в месте расположения элемента  $dS$  и направлением распространения вторичной волны (в точку наблюдения дифракции).

Т. е. для согласования расчётов с экспериментами необходимо ввести некоторый множитель  $k(\varphi)$ . Уравнение вторичной волны следует записать в виде:

$$dE = k(\varphi) \frac{a \cdot dS}{r} \cos(\omega t - kr),$$

где  $k(\varphi)$  – убывает с ростом  $\varphi$ .

Таким образом, напряжённость суммарного светового поля за преградой

$$E_P = \int_S k(\varphi) \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr) dS$$

Этот интеграл является *аналитической записью принципа Гюйгенса-Френеля*. Вычисление этого интеграла предполагает знание явного вида зависимости  $k(\varphi)$ . Френель не нашёл зависимость  $k(\varphi)$ . Он занимался только приближёнными, оценочными расчётами.

Точную теорию дифракции разработал *Кирхгоф* в 1883 г. Он же нашёл выражение для  $k(\varphi)$ . В общем случае это довольно громоздкое выражение. Однако в оптике всегда  $r \gg \lambda$  и коэффициент  $k(\varphi)$  определяется простым выражением

$$k(\varphi) = \frac{i}{2\lambda} (1 + \cos\varphi).$$

Как видно,  $k(\varphi)$  чисто мнимая величина. Если учесть, что  $i = e^{i\pi/2}$ , то это означает, что фаза вторичной волны отличается от фазы первичной на  $\pi/2$ . Амплитуда вторичной волны в  $2\lambda$  раз меньше амплитуды первичной и зависит от угла  $\varphi$ . В направлении назад ( $\varphi = \pi$ ) вторичные волны не излучаются.

### **Метод зон Френеля**

Френель предложил простой метод оценочных расчётов, который получил название «Метод зон Френеля». Этот метод используется, когда преграды или отверстия в преградах имеют простую симметрию (полубесконечный экран, или круглое отверстие в экране, или экран в виде диска конечного размера...). Например, если имеется непрозрачный экран с круглым отвер-

стием, то легко сделать оценку интенсивности в центре дифракционной картины (см. рис. 1).

Френель предложил открытую часть волнового фронта разбить на кольцевые участки (зоны) таким образом, чтобы расстояния от соседних зон до точки наблюдения (в центре дифракционной картины) отличались на  $\lambda/2$ . При таком разбиении площади всех кольцевых зон оказываются одинаковыми, а волны от соседних зон приходят в точку наблюдения в противофазе.

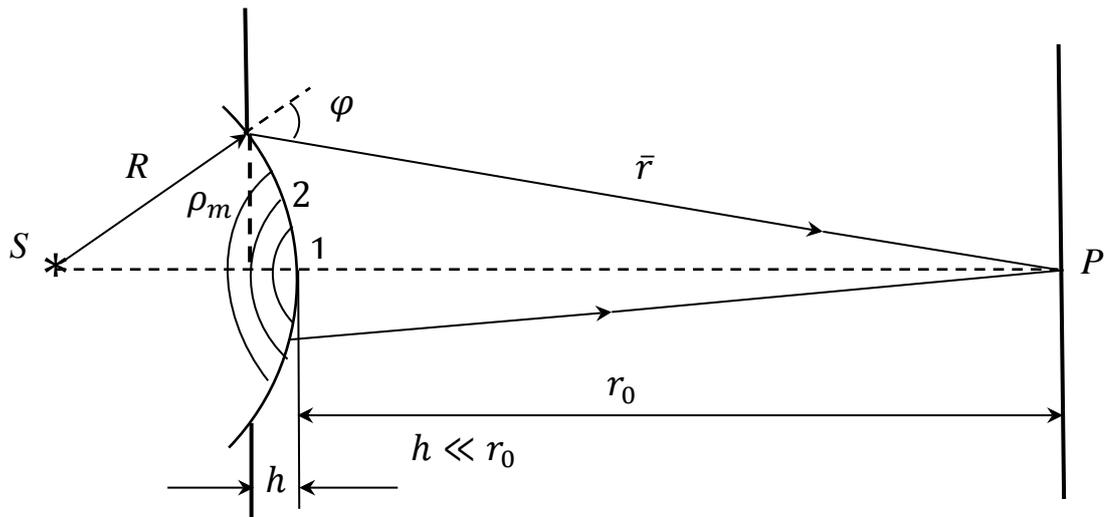


Рис. 1. Схема разбиения волнового фронта на зоны Френеля.

Для согласования результатов экспериментов с расчётами был сделан вывод о том, что амплитуда вторичных волн монотонно убывает с ростом угла  $\varphi$  между направлениями первичной и вторичной волны. Вторичные волны, приходящие в точку наблюдения  $P$  от соседних зон в значительной мере (но не полностью) гасят друг друга, и амплитуда суммарной волны определяется выражением:

$$E_p = \frac{E_1}{2} \pm \frac{E_m}{2}, \quad (1)$$

где  $E_1$  — амплитуда волны, приходящей в точку наблюдения от первой зоны Френеля;  $E_m$  — амплитуда волны от последней зоны (с номером  $m$ ), которая помещается в отверстии.

Плюс в формуле (1) выбирается, если  $m$  нечётное число, а минус — если чётное.

В случае круглого отверстия дифракционная картина на экране представляет собой чередующиеся концентрические светлые и тёмные кольца. В центре может быть как светлое, так и тёмное пятно в соответствии со знаком плюс или минус в формуле (1).

С ростом номера зоны  $m$   $E_m$  – убывает, поэтому для полностью открытого волнового фронта ( $m \rightarrow \infty$ )  $E_m = 0$  и  $E_p = E_1/2$ . Поскольку интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, то в точке  $P$  при полностью открытом волновом фронте она будет в 4 раза меньше, чем в случае, когда в отверстии помещается только одна зона Френеля ( $m = 1$ ).

Радиус внешней границы  $m$ -ой зоны Френеля (см. рис. 1)

$$\rho_m = \sqrt{\frac{Rr_0}{R + r_0} m\lambda}. \quad (2)$$

Если наоборот, задать радиус отверстия в экране  $\rho$ , то из (2) можно найти число зон Френеля  $m$ , помещающихся в этом отверстии, и таким образом установить, будет ли в центре дифракционной картины светлое или тёмное пятно.

Для падающего на преграду плоского волнового фронта (когда  $R = \infty$ )

$$\rho_m = \sqrt{m\lambda r_0}. \quad (3)$$

Задача 1. Между точечным источником света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус которого  $\rho$  можно менять. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана равны  $a = 100$  см и  $b = 125$  см. Определить длину волны света, если максимум освещённости в центре дифракционной картины наблюдается при  $\rho_1 = 1,00$  мм и следующий максимум – при  $\rho_2 = 1,29$  мм.

Решение. Максимум освещённости в центре дифракционной картины на экране наблюдается, когда в отверстии укладывается нечётное число зон Френеля. Допустим, радиусу  $\rho_1$  соответствует  $m_1 = 2k + 1$  зон Френеля ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Тогда  $\rho_2$  соответствует  $m_2 = 2k + 3$  зон. Радиус кривизны

волнового фронта, падающего на диафрагму с отверстием  $R = a$ . Расстояние от диафрагмы до экрана  $b = r_0$ , т. к.  $h \ll r_0$  (см. рис. 1).

Используя формулу (2) можем записать:

$$\rho_1^2 = (2k + 1)\lambda \frac{ab}{(a + b)}, \quad \rho_2^2 = (2k + 3)\lambda \frac{ab}{(a + b)}.$$

Вычитая из второго уравнения первое получим:

$$\lambda = \frac{(\rho_2^2 - \rho_1^2)(a + b)}{2ab}.$$

### Метод графического сложения амплитуд

Метод позволяет достаточно просто решать целый ряд дифракционных задач.

Разобьём каждую из зон Френеля на одинаковое число одинаковых по площади кольцевых участков (например, на 6 участков). Колебание, создаваемое в точке  $P$  экрана (см. рис. 1) каждым таким участком, можно изобразить вектором  $e_i$ , длина которого равна амплитуде колебания, а угол  $\delta\gamma$  между этим вектором и горизонтальной осью отсчёта соответствует начальной фазе колебаний. На рис. 2 представлен результат сложения колебаний от всех 6 кольцевых участков первой зоны Френеля. По мере удаления кольцевого участка от оси отверстия (увеличения номера участка) увеличивается расстояние от участка до точки  $P$  и, следовательно, растёт запаздывание колебаний.

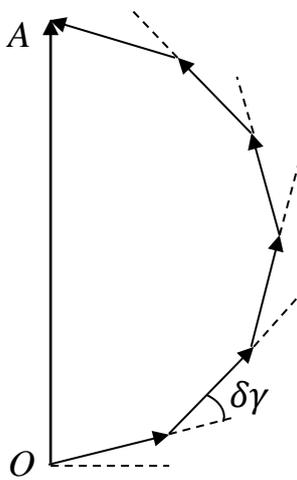


Рис. 2.

