

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА:  
ЧАСТЬ 1. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

Практикум для вузов

Составители:  
В.И. Кукуев,  
В.В. Чернышев,  
И.А. Попова.

ВОРОНЕЖ  
2009

Утверждено научно-методическим советом физического факультета  
22 января 2009 года, протокол № 1.

Практикум подготовлен на кафедре общей физики физического факультета  
Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов физического факультета 1 курса д/о и 2 курса  
в/о. Для специальностей: 010701 (010400) – Физика, 010803 (014100) –  
Микроэлектроника и полупроводниковые приборы, 010801 (013800) –  
Радиофизика и электроника.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА  
МЛ-1/1

**ИЗУЧЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ**

Цель работы – определение декремента, логарифмического декремента и коэффициента затухания крутильных колебаний тела при наличии линейного сопротивления среды.

ТЕОРИЯ МЕТОДА

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, совершающую малые колебания при наличии в среде вязкого трения. Колебания в такой среде со временем затухают. Силы вязкого трения, вообще говоря, довольно сложным образом зависят от скорости, однако, во многих случаях, когда скорость движения тела достаточно мала, можно считать, что сила сопротивления зависит от скорости линейно. Обозначив через  $x$  смещение тела из положения равновесия и, учитывая, что возвращающая сила равна  $-kx$ , можно уравнение движения тела записать следующим образом:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \quad (1)$$

где  $r$  – коэффициент сопротивления среды. Вводя обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad , \quad \delta = \frac{r}{2m} \quad , \quad (2)$$

перепишем уравнение (1) в виде

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad . \quad (3)$$

Решение линейного дифференциального уравнения (3) в случае малого трения ( $\delta < \omega_0$ ) имеет вид (прделайте это решение сами)

$$x = a_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \alpha) \quad , \quad (4)$$

где  $a_0$  и  $\alpha$  – постоянные, определяемые из начальных условий, а величина  $\omega$  равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad . \quad (5)$$

Движение, подчиняющееся закону (3), можно лишь условно рассматривать как периодическое с частотой (5) и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}, \quad (6)$$

так как амплитуда колебаний уменьшается со временем по экспоненциальному закону

$$a = a_0 e^{-\delta t}. \quad (7)$$

Из последнего выражения виден смысл постоянной  $a_0$  – это амплитуда колебания в начальный момент  $t = 0$ . Вторая постоянная  $\alpha$  в законе движения (4), очевидно, имеет смысл начальной фазы затухающего колебания.

Величина  $\delta$ , имеющая размерность  $\text{с}^{-1}$ , называется коэффициентом затухания. Из формулы (7) следует, что коэффициент затухания обратен промежутку времени  $\tau$ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e \approx 2,73$  раза. Величина  $\tau$  называется временем релаксации. Таким образом, коэффициент затухания обратен времени релаксации:

$$\delta = \frac{1}{\tau}. \quad (8)$$

В этом состоит физический смысл коэффициента затухания.

Кроме коэффициента затухания  $\delta$  и времени затухания  $\tau$ , можно ввести еще несколько удобных характеристик процесса затухания. Отношение двух последовательных амплитуд, разделенных во времени одним периодом, называется декрементом  $D$  затухания колебаний:

$$D = \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{a_0 e^{-\delta t}}{a_0 e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}. \quad (9)$$

Ясный физический смысл имеет натуральный логарифм  $\Theta$  этого отношения, называемый логарифмическим декрементом:

$$\Theta = \ln D = \delta T. \quad (10)$$

Действительно, воспользовавшись формулой (8), видим, что

$$\Theta = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \quad (11)$$

где  $N_e$  – число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Величина

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} \quad (12)$$

называется добротностью.

Заметим в заключение, что, если тело совершает крутильные колебания в вязкой среде, следует составить аналогичное (1) уравнение вращательного движения под действием моментов сил упругости и вязкого трения. В итоге уравнение движения и закон движения имеют вид, полностью эквивалентный (3) и (4), изменяются только формулы (2) для собственной частоты  $\omega_0$  и коэффициента затухания  $\delta$ .

## ЭКСПЕРИМЕНТ

Приборы и принадлежности: установка, секундомер, сосуд для жидкости.

Установка (рис.1) состоит из штатива 1, к которому на упругой нити 2 подвешен груз 3, снабженный зеркальцем 4. Груз может совершать вращательное движение относительно оси, совпадающей с нитью. Для отсчета амплитуд служит закрепленная на вертикальной стойке полукруглая шкала 5, на которую попадает свет от осветителя 6, отраженный от зеркала 4. Наклон осветителя можно менять при помощи винта 7. Установить зайчик света на нуль шкалы можно или вращением головки 8, или небольшим поворотом зеркала 4 вокруг своей оси.

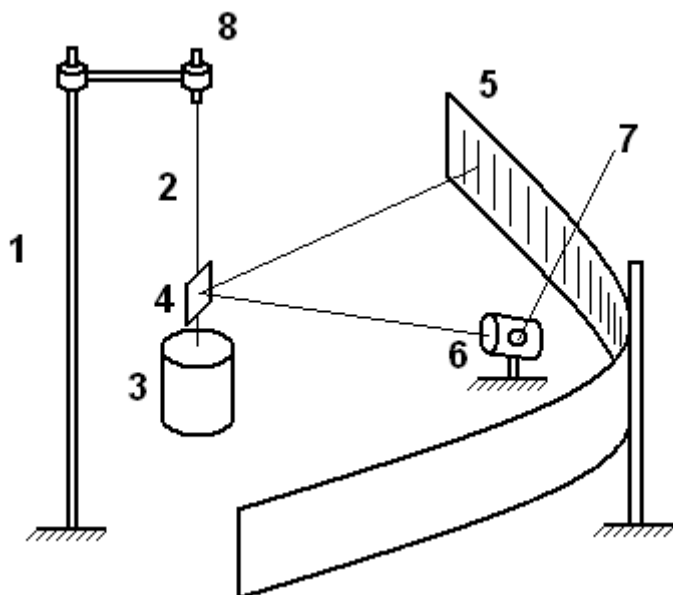


Рис. 1. Установка для изучения затухающих колебаний.

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Включить источник света. Установить световой зайчик на нуль шкалы.

2. Осторожно привести рукой груз 3 во вращательное движение. Когда световой зайчик войдет в пределы шкалы, измерить 5 раз и записать в таблицу 1 время 10 полных колебаний, найти средний период и его погрешность.
3. Проверив установку нуля, снова сообщить грузу вращательное движение и измерить по 7-8 последовательных амплитуд слева и справа, заноса данные в таблицу.
4. Разделив каждую амплитуду на последующую того же знака (формула (9)), получить набор значений декремента затухания  $D$ , заполнить таблицу. Найти  $\langle D \rangle$ , усреднив все полученные значения декремента. Погрешность декремента затуханий можно оценить, рассматривая набор значений  $D$  как результаты прямых измерений (можно применить программу обработки прямых измерений, имеющуюся в лаборатории).
5. По средним значениям  $D$  и  $T$  вычислить логарифмический декремент  $\Theta$  и коэффициент затухания  $\delta$ . Найти их погрешности. Заметим, что в эксперименте чаще всего получается  $E_T \ll E_e$ . Тогда  $E_\delta \approx E_\Theta$  ( $E$  – относительная погрешность).
6. Опустить груз 3 в сосуд с водой так, чтобы зеркальце 4 оставалось над поверхностью воды. Повторит измерения в воде. Число отсчитываемых амплитуд может быть несколько меньшим (5-6).  
Результаты заносятся в таблицу 2, аналогичную таблице 1.
7. В заключение следует представить  $D$ ,  $\Theta$ ,  $\delta$  совместно с их погрешностями для колебаний тела в воздухе и в воде. Сравнить полученные значения, сформулировать выводы.

Таблица 1.

| № | $t$ , с | $\langle T \rangle$ , с | $a$ , см<br>слева | $D$<br>слева | $a$ , см<br>справа | $D$<br>справа | $\langle D \rangle$ | $\langle \Theta \rangle$ | $\langle \delta \rangle$ , с <sup>-1</sup> |
|---|---------|-------------------------|-------------------|--------------|--------------------|---------------|---------------------|--------------------------|--|
|   |         |                         |                   |              |                    |               |                     |                          |  |

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс физики. – М., 1989. - Т.2. – С.264-267.
2. Стрелков С.П. Механика. - М., 1975.-С.432-437.

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Колебания при наличии сил вязкого трения. Уравнение движения и закон движения. Графики зависимостей  $x(t)$  и  $a(t)$ .
2. Частота и период затухающего колебания.
3. Построить уравнение движения для крутильных колебаний тела в вязкой среде, записать закон движения.
4. Основные величины, характеризующие процесс затухания. Физический смысл коэффициента затухания и логарифмического декремента.
5. Методика измерений, их точность. Нахождение погрешностей для  $D$ ,  $\Theta$ ,  $\delta$ .

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОЗДУХЕ

Цель работы – изучение явления интерференции звуковых волн, измерение скорости звука в воздухе методом Квинке.

### ВВЕДЕНИЕ

Если в некотором месте первоначально однородной воздушной среды создать небольшое возмущение плотности или давления, например, сжать воздух, а затем предоставить его самому себе, то сжатая область начнет расширяться, приводя в движение соседние частицы газа, которые, в свою очередь, возмущают частицы, находящиеся за ними, и так далее. Процесс распространения возмущения в сжимаемой среде называется волной. Скорость распространения, как показывает опыт, при малых возмущениях зависит только от физических свойств среды и называется скоростью звука.

В более узком смысле звук представляет собой колебания упругой среды, воспринимаемые нашими органами слуха. Частота звуковых волн лежит в пределах примерно от 10 до 20000 Гц. Так как газы и жидкости обладают лишь объемной упругостью, но не упругостью формы, то звуковая волна в газообразных и жидких средах может быть только продольной.

Рассмотрим простой случай волны, распространяющейся в одном направлении  $Ox$ , например, волну в трубе, наполненной воздухом, создаваемую колеблющимся поршнем. Волновыми поверхностями в этом случае будут, очевидно, плоскости, перпендикулярные к направлению распространения. Такие волны называются плоскими.

Если поршень совершает гармонические колебания с циклической частотой  $\omega$  по закону

$$\xi(t) = a \cos(\omega t),$$

где  $\xi(t)$  – смещение поршня из положения равновесия.

Смещение  $\xi(x, t)$  частиц, находящихся на расстоянии  $x$  от поршня, происходит с запаздыванием на время  $\tau = x/c$ , где  $c$  – скорость звука, необходимая для распространения волны на расстояние  $x$ :

$$\xi(x, t) = a \cos \omega(t - \tau) = a \cos \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) = a \cos(\omega t - kx) = a \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right). \quad (1)$$

Здесь  $\lambda$  – длина волны,  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$  – волновое число. Выражение (1) в любой из написанных выше форм задает закон движения частиц воздуха в трубе при прохождении в ней плоской синусоидальной волны.

Если в среде распространяются несколько волн одновременно, то каждая частица участвует в нескольких колебательных движениях. Волны называются когерентными, если они имеют одинаковую длину и постоянную разность фаз. При наложении когерентных волн в пространстве возникает



устойчивое, не меняющееся со временем распределение интенсивности звука: в каждой точке имеет место либо усиление, либо ослабление громкости. Такое явление называется интерференцией.