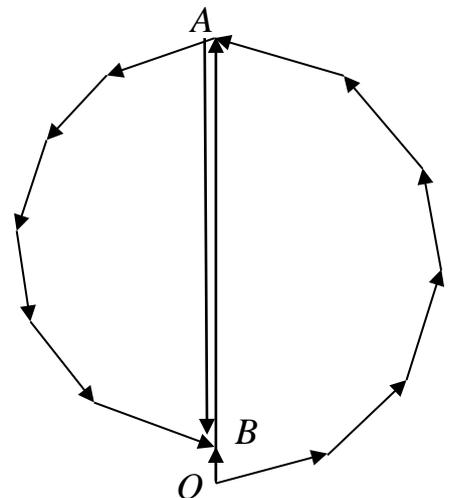


Рис. 3.

Поэтому каждый последующий вектор  $e_i$  повернут относительно предыдущего на одинаковый угол. Вектор  $OA$  характеризует действие всей первой зоны Френеля. Действие первой и второй зон Френеля представлено на рис. 3. Вектор  $AB$  характеризует вклад только второй зоны Френеля. Он направлен противоположно вектору  $OA$ . Длина вектора  $AB$  меньше длины вектора  $OA$ , т. к. с ростом угла  $\varphi$  между направлениями первичной и вторичной волны, монотонно убывает амплитуда вторичных волн. Результат действия 1-ой и 2-ой зон Френеля определяется вектором  $OB$ .

Если ширину кольцевых зон устремить к нулю (количество их будет при этом неограниченно возрастать), векторная диаграмма примет вид спирали, закручивающейся к точке  $C$  (см. рис. 4). Фазы колебаний в точках  $O$  и  $A$  отличаются на  $\pi$  (бесконечно малые векторы, образующие спираль, направлены в этих точках в противоположные стороны). При увеличении размера

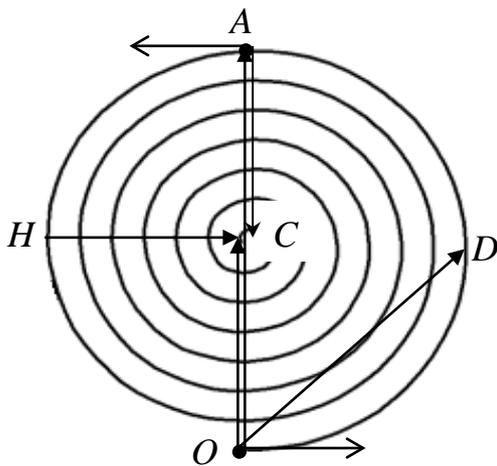


Рис. 4. Спираль Френеля.

отверстия в преграде конец вектора результирующего колебания в точке  $P$  скользит по виткам спирали.  $\overline{OD}$  — характеризует действие только внутренней половины первой зоны Френеля;  $\overline{OA}$  — действие всей первой зоны Френеля.  $\overline{OC}$  — характеризует суммарное действие всех вторичных волн для полностью открытого волнового фронта

(число открытых зон Френеля равно бесконечности). При проведении оценочных расчётов следует полагать:  $OA = 2OC$ ,  $OD = \sqrt{2}OC$ .

Для преграды в виде диска, закрывающего первые полторы зоны Френеля, действие открытой части волнового фронта будет характеризоваться вектором  $\overline{HC}$ . Поскольку  $HC \approx OC$ , в центре дифракционной картины на экране будет наблюдаться светлое пятно — пятно Пуассона.

Задача 2. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью  $I_0$  падает нормально на поверхности непрозрачных экранов, показанных на рисунках. Найти Зависимость от угла  $\alpha$  интенсивности света в точке  $P$ :

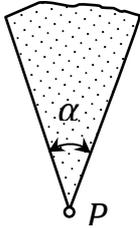


Рис. 5.

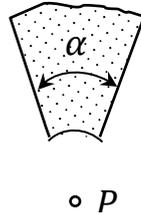


Рис. 6.

а) расположенной за вершиной угла экрана (рис. 5);

б) для которой закруглённый край экрана (рис. 6) совпадает с границей первой зоны Френеля.

Решение. Волновой фронт будем рассматривать как систему точечных излучателей. Полагаем, что все они излучают когерентно. Для полностью открытого волнового фронта суммарное действие всех вторичных волн в точке  $P$  определяется вектором  $\overline{OC}$  (см. рис. 4). Пусть  $OC = E_0$ , а интенсивность в точке  $P$   $I_0 \sim E_0^2$ .

а) После размещения преграды изменится только число действующих излучателей. Амплитуда суммарной волны в точке  $P$  уменьшится и примет значение  $(1 - \alpha/2\pi)E_0$ . Интенсивность в точке  $P$ :  $I_p \sim E_0^2(1 - \alpha/2\pi)^2$ . Таким образом,  $I_p = I_0(1 - \alpha/2\pi)^2$ .

б) Амплитуда волны, приходящей в точку  $P$  от первой полностью открытой зоны Френеля определяется вектором  $\overline{OA}$ :  $OA \approx 2OC = 2E_0$  (см. рис. 4). Суммарная волна от всех остальных зон Френеля (ей будет соответствовать вектор  $\overline{AC}$  на рис. 4) будет в *противофазе* с волной от первой зоны Френеля. Амплитуда этой волны (с учётом того, что часть излучателей перекрыта экраном) определится выражением  $E' = (1 - \alpha/2\pi)E_0$ , т. к.  $AC \approx OC = E_0$ .

$$\text{Тогда } E_p = 2E_0 - E' = (1 + \alpha/2\pi)E_0, \quad I_p = I_0(1 + \alpha/2\pi)^2.$$

Задача 3. Плоская световая волна с интенсивностью  $I_0$  и  $\lambda = 0,60$  мкм падает нормально на достаточно большую стеклянную пластинку ( $n = 1,5$ ), в которой сделано круглое отверстие. Для точки наблюдения  $P$  в отверстии

помещаются первые полторы зоны Френеля (рис. 7). Найти толщину пластинки, при которой интенсивность света в точке  $P$  будет максимальна. Определить эту интенсивность  $I_p$ .

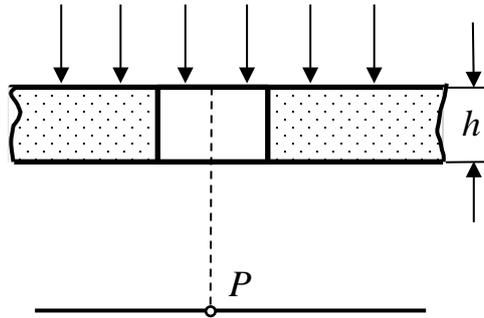


Рис. 7.

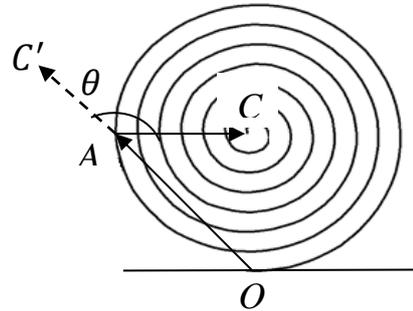


Рис. 8.

Решение. Предположим сначала, что стеклянная пластинка отсутствует. Разобьём плоский волновой фронт на кольцевые зоны Френеля. Вектор  $\overline{OA}$  (рис.8) характеризует вторичную волну, приходящую в точку  $P$  от первых полутора зон Френеля, а вектор  $\overline{AC}$  – суммарную вторичную волну от всех остальных зон.

Мысленно начнём увеличивать толщину стеклянной пластинки. Вектор  $\overline{OA}$  меняться не будет, вектор  $\overline{AC}$  начнёт поворачиваться против часовой стрелки, так как скорость распространения света в стекле меньше скорости света в воздухе и это вызывает *запаздывание* колебаний. Дополнительный фазовый сдвиг колебаний (приходящих в точку  $P$ )  $\delta = k\Delta$ , где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число,  $\Delta = h(n - 1)$  – дополнительная разность хода, возникающая из-за того, что свет распространяется в стекле, а не в воздухе. Таким образом,  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n - 1)$ .

Амплитуда колебаний в точке  $P$  станет максимальной, когда вектор  $\overline{AC}$  займёт положение  $\overline{AC'}$ , т. е. когда он повернётся на угол:  $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Приравнивая  $\delta = \theta$ , получим  $h = (3/8 + m)\lambda/(n - 1)$ .

Если положить  $I_0 \sim (OC')^2$ , то  $OA = \sqrt{2}E_0$ ,  $AC' = E_0$ ,  $OC' = (1 + \sqrt{2})E_0$ .  
Тогда  $I_p = (1 + \sqrt{2})^2 I_0 \approx 6I_0$ .

Задача 4. Между точечным источником с длиной волны  $\lambda$  и экраном расположена большая стеклянная пластина, в которой сделаны концентрические кольцевые выемки глубиной  $h$ . Эти выемки для точки наблюдения  $P$  экрана совпадают с границами нечётных зон Френеля. При какой глубине выемок интенсивность света в точке  $P$  будет максимальна?

Решение. При отсутствии стеклянной пластины колебания, создаваемые в точке  $P$  нечётными зонами Френеля, находятся в противофазе с колебаниями, создаваемыми чётными зонами. Эту разность фаз можно компенсировать за счёт различия скоростей распространения света в стекле и в воздухе. Изменение разности фаз, которое может обеспечить наша стеклянная пластина,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n - 1)$$

приравняем нечётному числу  $\pi$ :  $(2m + 1)\pi$ . Откуда получим необходимую глубину выемок:

$$h = \frac{(2m+1)\lambda}{2(n-1)} \quad (4)$$

( $n$  – показатель преломления стекла,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ).

Мы рассмотрели действие, так называемой, *зонной пластинки*, которая обеспечивает высокую концентрацию световой энергии в точке  $P$ . Усиление интенсивности света такой зонной пластинкой аналогично фокусирующему действию линзы (однако слабее в  $\pi^2/4$  – раз и выполняется только для соответствующих (4) длин волн). В точке  $P$  фактически наблюдается изображение источника. Все соотношения для зонной пластинки определяются формулами (2), (4). В частности, для плоского волнового фронта ( $R = \infty$ ) фокусное расстояние зонной пластинки  $f = \rho_m^2/m\lambda = r_0$ .

## Оценка типа дифракции

Как известно, различают два вида дифракции: *дифракцию Френеля* и *дифракцию Фраунгофера*. Для получения оценок вида дифракции обратимся к формуле (2). Положим  $r_0 \approx R$ . Тогда из (2) получим:  $m \approx D^2 / \lambda r_0$  ( $D = \rho_m$  – размер преграды или отверстия в преграде).

При  $m \ll 1$  (т. е. когда  $D^2 \ll \lambda r_0$ ) в отверстии уместится малая часть даже одной первой зоны Френеля. Этот случай соответствует дифракции Фраунгофера. Можно положить  $k(\varphi) = const$  и расчёт дифракционной картины существенно упрощается.

При  $m \gg 1$  в отверстии уместится очень большое число зон Френеля, как и для полностью открытого волнового фронта. Этот случай соответствует геометрической оптике; дифракцию можно не учитывать.

При  $D^2 \approx \lambda r_0$  – будет наблюдаться дифракция Френеля.

## Дифракция Фраунгофера на щели

Схема наблюдения дифракции представлена на рис. 9. Монохроматический источник света  $S$  с длиной волны  $\lambda$  располагается в фокусе линзы  $L_1$ .

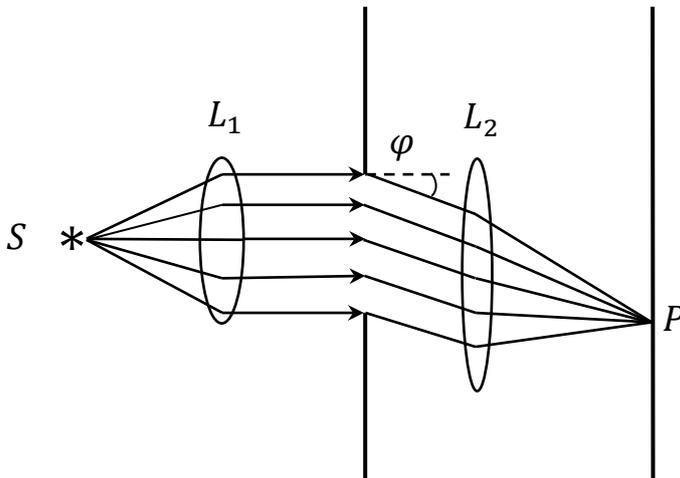


Рис. 9.

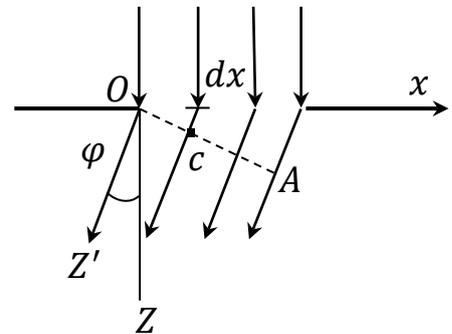


Рис. 10.

Плоский волновой фронт падает на преграду, в которой имеется узкая щель шириной  $b$ . За преградой расположена линза  $L_2$ , а в фокальной плоскости линзы – экран. По принципу Гюйгенса–Френеля каждая точка щели яв-

ляется источником вторичных волн, излучаемых по различным направлениям. Линза  $L_2$  собирает параллельные пучки лучей в различных точках экрана в зависимости от угла дифракции  $\varphi$ . На рисунке показан один из множества пучков. Наша задача найти распределение интенсивности в дифракционной картине в зависимости от угла дифракции  $I(\varphi)$ .

Рассмотрим пучок лучей, продифрагировавших в некотором направлении  $Z'$  (см. рис. 10). Совместим начало координат с левым краем щели и направим ось  $x$  как показано на рисунке. Пусть амплитуда волны, излучаемой *всей щелью* в направлении  $\varphi = 0$ , будет  $E_0$ . Разобьём щель на элементарные участки  $dx$ . Выберем участок  $dx$  в произвольном месте на расстоянии  $x$  от начала координат. Запишем уравнение плоской вторичной волны, излучаемой этим участком в направлении  $Z'$ .

$$dE_\varphi = k(\varphi) \frac{E_0}{b} \exp\{i(\omega t - kZ')\} dx,$$

где  $k(\varphi)$  — коэффициент Кирхгофа,  $k(\varphi)E_0 dx/b$  — амплитуда вторичной волны.

Обычно в оптике  $b \gg \lambda$ . В этом случае углы дифракции, в направлении которых наблюдается заметная интенсивность продифрагировавших волн, малы, и можно положить  $k(\varphi) = const$ . Более того, положим  $k(\varphi) = 1$ , т. к. нас интересует не абсолютное значение интенсивности, а распределение  $I(\varphi)$ . Таким образом,

$$dE_\varphi = \frac{E_0}{b} \exp\{i(\omega t - kZ')\} dx. \quad (5)$$

Вторичные волны (5) от различных точек щели когерентны и будут интерферировать при наложении в точке  $P$  экрана. Напряжённость суммарного светового поля в точке  $P$  экрана:  $E_\varphi = \int dE_\varphi$ , где интеграл берётся в пределах ширины щели, т. е. следует просуммировать напряжённости всех вторичных волн, продифрагировавших в направлении  $\varphi$  с учётом их амплитуд и фаз.

Амплитуды вторичных волн от различных элементов  $dx$  одинаковы, а *распределение фаз в точке  $P$  экрана* буде таким же, как на перпендикуляре  $OA$  к лучам (свойство линз). Вторичные волны в плоскости щели возбуждаются одновременно, но волна в точку  $C$  придёт с некоторым запаздыванием. Колебания в точке  $C$  будут запаздывать по фазе относительно колебаний в точке  $O$  на величину  $k\Delta$ , где  $\Delta = x\sin\varphi$  (см. рис. 10).

Уравнение колебаний в точке  $C$ :

$$dE_\varphi = \frac{E_0}{b} \exp\{i(\omega t - kx\sin\varphi)\} dx.$$

Напряжённость суммарного светового поля в точке  $P$  экрана:

$$E_\varphi = \int_0^b \frac{E_0}{b} \exp(i\omega t) \exp(-ikx\sin\varphi) dx = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{-ikb\sin\varphi} - 1}{-ikb\sin\varphi}.$$

Обозначим  $u = \frac{1}{2}kbs\sin\varphi$ .

$$E_\varphi = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{-2iu} - 1}{-2iu} = E_0 e^{i\omega t} e^{-iu} \frac{e^{-iu} - e^{iu}}{-2iu} = E_0 \frac{\sin u}{u} e^{i(\omega t - u)}.$$

Распределение амплитуд колебаний в зависимости от угла дифракции

$$E_{0\varphi} = E_0 \frac{\sin u}{u}, \quad \text{где } u = \frac{\pi}{\lambda} \sin\varphi \quad (6)$$

$$I_\varphi \sim (E_\varphi \cdot E_\varphi^*) = E_0^2 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2.$$

Таким образом, можем записать:

$$I_\varphi = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2, \quad \text{где } u = \frac{\pi}{\lambda} b\sin\varphi.$$

Проведём анализ этой зависимости и построим график  $I(\sin\varphi)$ .