Согласно принципу суперпозиции, при интерференции двух плоских когерентных волн суммарное смещение произвольной частицы среды может быть представлено в виде

$$\xi(x, t) = a_1 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1) + a_2 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_2), \quad (2)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  – амплитуды складывающихся колебаний,  $x_1$  и  $x_2$  – расстояния от первого и второго источников волн до наблюдаемой частицы.

Можно показать, что амплитуда  $a$  результирующего колебания определяется амплитудами  $a_1$  и  $a_2$  и разностью фаз интерферирующих волн согласно формуле

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta)}. \quad (3)$$

Величина  $\Delta = x_1 - x_2$  называется разностью хода волн.

Из формулы (3) легко получить, что максимум результирующей амплитуды наблюдается в тех точках, для которых выполняется условие

$$\Delta = 2n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3... \quad (4)$$

то есть разность хода равна четному числу половолн или целому числу длин волн.

Аналогично, в точках, для которых на разности хода укладывается нечетное количество половолн, наблюдается минимальный уровень звука:

$$\Delta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3... \quad (5)$$

Смысл условий (4) и (5) очевиден: в первом случае волны приходят в точку наблюдения в одинаковых фазах и максимально усиливают друг друга, во втором – в противоположных фазах, происходит максимальное ослабление. При  $a_1 = a_2$  минимальная амплитуда, согласно (3), становится равной нулю (звук в точках минимума вообще не слышен).

Скорость звука в идеальном газе впервые была вычислена Ньютоном, считавшим процесс распространения звука изотермическим. Ньютон не получил удовлетворительного согласия с экспериментом. Хорошее совпадение с опытными данными дает формула Лапласа, показывающего, что волновой процесс в газе следует считать адиабатическим:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu_0}} \quad , \quad (6)$$

Здесь  $T$  – температура газа,  $\mu_0$  – молярная масса,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  – отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме.

При распространении возмущений в упругих твердых телах наблюдаются как продольные волны, связанные с деформацией растяжения-сжатия, так и поперечные, отвечающие деформации сдвига. Скорости распространения этих волн  $c_{\parallel}$  и  $c_{\perp}$  для изотропных тел соответственно равны

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad , \quad c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad , \quad (7)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $E$  – модуль Юнга,  $G$  – модуль сдвига.

Так как  $E$  и  $G$  связаны между собой известным соотношением  $E = 2G(1 + \mu)$ , где  $0 < \mu < 1/2$ ,  $\mu$  – коэффициент Пуассона, то  $E > G$  и  $c_{\parallel} > c_{\perp}$ , что подтверждается на опыте.

## МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ И ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

Приборы и принадлежности: прибор Квинке, звуковой генератор, наушники.

Прибор Квинке (рис.1) состоит из двух коленчатых металлических трубок, одна из которых неподвижна, а длина другой может изменяться за счет выдвигания подвижного колена. Для измерений удлинения трубки служит вертикальная шкала (Ш) и указатель, соединенный с подвижной частью трубки. Волны от звукового генератора (ЗГ) распространяются по обеим трубкам и складываются в точке А. Если длины трубок не равны друг другу, возникает разность хода  $\Delta$ , в зависимости от которой в наушниках прослушивается усиление или ослабление звука. Так как в нашем случае амплитуды складывающихся колебаний одинаковы, то в точках минимума результирующая амплитуда равна нулю, то есть звук вообще не слышен. Поэтому установку прибора удобно производить на минимум звука, отмечая при этом по шкале соответствующее положение  $l$  указателя.

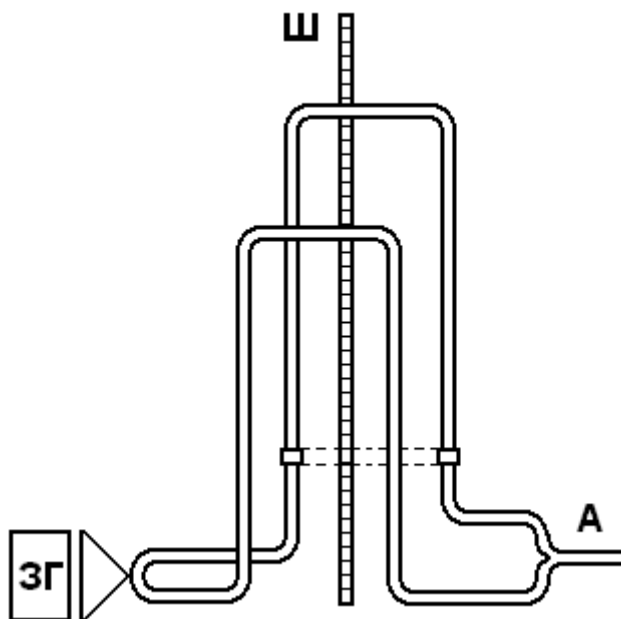


Рис. 1. Прибор Квинке для определения скорости звука в воздухе.

Запишем согласно формуле (5), условие первого ( $n = 0$ ) минимума:

$$\Delta = \frac{\lambda}{2} .$$

С другой стороны, разность хода, очевидно, связана с величиной  $l$  соотношением

$$\Delta = 2l .$$

Используя формулу, связывающую длину волны  $\lambda$  со скоростью звука  $c$  и частотой  $\nu$ , получим окончательно для скорости звука при комнатной температуре

$$c = 4\nu l . \quad (8)$$

## ИЗМЕРЕНИЯ

1. Включить ЗГ, установить его на указанную преподавателем частоту  $\nu_1$ , отрегулировать уровень звука (звук не должен быть слишком громким). Отметить нулевое положение указателя прибора при одинаковой длине трубок.
2. Надеть наушники и, медленно меняя длину подвижной трубки (выдвигая и вдвигая ее), найти положение первого минимума. Измерить соответствующую величину  $l$ , отсчитывая ее от нулевого положения указателя.
3. Повторить опыт 10 раз, записывая данные в заранее подготовленную таблицу.
4. Рассчитать на компьютере среднее значение скорости звука и ее погрешность. Заметим, что при составлении программы расчета

предполагалось, что  $E_v \ll E_l$  и, следовательно,  $E_c \approx E_l$ ,  $E$  – относительная погрешность.