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Таким образом, при  $\varphi = 0$  будет наблюдаться максимум  $I_\varphi = I_0$ .

$$\text{Условия минимумов } (I_\varphi = 0) \begin{cases} \sin u = 0 \\ u \neq 0 \end{cases},$$

т. е.  $u = \pm m\pi$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$ .  $u = \frac{\pi}{\lambda} b\sin\varphi = \pm m\pi$ , откуда получим:

$$b\sin\varphi = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (7)$$

График распределения интенсивности  $I(\sin\varphi)$  в дифракционной картине представлен на рисунке 11.

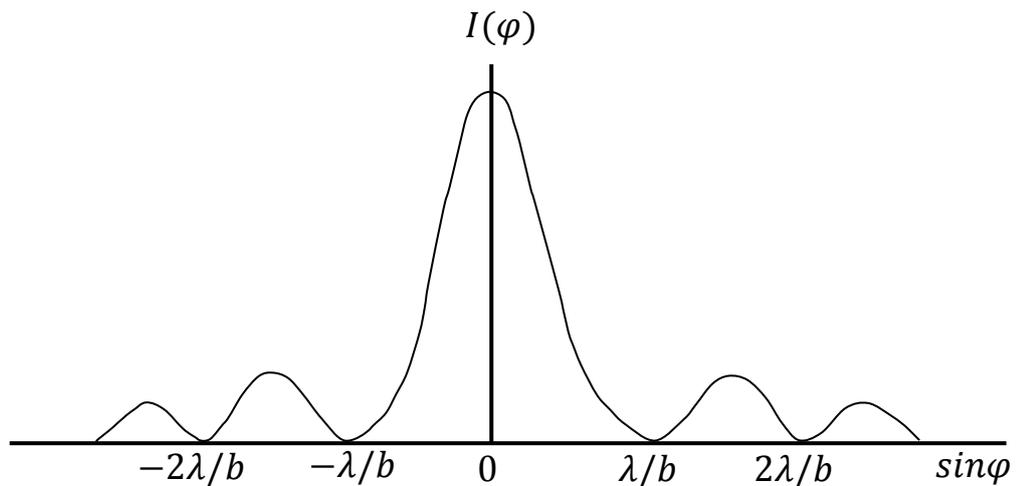


Рис. 11. Распределение интенсивности при дифракции Фраунгофера на щели.

Дифракционная картина на экране представляет собой центральную светлую полосу с размытыми краями и расположенными симметрично относительно неё чередующимися тёмными и светлыми полосами.

Интенсивности в центральном и последующих максимумах относятся как 1000:47:17 ..., т. е. основная часть световой энергии сосредоточена в центральном максимуме

Задача 5. Монохроматический свет падает нормально на щель ширины  $b = 11$  мкм. За щелью находится тонкая линза с фокусным расстоянием  $f' = 150$  мм, в фокальной плоскости которой расположен экран. Найти длину волны света, если расстояние между симметрично расположенными минимумами третьего порядка на экране равно  $x = 50$  мм.

Решение. Из условия дифракционных минимумов (7)

$$\lambda = [b \sin\varphi] / m, \quad \text{где } m = 3.$$

$$\sin\varphi = \frac{x/2}{\sqrt{(x/2)^2 + (f')^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4(f'/x)^2}}.$$

Таким образом:  $\lambda = b / [m \sqrt{1 + 4(f'/x)^2}]$ .

## Разрешающая способность оптических приборов

Линзы, оправы линз, диафрагмы оптических приборов имеют конечные размеры и, следовательно, ограничивают волновой фронт используемого излучения. Это приводит к дифракции падающего на преграду излучения. Из-за дифракции оптический прибор будет давать не точечное изображение удалённого точечного объекта, а размытое пятно конечного размера. При небольшом угловом расстоянии  $\delta\varphi$  между удалёнными точечными объектами их изображения сольются в одно пятно, и станет невозможной их идентификация (их разрешение).

Разрешающей способностью оптического прибора называют минимальное угловое расстояние  $\delta\varphi_{min}$  между удалёнными точечными объектами, при котором прибор позволяет их различить (разрешить). Посмотрим, от чего зависит  $\delta\varphi_{min}$ .

В любом достаточно сложном оптическом приборе всегда можно выделить диафрагму с круглым отверстием или линзу, которые наиболее сильно ограничивают волновой фронт световой волны. Будем изображать оптический прибор одной линзой диаметром  $D$ .

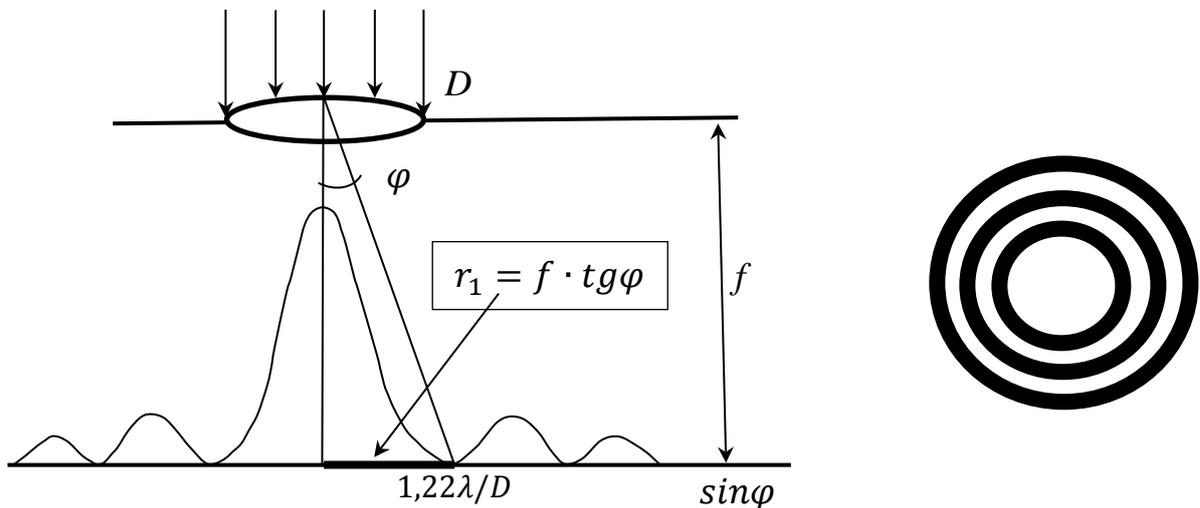


Рис. 12. Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии.

Пусть параллельный пучок лучей (например, от звезды) падает на оптический прибор. При отсутствии дифракции в фокальной плоскости линзы получим точечное изображение удалённого объекта. Дифракция приводит к

размыванию изображения в пятно конечного размера. На рис. 12 представлено распределение интенсивности в дифракционной картине при дифракции *Фраунгофера* на круглом отверстии.

Дифракционная картина представляет собой центральное светлое пятно и концентрические, чередующиеся тёмные и светлые кольца. Причём  $\approx 90\%$  всей интенсивности приходится на центральное светлое пятно. Размер центрального светлого пятна определяется положением первого дифракционного минимума (см. рис. 12).

Учитывая, что  $\delta\varphi$  мало, найдём радиус центрального светлого пятна

$$r_1 = f \cdot \operatorname{tg}\varphi \approx f \cdot \sin\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D} f.$$

Представим себе теперь, что имеются два удалённых точечных объекта, находящихся на небольшом угловом расстоянии  $\delta\varphi$  друг от друга. При уменьшении  $\delta\varphi$  дифракционные изображения (центральные максимумы) начнут сближаться и при некотором значении  $\delta\varphi$  перекроются настолько, что будут восприниматься как изображение одного объекта. Прибор не позволит различить (или, как говорят, разрешить) два точечных объекта.

Количественный критерий разрешающей способности оптического прибора можно сформулировать только условно, т. к. возможность отличить дифракционное изображение двух близких точек от изображения одиночного точечного объекта зависит от *точности*, с которой производится измерение наблюдаемого распределения интенсивности в дифракционной картине. Для *визуальных* наблюдений критерий был предложен *Рэлеем*.

**Критерий Рэля.** *Два некогерентных точечных источника одинаковой интенсивности находятся на пределе разрешения, если интенсивность в «провале» суммарного распределения не превышает 0,8 от интенсивности в максимуме. Это обеспечивается, когда максимум одной дифракционной картины совпадает с минимумом другой.*

Такое распределение интенсивности представлено на рис. 13. Как видно из рисунка

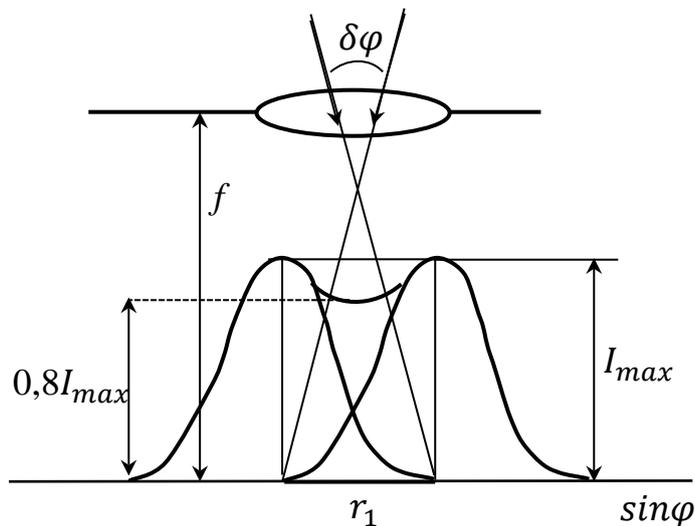


Рис. 13

$$\delta\varphi_{min} = \frac{r_1}{f} = \frac{1,22\lambda f}{Df}.$$

Таким образом,

$$\delta\varphi_{min} = 1,22\lambda/D,$$

где  $D$  – диаметр действующей диафрагмы прибора, наиболее сильно ограничивающей волновой фронт.

В оптике в качестве характеристики прибора используется и другая величина:  $A = 1/\delta\varphi_{min}$  – разрешающая сила прибора.

Задача 6. О зоркости хищных птиц ходят баснословные рассказы. Оцените на основе дифракционных соображений, может ли орёл, летающий над землёй на высоте 1 км, разглядеть мышонка в 3 см, или он сможет только обнаружить его присутствие.

Решение. Прежде всего, разберёмся в понятиях «разглядеть» и «обнаружить». Как известно, маленькие зверьки замирают в случае опасности. Для орла, летающего высоко над землёй, неподвижное пятно – это камень, а если оно движется, то его надо хватать.

Будем полагать, что «разглядеть» - значит разделить хотя бы крайние точки тела мышонка. В этом случае угловой размер мышонка

$$\delta\psi = 3/1 \cdot 10^5 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

Положим, что диаметр зрачка глаза орла 3 мм. Возьмём  $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$  мм  
Тогда  $\delta\varphi_{min} = 1,2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}/3 = 2 \cdot 10^{-4}$  рад.

Таким образом,  $\delta\psi < \delta\varphi_{min}$  – орёл не сможет разглядеть мышонка с высоты 1 км.

## Дифракция Фраунгофера на амплитудной решётке

Дифракционной решёткой можно считать любое устройство, обеспечивающее пространственную периодическую модуляцию падающей световой волны по амплитуде или фазе. Различают амплитудные, фазовые и амплитудно-фазовые решётки.

Амплитудная дифракционная решётка представляет собой систему одинаковых параллельных щелей шириной  $b$ , расположенных в одной плоскости на одинаковом расстоянии  $d$  друг от друга. Параллельный пучок лучей, падающих *перпендикулярно* плоскости решётки, полагается *пространственно когерентным* в пределах всех  $N$  щелей решётки. За решёткой располагается линза и в фокальной плоскости линзы экран, где и наблюдается дифракция Фраунгофера (см. рис. 14).

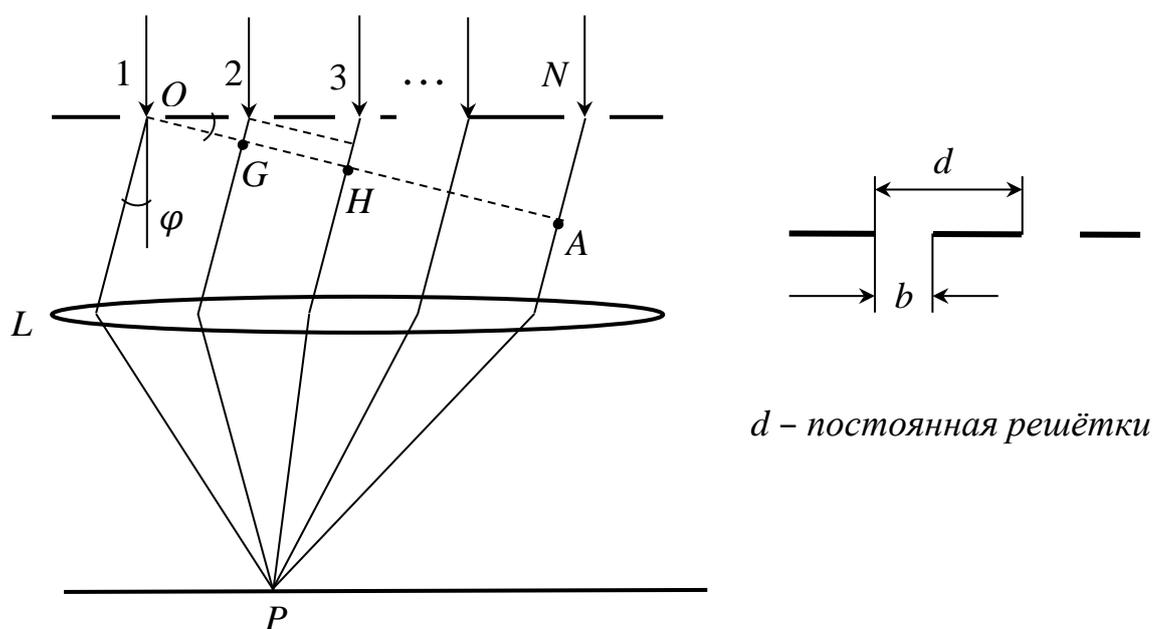


Рис. 14. Дифракция Фраунгофера на амплитудной решётке.

На каждой из  $N$  щелей решётки происходит дифракция. Волны, протифрагировавшие на каждой из щелей в некотором направлении  $\varphi$ , сводятся линзой в соответствующую точку экрана, где происходит многолучевая интерференция ( $N$  когерентных лучей).

Наша задача просуммировать когерентные волны, приходящие в точку  $P$  от всех  $N$  щелей с учётом их амплитуд и фаз.

Все щели одинаковые. Распределение *амплитуд* волн, продифрагировавших на каждой из щелей определяется выражением (6). Распределение *фаз* колебаний этих волн в точке  $P$  будет таким же, как на перпендикуляре  $OA$  к лучам, падающим на линзу  $L$  (таково свойство линз).

Вторичные волны в пределах каждой из  $N$  щелей возбуждаются одновременно, но проходят разные расстояния до точек  $G, H, \dots A$ . Поэтому, например, колебания в точке  $G$  будут запаздывать по фазе относительно колебаний в точке  $O$  на величину  $k\Delta = kdsin\varphi$  (см. рис. 14).

Запишем уравнение колебаний в точке  $O$ :  $E_{1\varphi} = E_{0\varphi} \exp(i\omega t)$ . Тогда уравнение колебаний в точке  $G$  запишется в виде:

$$E_{2\varphi} = E_{0\varphi} \exp[i(\omega t - kdsin\varphi)] = E_{0\varphi} e^{-ikdsin\varphi} \exp(i\omega t).$$

Произведение  $E_{0\varphi} e^{-ikdsin\varphi}$  – представляет собой, так называемую комплексную амплитуду. Её можно представить в виде вектора в фазовом пространстве. Длина стрелки соответствует вещественной части амплитуды  $E_{0\varphi}$ , а угол между вектором и осью отсчёта – начальной фазе колебаний.

Комплексная амплитуда колебаний в точке  $H$  запишется в виде  $E_{0\varphi} e^{-i2kdsin\varphi}$  (см. рис. 14), ... и т. д. Для точки  $A$  – комплексная амплитуда  $E_{0\varphi} e^{-i(N-1)kdsin\varphi}$ .

Просуммируем в точке  $P$  комплексные амплитуды колебаний от всех  $N$  щелей и таким образом просуммируем колебания с учётом, как амплитуд, так и фаз.

Комплексная амплитуда суммарного колебания в точке  $P$  представляется суммой геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_P &= E_{0\varphi} (1 + e^{-ikdsin\varphi} + e^{-i2kdsin\varphi} + \dots + e^{-i(N-1)kdsin\varphi}) = E_{0\varphi} \frac{1 - e^{-iN\alpha}}{1 - e^{-i\alpha}}, \\ \widetilde{E}_P &= E_{0\varphi} \frac{1 - e^{-iN\alpha}}{1 - e^{-i\alpha}} = E_{0\varphi} \frac{e^{-iN\alpha/2}}{e^{-i\alpha/2}} \cdot \frac{e^{\frac{iN\alpha}{2}} - e^{-\frac{iN\alpha}{2}}}{e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\alpha}{2}}} = E_{0\varphi} \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \cdot \frac{e^{-iN\alpha/2}}{e^{-i\alpha/2}}, \end{aligned}$$

где  $\alpha = kdsin\varphi$ .

Для перехода к интенсивности следует умножить  $\widetilde{E}_p$  на комплексно – сопряжённое выражение, т. к.  $I_p \sim (\widetilde{E}_p \cdot \widetilde{E}_p^*)$ .