5. Повторить все измерения, описанные в пунктах 1-4, для другой частоты  $\nu_2$  (по указанию преподавателя). Представить результаты измерений совместно с погрешностями, указав температуру воздуха  $T$ , при которой проводились измерения.
6. Привести результаты к  $0\text{ }^\circ\text{C}$ , то есть вычислить скорость звука  $c_0$  при температуре  $T_0=273\text{ K}$ , зная скорость звука  $c$  при температуре  $T$ . Для этого воспользоваться указанной выше температурной зависимостью  $c \sim \sqrt{T}$  (формула (6)). Сравнить  $c_0$  с табличным значением скорости звука в воздухе. Сформулировать выводы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс физики – М., 1989. – Т.2. – С.286 – 295;
2. Стрелков С.П. Механика. – М., 1975.-С.407 – 410; 472 -481.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики / Д.В. Сивухин. – М.: Изд-во МФТИ, 2003. – Т.2: Термодинамика и молекулярная физика. – 576 с.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Волны в сплошной среде, скорость звука.
2. Что такое волновая поверхность? Фронт волны?
3. Плоские волны. Закон движения частиц в плоской синусоидальной волне.
4. Интерференция плоских волн. Формула суммарной амплитуды. Вывод условий максимума и минимума.
5. Характеристики звука: высота, громкость, тембр.
6. Метод Квинке для определения скорости звука в газах. Ход работы, обработка результатов измерений.
7. Как привести результаты к  $0\text{ }^\circ\text{C}$ ?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА  
МЛ-1/3

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОЗДУХЕ  
ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ**

Цель работы – изучение процесса распространения звуковой волны, измерение скорости звука в воздухе при различных температурах и определение отношения теплоемкостей  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$  при постоянных давлении и объеме.

ТЕОРИЯ МЕТОДА

Упругими волнами называются распространяющиеся в упругой среде механические возмущения (деформации). Пусть вдоль однородного цилиндрического образца с площадью поперечного сечения  $S$  распространяется упругая продольная волна. Следовательно, образцом со скоростью  $c$  распространяется относительная деформация  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  (рис. 1). Выделив некоторую часть образца, найдем плотность недеформированной среды:

$$\rho = \frac{m}{Sl}, \quad (1)$$

где  $l$  – длина выделенной части образца.

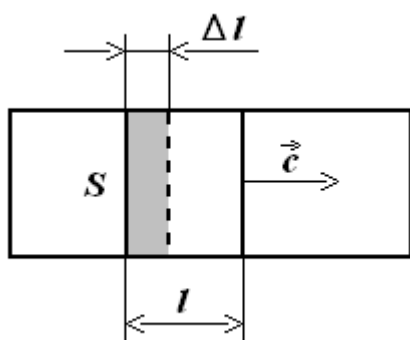


Рис. 1. Схема распространения возмущения вдоль однородного образца.

Сжатию соответствует увеличение плотности, следовательно, плотность в области сжатия

$$\rho + \Delta\rho = \frac{m}{S(l - \Delta l)}. \quad (2)$$

Здесь мы учитываем, что площадь поперечного сечения  $S$  образца не изменяется при распространении продольной волны. В формуле (2) умножим числитель и знаменатель на величину  $(l + \Delta l)$ ;

$$\rho + \Delta\rho = \frac{m(l + \Delta l)}{S(l^2 - \Delta l^2)}.$$

Учитывая, что  $\Delta l^2 \ll l^2$ , получим:

$$\rho + \Delta\rho = \frac{m(l + \Delta l)}{Sl^2} = \frac{m}{Sl} + \frac{m\Delta l}{Sl^2}.$$

Отсюда, учитывая формулу (1), имеем:

$$\rho + \Delta\rho = \rho + \frac{\Delta l}{l},$$

или

$$\Delta\rho = \rho\varepsilon. \quad (3)$$

Распространение возмущения представляет собой движение области сжатия со скоростью  $c$  вдоль образца. За промежуток времени  $dt$  через поперечное сечение пройдет участок сжатия длиной  $dx = cdt$ . Масса этого участка  $dm = \Delta\rho Sdx$ , или, учитывая (3),

$$dm = \rho\varepsilon S c dt.$$

Масса  $dm$  движется со скоростью  $c$  и имеет импульс  $cdm = \rho\varepsilon S c^2 dt$ . Это изменение импульса массы  $dm$  (поскольку до прохождения возмущения эта масса покоилась) по второму закону Ньютона равно произведению действующей на нее силы упругости и времени ее действия. Сила упругости по закону Гука равна

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}. \quad (4)$$

Получаем:

$$F dt = E \varepsilon S dt,$$

где  $E$  – модуль упругости.

Следовательно,

$$\rho \varepsilon S c^2 dt = E \varepsilon S dt,$$

откуда

$$c^2 = \frac{E}{\rho}$$

и скорость распространения продольной упругой волны

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (5)$$

Если упругая волна распространяется в газе, находящемся в гладкой прямолинейной трубе с постоянным поперечным сечением, то, учитывая, что в отличие от твердых тел газы не оказывают сопротивления сдвигу, в них могут возникать только продольные волны, и, следовательно, скорость распространения упругой волны в газе можно вычислить по формуле (5).

Определим величину  $E$  для газа. Если при действии силы  $F$  на некоторый объем газа давление в нем получит прирост  $\Delta p$  по отношению к давлению газа  $p$  в невозмущенном состоянии, то по аналогии с формулой (4)

$$\Delta p = E \frac{\Delta V}{V}.$$

Если считать изменения давления  $dp$  и объема  $dV$  бесконечно малыми, можно записать

$$E = -\frac{dp}{dV/V}, \quad (6)$$

где знак «минус» означает, что увеличение давления соответствует уменьшению объема.