В результате получим распределение интенсивности в зависимости от угла дифракции

$$I_p = I_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\right)^2,$$

где  $I_0$  – интенсивность излучения от одной щели в направлении  $\varphi = 0$ ,  $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$  – описывает дифракцию на каждой щели,  $\left(\frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\right)^2$  – учитывает интерференцию  $N$  пучков,  $u = (\pi b \sin \varphi) / \lambda$ ,  $\alpha/2 = (\pi d \sin \varphi) / \lambda$ .

**Анализ полученного распределения.** Второй множитель полученного распределения мы уже анализировали ранее. Определили условия (7), когда этот множитель обращается в нуль – условия минимумов. Займёмся анализом третьего множителя.

При  $\alpha/2 \rightarrow m\pi$ ,  $\lim_{\alpha/2 \rightarrow m\pi} \left(\frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\right)^2 = N^2$  – наблюдаются так называемые *главные дифракционные максимумы*.

В этом случае  $I_p = N^2 I_0 \cdot (\sin u / u)^2$   
(заметим, что при двухлучевой интерференции волн с одинаковыми интенсивностями  $I_0$ , интенсивность интерференционных максимумов  $I = 2^2 I_0$ ).

Приравняем  $\alpha/2 = \pm m\pi$  и найдём условие главных дифракционных максимумов:

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (8)$$

( $m$  – порядок дифракционного максимума  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Исследуемый нами третий множитель обращается в ноль, когда

$$\sin(N\alpha/2) = 0, \text{ но } \sin(\alpha/2) \neq 0,$$

т. е. когда  $(N\pi d \sin \varphi) / \lambda = \pm m' \pi$ , где  $m'$  – целое число не кратное  $N$ .

Условия таких минимумов:

$$\sin\varphi = \pm m'\lambda/Nd \quad (m' - \text{целое число не кратное } N). \quad (9)$$

Запишем последовательный ряд значений  $(N\pi d \sin\varphi)/\lambda$ :

$$N\alpha/2 = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, (N-1)\pi, N\pi, (N+1)\pi, \dots, (2N-1)\pi, 2N, \dots$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{max} & & \text{max} & & \text{max} \end{array}$$

Таким образом, между двумя главными дифракционными максимумами находится  $N - 1$  минимум.

Условие (9) можно записать в ином виде, если выделить целую часть отношения  $m'/N = m \pm k'/N$ :

$$\sin\varphi = \pm(m \pm k'/N) \lambda/d, \quad (10)$$

где  $k' = 1, 2, 3, \dots, N - 1$  – порядковый номер минимума, который находится справа или слева от главного максимума  $m$  – го порядка в зависимости от выбранных знаков плюс или минус.

Между соседними минимумами (9) находятся слабые побочные максимумы.

**Построение графика.** Построим график распределения интенсивности при дифракции Фраунгофера на амплитудной решётке  $I_p = f(\sin\varphi)$ . Сделаем построение для частного случая  $N = 5$ ,  $d/b = 4$  (хотя вовсе не обязательно их отношение должно быть целым числом).

Прежде всего, строят зависимость  $I_p = N^2 I_0 \cdot (\sin u/u)^2$ . На рис. 15 эта зависимость показана пунктиром. В неё вписывают дифракционные максимумы, положение которых определяется формулой (8). Как видно из рисунка, между соседними дифракционными максимумами находится по четыре  $((N - 1) = 4)$  минимума. В нашем случае  $d/b = 4$ , и каждый четвёртый дифракционный максимум исчезает, так как выполняется условие

$$d \sin\varphi = 4b \sin\varphi = 4\lambda,$$

в результате чего сомножитель  $(\sin u/u)^2 = 0$ .

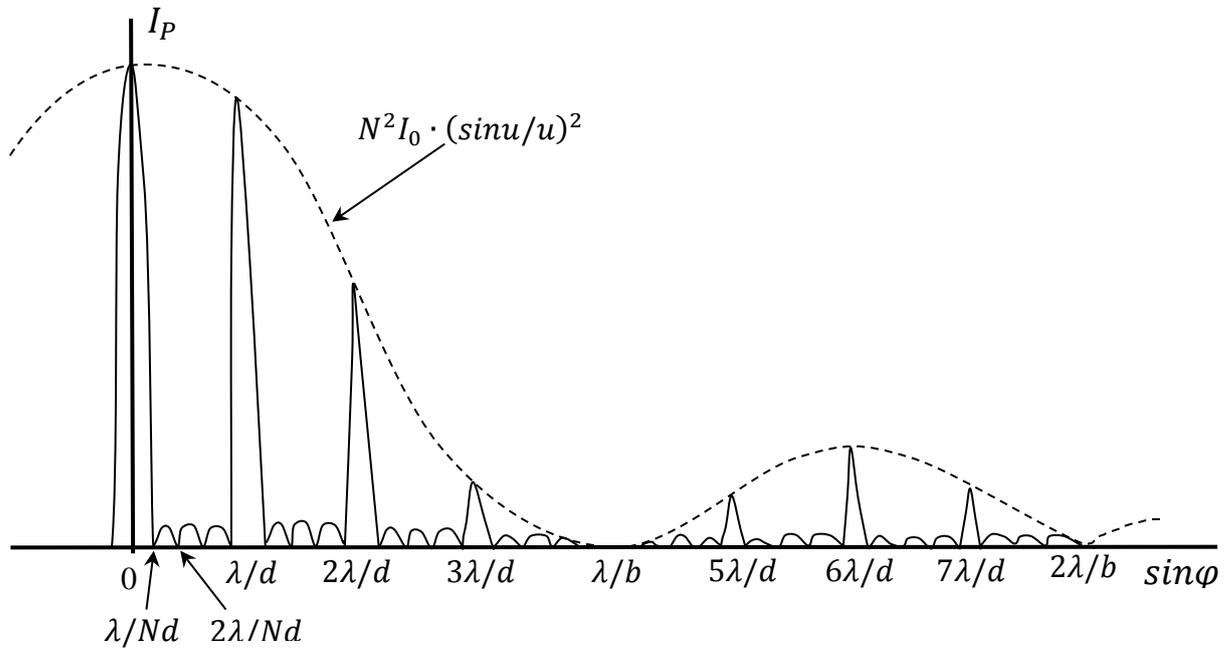


Рис. 15. Дифракция Фраунгофера на амплитудной решётке:  $N = 5$ ,  $d/b = 4$ .

Задача 7. Монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 0,5$  мкм падает нормально на дифракционную решётку. За решёткой находится тонкая линза с фокусным расстоянием  $f' = 50$  см, в фокальной плоскости которой расположен экран. Расстояние на экране между двумя максимумами первого порядка равно  $x = 10,4$  см. Определить постоянную решётки  $d$  и общее число главных дифракционных максимумов  $N$ , наблюдаемых на экране.

Решение. Из условия главных дифракционных максимумов (8) можем записать:

$$d = \lambda / \sin\varphi, \text{ где } \sin\varphi = 1 / \sqrt{1 + 4(f'/x)^2} \quad (\text{см. задачу 6}).$$

Подставляя числовые данные задачи, получим  $d = 4,83$  мкм.

Наибольший порядок наблюдаемых на экране дифракционных максимумов можно найти, положив  $\sin\varphi = 1$  в формуле (8). В этом случае  $m_{max} \leq d/\lambda = 9,66$ . Таким образом, десятый порядок уже наблюдаться не будет и следует положить  $m_{max} = \pm 9$ . Всего будет наблюдаться  $N = 2m_{max} + 1 = 19$  главных дифракционных максимумов.

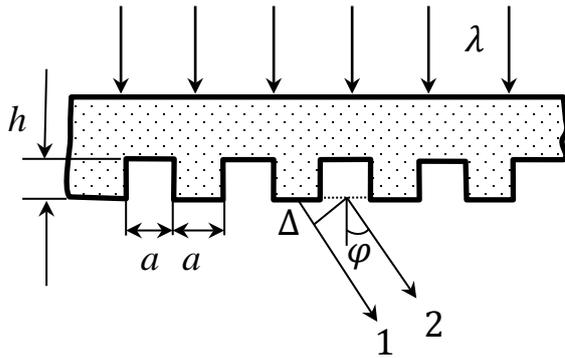


Рис. 16.

**Задача 8.** Прозрачная периодическая структура, профиль которой изображён на рис. 16, освещается плоской монохроматической волной, падающей нормально на верхнюю границу структуры. Ширины уступов и впадин структуры одинаковы. При

заданном показателе преломления  $n$  подобрать глубину уступа  $h$  таким образом, чтобы главные френгоферовы дифракционные максимумы первого порядка имели наибольшую интенсивность. Под каким углом при этом наблюдается дифракционный максимум первого порядка? Какова при этом интенсивность максимума нулевого порядка?