Пусть в газе распространяется звуковая волна, которая представляет собой упругую волну малой интенсивности, способную вызвать ощущение звука, с частотой от 16 до 20 000 Гц. Колебания плотности в звуковой волне происходят так быстро, что теплообмен между слоями газа, имеющими различные температуры, не успевает произойти. Поэтому процесс распространения звуковой волны в газе можно считать адиабатным и к нему можно применить уравнение Пуассона  $pV^\gamma = \text{const}$ . Дифференцируя это уравнение, получим:

$$V^\gamma dp + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0.$$

Откуда

$$\frac{dp}{dV/V} = -\gamma. \quad (7)$$

Из формул (6) и (7) найдем

$$E = \gamma p. \quad (8)$$

Определив  $p$  из уравнения Клапейрона-Менделеева и учитывая, что плотность газа  $\rho = \frac{m}{V}$ , получим:

$$p = \frac{\rho RT}{\mu}.$$

Подставим значение  $p$  в формулу (8), тогда

$$E = \gamma \rho \frac{RT}{\mu}. \quad (9)$$

Подставив соотношение (9) в формулу (5), будем иметь формулу Лапласа для расчета скорости звука в газе:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (10)$$

из которой вытекает

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c^2 \mu}{RT}. \quad (11)$$

Таким образом, для определения отношения теплоемкостей газа  $\gamma$  достаточно измерить его температуру и скорость распространения звука  $c$  в этом газе.

Скорость звука при данной температуре может быть определена резонансным методом. Во время распространения волны вдоль закрытого канала она многократно отражается от торцов, и звуковые колебания в канале – результат наложения этих отраженных волн. Если длина канала  $L$  равна целому числу полувольт  $L = \frac{n\lambda}{2}$  ( $n$  – некоторое целое число,  $\lambda$  – длина волны), то волна, отраженная от торца канала, возвратившись к его началу и снова отражаясь, совпадает по фазе с падающей волной. Такие волны

усиливают друг друга, амплитуда колебаний при этом резко возрастает – наступает резонанс. При звуковых колебаниях слои газа, прилегающие к торцам канала, не испытывают смещения. В этих местах образуются узлы смещения, которые повторяются через  $\lambda/2$  по всей длине канала. Между узлами находятся максимумы смещения (пучности).

Скорость звука  $c$  связана с частотой колебания  $\nu$  и длиной волны  $\lambda$  соотношением  $c = \lambda\nu$ , с учетом которого условие резонанса можно записать в виде

$$2L\nu_0 = nc, \quad (12)$$

где  $\nu_0$  – резонансная частота.

Зависимость (12) резонансной частоты от номера резонанса  $n$  может быть проверена экспериментально. Изменяя частоту колебаний при постоянной длине канала, необходимо построить график зависимости  $\nu_0 = f(n)$ , по угловому коэффициенту которого  $K_a = \frac{c}{2L}$  определяют скорость звука.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Для определения скорости звука в воздухе резонансным методом существует экспериментальная установка ФПТ 1-7, общий вид которой показан на рисунке 2.



Рис. 2. Общий вид экспериментальной установки ФПТ 1-7:  
 1 – блок приборов;  
 2 – блок рабочего элемента;  
 3 – стойка;  
 4 – труба с нагревателем.

Рабочий элемент установки представляет собой стеклянную трубу длиной  $L$ , на торцах которой размещены телефон и микрофон. Температуру воздуха в трубе можно изменять с помощью нагревательной спирали, навитой на трубу. Мощность нагревателя устанавливается регулятором «Нагрев», находящимся на передней панели блока приборов 1. Температура воздуха в трубе измеряется полупроводниковым термометром и регистрируется на цифровом индикаторе «Температура». В блоке приборов расположен генератор звуковых колебаний, подключенный к телефону, возбуждающий звуковые колебания в трубе. Частота колебаний, заданная звуковым генератором, регулируется ручками «Грубо» и «Точно» и регистрируется на цифровом индикаторе «Частота». Сигнал микрофона



измеряется миллиамперметром, чувствительность которого регулируется ручкой «Усиление». Максимальные значения тока, зарегистрированные миллиамперметром во время плавного изменения частоты колебаний, соответствуют появлению резонанса в канале. Длина трубы  $L$  указана на рабочем месте.

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Включить установку тумблером «Сеть».
2. Ручки «Грубо» и «Точно» установить в крайнее левое положение. Ручкой «Усиление» отрегулировать чувствительность миллиамперметра (стрелка должна быть установлена приблизительно на треть шкалы).
3. Плавно увеличивая с помощью ручек «Грубо» и «Точно» частоту колебаний, заданных звуковым генератором, определить частоту 1-го резонанса по небольшому отклонению стрелки на шкале миллиамперметра. Результат измерений занести в таблицу 1.

Таблица 1

| № резонанса | $t_1 = \dots \text{ } ^\circ\text{C}$ |           |          | $t_2 = \dots \text{ } ^\circ\text{C}$ |           |          | $t_3 = \dots \text{ } ^\circ\text{C}$ |           |          |
|-------------|---------------------------------------|-----------|----------|---------------------------------------|-----------|----------|---------------------------------------|-----------|----------|
|             | $\nu_0$ , Гц                          | $c$ , м/с | $\gamma$ | $\nu_0$ , Гц                          | $c$ , м/с | $\gamma$ | $\nu_0$ , Гц                          | $c$ , м/с | $\gamma$ |
|             |                                       |           |          |                                       |           |          |                                       |           |          |

4. Постепенно увеличивая ручкой «Усиление» чувствительность миллиамперметра, определить частоту 2, 3, ..., 7 резонансов. Производя измерения при уменьшении частоты, убедиться в повторяемости результатов. Результаты измерений занести в таблицу 1. Результаты заносить в графу, соответствующую комнатной температуре  $t_1$ .
5. Включить тумблер «Нагрев» и регулятором температуры нагрева достичь температуры воздуха в трубе  $t_2 = 40 \dots 45 \text{ } ^\circ\text{C}$ . После стабилизации температуры произвести измерения по п.п. 2-4.
6. Увеличивая нагрев, достичь температуры воздуха в трубе  $t_3 = 55 \dots 60 \text{ } ^\circ\text{C}$ . После стабилизации температуры произвести измерения по п.п. 2-4.
7. Регулятор температуры нагрева вывести в крайнее левое положение, выключить тумблер «Нагрев», ручки «Усиление», «Грубо» и «Точно» установить в крайнее левое положение, после чего выключить установку тумблером «Сеть».

### ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Построить график зависимости резонансной частоты от номера резонанса  $\nu_0 = f(n)$  для каждой из температур и определить угловой коэффициент  $K_a$  для каждого графика.
2. Для каждого значения температуры воздуха в трубе, используя полученные угловые коэффициенты  $K_a$ , определить скорость звука  $c$  по формуле  $c = 2LK_a$  и отношение теплоемкостей  $\gamma$  по формуле (11), учитывая, что молярная масса воздуха  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

3. Оценить погрешность результатов измерения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики / Д.В. Сивухин. – М. : Наука, 2002. – Т. 2.
2. Савельев И.В. Курс общей физики / И.В. Савельев. – М. : Наука, 2003. – Т. 2.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое упругая волна? Охарактеризуйте процесс распространения упругой волны в газе.
2. Выведите формулу скорости распространения упругой волны.
3. Сформулируйте 1 закон термодинамики. Запишите этот закон для изобарного, изохорного, изотермического и адиабатного процессов.
4. Выведите формулу Майера.
5. Выведите уравнение Пуассона.
6. Что такое адиабатный процесс? Почему процесс распространения звуковой волны в газе адиабатный?
7. Что такое звуковая волна? Выведите формулу скорости звука в газе.
8. В чем заключается резонансный метод определения скорости звука в газе?
9. Почему при распространении звука в закрытом канале могут образовываться узлы и пучности? При каких условиях они образуются?
10. Как изменяется скорость звука в воздухе при изменении температуры?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

МЛ-1/4

### **ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ**

Цель работы – изучение явления биений в системе двух связанных маятников.

### ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему двух одинаковых маятников массы  $m$  и длины  $l$  каждый, связанных между собой легкой пружиной жесткости  $c$ , находящейся на расстоянии  $h$  от точек подвеса маятников (рис.1). Пусть оба маятника

совершают малые колебания в плоскости рисунка, причем при равновесии маятников пружина не деформирована. Для определения положения маятников в любой момент времени достаточно задать две независимые координаты, например, углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  отклонения маятников от положения равновесия. Принято говорить в таких случаях, что система имеет две степени свободы.

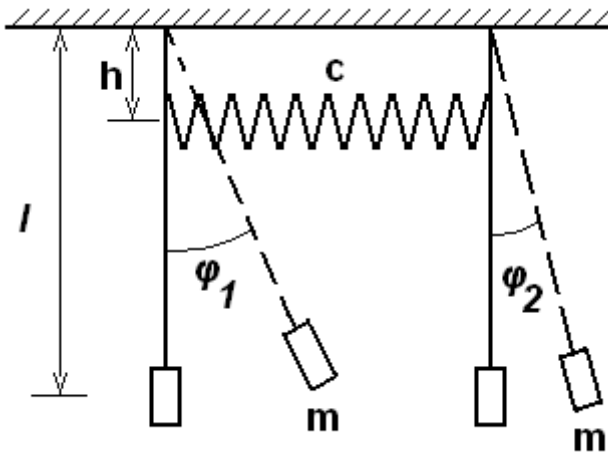


Рис. 1. Система двух связанных маятников

Так как между маятниками существует связь (пружина), то колебания каждого из маятников влияют на колебания другого. Характерной особенностью связанных систем является обмен энергией между частями системы, также обусловленный наличием связи.

Определим закон движения системы двух маятников, считая их математическими. Оба маятника совершают вращательное движение относительно горизонтальных осей, проходящих через точки подвеса. Составим сначала уравнение движения 1-го маятника:

$$J_1 \varepsilon_1 = M_1$$

где  $J_1 = ml^2$  – момент инерции маятника,  $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1$  – его угловое ускорение,  $M_1$  – суммарный момент внешних сил.

Определим величину  $M_1$ . Момент силы тяжести равен, очевидно,  $-mgl \sin \varphi_1$ , или при малых углах отклонения,  $-mgl \varphi_1$ . Кроме того, при деформации пружины возникает упругая сила, пропорциональная величине деформации. Деформация в произвольный момент времени равна  $h\varphi_1 - h\varphi_2 = h(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Следовательно, упругая сила, действующая на первый маятник, может быть написана как  $-ch(\varphi_1 - \varphi_2)$ , а момент этой силы равен  $-ch^2(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Тогда уравнение движения первого маятника запишется следующим образом:

$$ml^2 \ddot{\varphi}_1 = -mgl \varphi_1 - ch^2 (\varphi_1 - \varphi_2) . \quad (1)$$

Рассуждая аналогично, приходим к уравнению движения второго маятника:

$$ml^2\ddot{\varphi}_2 = -mgl\varphi_2 - ch^2(\varphi_2 - \varphi_1) . \quad (2)$$

Систему уравнений (1) и (2) проще всего решить, складывая их левые и правые части, а затем вычитая. Тогда получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} ml^2(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) = -mgl(\varphi_1 + \varphi_2) \\ ml^2(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) = -mgl(\varphi_1 - \varphi_2) - 2ch^2(\varphi_1 - \varphi_2) \end{array} \right\}$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = -\frac{g}{l}(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2ch^2}{ml^2}\right)(\varphi_1 - \varphi_2) \end{array} \right\} . \quad (3)$$