**Решение.** Структура представляет собой, так называемую *фазовую дифракционную решётку*. Её действие можно представить в виде суперпозиции действий двух амплитудных решёток. У одной амплитудной решётки закрыты все выступы, а у другой – все впадины. Тогда период каждой такой амплитудной решётки  $d = 2a$ . Из условия (8) для дифракционных максимумов первого порядка найдём  $\sin\varphi = \lambda/2a$ .

Волны 1 и 2 от соседних «щелей» наших амплитудных решёток должны быть синфазны, чтобы обеспечить максимальную интенсивность в направлении  $\varphi$ . Синфазность обеспечивается при выполнении условия для разности хода лучей 1 и 2:

$$\Delta + (n - 1)h = m\lambda, \text{ где } \Delta = a\sin\varphi.$$

Учитывая, что  $\sin\varphi = \lambda/2a$ , можем записать:  $\lambda/2 + (n - 1)h = m\lambda$ . Откуда получим:

$$h = \frac{(2m - 1)\lambda}{2(n - 1)} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Если  $\varphi = 0$ , то разность хода волн от соседних «щелей»:

$$(n - 1)h = (n - 1) \frac{(2m - 1)\lambda}{2(n - 1)} = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda.$$

В этом случае волны будут находиться в противофазе и «погасят» друг друга. Интенсивность дифракционного максимума нулевого порядка окажется равной нулю.

Задача 9. Свет с длиной волны  $\lambda = 530$  нм падает на амплитудную решётку под углом  $\theta = 60^\circ$ . Период решётки 1,5 мкм. Найти угол с нормалью к решётке, под которым образуется фраунгоферов максимум наибольшего порядка.

Решение. При нормальном падении света на дифракционную решётку разность хода лучей 1 и 2 от соседних щелей  $\Delta = d \sin \varphi$  (см. рис. 17). При выполнении условия  $\Delta = m\lambda$ , волны будут синфазны, и в направлении  $\varphi$  будет наблюдаться интерференционный максимум. Именно это условие и обеспечивается формулой (8).

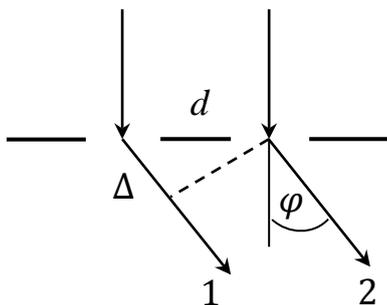


Рис. 17.

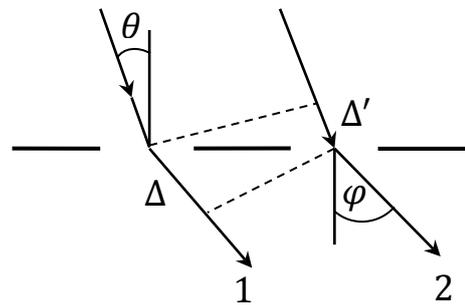


Рис. 18.

В случае наклонного (под углом  $\theta \neq 0$ ) падения света на решётку разность хода волн, падающих на соседние щели  $\Delta' = d \sin \theta$ . Тогда общая разность хода между продифрагировавшими в направлении  $\varphi$  лучами 1 и 2 определится как  $\Delta - \Delta'$  (см. рис. 18).

Синфазность волн от соседних щелей будет обеспечена при выполнении условия:  $\Delta - \Delta' = m\lambda$ .

Таким образом, при наклонном падении света на решётку условие главных дифракционных максимумов запишется в виде:

$$d(\sin\varphi - \sin\theta) = \pm m\lambda. \quad (11)$$

Максимум нулевого порядка будет наблюдаться при  $\varphi = \theta$ .

Следует обратить внимание на правила знаков углов в формуле (11). Углы, отсчитываемые по часовой стрелке, будем считать положительными. Тогда углы, отсчитываемые против часовой стрелки, будут отрицательными.

Угол дифракции  $\varphi$  не может превышать  $\pm 90^\circ$ . Максимальный наблюдаемый порядок дифракции найдём из (10):

$$m = (-1 - \sin\theta)d/\lambda.$$

Подставляя данные задачи, получим  $m = -5,28$ . Округляем это значение до целого числа (обязательно в сторону меньших значений). Получим  $m = -5$ . Это значение следует подставить в формулу (11).

$$\sin\varphi = \sin\theta - 5\lambda/d, \text{ откуда получим } \varphi = -64,2^\circ.$$

### **Дифракционная решётка как спектральный прибор**

Как следует из (8), положение дифракционного максимума любого порядка (кроме  $m = 0$ ) зависит от  $\lambda$ . Поэтому дифракционная решётка может использоваться для проведения спектрального анализа излучения.

Возможности дифракционной решётки как спектрального прибора можно оценить с помощью *угловой дисперсии* и разрешающей способности (*спектрального разрешения*) решётки. (12)

Угловой дисперсией вообще любого спектрального прибора называют величину  $D = d\varphi/d\lambda$ , которая показывает, насколько сильно меняется угловое положение спектральной линии с изменением длины волны.

В случае амплитудной решётки угловое положение дифракционных максимумов определяется выражением (8). Продифференцируем его

$$\frac{d}{d\lambda}(d\sin\varphi = m\lambda) \text{ и получим: } d\cos\varphi \frac{d\varphi}{d\lambda} = m.$$

Таким образом, угловая дисперсия амплитудной решётки:

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}$$

С помощью угловой дисперсии можно оценить насколько сильно по углу дифракции  $\varphi$  будут разделены максимумы одного порядка  $m$ , соответствующие спектральным линиям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$\Delta\varphi = D \cdot \Delta\lambda, \text{ где } \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1. \quad (13)$$

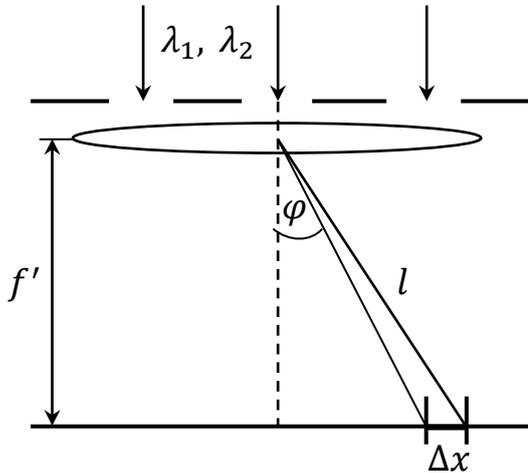


Рис. 19.

Задача 10. Свет, содержащий две спектральные линии с длинами волн  $\lambda_1 = 534$  нм и  $\lambda_2 = 540$  нм, падает нормально на дифракционную решётку. Постоянная решётки  $d = 1$  мкм. За решёткой расположена линза и в фокальной плоскости линзы, на расстоянии  $f = 50$  см

– экран. Найти расстояние  $\Delta x$  на экране между дифракционными максимумами первого порядка для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Решение. Угловое расстояние между дифракционными максимумами найдём по формулам (12), (14):

$$\Delta\varphi = \frac{m\Delta\lambda}{d\cos\varphi}, \text{ где } \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Как видно из рис. 19,  $\Delta x = l \cdot \Delta\varphi$ , где  $l = f/\cos\varphi$ .  $\cos\varphi = \sqrt{1 - (m\lambda/d)^2}$ .

Таким образом, окончательно получим (учитывая, что  $m = 1$ ):

$$\Delta x = \frac{f \cdot \Delta\lambda}{d(1 - (\lambda/d)^2)} = 4,2 \text{ мм.}$$

Разрешающая способность  $R$  характеризует возможности спектрального прибора разделить идентифицировать две близкие спектральные линии  $\lambda_1 = \lambda$  и  $\lambda_2 = \lambda + \delta\lambda$ .

$$R = \lambda/\delta\lambda,$$

где  $\delta\lambda$  – минимальная разность длин волн двух спектральных линий, определяемая по критерию Рэлея.

Задача 11. Параллельный пучок лучей падает на амплитудную решётку, содержащую  $N$  щелей. Излучение содержит две близкие спектральные линии  $\lambda_1 = \lambda$  и  $\lambda_2 = \lambda + \delta\lambda$ . Используя критерий Рэля вывести формулу  $R = \lambda/\delta\lambda = mN$  для разрешающей способности решётки.

Решение. На рисунке 20 приведён пример предельного разрешения по критерию Рэля для двух дифракционных максимумов порядка  $m$ , когда максимум для длины волны  $\lambda_1$  совпадает с минимумом для длины волны  $\lambda_2$ .

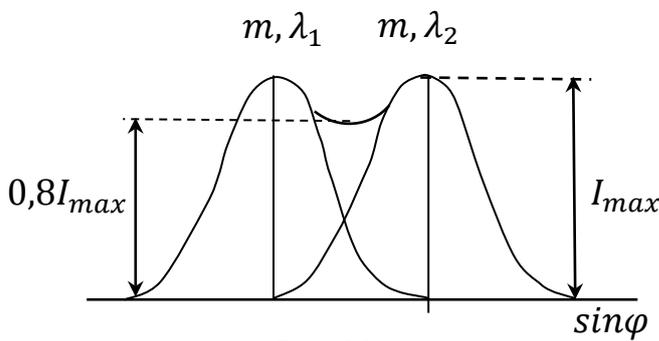


Рис. 20.