Введем обозначения:

$$\Theta_1 = \varphi_1 + \varphi_2 , \quad \Theta_2 = \varphi_1 - \varphi_2 , \quad (4)$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} , \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2ch^2}{ml^2} . \quad (5)$$

Тогда систему (3) можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\Theta}_1 + \omega_1^2\Theta_1 = 0 \\ \ddot{\Theta}_2 + \omega_2^2\Theta_2 = 0 \end{array} \right. , \quad (6)$$

Таким образом, подстановкой (4) система уравнений (3) преобразована в два независимых линейных уравнения, решение которых хорошо известно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ \Theta_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{array} \right. . \quad (7)$$

Из (7) и (4) получаем для углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \delta_2) , \\ \varphi_2 = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \delta_1) - \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \delta_2) . \end{array} \right. \quad (8)$$

Постоянные  $A_1, A_2, \delta_1, \delta_2$  находятся, как обычно, из начальных условий, которые могут быть различными. Зададим следующие, наиболее простые начальные условия. Пусть в момент времени  $t=0$  первый маятник был

отклонен на угол  $\alpha$ , второй маятник не отклоняется, начальные скорости обоих маятников равны нулю, то есть

$$\varphi_1(0) = \alpha, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \quad (9)$$

Можно легко убедиться в том, что начальным условиям (9) удовлетворяют следующие значения констант:

$$A_1 = A_2 = \alpha, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0.$$

(проверьте это непосредственно подстановкой!). Тогда соотношения (8) переписуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\alpha}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \\ \varphi_2 &= \frac{\alpha}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t). \end{aligned} \quad (10)$$

Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , согласно формулам (5), определяются только собственными параметрами системы ( $m, l, c, h$ ) и не зависят от начальных условий. В соответствии с этим фактом они называются собственными частотами системы. Число собственных частот всегда совпадает с числом степеней свободы системы.

Из соотношений (8) следует, что в общем случае движение каждого маятника не является гармоническим, а представляет собой суперпозицию двух гармонических колебаний с различными частотами. Только в двух частных случаях удастся путем специального подбора начальных условий получить чисто гармонические колебания.

1. В начальный момент оба маятника отклонены в одну сторону на один и тот же угол. Каждый маятник, очевидно, колеблется по гармоническому закону с частотой  $\omega_1$ , причем колебания происходят в одной и той же фазе. Пружина не деформируется и никакого влияния на движение не оказывает.

2. Первоначально маятники отклонены на одинаковые углы, но в разные стороны. Пружина деформируется, однако из симметрии системы и начальных условий ясно, что средняя точка пружины остается неподвижной. Поэтому колебания каждого маятника не влияют на движение другого, и закон движения снова является гармоническим с частотой  $\omega_2$ . Колебания маятников в этом случае противоположны по фазе.

Таким образом, в двух рассмотренных выше случаях (и только в них) колебания гармоничны. Они носят название нормальных колебаний. Частота каждого из нормальных колебаний совпадает с одной из собственных частот. По этой причине собственные частоты иногда называют нормальными частотами. Заметим, что в обоих случаях передача энергии через пружину от одного маятника к другому отсутствует.

Вернемся к закону движения (10). Интересную картину колебаний можно наблюдать, если собственные частоты мало отличаются друг от друга:  $\omega_1 \approx \omega_2 \equiv \omega$  (это случай слабой связи, когда малыми являются или жесткость  $c$  пружины, или отношение  $h/l$ ). По известным формулам тригонометрии уравнения (10) можно переписать следующим образом:

$$\varphi_1 = \alpha \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t ,$$

$$\varphi_2 = \alpha \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t .$$

При этом величина  $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_2)/2$  является малой, а полусумма  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  равна  $\omega$ . Имея это в виду, напомним

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha \cos \varepsilon t \cdot \cos \omega t , \\ \varphi_2 &= \alpha \sin \varepsilon t \cdot \sin \omega t , \end{aligned} \quad (11)$$

причем  $\varepsilon \ll \omega$ , так что  $\cos \varepsilon t$  и  $\sin \varepsilon t$  меняются во времени значительно медленнее, чем  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ . Следовательно, углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  изменяются по почти гармоническому закону с частотой  $\omega$ , но амплитуда этих колебаний медленно меняется во времени также по гармоническому закону с частотой  $\varepsilon$ . Такое явление называется биениями.

При рассмотренных начальных условиях (8) графики функций  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ , согласно (11), имеют вид, изображенный на рисунке 2. Обратим внимание на то, что в моменты времени, когда амплитуда колебаний первого маятника достигает максимума, амплитуда второго равна нулю, и наоборот. Это соответствует перекачке энергии через пружину от одного маятника к другому. Суммарная же энергия всей системы остается постоянной.

Периодом биений  $T_\delta$  принято называть промежуток времени между двумя соседними максимумами или минимумами амплитуды (рис. 2). Заметим, что на самом деле для синусоиды это всего лишь половина периода. В соответствии с этим частотой биений называют не  $\varepsilon$ , а величину, в два раза большую:

$$\omega_\delta = 2\varepsilon = \omega_2 - \omega_1 \quad (12)$$

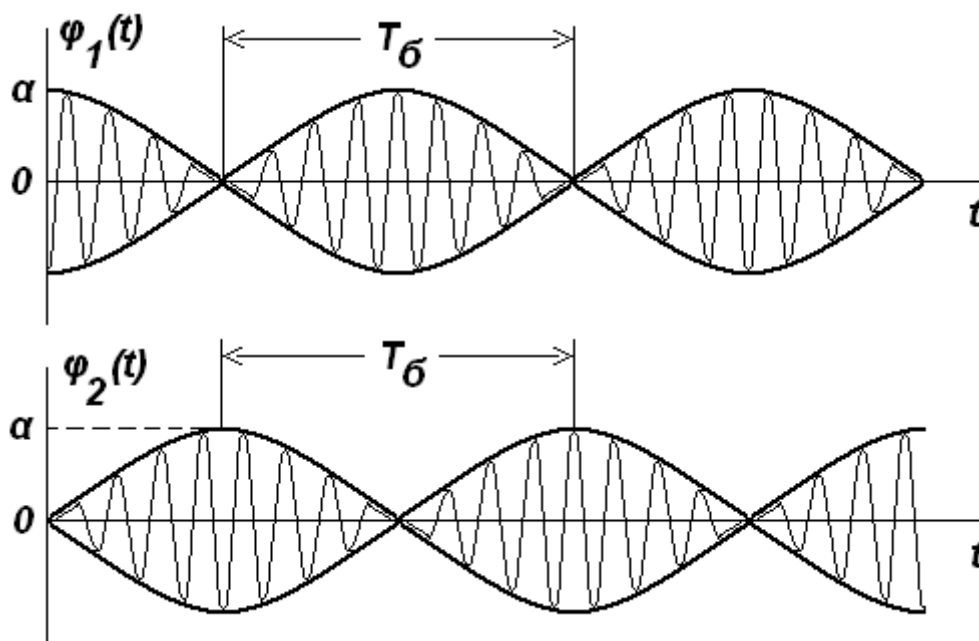


Рис. 2.  
Графическое изображение биений.

Согласно (5)  $\omega_{\delta}$ , а вместе с ней и  $T_{\delta}$  зависят только от параметров системы, но не от начальных условий. Последние же влияют на «глубину» биений, определяя максимальное и минимальное значение амплитуды.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Установка состоит из двух одинаковых маятников, связанных пружиной (рис. 3). Пружину можно передвигать по стержням маятников, закрепляя зажимами на различных делениях, нанесенных на стержнях. Время колебаний измеряется секундомером.

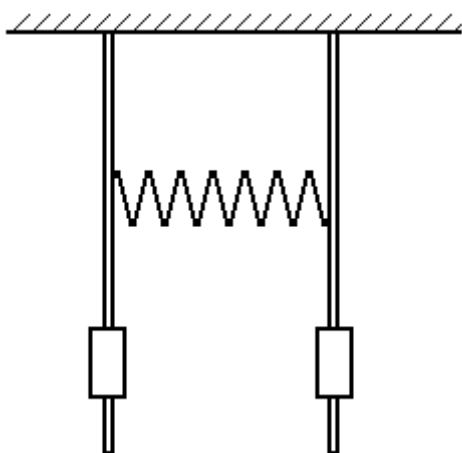


Рис. 3. Схема экспериментальной установки для изучения биений.

#### Задание 1. Измерение собственных частот.

1. Установить пружину на одно из делений, нанесенных на стержнях (по указанию преподавателя).
2. Отклонить маятники на одинаковые углы в одну сторону и отпустить. Измерить секундомером время 30-50 колебаний. Опыт повторить 5 раз. Эти и все последующие данные следует заносить в таблицу.
3. Вычислить средний период и среднюю собственную частоту  $\omega_1$ .
4. Отклонить маятники на одинаковые углы в разные стороны, отпустить, измерить время 30-50 колебаний системы. Повторить 5 раз.
5. Вычислить средний период и среднюю собственную частоту  $\omega_2$ .
6. Оценить погрешности измерений и представить собственные частоты совместно с погрешностями.

#### Задание 2. Измерение частоты биений.

1. Не изменяя положения пружины, отклонить один из маятников на небольшой угол, измерив его по делениям горизонтальной шкалы, второй удерживать в положении равновесия, затем оба отпустить. Наблюдать биения.

2. Измерить период биений как время между двумя последовательными минимумами амплитуд одного из маятников (рис.2). Опыт повторить 5 раз и вычислить среднее значение периода и частоты биений.
3. Проверить соотношение (12), записав совместно с погрешностями по отдельности левую и правую части равенства.

Задание 3. Проверка равенства частот биений при различных углах отклонения маятников.

1. Не меняя положения пружины, отклонить один из маятников (см. предыдущее задание) на другой угол, измерив его по делениям горизонтальной шкалы, и отпустить. Измерить 5 раз период биений и вычислить среднюю частоту биений.
2. В пределах погрешностей измерений показать равенство частот биений, найденных в заданиях 2 и 3.

Задание 4. Изучение зависимости частоты биений от положения пружины.

1. Установить пружину на первое снизу деление стержней маятников.
2. Измерить 5 раз период биений и вычислить их среднюю частоту.
3. Перемещая пружину на 2-е, 3-е, ..., 7-е деления, повторить такие же измерения при каждом положении пружины.
4. Определить с помощью линейки расстояние от точки подвеса маятников до соответствующих делений.
5. Начертить график зависимости частоты биений от расстояния, на котором установлена пружина по отношению к точке подвеса маятников. Сформулировать выводы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Стрелков С.П. Механика. – М., 1975.-С.459-466.
2. Матвеев А.М. Механика и теория относительности. М.: 1966.-С.307-311.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Колебания связанной системы с двумя степенями свободы. Собственные частоты системы, какими факторами они определяются.
2. Нормальные колебания, их особенности. При каких начальных условиях они наблюдаются в системе двух связанных маятников?
3. При каком условии колебания связанной системы представляют собой биения? Что такое период и частота биений?
4. От чего зависит глубина измерения амплитуды при биениях?
5. Изобразите на графике картину биений, если в начальный момент первый маятник был отклонен на угол  $\alpha$ , второй, на угол  $\beta$  ( $\alpha > \beta$ ), начальные скорости равны нулю.