Условие максимума  $m$ -го порядка для длины волны  $\lambda_2$ :

$$d \sin \varphi = m(\lambda + \delta\lambda).$$

Условие минимума, ближайшего справа к максимуму  $m$ -го порядка для длины волны  $\lambda_1$  (см. (10)):

$d \sin \varphi = \left(m + \frac{1}{N}\right) \lambda$ . Приравнивая синусы обоих выражений, получим:

$$m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right) \lambda. \quad \text{Из этого равенства следует, разрешающая}$$

способность дифракционной решётки:

$$R = \lambda/\delta\lambda = mN. \quad (14)$$

Задача 12. Свет падает нормально на дифракционную решётку ширины  $l = 65$  мм. Постоянная решётки  $d = 5$  мкм. Исследуемый спектр содержит спектральную линию  $\lambda = 670,8$  нм, которая состоит из двух компонент, отличающихся на  $\delta\lambda = 0,015$  нм. Найти:

- а) в каком порядке спектра эти компоненты будут разрешены;
- б) наименьшую разность длин волн, которую может разрешить эта решётка в области  $\lambda \approx 670$  нм.

Решение. Число щелей решётки  $N = l/d$ . Из формулы (13) следует:

$$m = \frac{\lambda}{\delta\lambda \cdot N} = \frac{\lambda \cdot d}{\delta\lambda \cdot l} = 3,44.$$

Разрешающая способность решётки увеличивается с ростом порядка дифракционного максимума (см. (13), где  $m$  – целое число). Поэтому указанные компоненты спектральной линии будут разрешены, начиная с порядка  $m = 4$ .

Из (8) следует, что максимальное значение  $m$  определяется условием  $m \leq d/\lambda$ . Исходя из числовых данных задачи, получим  $m \leq 7,45$ . Таким образом, максимальное значение  $m_{max} = 7$  (угол дифракции  $\varphi < 90^\circ$ ).

$$\delta\lambda_{min} = \frac{\lambda}{m_{max} \cdot N} = \frac{\lambda \cdot d}{m_{max} \cdot l} = 7,4 \text{ пм.}$$

### Рассеяние света

*Рассеянием* называют изменение количественных характеристик потока оптического излучения при его взаимодействии с веществом. В результате рассеяния может измениться:

- а) пространственное распределение интенсивности (при распространении в среде параллельного пучка появляется излучение в боковых направлениях);
- б) частотный спектр (возникает излучение с другой частотой  $\omega'$ , как большей, так и меньшей частоты  $\omega$  исходного излучения  $\omega' = \omega \pm \Delta\omega$ );
- в) поляризация света.

Строгое объяснение рассеяния возможно в рамках квантовой электродинамики и квантовых представлений о строении вещества. В этом случае рассеяние рассматривается как процесс поглощения веществом фотона с энергией  $\hbar\omega$ , импульсом  $\hbar\mathbf{k}$  и определённой поляризацией и испускание в общем случае другого фотона с энергией  $\hbar\omega'$ , импульсом  $\hbar\mathbf{k}'$  и иной поляризацией.

Если  $\omega' = \omega$  – рассеяние называют упругим, если  $\omega' \neq \omega$  – говорят о неупругом рассеянии.

В курсе оптики рассмотрим *только упругое рассеяние на неоднородностях среды*.

Многочисленные опытные данные свидетельствуют о том, что свет в оптически однородной среде распространяется прямолинейно. При появлении в среде неоднородностей параллельный пучок лучей рассеивается – наблюдается излучение в различных направлениях. Эти неоднородности могут иметь различную природу и размеры. Например, рассеяние на твёрдых частицах пыли в воздухе (дымы), рассеяние на мелких каплях воды в воздухе (туман), и т. д. Рассеяние происходит и тогда, когда сами неоднородности имеют размеры значительно меньше длины волны света и поэтому недоступны прямому наблюдению. Среды с достаточно большой концентрацией таких неоднородностей называются мутными.

Основные закономерности рассеяния света в мутных средах были впервые исследованы Тиндалем в 1869 году. Схема его опытов приведена на рисунке 21.

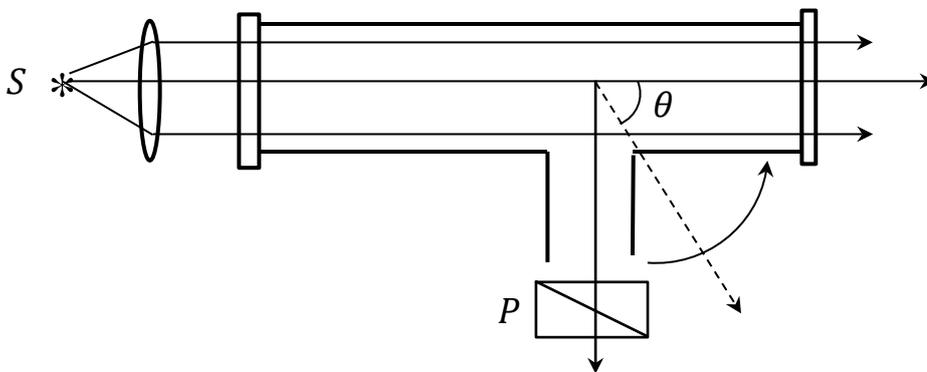


Рис. 21. Схема опытов Тиндаля.

Интенсивный пучок неполяризованного белого света от источника  $S$  пропускаться вдоль оси стеклянной трубки с рассеивающим веществом, размеры неоднородностей в котором составляли  $\sim 0,1\lambda$ . Исследовалась интенсивность излучения, рассеянного под различными углами  $\theta$  и степень его поляризации (с помощью анализатора  $P$ ). Было установлено:

1. Свет, рассеянный в боковом направлении обнаруживает синеголубой оттенок, т. е. сильнее рассеивается излучение с большими частотами;

2. Свет, рассеянный под прямым углом к первичному пучку линейно поляризован;

3. Зависимость интенсивности рассеянного излучения от угла рассеяния определяется выражением:

$$I_{\theta} = I_{\pi/2}(1 + \cos^2 \theta)$$

( $I_{\pi/2}$  – интенсивность излучения рассеянного под углом  $\pi/2$ ).

Объяснение указанным закономерностям дал Рэлей в 1889 году (поэтому рассеяние на неоднородностях размером  $\sim 0,1\lambda$  называют *Рэлеевским рассеянием*).

Рэлей пришёл к выводу о том, что с физической точки зрения рассеяние представляет собой дифракцию света на хаотически распределённых неоднородностях среды. Он теоретически рассмотрел распространение света в сплошной среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_0$ , в которую хаотически вкраплены сферические частицы (размером существенно меньше  $\lambda$ ) с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Было получено выражение для интенсивности рассеянного света (приводим с точностью до постоянного множителя):

$$I_{\theta} \sim I_0 \frac{NV^2}{L^2 \lambda^4} \cdot \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \right)^2 \cdot (1 + \cos^2 \theta),$$

где  $I_0$  – интенсивность первичного излучения;  $N$  – число неоднородностей в единице объёма;  $V$  – объём неоднородности;  $L$  – расстояние от неоднородностей до точки наблюдения.

Это выражение верно описывает как сильную частотную зависимость ( $\sim 1/\lambda^4$ ) так и угловое распределение интенсивности рассеянного излучения.

### **Молекулярное рассеяние света**

Как указано выше, рассеяние возникает при появлении неоднородностей в среде. Но в то же время было установлено, что тщательно очищенные от всевозможных примесей газы и жидкости всё-таки слабо рассеивают свет. Дело в том, что из-за теплового движения атомов и молекул в веществе возникают флуктуации плотности в малых объёмах  $\sim 0,1\lambda$ . Так как флуктуации плотности обусловлены молекулярно-кинетической природой строения вещества, то рассеяние на таких неоднородностях называют *молекулярным рассеянием*.

Молекулярное рассеяние очень слабое, например, при прохождении 1 см воздуха доля рассеянного излучения составляет  $2 \cdot 10^{-7}$ . Интенсивность молекулярного рассеяния растёт с ростом температуры.

Молекулярным рассеянием объясняется голубой цвет неба. По закону Рэлея голубые и синие лучи рассеиваются сильнее и именно это рассеянное излучение мы видим, когда смотрим на небо. Рассеянием объясняется ярко-красный цвет Солнца на закате. В этом случае солнечные лучи проходят наиболее толстый слой воздуха и частично теряют сине-фиолетовую часть спектра излучения Солнца. Излучение Солнца, доходящее до наблюдателя, получает дополнительную (красную) окраску.